UNIVERSITETET I BERGEN

KANDIDAT

454

PRØVE

MAT111 0 Grunnkurs i matematikk I

Emnekode	MAT111
Vurderingsform	Skriftlig eksamen
Starttid	02.12.2020 08:00
Sluttid	02.12.2020 13:00
Sensurfrist	--
PDF opprettet	02.10.2022 11:18

Seksjon 1

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
1	Egenerklæring	Flervalg
2	Hjelpemidler og kontaktinformasjon	Flervalg

Seksjon 2

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
3	Gjenkjenne derivert og antiderivert	Flervalg
4	Deriverbar?	Filopplasting

Seksjon 3

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
5	Komplekse tall	Filopplasting

Seksjon 4

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
6	Kontinuitet og epsilon-delta	Filopplasting
7	Invers funksjon	Filopplasting

Seksjon 5

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
8	Bilbane	Filopplasting

Seksjon 6

Oppgave	Tittel	Oppgavetype

9	Nullpunkt	Filopplasting

Seksjon 7

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
10	Taylor for integral	Filopplasting

Seksjon 8

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
11	Smitte	Filopplasting

Seksjon 9

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
12	Integrerbar	Filopplasting

Seksjon 10

Oppgave	Tittel	Oppgavetype
13	Fritekst og takk for i år!	Filopplasting

1 Egenerklæring

Egenerklæring

Jeg erklærer på ære og samvittighet at jeg under opplastnings- og eksamenstiden ikke har noen mobilkontakt, samtale eller nettkontakt med andre enn emneansvarlig vedrørende eksamensoppgavene.

Jeg erklærer herved at besvarelsen som jeg leverer er mitt eget arbeid og

- ikke inneholder andres arbeide uten at dette er oppgitt.
- ikke inneholder eget tidligere arbeide uten at dette er oppgitt.
- ikke har vært brukt i en annen eksamen eller vært levert eller publisert ved en annen utdanningsinstitusjon innenlands eller utenlands.
- at litteraturlisten/referanselisten inneholder all litteratur og alle kilder jeg har brukt i besvarelsen og at alle referansene viser til denne listen.

Jeg er kjent med at brudd på disse bestemmelsene er å betrakte som fusk, som fører til annullering av eksamen og opptil ett års utestengelse fra studier.

Dersom du er usikker på om du kan stille deg bak erklæringen, se retningslinjer for bruk av kilder i skriftlige arbeider ved Universitetet i Bergen og eventuelt ta kontakt med din veileder/emneansvarlig.

Alle eksamensbesvarelser ved UiB blir sendt til manuell og elektronisk plagiatkontroll.

Merk: Det er ikke anledning til å levere besvarelser som ikke oppfyller kravene i egenerklæringen.

○ Jeg bekrefter at jeg har lest egenerklæringen, godkjenner denne og at besvarelsen er mitt eget arbeid

2 Hjelpemidler og kontaktinformasjon

Alle hjelpemidler tillatt unntatt samarbeid med andre.

Ved tekniske problemer med Inspera skriv en e-post til studieveileder@math.uib.no.
Ha kandidatnummer og studentnummer klar når du tar kontakt.
Dersom det oppstår et behov for å gi fellesbeskjeder til alle studenter når eksamen pågår, vil det primært brukes kunngjøring i MittUiB.

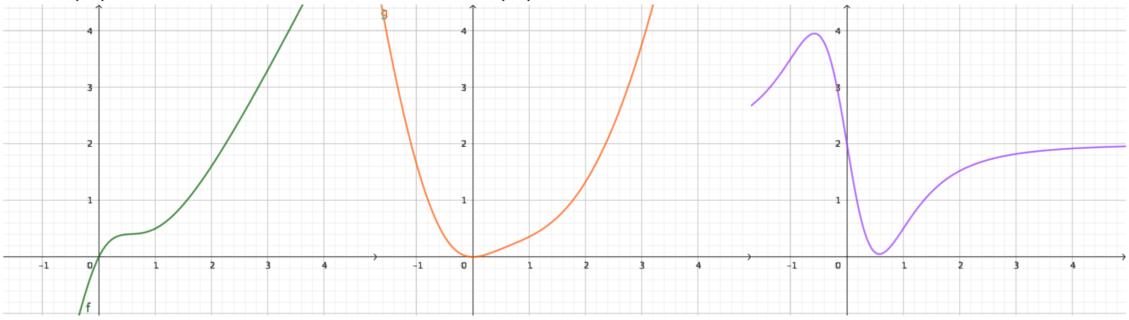
Eksamenstid er kl. 09:00-14:00.
Ekstratid for opplastning av filer: 30 min.

Ved mistanke om alvorlige feil eller uklarheter i eksamenssettet kontakt Dundas på
Telefon: 976 22 576
Epost: dundas@math.uib.no

Jeg har lest og forstått.

3 Gjenkjenne derivert og antiderivert

Under ser du tre grafer. Lengst til venstre (grønn) er grafen $y = f(x)$, så (orange) grafen $y = g(x)$ og til slutt (lilla) grafen $y = h(x)$



En av dei tre funksjonene har egenskapen at de to andre er henholdsvis den deriverte og en antiderivert. Hvilken funksjon er det?

Velg ett alternativ:

- g
- f
- h

4 Deriverbar?

Hva er definisjonen til den deriverte til en funksjon i et punkt?
Finnes det reelle tall a og b slik at funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\tan^{-1}(t)+2t^2}{t} & t > 0 \\ a & t = 0 \\ e^{b\tan^{-1}(t)} & t < 0 \end{cases}$$

blir deriverbar? Hvis så, finn dem.

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned | Fjern | Erstatt

Filnavn:	Oppgave 4.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	255.87 KB
Opplastingstidspunkt:	02.12.2020 12:49
Status:	**Lagret**

5 Komplekse tall

La $z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi\, i}{4}}$. Skriv det komplekse tallet $1/z + z^9$ på normalform (på formen $a + i\, b$).

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	Oppgave 5.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	635.12 KB
Opplastingstidspunkt:	02.12.2020 12:42
Status:	**Lagret**

6 Kontinuitet og epsilon-delta

Bruk definisjonen av kontinuitet og grense ("$\epsilon - \delta$" definisjonen) til å vise at funksjonen $f\colon (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ gitt ved $f(x) = \frac{9}{x}$ er kontinuerlig i $x = 3$.

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	Oppgave 6.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	600.18 KB
Opplastingstidspunkt:	02.12.2020 12:50
Status:	**Lagret**

7 Invers funksjon

Hva vil det si at en funksjon har en invers? Begrunn at funksjonen $f: (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ gitt ved $f(x) = \frac{9}{x}$ har en invers.

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

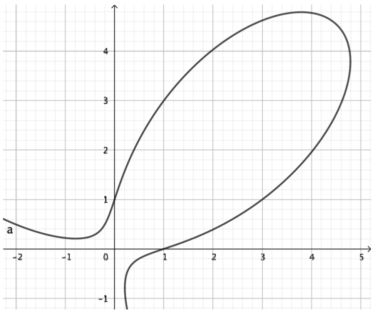
Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	Oppgave 7.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	500.48 KB
Opplastingstidspunkt:	02.12.2020 12:50
Status:	**Lagret**

8 Bilbane

En bil kjører på en vei og posisjonen ved tid t (i timer) er $(x(t), y(t))$ der x og y er to deriverbare funksjoner som tilfredsstiller ligningen

$x(t)^3 + y(t)^3 = 9x(t)y(t) + 1$



(alle avstander i kilometer).

I origo står en fartsmåler. Ved tid $t = 0$ er bilen i punktet $(0, 1)$ og avstanden mellom bilen og fartsmåleren øker med 50 kilometer i timen. Regn ut $x'(0)$.

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	Oppgave 8 ny.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	743.18 KB
Opplastingstidspunkt:	02.12.2020 12:50
Status:	**Lagret**

9 Nullpunkt

a) Begrunn at funksjonen gitt ved $f(x) = x^4 + x - 1$ har nøyaktig ett nullpunkt b i intervallet $(-2, -1)$.
Hva er ligningen til tangenten til grafen $y = f(x)$ i punktet $(-2, f(-2))$? Finn skjæringen mellom x-aksen og tangenten.
Finn en tilnærming til nullpunktet b ved Newton-Raphsons metode med en iterasjon og startverdi $x_0 = -2$.

b) Forklar kort hvorfor Newton-Raphsons metode (for funksjonen gitt ved $f(x) = x^4 + x - 1$ som har nøyaktig ett nullpunkt b i intervallet $(-2, -1)$) med startverdi $x_0 = -2$ vil gi en følge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ med
$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < b$.
I argumentet skal både den første og andre derivert inngå, og det skal være med en klar illustrasjon som viser hvordan du tenker.

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	Oppgave 9.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	2.19 MB
Opplastingstidspunkt:	02.12.2020 12:42
Status:	**Lagret**

10 Taylor for integral

Vi utforsker hvordan Taylor-polynom kan brukes til å beregne integraler som vi ellers ikke vet hvordan vi skal håndtere. Her ser vi på

$\int \sqrt{x} \cdot \cos x \, dx,$

erstatter cos x med polynomet $1 - \frac{x^2}{2}$ og gir et estimat på hvor stor forskjellen mellom

$\int_0^{1/4} \sqrt{x} \cdot \cos x \, dx$

og

$\int_0^{1/4} \sqrt{x} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^{1/4} \left(x^{1/2} - \frac{x^{5/2}}{2}\right) dx = \frac{1}{12} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} = \frac{221}{2688} \approx 0.082217269$

er.

a) Skriv opp Taylors formel om 0 av grad tre, $f(x) = P_3(x) + E_3(x)$, for $f(x) = \cos x$.

b) Vis at om $x \in (0, 1/4]$ så er $\frac{\cos \frac{1}{4}}{24} x^4 < E_3(x) < \frac{1}{24} x^4$ og at
$0.0000035 < \int_0^{1/4} \sqrt{x} \cdot \cos x \, dx - \frac{221}{2688} < \frac{1}{270336} < 0.0000037.$

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	Oppgave 10.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	1.03 MB
Opplastingstidspunkt:	02.12.2020 12:51
Status:	**Lagret**

11 Smitte

Et virus smitter ved kontakt og er du først smittet vil du forbli smittebærer i ubegrenset tid. I en isolert befolkning med P personer (ingen dør eller fødes) er smitteraten ved tid t (i måneder efter 1/1 2020) proporsjonal med produktet av

1. antallet $y(t)$ som *er* smittet,
2. antallet som *ikke er* smittet
3. e^{at} der a er et **negativt** tall som avhenger av smittebegrensende tiltak.

En tiendedel av befolkningen er smittet 1/1-2020.

(a) Still opp differensiallignigen som $y(t)$ må tilfredsstille og løs den (kall proporsjonalitetskonstanten k og husk å forklare hvert steg i løsningen nøye. Er der f.eks. en konstant løsning?).

(b) Finn en sammenheng mellom $L = \lim_{t\to\infty} y(t)$, a, P og k. Hva kan du si om L når $|a|$ er svært liten? Hva kan du si om L når $|a|$ er svært stor?

Din fil ble lastet opp og lagret i besvarelsen din.

Last ned Fjern Erstatt

Filnavn:	Oppgave 11.pdf
Filtype:	application/pdf
Filstørrelse:	2.1 MB
Opplastingstidspunkt:	02.12.2020 13:20
Status:	**Lagret**

12 Integrerbar

La $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være en voksende funksjon, la
$\mathcal{P} = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1\}$ være en partisjon og la
$\Delta_{\max} x = \max_{k=1,\ldots,n}\{x_k - x_{k-1}\}$ (kalt "normen" til $\mathcal{P}$ i kapittel 5.3 i boken).
Forklar kort hvorfor forskjellen mellom øvre og nedre Riemannsum er mindre eller lik
$(f(1) - f(0))\Delta_{\max} x$
(dette er første steg på vei til å vise at funksjonen er integrerbar).
Gode illustrasjoner med kort og klar tekst vil gi god uttelling.

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

13 Fritekst og takk for i år!

Var det noe som du synes du bør utdype nærmere (f.eks. hvordan du tenkte da du svarte på envalgsoppgaven) eller som du vil kommentere om oppgavene på settet. Skriv det her!

Last opp filen her. Maks én fil.

Følgende filtyper er tillatt: **.jpg,.png,.pdf** Maksimal filstørrelse er **2 GB**.

Velg fil for opplasting

Håper du har hatt et godt og lærerikt semester, selv om jo alt ble litt anderledes enn vi hadde planlagt.
Lykke til videre og håper du får masse bruk for det du har lært i MAT111. Prøv å holde det ved like. Husk at ingen tror de har bruk for det de ikke kan. Vi trenger folk med analytiske ferdigheter og kunnskaper som støtter opp om disse i nesten alle deler av samfunnet.

Hilsen Bjorn

10 a) Taylors formel av grad 3. vil se slik ut:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3$$

i våres tilfelle er $a = 0$

siden $f(x) = \cos x$ får vi:

$$\cos x = \cos(0) + \cos'(0) \cdot x + \frac{\cos''(0) \cdot x^2}{2} + \frac{\cos^{(3)}(0) \cdot x^3}{6}$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\cos''(x) = -\cos(x)$$

$$\cos^{(3)}(x) = \sin(x)$$

$$\cos x = \cos(0) - x\sin(0) - \frac{\cos(0)x^2}{2} + \frac{x^3 \sin(0)}{6}$$

$$= 1 - x \cdot 0 - \frac{x^2 \cdot 1}{2} + \frac{x^3 \cdot 0}{6}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2}$$

Solution. This is also of type [0/0]. We begin by ...

(11) $t_0 = \frac{1}{10} P$

$$g'(t) = k \cdot g(t)\,(P - g(t))\, e^{at}$$

Setter $P = 1$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k e^{at} (y(t) - 1)\, y(t)$$

Dela på $-(y(t)-1)\,y(t)$

$$\int -\frac{\frac{dy(t)}{dt}}{(y(t)-1)\,y(t)} = \int k e^{at}$$

$$\int -\frac{1}{(y-1)y}\,dy = k \int e^{at}\,dt$$

$$-\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \frac{k}{a} \int e^{u}\,du$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{y-1}\,dy = \frac{k e^{u}}{a} + C$$

$$\log(y) - \int \frac{1}{u}\,du = \frac{k e^{at}}{a} + C$$

$$\log(y) - \log(y-1) + C = \text{—''—}$$

$$\log\left(\frac{y}{y-1}\right) + C = \frac{k e^{at}}{a} + C$$

$$\log(y(t)) - \log(1-y(t)) = \frac{e^{at}k}{a} + C_1$$

$$\log\left(\frac{y(t)}{1-y(t)}\right) = \frac{e^{at}k}{a} + C_1$$

$$\frac{y(t)}{1-y(t)} = e^{\left(\frac{e^{at}k}{a} + c\right)}$$

$$y(t) = e^{\frac{e^{at}k}{a} + C_1}(1-y(t))$$

$$y(t) = e^{\frac{e^{at}k}{a} + C_1} - e^{\frac{e^{at}k}{a} + c}\, y(t)$$

$$y(t)\left(e^{\frac{e^{at}k}{a} + C_1} + 1\right) = e^{\frac{e^{at}k}{a} + C_1}$$

$$y(t) = \frac{e^{\frac{e^{at}k}{a} + C_1}}{e^{\frac{e^{at}k}{a} + C_1} + 1}$$

(4) Definisjonen av den deriverte sier at

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

og når $f'(x)$ går mot et punkt vil:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

⑤

$$z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \underline{-1 + i}$$

Broker Moivre's

↓

$$z^9 = \sqrt{2}^9\left(\cos\left(9\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(9\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}^9\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -16 + 16i$$

$$\frac{1}{z} + z^9 = \underline{\frac{1}{i-1} + (16i - 16)}$$

Ganger bröken med konjugatet

$$\frac{i+1}{-2} + 16i - 16 = -\frac{i+1}{2} + \frac{32i}{2} - \frac{32}{2} = \underline{\frac{-i-1+32i-32}{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{31i - 33}{2}}}$$

(6) $f(x) = \frac{9}{x}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{9}{x}$$

La $\varepsilon > 0$ slik at $\left|\frac{9}{x}\right| < \varepsilon$

hvis vi finner et tall δ slik at $0 < |x-3| < \delta$

vil vi bevise grensen

$$\left|\frac{9}{x}\right| < \varepsilon$$

$$\left|9 \cdot \frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

$$9 < \varepsilon x$$

$$0 < \varepsilon x - 9$$

$$-\frac{\varepsilon}{3} < |x-3|$$

nummeret vi letter etter er $\delta = -\frac{\varepsilon}{3}$

Så grensen eksisterer

⑦ vi går i mot 0 fra begge sider

$$f(x_1) = \lim_{x \to 0^-} \frac{a}{x} = -\infty$$

$$f(x_2) \lim_{x \to 0^+} \frac{a}{x} = \infty$$

siden $f(x_1) \neq f(x_2)$

som betyr at funksjonen $f(x)$ er 1:1

En invers funksjon vil ha egenskaper at

hvis vi har en funksjon $f(x)$ og den inverse

som er g så vil $g(f(x)) = x$

(8) $x(t)^3 + y(t)^3 = 9x(t)y(t) + 1$

i punktet $(0,1)$ vil avstanden som øker mellom bil og maler kun være påvirket i y retning

Derfor vil $y'(0) = 50$

Vi har også $x(0) = 0$ og $y(0) = 1$

Deretter deriverer vi ligningen

$$3x(t)^2 \cdot x'(t) + 3y(t)^2 \cdot y'(t) = 9(y(t)x'(t) + x(t)y'(t))$$

Setter så inn ved $t = 0$

$$3 \cdot 0^2 \cdot x'(0) + 3 \cdot 1^2 \cdot 50 = 9(1 \cdot x'(0) + 0 \cdot 50)$$

$$150 = 9x'(0)$$

$$9x'(0) = 150$$

$$x'(0) = \frac{50}{3} = 16.\overline{66}$$

9 a)

$f(x) = x^4 + x - 1$

Vi ser for verdiene -2 og -1

$f(-2) = (-2)^4 + (-2) - 1 = 13$

$f(-1) = (-1)^4 + (-1) - 1 = -1$

Da har vi at $f(-2) > 0$ og $f(-1) < 0$

Ved skjæringssetningen vil dette bety at intervallet har minst ett punkt

$f'(x) = 4x^3 + 1$

Vi ser her at $f'(x) < 0$ så lenge $x < -1$

Da vet vi at grafen er strengt avtagende fra intervallet $(-\infty, -1)$ og den kan maksimalt ha ett nullpunkt.

Siden våres intervall også er inni det store intervallet betyr det at intervallet $(-2, -1)$ har kunn ett nullpunkt

9 a)

$f(x) = x^4 + x - 1$

Bruker ettpunktsformelen for å finne $(-2, f(-2))$

$y - f(c) = f'(c)(x-c)$

$y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$

$y - 13 = -31(x+2)$

$y = -31x - 62 + 13 = -31x - 49$

finner nullpunktet

$-31x - 49 = 0$

$\frac{-31x}{-31} = \frac{49}{-31}$

$\underline{\underline{x = \frac{49}{-31}}}$

En tilnærming på b ved én iterasjon med newtons metode gir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$x_0 = -2$

$$x_1 = -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} = -2 - \frac{13}{-31} = -\frac{49}{31} = \underline{\underline{-1.58064516 1}}$$

9 b)

$$f(x) = x^4 + x - 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 1$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Ved newtons metode vil vi få følgen:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < b$$

Dette er fordi

(1) $f(x) > 0$ så lenge $x < b$

(2) $f'(x) < 0$ for alle $x \in (b, x_0]$ som betyr at grafen er avtagende

(3) $f''(x) > 0$ for alle $x \in (b, x_0]$ som betyr at grafen krummer oppover

Derfor vil $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x_n$ dette er fordi

$f(x_n)$ er alltid positiv og $f'(x_n)$ er alltid negativ som betyr at $x_{n+1} > x_n$ vil alltid stemme