MAT121 V22 Fasit/løsningsforslag til oppgavesamling

Oppgave 1. Hvis A er 6×5 og AB^T er 6×7, hvilken størrelse har da B? Velg ett alternativ:

- ☐ 6×7
- ☐ 5×7
- ☐ 6×5
- ☐ 6×6
- ■ 7×5
- ☐ 7×7

Oppgave 2. Anta at A er 4×4 og at trappeform av A har 3 pivoter. Hvilket av følgende utsagn er SANT? Velg ett alternativ:

- ☐ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er inkonsistent.
- ■ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har ikke-trivielle løsninger.
- ☐ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for enhver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.
- ☐ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er inkonsistent for enhver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.
- ☐ Alle egenverdiene til A er forskjellig fra null.

Løsning. Siden A har 4 søyler og bare 3 pivoter, er én fri variabel, så $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger.

Vi kan også eliminere de andre alternativene som usanne: alternativ 1 fordi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alltid er konsistent (nullvektoren er en løsning); alternativ 3 fordi $\mathrm{Col}(A)$ har dimensjon 3 og derfor ikke kan være hele $\mathbb{R}^4$; alternativ 4 fordi ligningen er konsistent når $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; alternativ 5 er usant fordi 0 er en egenverdi (fordi alternativ 2 er sant). $\square$

Oppgave 3. Anta at A, B er $n \times n$ og at AB er inverterbar. Må da A være inverterbar? (Svaret må begrunnes: Gi et bevis eller et moteksempel.)

Løsning. Svaret er ja. Vi bruker at en matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten er forskjellig fra null (Teorem 4, avsnitt 3.2). Fra multiplikasjonsteoremet for determinanter (Teorem 6, avsnitt 3.2) har vi da $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Det følger at $\det(A) \neq 0$, dvs. A er inverterbar. $\square$

Oppgave 4. Hvis A er $n \times n$ og det finnes en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ slik at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mer enn én løsning, kan da A være inverterbar? (Svaret må begrunnes.)

Løsning. Svaret er nei. Siden $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mer enn én løsning, må det være minst én fri variabel, så trappeform av A kan ikke ha pivot i hver søyle. Dermed kan ikke A være inverterbar, ifølge Teorem 8, avsnitt 2.3.

Alternativt kan vi argumentere slik: Hvis vi har to løsninger $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så er $\mathbf{w} := \mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Derfor er A ikke inverterbar (hvis den var inverterbar, ville $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun ha løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$). $\square$

Oppgave 5. Anta at A er 3×3 og diagonaliserbar. Må da A være inverterbar? (Svaret må begrunnes.)

Løsning. Svaret er nei. Eksempel: $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ der minst én av λ'ene er lik null. Denne A er diagonal (og derfor diagonaliserbar!), men $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, så A er ikke inverterbar (Teorem 4, avsnitt 3.2). ☐

Oppgave 6. Anta at A er $n \times n$ matrise som kan omformes til identitetsmatrisen I ved hjelp av følgende elementære radoperasjoner:

- én radombytting
- fire radsubstitusjoner (et multiplum av en rad legges til en annen rad)
- fire operasjoner der en rad ganges med en faktor, med faktorene -1,-1,2 og 3.

Hva er da verdien av $\det(A)$? Velg ett alternativ:

- ☐ 1
- ☐ 6
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ -6
- ☐ 0
- ■ $-\frac{1}{6}$

Løsning. Vi bruker Teorem 3, avsnitt 3.2, gjentatte ganger. Siden $\det(I) = 1$, får vi da

$$1 = (-1)(-1)(-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \det(A) = -6 \cdot \det(A),$$

som gir $\det(A) = -1/6$. (Merk at rekkefølgen på radoperasjonene er irrelevant når det gjelder verdien av determinanten!) ☐

Oppgave 7. Vi betrakter ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der A er 2×3. Hvilket av følgende utsagn er USANT? Velg ett alternativ:

- ☐ Ligningen har enten ingen eller uendelig mange løsninger.
- ☐ Ligningen har minst én fri variabel.
- ☐ Hvis ligningen er inkonsistent, har den likevel en minste kvadrat-løsning.
- ☐ Hvis redusert trappeform av A ikke har noen rad med bare nuller, er ligningen konsistent.
- ■ Hvis $[A \;\; \mathbf{b}]$ har 2 pivoter, er ligningen garantert konsistent.

Løsning. Det siste alternativet er generelt usant fordi pivoten i rad 2 av redusert trappeform av $[A \;\; \mathbf{b}]$ kan være i siste posisjon, dvs. rad 2 kan være $[0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$; i dette tilfellet er systemet inkonsistent (vi kan ikke ha $0 = 1$; se også Teorem 2, avsnitt 1.2).

Det er også instruktivt å tenke over hvorfor alle de andre alternativene er sanne: Vi har minst én fri variabel fordi A kan ha høyst 2 pivoter (det er 2 rader), dermed kan det ikke være en pivot i hver søyle (det er 3 søyler); det følger at ligningen har enten ingen eller uendelig mange løsninger; at det alltid finnes en minste kvadrat-løsning, vet vi fra Teorem 13 i avsnitt 6.5; og endelig, hvis redusert trappeform av A ikke har noen rad med bare nuller, følger fra Teorem 2, avsnitt 1.2, at ligningen er konsistent. ☐

Oppgave 8. La W være underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}0\\4\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix}2\\-2\\-1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix}6\\0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til W? Velg ett alternativ:

☐ 0
☐ 1
☐ 2
■ 3
☐ 4
☐ 5
☐ ingen av de andre alternativene

Løsning. Vi radreduserer matrisen $A = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{u}_5\end{bmatrix}$:

$$A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 2 & 6\\4 & 1 & 1 & -2 & 0\\0 & -1 & 0 & -1 & -1\\1 & 2 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 1\\4 & 1 & 1 & -2 & 0\\0 & -1 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 2 & 2 & 6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 1\\0 & -7 & 1 & -6 & -4\\0 & 1 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 1\\0 & -7 & 1 & -6 & -4\\0 & 0 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 3\\0 & 0 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Vi har 3 pivoter, så $W = \mathrm{Col}(A)$ har dimensjon 3. ☐

Oppgave 9. Regn ut A^{30} når $A = \begin{bmatrix}4 & 4 & -4\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

Løsning. Vi prøver å diagonalisere A, dvs. å skrive den som $A = PDP^{-1}$, der D er diagonal. For dette trenger vi egenverdiene til A og tilsvarende egenvektorer. Karakteristisk polynom er (ekspansjon langs første søyle)

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix}4-\lambda & 4 & -4\\0 & 1-\lambda & 0\\0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda),$$

som gir egenverdiene $\lambda = 0, 1, 4$. Vi finner tilsvarende egenvektorer ved å løse $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$\underline{\lambda = 0}$: $A \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ gir en egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

$\underline{\lambda = 1}$: $A - I = \begin{bmatrix}3 & 4 & -4\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ gir en egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

$\underline{\lambda = 4}$: $A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gir en egenvektor $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Vi setter derfor $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Da er $A = PDP^{-1}$, der vi ved radreduksjon av $[P \quad I]$ finner $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Dette gir $A^k = PD^kP^{-1}$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$, der $D^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix}$. Med $k = 30$ regner vi da ut

$$A^{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4^{30} & 4^{30} & -4^{30} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}$$

(Så (opp til et fortegn!) er faktisk A^{30} lik matrisen vi får ved ganske enkelt å ta hver komponent i matrisen opphøyd i 30. Generelt er dette IKKE tilfelle!) $\square$

Oppgave 10. La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise.

(a) Vis at $\mathrm{Col}(A)^\perp = \mathrm{Nul}(A)$.

(b) Vis at enhver $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ kan skrives på formen $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$, der $\hat{\mathbf{y}} \in \mathrm{Col}(A)$ og $\mathbf{z} \in \mathrm{Nul}(A)$.

Løsning. (a) Fra Teorem 3, avsnitt 6.1, har vi $\mathrm{Col}(A)^\perp = \mathrm{Nul}(A^T)$. Men siden A er symmetrisk, er $A^T = A$, slik at $\mathrm{Nul}(A^T) = \mathrm{Nul}(A)$.

(b) Vi anvender Teorem 8, avsnitt 6.3, med $W = \mathrm{Col}(A)$. Det gir $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$, der $\hat{\mathbf{y}} \in \mathrm{Col}(A)$ og $\mathbf{z} \in \mathrm{Col}(A)^\perp$. Fra punkt (a) har vi da $\mathbf{z} \in \mathrm{Nul}(A)$. $\square$

Oppgave 11. Finn en parameterfremstilling av skjæringslinjen mellom planene $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ og $3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$.

Løsning. Vi løser ligningssystemet:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

som gir $x_1 = 2/3 - (1/3)x_3$, $x_2 = 1 + x_3$ og dermed

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

som er en parameterfremstilling av skjæringslinjen (her med parameter $t = x_3/3$). $\square$

Oppgave 12. La l være skjæringslinjen mellom planene $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ og $3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$. Finn en ortonormal basis for planet W som går gjennom origo og er vinkelrett på l.

Løsning. Fra forrige oppgave vet vi at l har retningen $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Derfor er W gitt ved $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$, dvs. $-x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$. Med x_2 og x_3 som frie variable får vi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_2}$$

der $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ da er en basis for W. Vi bruker Gram-Schmidt for å ortogonalisere denne, og setter derfor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ og $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 - \frac{9}{10}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{9}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$. For å unngå brøker, ganger vi $\mathbf{v}_2$ med faktoren 10, så vi endrer til

$$\mathbf{v}_1' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

som er en ortogonal basis for W (som en sjekk: disse er ortogonale, og de ligger i planet W). Til slutt deler vi hver vektor på dens lengde for å få en ortonormal basis:

$$\underline{\underline{\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{190}} \\ -\frac{9}{\sqrt{190}} \\ \frac{10}{\sqrt{190}} \end{bmatrix}}}$$

Alternativt: Vi kan ta $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ til å være normalvektorene til de to opprinnelige planene, dvs.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Gram-Schmidt som over gir da

$$\underline{\underline{\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{266}} \\ \frac{11}{\sqrt{266}} \\ -\frac{8}{\sqrt{266}} \end{bmatrix}}}$$

□

Oppgave 13. La W være planet utspent av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finn en ligning for W.

Løsning. Vi finner en basis for $W^\perp$. Vi bruker at $\mathbf{x} \in W^\perp$ hvis og bare hvis $\mathbf{x}$ er ortogonal til basisvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, som tilsvarer å løse systemet $\mathbf{v}_1^T\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{v}_2^T\mathbf{x}$:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

som gir $\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Den siste vektoren, kall den $\mathbf{u}$, er da en basis for $W^\perp$, og ligningen for W blir derfor $\mathbf{u}^T\mathbf{x} = 0$, dvs. $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$, eller $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. □

Oppgave 14. La $W = \mathrm{Spenn}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ og $H = \mathrm{Spenn}\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, der

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Da er W og H plan i $\mathbb{R}^3$, og de skjærer hverandre langs en linje. Finn en parameterfremstilling for denne linjen.

Løsning. Fra forrige oppgave vet vi at W har ligningen $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Samme fremgangsmåte gir at H har ligningen $5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$. Som i oppgave 11 løser vi derfor ligningssystemet:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 & 0 \end{array}\right]$$

som gir $x_1 = (1/4)x_3$, $x_2 = (3/4)x_3$ og dermed

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}}$$

som er en parameterfremstilling av skjæringslinjen (her med parameter $t = x_3/4$).

Alternativt: $\mathbf{x} \in W$ betyr at $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, og $\mathbf{x} \in H$ betyr at $\mathbf{x} = c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4$. At $\mathbf{x} \in W \cap H$ er derfor det samme som at $\mathbf{x}$ kan skrives på begge måter, og vi har da $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4$. Vi løser den siste ligningen ved å skrive den som $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3 - c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ og radredusere:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & -\mathbf{v}_3 & -\mathbf{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

som gir $c_1 = -c_4$, $c_2 = 0$, $c_3 = -3c_4$ og c_4 fri. Med $t = c_4$ får vi da igjen $\mathbf{x} = t\mathbf{v}_1$, som er samme svar som over. □

Oppgave 15. La $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrommet av polynomer av grad mindre eller lik 3, og sett

$$p_1(t) = 1 + t^2 + t^3, \quad p_2(t) = t + t^2, \quad p_3(t) = t - t^3, \quad p_4(t) = 1 - t^2.$$

Vis at $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ er en basis for $\mathbb{P}_3$. Videre, skriv $q(t) = 3 - 2t + 5t^2 - 7t^3$ som en lineær kombinasjon av disse basisvektorene.

Løsning. Vi bruker standardbasisen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$ til å sette opp en isomorfi $\mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbf{p} \mapsto [p]_{\mathcal{E}}$. Dermed reduserer vi problemet til å sjekke at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} [p_1]_{\mathcal{E}} & [p_2]_{\mathcal{E}} & [p_3]_{\mathcal{E}} & [p_4]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

er inverterbar, hvilket er åpenbart etter radreduksjon:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi skal løse $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 + c_4p_4 = q$, som via isomorfien overføres til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der $\mathbf{b} = [q]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$. Vi løser denne ligningen:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -14 \end{array}\right].$$

Vi har derfor (sjekk ved utregning!)

$$\underline{\underline{3 - 2t + 5t^2 - 7t^3 = 17p_1(t) - 26p_2(t) + 24p_3(t) - 14p_4(t)}} \qquad \text{(for alle } t \in \mathbb{R}\text{)}.$$

□

Oppgave 16. La $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ være som i forrige oppgave, og la $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$ (standardbasisen for $\mathbb{P}_3$). Finn variabelskiftematrisene $\underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}{\mathcal{P}}$ og $\underset{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}{\mathcal{P}}$.

Løsning. Matrisen $A = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}$ er lett å skrive ned direkte: Den er bestemt ved at $[p]_{\mathcal{E}} = M[p]_{\mathcal{B}}$ for alle $p \in \mathbb{P}_3$, og ved å sette inn $p = p_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ finner vi da at A er matrisen fra løsningen av forrige oppgave:

$$A = \begin{bmatrix}[p_1]_{\mathcal{E}} & [p_2]_{\mathcal{E}} & [p_3]_{\mathcal{E}} & [p_4]_{\mathcal{E}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Matrisen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{\mathcal{P}}$ er da A^{-1}, som vi finner ved radreduksjon:

$$\left[A \;\vdots\; I\right] = \left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

$$= \left[I \;\vdots\; A^{-1}\right].$$

Konklusjonen er at

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{\mathcal{P}} = A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}, \qquad \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}} = A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Som en liten sjekk kan vi nå regne ut $[q]_{\mathcal{B}}$ fra forrige oppgave:

$$[q]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{\mathcal{P}}[q]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\\ 5\\ -7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17\\ -26\\ 24\\ -14\end{bmatrix}.$$

Man kan også sjekke at utregningen av A^{-1} er riktig, dvs. at $AA^{-1} = I$. □

Oppgave 17. La $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ være basisen for $\mathbb{P}_3$ fra de to foregående oppgavene. La $T\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ være den lineære avbildningen definert ved at

$$T(p_1) = 1 + t + t^2 + t^3, \quad T(p_2) = 2 + 3t + 2t^2 + 3t^3,$$
$$T(p_3) = 3 + 5t + 4t^2 + 6t^3, \quad T(p_4) = 4 + 7t + 6t^2 + 9t^3.$$

Finn matrisen til T relativt $\mathcal{B}$.

Løsning. Matrisen til T relativt $\mathcal{B}$, kall den M, er bestemt ved egenskapen $[T(p)]_\mathcal{B} = M[p]_\mathcal{B}$, for alle $p \in \mathbb{P}_3$. Vi setter inn $p = p_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, og ser da at

$$M = \begin{bmatrix}[T(p_1)]_\mathcal{B} & [T(p_2)]_\mathcal{B} & [T(p_3)]_\mathcal{B} & [T(p_4)]_\mathcal{B}\end{bmatrix}.$$

Ved hjelp av forrige oppgave regner vi ut

$$\begin{aligned} M &= \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{\mathcal{P}} \begin{bmatrix}[T(p_1)]_\mathcal{E} & [T(p_2)]_\mathcal{E} & [T(p_3)]_\mathcal{E} & [T(p_4)]_\mathcal{E}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 \\ 2 & 8 & 15 & 22 \\ -1 & -5 & -10 & -15 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}}}. \end{aligned}$$

□

Oppgave 18. La $T\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ være den lineære avbildningen fra forrige oppgave. Finn matrisen til T relativt standarbasisen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$.

Løsning. Matrisen S som det spørres etter, er bestemt ved egenskapen, for alle $p \in \mathbb{P}_3$,

$$[T(p)]_\mathcal{E} = S[p]_\mathcal{E},$$

Men $[T(p)]_\mathcal{E} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}[T(p)]_\mathcal{B}$ og $[p]_\mathcal{E} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}[p]_\mathcal{B}$, som gir sammenhengen

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}[T(p)]_\mathcal{B} = S\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}[p]_\mathcal{B}$$

og derfor

$$[T(p)]_\mathcal{B} = \underbrace{\left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}\right)^{-1} S \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}}_{= M \text{ fra forrige oppgave}} [p]_\mathcal{B}$$

dvs.

$$S = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}} M \left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}\right)^{-1} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}} M \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{\mathcal{P}}.$$

Fra løsningen av de to foregående oppgavene finner vi dermed

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 \\ 2 & 8 & 15 & 22 \\ -1 & -5 & -10 & -15 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & 8 & -5 & 2 \end{bmatrix}}}. \end{aligned}$$

□

Oppgave 19. La $T\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ være den lineære avbildningen fra oppgave 17. Beskriv kjernen til T (dvs. *kernel*, $\ker(T)$).

Løsning. Fra $[T(p)]_{\mathcal{B}} = M[p]_{\mathcal{B}}$ ser vi at $p \in \ker(T)$ hvis og bare hvis $[p]_{\mathcal{B}}$ er en løsning av $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$, som vi løser ved radreduksjon:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -6 \\ 2 & 8 & 15 & 22 \\ -1 & -5 & -10 & -15 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 8 & 15 & 22 \\ -1 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir $x_1 = 0$, $x_2 = x_4$, $x_3 = -2x_4$ og x_4 fri, dvs.

$$\mathbf{x} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og i $\mathbb{P}_3$ tilsvarer den siste vektoren polynomet $p_2(t) - 2p_3(t) + p_4(t) = (t + t^2) - 2(t - t^3) + (1 - t^2) = 1 - t + 2t^3$. Derfor er $\ker(T) = \text{Spenn}\{1 - t + 2t^3\}$.

Alternativt: Vi kan bruke matrisen S til T relativt standardbasisen $\mathcal{E}$ i $\mathbb{R}^3$. Tilsvarende utregning blir da

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & -3 & 1 \\ 4 & 8 & -5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir $x_1 = (1/2)x_4$, $x_2 = -(1/2)x_4$, $x_3 = 0$ og x_4 fri, dvs.

$$\mathbf{x} = x_4 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

og relativt basisen $\mathcal{E}$ tilsvarer den siste vektoren polynomet $1 - t + 2t^3$, som gir samme svar som over. □

Oppgave 20. (Eksamen mai 2002.) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -3 & 11 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for nullrommet til A. La R være radrommet til A. Finn en basis for det ortogonale komplementet til R.

Løsning. Radreduksjon gir

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}} =: B.$$

Da ser vi at løsningen av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er $x_1 = 3x_3 - x_4$, $x_2 = -2x_3 - x_4$ med x_3, x_4 frie variable, og derfor

$$\mathbf{x} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_2},$$

så $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en basis for nullrommet $\mathrm{Nul}(A)$. Videre ser vi fra trappeformen at $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -3, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2, 1)$ er en basis for radrommet $R = \mathrm{Row}(A)$. Det ortogonale komplementet til R består av $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ slik at $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{x} = 0$ for $j = 1, 2$, som er det samme som å si at $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dvs. $\mathbf{x} \in \mathrm{Nul}(A)$. Altså er $R^{\perp} = \mathrm{Nul}(A)$ (her kunne vi også referert til Teorem 3, avsnitt 6.1). □

Oppgave 21. (Eksamen mai 2002.) Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 11x_4 &= a, \\ -2x_1 - 3x_2 + (a-5)x_3 - 5x_4 &= b. \end{aligned}$$

For hvilke verdier av a og b har systemet

(i) akkurat én løsning,
(ii) uendelig mange løsninger,
(iii) ingen løsning.

Løsning. Siden koeffisientmatrisen er 3×4, kan vi ha maksimalt 3 pivoter, så det kan ikke være en pivot i hver søyle (4 søyler), og derfor har vi minst én fri variabel. Vi kan derfor aldri ha akkurat én løsning. Dermed er det enten uendelig mange eller ingen løsninger. For å analysere videre, må vi radredusere utvidet koeffisientmatrise:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & -3 & 11 & a \\ -2 & -3 & a-5 & -5 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & a-5 \\ 0 & -1 & a-7 & -1 & b+2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & a-5 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 & a+b-3 \end{array}\right]$$

Vi har inkonsistens hvis og bare hvis siste rad er på formen $[0\ 0\ 0\ 0 \,\vdots\, c]$ der c er forskjellig fra null, dvs. når $a = 5$ og $a + b - 3 \neq 0$, altså $b \neq -2$. Svaret er derfor

(i) akkurat én løsning: skjer aldri
(ii) uendelig mange løsninger: for $a \neq 5$, alle b, og for $a = 5$, $b = -2$.
(iii) ingen løsning: for $a = 5$, $b \neq -2$

$\square$

Oppgave 22. (Eksamen mai 2002.) La V være et vektorrom med en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Sett

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \text{og} \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2.$$

Vis at $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ også er en basis for V. Finn matrisen Q slik at $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = Q[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{v} \in V$.

Løsning. Vi setter opp en isomorfi $T\colon V \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $T(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Dermed reduserer vi til å sjekke at $\{T(\mathbf{c}_1), T(\mathbf{c}_2), T(\mathbf{c}_3)\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$. Fra den gitte informasjonen har vi

$$T(\mathbf{c}_1) = [\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{c}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{c}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og matrisen med disse vektorene som søyler er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

som altså er inverterbar (determinant forskjellig fra null). Dette viser at $\mathcal{C}$ er en basis for V.

La $M = Q^{-1}$, slik at $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = M[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ for alle $\mathbf{v} \in V$. Vi setter inn $\mathbf{v} = \mathbf{c}_j$ for $j = 1, 2, 3$ og finner da

$$M = \begin{bmatrix} [\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}} & [\mathbf{c}_2]_{\mathcal{B}} & [\mathbf{c}_3]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så regner vi ut $Q = M^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{c|c} M & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & M^{-1} \end{array}\right]$$

dvs.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Som en sjekk: Dette tilsvarer at $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2$ og $\mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3$, og vi ser at dette stemmer med informasjonen gitt i oppgaven.) $\square$

Oppgave 23. (Eksamen mai 2002.) Den lineære avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen til T. Videre, kontroller at $\mathcal{D} = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, og finn matrisen til T relativt denne basisen.

Løsning. Standardmatrisen A er bestemt ved at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Vi setter inn $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ for $j = 1,2,3$ (standardbasisvektorene) og finner

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

Matrisen med søyler lik vektorene i $\mathcal{D}$ (i den gitte rekkefølgen) er $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Denne har determinant forskjellig fra null og er derfor inverterbar. Dette viser at $\mathcal{D}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Vi har

$$[T]_{\mathcal{D}} = P^{-1}AP$$

der P er bestemt ved at $\mathbf{x} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{D}}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Vi setter $\mathbf{x}$ lik vektorene i $\mathcal{D}$ etter tur (i den gitte rekkefølgen) og finner da

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Så er det bare å regne ut P^{-1}:

$$\begin{aligned}
\left[\,P \mid I\,\right] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\,I \mid P^{-1}\,\right].
\end{aligned}$$

Dermed er

$$[T]_{\mathcal{D}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

Alternativt: Vi kan finne $M = [T]_\mathcal{D}$ fra betingelsen $[T(\mathbf{x})]_\mathcal{D} = M[\mathbf{x}]_\mathcal{D}$ som gir

$$M = \begin{bmatrix} \left[T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right]_\mathcal{D} & \left[T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_\mathcal{D} & \left[T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_\mathcal{D} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]_\mathcal{D} & \left[\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right]_\mathcal{D} & \left[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right]_\mathcal{D} \end{bmatrix}.$$

Vi må da løse tre systemer på formen $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vi kombinerer disee til en utvidet matrise og reduserer:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} I & M \end{array}\right]$$

så vi får samme $M = [T]_\mathcal{D}$ som vi fikk over. Vi ser at denne metoden gir litt mindre regning, siden vi slipper å gange sammen matrisene $P^{-1}AP$. $\square$

Oppgave 24. (Eksamen mai 2002.) Kjeglesnittet K har ligningen

$$4x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 6x_2^2 = 21.$$

Finn et ortogonalt variabelskifte i $\mathbb{R}^2$ slik at K's ligning i de nye variablene er uten kryssledd. Hva slags kjeglesnitt er K? Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Løsning. Matrisen til K er $A = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 6 \end{bmatrix}$, som har karakteristisk polynom $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda-3)(\lambda-7)$ og derfor egenverdier $\lambda = 3, 7$. Vi finner de tilsvarende egenrommene ved å løse $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. For $\lambda = 7$ gir det $\sqrt{3}x_1 - x_2 = 0$, og en basis for egenrommet er derfor $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$. For $\lambda = 3$ finner vi en basisvektor $\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi deler disse vektorene på deres lengde og setter dem inn som søylene i en matrise

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

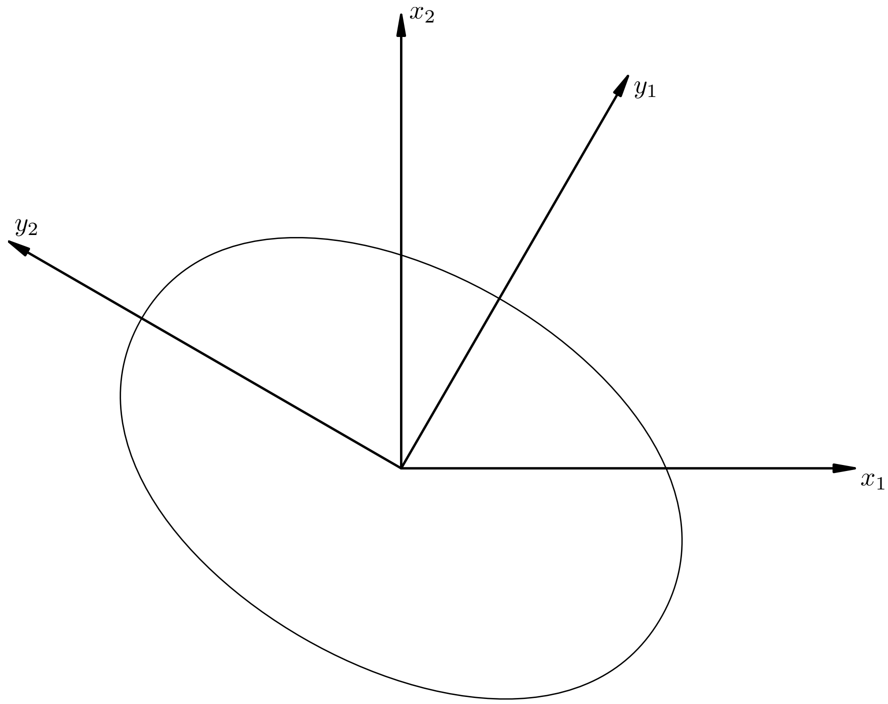
som da er ortogonal, så $P^T = P$, og vi har

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

som man kan sjekke. Med $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ har vi da $\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^TP^T$ og

$$4x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 6x_2^2 = \mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{y}^TP^TAP\mathbf{y} = 7y_1^2 + 3y_2^2 = 21,$$

der den siste ligningen beskriver en ellipse med halvakser $a = \sqrt{3}$ og $b = \sqrt{7}$ langs henholdsvis y_1- og y_2-aksen. Sammenhengen mellom koordinatsystemene er gitt ved $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, og ved å sette inn $\mathbf{y} = (1, 0)$ og $(0, 1)$ finner vi da retningen på henholdsvis y_1- og y_2-aksene i standardkoordinatene (x_1, x_2): de er gitt ved søylene til P, og det er da lett å skissere (y_1y_2-aksene er rotert 60 grader mot klokken, i forhold til x_1x_2-aksene).



□

Oppgave 25. (Eksamen mai 2002.) Vis at $(-1, 1, 1)$ er en egenvektor til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hva er den tilhørende egenverdien? Avgjør om A er diagonaliserbar.

Løsning. Utregning gir $A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, som viser at vektoren er en egenvektor for A, med tilsvarende egenverdi $\lambda = 1$.

A er ikke symmetrisk, så eneste måte å avgjøre diagonaliserbarhet, er å sjekke om det finnes en basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A. Karakteristisk polynom er $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2) - \lambda = -\lambda^3 + \lambda = \lambda(1 - \lambda^2)$, så egenverdiene er $\lambda = 1, 0, -1$. Siden vi har 3 distinkte egenverdier, og A er 3×3, følger det at A diagonaliserbar (Teorem 6, avsnitt 5.3). □

Oppgave 26. (Eksamen mai 2002.) La B være en symmetrisk matrise som har egenvektorene $(2, 1, 1)$ og $(0, 1, -1)$. Finn en ortogonal matrise P som diagonaliserer B. Hva blir P^{-1}?

Løsning. Siden B er symmetrisk, vet vi at den er ortogonalt diagonaliserbar, dvs. det finnes en ortogonal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for $\mathbb{R}^3$. Vi lar $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ være de to gitte egenvektorene (som er ortogonale),

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Da er det bare å finne en $\mathbf{u}_3 \neq \mathbf{0}$ som er ortogonal til $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Denne $\mathbf{u}_3$ må da nødvendigvis være en egenvektor til B. Vi løser systemet $\mathbf{u}_1^T\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{u}_2^T\mathbf{x} = 0$ ved radreduksjon av koeffisientmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

som gir $x_1 = -x_3$, $x_2 = x_3$ og x_3 fri, dvs.

$$\mathbf{x} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_3}.$$

Til slutt deler vi hver $\mathbf{u}_j$ på dens lengde, og setter disse vektorene inn som søylene i matrisen P:

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Siden P er ortogonal, er den inverse lik P^T. $\square$

Oppgave 27. (Eksamen mai 2002.) La B og C være kvadratiske, symmetriske matriser. Anta at B og C er similære. Gjør rede for at det finnes en ortogonal matrise Q slik at $Q^TCQ = B$.

Løsning. Siden matrisene er similære, har de de samme egenverdiene (Teorem 4, avsnitt 5.2). Siden de er symmetriske, er de ortogonalt diagonaliserbare, dvs. det finnes ortogonale matriser P og R slik at

$$P^TBP = D, \quad R^TCR = D,$$

der D er diagonal og har egenverdiene til B og C langs diagonalen (her bruker vi at de har de samme egenverdiene). Siden $P^TP = PP^T = I$, ser vi da at

$$B = PDP^T = P(R^TCR)P^T = PR^TCRP^T = (RP^T)^TCRP^T = Q^TCQ,$$

der $Q = RP^T$ er ortogonal, siden $Q^TQ = (PR^T)(RP^T) = P(R^TR)P^T = PIP^T = PP^T = I$. $\square$

Oppgave 28. (Eksamen mai 1997.) Anta at B er en diagonaliserbar matrise der ingen av egenverdiene er lik 1. Vis at $I - B^n$ er inverterbar dersom n er et oddetall. Hva kan du si om tilfellet der n er et partall?

Løsning. Siden B er diagonaliserbar, kan vi skrive $P^{-1}BP = D$, der P er inverterbar og D er diagonal, med egenverdiene til B langs diagonalen. Da har vi $B = PDP^{-1}$ og

$$B^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{n \text{ faktorer}} = PD^nP^{-1},$$

altså

$$I - B^n = I - PD^nP^{-1} = P(I - D^n)P^{-1}.$$

Fra multiplikasjonsteoremet for determinanter ser vi da at $I - B^n$ er inverterbar hvis og bare hvis $I - D^n$ er inverterbar. Men $I - D^n$ er diagonal, med faktorene $1 - \lambda^n$ langs diagonalen, der λ er en egenverdi til B. Determinanten er derfor lik null hvis og bare hvis $\lambda^n = 1$ for en egenverdi λ, og for n odde skjer dette hvis og bare hvis $\lambda = 1$. Men $\lambda = 1$ er pr. antagelse ikke en egenverdi, så det følger at $I - D^n$ (og derfor $I - B^n$) er inverterbar.

For n partall har vi $\lambda^n = 1$ også hvis $\lambda = -1$, som ikke er utelukket. For eksempel kan vi ta $B = -I$, som bare har egenverdien -1. Da er $I - B^2$ lik nullmatrisen, som ikke er inverterbar! For n partall er det altså ikke garantert at $I - B^n$ er inverterbar. □

Oppgave 29. (Eksamen mai 1997.) Definer en lineær avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Finn standardmatrisen til T. Grunngi at T er diagonaliserbar.
(b) Vis at T bare har egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -1$.
(c) Vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for T. Finn en basis for egenrommet til egenverdien -1.
(d) La W være underrommet av $\mathbb{R}^4$ gitt ved

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Definer $S\colon W \to W$ ved at $S(\mathbf{w}) = T(\mathbf{w})$ for $\mathbf{w} \in W$. Finn en ortonormal basis for W bestående av egenvektorer for S.

Løsning. (a) Standardmatrisen A er bestemt ved at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. Vi setter inn $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ for $j = 1, 2, 3, 4$ (standardbasisvektorene) og finner

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) & T(\mathbf{e}_4) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

A er symmetrisk og derfor (ortogonalt) diagonaliserbar.

(b) Egenverdiene til T er de samme som til standardmatrisen A, som har karakteristisk polynom

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}=(\lambda^2-1)(\lambda^2-1).$$

Røttene er $\lambda_1=1$ og $\lambda_2=-1$. Disse er derfor egenverdiene til A og T.

(c) Egenvektorene til T, dvs. til A, med egenverdi lik -1 finner vi ved å løse $(A+I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ved radreduksjon:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Altså $x_1=-x_2$ og $x_3=-x_4$, der x_3 og x_4 er frie. Det gir løsningen

$$\mathbf{x}=x_2\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_1}+x_4\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_2}$$

og $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ er da en basis for egenrommet svarende til $\lambda_2=-1$.

(d) Vi ser at $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in W$, og de to vektorene er egenvektorer til S og er allerede ortogonale til hverandre. Så vi må finne en tredje vektor $\mathbf{u}_3\in W$ som er ortogonal på både $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$. Den må da nødvendigvis være en egenvektor til S, og derfor til A, svarende til $\lambda_1=1$, dvs. den må være en lineær kombinasjon av egenvektorene for $\lambda_1=1$:

$$\mathbf{u}_3=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_1\\ c_2\\ c_2\end{bmatrix}.$$

For at $\mathbf{u}_3$ skal ligge i W, må vi ha $c_1+c_1+c_2+c_2=0$, så vi kan ta $c_1=1$, $c_2=-1$, for eksempel, som gir

$$\mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}.$$

Da er $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ en ortogonal basis for W (som er et tredimensjonalt rom), og den består av egenvektorer for A, og derfor for S. Ved å dele hver vektor på dens lengde, får vi da den søkte ortonormale basisen. $\square$