Fasit/løsningsforslag — Prøveeksamen MAT121 V22

I flervalgsoppgavene er riktig(e) svar angitt med skravert firkant.

Oppgave 1. La

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Kryss av for de korrekte utsagnene om disse matrisene. Velg ett eller flere alternativer:

- ☐ A er symmetrisk
- ■ B er symmetrisk
- ☐ C er symmetrisk
- ☐ D er symmetrisk
- ■ E er symmetrisk
- ■ $D^T D$ er symmetrisk

Merknad. Du trenger ikke regne ut $D^T D$. For en hvilken som helst matrise D er $D^T D$ symmetrisk, fordi $(D^T D)^T = D^T (D^T)^T = D^T D$. ☐

Oppgave 2. Vi betrakter ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + (k-1)x_2 &= 1 \\ 8x_1 + k^2 x_2 &= 5 \end{aligned}$$

der k er et reelt tall. For hvilke verdier av k er systemet inkonsistent? Velg ett alternativ:

- ☐ ingen k
- ☐ $k = 1$
- ☐ $k = -1$
- ☐ alle k
- ■ $k = 2$
- ☐ $k = 0$

Løsning. Vi radreduserer utvidet koeffisientmatrise:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & k-1 & 1 \\ 8 & k^2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 2 & k-1 & 1 \\ 0 & k^2 - 4(k-1) & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & k-1 & 1 \\ 0 & (k-2)^2 & 1 \end{array}\right]$$

Vi har derfor inkonsistens hvis og bare hvis $(k-2)^2 = 0$, dvs. når $k = 2$. ☐

Oppgave 3. La A, B, C være 3×3-matriser med

$$\det(A) = -1, \quad \det(B) = 48 \quad \text{og} \quad \det(C) = 2.$$

Hva er verdien av $\det(AB(2C)^{-1}A)$?

- ☐ ingen av de andre alternativene
- ■ 3
- ☐ 12
- ☐ −48
- ☐ 32
- ☐ $\frac{3}{4}$

Løsning. Vi bruker multiplikasjonsteoremet for determinanter (Teorem 6, avsnitt 3.2) og finner

$$\begin{aligned}\det(AB(2C)^{-1}A) &= \det(A)\det(B)\det\left((2C)^{-1}\right)\det(A) \\ &= [\det(A)]^2\det(B)\frac{1}{\det(2C)} = (-1)^2 48\frac{1}{2^3\det(C)} = \frac{48}{16} = 3.\end{aligned}$$

Her brukte vi også følgende generelle fakta:

- Hvis D er inverterbar, så er $\det(D^{-1}) = \frac{1}{\det(D)}$ (følger fra multiplikasjonsteoremet siden $DD^{-1} = I$).
- Hvis D er 3×3, og vi ganger D med en faktor k, så blir determinanten ganget med k^3, dvs. $\det(kD) = k^3\det(D)$.

□

Oppgave 4. Vi betrakter ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 11 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Hvilket av følgende utsagn er USANT?

- ☐ Systemet er konsistent.
- ☐ Systemet har uendelig mange løsninger.
- ■ Løsningsmengden er et underrom av $\mathbb{R}^4$.
- ☐ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 2, 0, 0)$ er en løsning.
- ☐ Alle løsningene er på formen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1 - 5s, 2 + s, s, 0)$, der $s \in \mathbb{R}$.

Løsning. Siden $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, er $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ikke en løsning. Derfor er løsningsmengden ikke et underrom av $\mathbb{R}^4$ (et underrom må inneholde nullvektoren).

Alternativt kan man bruke eliminasjon: Løse systemet ved radreduksjon og se at alle de andre alternativene er sanne:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & 9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 11 & -3 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 11 & -3 & -4 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

□

Oppgave 5. Vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen $A = \begin{bmatrix} -7 & 24 & -16 \\ -2 & 7 & -4 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.
Hva er den tilsvarende egenverdien?

- ☐ -7
- ☐ 7
- ☐ 5
- ■ 3
- ☐ -1
- ☐ ingen av de andre alternativene

Løsning. Vi regner ut $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}$, som viser at egenverdien er 3. ☐

Oppgave 6. La A være en 15×20-matrise slik at løsningsrommet til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en basis med 8 vektorer. Hva er da dimensjonen til $\mathrm{Col}(A)$ (søylerommet til A)?

- ☐ 8
- ■ 12
- ☐ 15
- ☐ 20
- ☐ 7
- ☐ ingen av de andre alternativene

Løsning. Vi bruker rangteoremet (Teorem 14, avsnitt 4.5), som sier at

$$\dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\mathrm{Nul}(A)) = \text{antall søyler i } A = 20.$$

Den gitte informasjonen sier at $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 8$, så det følger at $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 20 - 8 = 12$. ☐

Oppgave 7. La A være en 2×3-matrise, og la $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Hvilket av følgende utsagn er USANT?

- ☐ $\mathrm{Nul}(A)$ kan være en linje i $\mathbb{R}^3$.
- ☐ $\mathrm{Nul}(A)$ kan være et plan $\mathbb{R}^3$.
- ☐ $\mathrm{Nul}(A)$ kan være hele $\mathbb{R}^3$.
- ☐ $\mathrm{Nul}(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger.
- ■ Radrommet til A kan ha en basis bestående av 3 vektorer.

Løsning. Radrommet er et underrom av $\mathbb{R}^2$, så en basis for radrommet kan bestå av høyst 2 vektorer. Det siste alternativet er derfor usant.

Det er også lett å se (som en sjekk) at de øvrige usagnene er sanne. $\mathrm{Nul}(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$ (Teorem 2, avsnitt 4.2). Trappeformen til A kan ha 0, 1 eller 2 pivoter, hvilket tilsvarer at antallet frie variable er henholdsvis 3, 2 eller 1 (antallet søyler minus antallet pivoter), som i sin tur tilsvarer at $\mathrm{Nul}(A)$ har dimensjon 3, 2 eller 1, og dette betyr at de tre første alternativene kan inntreffe. Siden $\mathrm{Nul}(A)$ ikke kan ha dimensjon 0 (det kan ikke være 3 pivoter), må det være uendelig mange løsninger av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ☐

Oppgave 8. La H være underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til H?

☐ 0
☐ 1
■ 2
☐ 3
☐ 4
☐ ingen av de andre alternativene

Løsning. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ inneholder en delmengde som er en basis for H (Teorem 5, avsnitt 4.3). For å finne en slik basis, setter vi $B = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4]$. Da er $\mathrm{Col}(B) = H$. Vi reduserer til trappeform:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivotene i trappeformen er i søylene 1 og 2, så de tilsvarende søylene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i B gir en basis for $\mathrm{Col}(B) = H$. Dimensjonen til H er derfor 2. ☐

Oppgave 9. La A være en 3×3-matrise. Hvilken av følgende betingelser impliserer IKKE at A er inverterbar?

☐ A^T er inverterbar.
☐ Det finnes et positivt heltall k slik at $\det(A^k) \neq 0$.
☐ Det finnes en 3×3-matrise B slik at $AB = I$.
☐ Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for enhver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
■ Det finnes lineært uavhengige $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at $A\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ for hver i.

Løsning. Det greieste her er å eliminere alle svarene som faktisk impliserer at A er inverterbar: Fra inverterbarhetsteoremet (Teorem 8, avsnitt 2.3 og Teorem 4, avsnitt 3.2) har vi at alternativene 1–4 impliserer inverterbarhet (for alternativ 2 bruker vi også multiplikasjonsteoremet til å se at $\det(A^k) = [\det(A)]^k$).

Det er enkelt å finne eksempler der alternativ 5 er oppfylt, men A ikke er inverterbar. Gitt lineært uavhengige $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, sett $B = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$, så B er inverterbar. Videre, velg en hvilken som helst $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, og sett $C = [\mathbf{b}\ \mathbf{b}\ \mathbf{b}]$, så C er ikke inverterbar. Da finnes en entydig bestemt matrise A slik at $AB = C$ (nemlig $A = CB^{-1}$). Multiplikasjonsteoremet impliserer at $\det(A) = 0$, så A er ikke inverterbar. Men vi har altså $A\mathbf{v}_i = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ for $i = 1, 2, 3$. ☐

Oppgave 10. La $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ og $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ være basiser for et vektorrom V. Anta at

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_3 = 4\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3.$$

La videre

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3.$$

Variabelskiftematrisen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}}$ fra $\mathcal{A}$ til $\mathcal{B}$, og koordinatvektoren $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, er da gitt ved

- ☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$
- ☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ■ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$
- ☐ ingen av de andre alternativene

Løsning. Variabelskiftematrisen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}}$ er bestemt ved at vi for en generell $\mathbf{x} \in V$ har $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$. Tar vi her $\mathbf{x} = \mathbf{a}_i$ for $i = 1, 2, 3$, ser vi at

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \big[[\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{a}_2]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{a}_3]_{\mathcal{B}}\big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

For $\mathbf{x}$ som gitt i oppgaven har vi $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, og derfor

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

☐

Oppgave 11. La W være planet i $\mathbb{R}^3$ gitt ved ligningen $x_1 = x_2 + x_3$. La $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Hvilken av følgende vektorer er den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på W?

- ☐ $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$
- ■ $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☐ Ingen av de andre alternativene.

Løsning. Fra $x_1 = x_2 + x_3$ får vi parameterfremstillingen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_2}$$

som gir oss en basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ for W. Vi bruker Gram-Schmidt på denne for å finne en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Sett $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ og

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For å unngå brøker kan vi gange $\mathbf{v}_2$ med en faktor 2, som gir oss en ortogonal basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, der

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Projeksjonen blir da

$$\widehat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 = \frac{8}{2}\mathbf{w}_1 + \frac{18}{6}\mathbf{w}_2 = 4\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(Som en sjekk kan vi også se at $\mathbf{b} - \widehat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er ortogonal til W.) ☐

Oppgave 12. La $\mathbb{P}_1$ være vektorrommet av førstegradspolynomer, med basis $\{1, t\}$. La $T\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ være den lineære avbildningen definert ved

$$T(1) = 1 + kt \quad \text{og} \quad T(t) = 2 - t,$$

der k er et reelt tall. For hvilken verdi av k er $\lambda = 2$ en egenverdi for T?

☐ ingen k
■ $k = \frac{3}{2}$
☐ $k = 1$
☐ $k = -1$
☐ alle k
☐ $k = -\frac{1}{2}$

Løsning. Vi husker at matrisen til T relativt basisen $\mathcal{B} = \{1, t\}$ for $\mathbb{P}_1$, det er matrisen $M = [T]_\mathcal{B}$ med egenskapen at

$$[T(p)]_\mathcal{B} = M[p]_\mathcal{B}$$

for alle $p \in \mathbb{P}_1$. Ved å sette inn basisvektorene $p(t) = 1$ og $p(t) = t$ finner vi da at

$$M = \begin{bmatrix} [T(1)]_\mathcal{B} & [T(t)]_\mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & -1 \end{bmatrix}.$$

Videre har vi at egenverdiene til T er sammenfallende med egenverdiene til M. Så vi må sjekke når 2 er en egenverdi for M. Det karakteristiske polynomet til M er

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ k & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - 2k$$

og med $\lambda = 2$ blir dette lik $3 - 2k$, som er lik null hvis og bare hvis $k = 3/2$.

(Som en sjekk: Med $k = 3/2$ finner vi en tilsvarende egenvektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ for M, som tilsvarer polynomet $p(t) = 2 + t$. Vi ser at $T(2 + t) = 2(1 + kt) + 2 - t = 4 + (2k - 1)t = 4 + 2t = 2(2 + t)$.) ☐

Langsvaroppgaver (svar må begrunnes og mellomregninger vises):

Oppgave 13. La $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Det oppgis at $\lambda = 1$ er en egenverdi for A. Finn en basis for det tilsvarende egenrommet.

(b) Bestem maksimumsverdien M av den kvadratiske formen

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

under føringen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Finn videre et punkt (x_1, x_2, x_3) der denne maksimumsverdien antas.

Løsning. (a) Siden $A - I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ er løsningene av $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ gitt ved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{u}_2}$$

og $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ er en basis for egenrommet.

(b) Den kvadratiske formen er $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, og føringen er $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$, så ifølge Teorem 6 i avsnitt 7.3 er maksimumsverdien M lik den største egenverdien, og denne antas når $\mathbf{x}$ er lik en tilsvarende egenvektor med lengde 1.

Vi må derfor finne alle egenverdiene, dvs. røttene til det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned} p(\lambda) &:= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) + 2(2\lambda - 2) + 2(2\lambda - 2) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7. \end{aligned}$$

Ut fra opplysningen gitt i punkt (a), skal $\lambda = 1$ være en rot, og vi ser at det stemmer. Så vi kan faktorisere

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + b\lambda + c).$$

Ved å ekspandere høyresiden og sammenligne koeffisienter, finner vi at $b = -8$ og $c = 7$. Ved å faktorisere $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda - 1)(\lambda - 7)$ finner vi dermed

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(7-\lambda),$$

hvilket gir oss egenverdiene $\lambda = 1$ og $\lambda = 7$. Maksimumsverdien M er dermed lik 7. For å finne et punkt der denne verdien antas, må vi finne en tilsvarende egenvektor med lengde 1. Vi løser $(A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A - 7I = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som gir en egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Divisjon med lengden $\sqrt{3}$ gir konklusjonen:

$$\underline{\underline{\text{Maksimum er } M = 7 \text{ og antas i } (x_1, x_2, x_3) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}}$$

□

Oppgave 14. Anta at V, W er vektorrom, $T\colon V \to W$ er en lineær avbildning og $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in V$. Hvis $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)$ er lineært uavhengige, må da $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ være lineært uavhengige? Svaret må begrunnes (bevis eller moteksempel).

Løsning. La oss anta at (i V)

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0},$$

der c'ene er reelle tall. Anvender vi nå T på begge sider av ligningen og bruker lineariteten av T, så får vi (i W)

$$c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \ldots c_pT(\mathbf{v}_p) = \mathbf{0}.$$

Men pr. antagelse er $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)$ lineært uavhengige, så det følger at

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0.$$

Dette viser at $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ er lineært uavhengige. $\square$