MAT121 V22 Oppgavesamling for eksamensforberedelse

Oppgave 1. Hvis A er 6×5 og AB^T er 6×7, hvilken størrelse har da B? Velg ett alternativ:

- ☐ 6×7
- ☐ 5×7
- ☐ 6×5
- ☐ 6×6
- ☐ 7×5
- ☐ 7×7

Oppgave 2. Anta at A er 4×4 og at trappeform av A har 3 pivoter. Hvilket av følgende utsagn er SANT? Velg ett alternativ:

- ☐ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er inkonsistent.
- ☐ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har ikke-trivielle løsninger.
- ☐ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for enhver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.
- ☐ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er inkonsistent for enhver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.
- ☐ Alle egenverdiene til A er forskjellig fra null.

Oppgave 3. Anta at A, B er $n \times n$ og at AB er inverterbar. Må da A være inverterbar? (Svaret må begrunnes: Gi et bevis eller et moteksempel.)

Oppgave 4. Hvis A er $n \times n$ og det finnes en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ slik at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mer enn én løsning, kan da A være inverterbar? (Svaret må begrunnes.)

Oppgave 5. Anta at A er $n \times n$ og diagonaliserbar. Må da A være inverterbar? (Svaret må begrunnes.)

Oppgave 6. Anta at A er $n \times n$ matrise som kan omformes til identitetsmatrisen I ved hjelp av følgende elementære radoperasjoner:

- én radombytting
- fire radsubstitusjoner (et multiplum av en rad legges til en annen rad)
- fire operasjoner der en rad ganges med en faktor, med faktorene -1, -1, 2 og 3.

Hva er da verdien av $\det(A)$? Velg ett alternativ:

- ☐ 1
- ☐ 6
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ -6
- ☐ 0
- ☐ $-\frac{1}{6}$

Oppgave 7. Vi betrakter ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der A er 2×3. Hvilket av følgende utsagn er USANT? Velg ett alternativ:

- ☐ Ligningen har enten ingen eller uendelig mange løsninger.
- ☐ Ligningen har minst én fri variabel.
- ☐ Hvis ligningen er inkonsistent, har den likevel en minste kvadrat-løsning.
- ☐ Hvis redusert trappeform av A ikke har noen rad med bare nuller, er ligningen konsistent.
- ☐ Hvis $[A \ \ \mathbf{b}]$ har 2 pivoter, er ligningen garantert konsistent.

Oppgave 8. La W være underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til W? Velg ett alternativ:

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ ingen av de andre alternativene

Oppgave 9. Regn ut A^{30} når $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Oppgave 10. La A være en symmetrisk $n \times n$-matrise.

(a) Vis at $\mathrm{Col}(A)^{\perp} = \mathrm{Nul}(A)$.

(b) Vis at enhver $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ kan skrives på formen $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$, der $\hat{\mathbf{y}} \in \mathrm{Col}(A)$ og $\mathbf{z} \in \mathrm{Nul}(A)$.

Oppgave 11. Finn en parameterfremstilling av skjæringslinjen mellom planene $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ og $3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$.

Oppgave 12. La l være skjæringslinjen mellom planene $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ og $3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5$. Finn en ortonormal basis for planet W som går gjennom origo og er vinkelrett på l.

Oppgave 13. La W være planet utspent av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finn en ligning for W.

Oppgave 14. La $W = \text{Spenn}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ og $H = \text{Spenn}\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, der

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Da er W og H plan i $\mathbb{R}^3$, og de skjærer hverandre langs en linje. Finn en parameterfremstilling for denne linjen.

Oppgave 15. La $\mathbb{P}_3$ betegne vektorrommet av polynomer av grad mindre eller lik 3, og sett

$$p_1(t) = 1 + t + t^3, \quad p_2(t) = t + t^2, \quad p_3(t) = t - t^3, \quad p_1(t) = 1 + t.$$

Vis at $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ er en basis for $\mathbb{P}_3$. Videre, skriv $q(t) = 3 - 2t + 5t^2 - 7t^3$ som en lineær kombinasjon av disse basisvektorene.

Oppgave 16. La $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ være som i forrige oppgave, og la $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$ (standardbasisen for $\mathbb{P}_3$). Finn variabelskiftematrisene $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{\mathcal{P}}$ og $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}$.

Oppgave 17. La $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ være basisen for $\mathbb{P}_3$ fra de to foregående oppgavene. La $T\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ være den lineære avbildningen definert ved at

$$T(p_1) = 1 + t + t^2 + t^3, \quad T(p_2) = 2 + 3t + 2t^2 + 3t^3,$$
$$T(p_3) = 3 + 5t + 4t^2 + 6t^3, \quad T(p_4) = 4 + 7t + 6t^2 + 9t^3.$$

Finn matrisen til T relativt $\mathcal{B}$.

Oppgave 18. La $T\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ være den lineære avbildningen fra forrige oppgave. Finn matrisen til T relativt standarbasisen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$.

Oppgave 19. La $T\colon \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ være den lineære avbildningen fra oppgave 17. Beskriv kjernen til T (dvs. *kernel*, $\ker(T)$).

Oppgave 20. (Eksamen mai 2002.) Finn den reduserte trappeformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & -3 & 11 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for nullrommet til A. La R være radrommet til A. Finn en basis for det ortogonale komplementet til R.

Oppgave 21. (Eksamen mai 2002.) Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 11x_4 &= a, \\ -2x_1 - 3x_2 + (a-5)x_3 - 5x_4 &= b. \end{aligned}$$

For hvilke verdier av a og b har systemet

(i) akkurat én løsning,
(ii) uendelig mange løsninger,
(iii) ingen løsning.

Oppgave 22. (Eksamen mai 2002.) La V være et vektorrom med en basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Sett

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \text{og} \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2.$$

Vis at $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ også er en basis for V. Finn matrisen Q slik at $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = Q[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{v} \in V$.

Oppgave 23. (Eksamen mai 2002.) Den lineære avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Finn standardmatrisen til T. Videre, kontroller at $\mathcal{D} = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, og finn matrisen til T relativt denne basisen.

Oppgave 24. (Eksamen mai 2002.) Kjeglesnittet K har ligningen

$$4x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 6x_2^2 = 21.$$

Finn et ortogonalt variabelskifte i $\mathbb{R}^2$ slik at K's ligning i de nye variablene er uten kryssledd. Hva slags kjeglesnitt er K? Tegn en figur som viser de opprinnelige koordinataksene, de nye, og K.

Oppgave 25. (Eksamen mai 2002.) Vis at $(-1, 1, 1)$ er en egenvektor til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hva er den tilhørende egenverdien? Avgjør om A er diagonaliserbar.

Oppgave 26. (Eksamen mai 2002.) La B være en symmetrisk matrise som har egenvektorene $(2, 1, 1)$ og $(0, 1, -1)$. Finn en ortogonal matrise P som diagonaliserer B. Hva blir P^{-1}?

Oppgave 27. (Eksamen mai 2002.) La B og C være kvadratiske, symmetriske matriser. Anta at B og C er similære. Gjør rede for at det finnes en ortogonal matrise Q slik at $Q^T CQ = B$.

Oppgave 28. (Eksamen mai 1997.) Anta at B er en diagonaliserbar matrise der ingen av egenverdiene er lik 1. Vis at $I - B^n$ er inverterbar dersom n er et oddetall. Hva kan du si om tilfellet der n er et partall?

Oppgave 29. (Eksamen mai 1997.) Definer en lineær avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Finn standardmatrisen til T. Grunngi at T er diagonaliserbar.
(b) Vis at T bare har egenverdiene $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -1$.
(c) Vektorene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for T. Finn en basis for egenrommet til egenverdien -1.
(d) La W være underrommet av $\mathbb{R}^4$ gitt ved

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Definer $S\colon W \to W$ ved at $S(\mathbf{w}) = T(\mathbf{w})$ for $\mathbf{w} \in W$. Finn en ortonormal basis for W bestående av egenvektorer for S.