1. $5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$; $\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}$

$$x_1 = -\frac{2x_2}{5} + \frac{3x_3}{5}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} -2x_2/5 + 3x_3/5 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2/5 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_3/5 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \begin{bmatrix} -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$s = x_2 \quad , \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t = x_3 \quad , \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{b} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ ← inkonsistent

3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 16 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 16 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$ ikke konsistent

$$\vec{b} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} b_1 - b_2/4 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Sammen har vi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 - b_2/4 \\ 2 & 16 & b_2 \\ -1 & 9 & b_3 \end{bmatrix}$$

Systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har da løsninger for alle $\left\{ \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} : b_1 - b_2/4 = 0 \right\}$

4a) Vektorene $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix}$ er lineært uavhengige

dersom $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} = \vec{0}$ kun har den trivielle løsningen.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolonne 2 har ikke en pivotkollonne så

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ikke lineært uavhengige

4b) Vektorene $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er lineart uavhengige

dersom $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w} = \vec{0}$ kun har den trivielle løsning

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

her har vi ingen frie variabler så

$\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er lineart uavhengig