Obligatorisk innlevering 2 i STAT110/622

Basert på kapittel 1-6 i boken. Les informasjon "Obligatoriske innleveringer" på MittUiB->Hjem.

1. **Defekte objekter** Vi antar at det er 3 defekte objekt i en mengde på 21 objekter. Et utvalg å 7 blir plukket ut tilfeldig uten tilbakelegg. La X betegne antall defekte objekter i utvalget.
   (a) Finn sannsynligheten for at utvalget inneholder akkurat defekte 2 objekter.
   (b) Finn forventning og varians til X.

2. **Stokastiske algoritmer**

   En programmerer kan velge mellom to algoritmer (A og B) for å løse et problem som vi kaller "Q". Algoritme A er deterministisk, dvs. den er garantert å finne et svar, og bruker alltid samme tid (20 timer) for å løse Q. Algoritme B er stokastisk, dvs. at den gjør bruk av tilfeldige tall internt, men vi skal ikke "kikke inn" i selve algoritmen. Algoritme B klarer ikke alltid å finne et svar, men til gjengjeld kjører den raskt. Den har alltid en kjøretid på 0.5 timer (på problem Q), uavhengig av om den klarer å finne et svar eller ikke, og den gir beskjed når den feiler. Derfor må B kjøres flere ganger, helt til den finner svaret. Vi definerer $p = P(\text{B finner svaret})$ for én enkelt kjøring, og at ulike kjøringer av B er uavhenige (med tanke på om de finner svaret eller ikke).

   (a) Dersom $p = 0.05$, hva er forventet total kjøretid før algoritme B finner et svar? Bør programmereren velge algoritme A eller B for problemet Q? (Hint: kikk på geometrisk fordeling)

3. **Om hjort**

   En økolog ønsker å undersøke hjortebestanden i to forskjellige områder, Område 1 og Område 2, på Vestlandet. Han antar at antall hjort, X og Y, i Område 1 og 2 er Poisson fordelt.

   (a) Økologen regner med at forventet antall hjort er henholdsvis $\lambda_1 = 3$ i område 1 og $\lambda_2 = 5$ i område 2. Finn $P(X = 2)$ og $P(X \geq 3)$, og finn et tilnærmet uttrykk for $P(X = Y)$. Presiser den forutsetningen du må bruke for å regne ut det siste svaret.
   (b) Dersom en hjort befinner seg i et slikt område, regner økologen med en sannsynlighet på 0.2 for at den blir observert. Dersom det i virkeligheten er 5 hjort i området, hva er sannsynligheten for at tre av dem blir observert? Hva er forventet antall hjort observert?

4. **Investeringer** To investeringer X og Y gir avkastning som følger (forventning og varians):

   $$E(X) = 0.6 \text{ og } E(Y) = 0.5; \qquad V(X) = 1, \quad V(Y) = 2.$$

   Korrelasjonen mellom X og Y er $\rho(X, Y) = 0.5$.

   (a) Finn forventning og varians for de "kombinerte" investeringene

   $$U = X + Y, \quad W = 2Y.$$

   Finn til slutt korrelasjonen mellom U og W. Hint: Finn først $V(U + W)$.

5. **Sandkorn**

   Diameteren av sandkorn i et spesielt sandtak, målt i mm, kan betraktes som en tilfeldig variabel X med sannsynlighetstetthet

   $$f(x) = \begin{cases} k(x - x^4) & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

   (a) Bestem konstanten k slik at dette blir en gyldig sannsynlighetstetthet.

(b) Finn forventningen $E(X)$ og variansen $V(X)$

(c) Finn forventningen $E(4X+3)$ og variansen $V(4X+3)$

6. **Simultanfordeling**

Vi betrakter to tilfeldige variable X og Y med simultan sannsynlighetsfordeling $p(x,y) = P(X=x \cap Y=y)$ gitt ved denne tabellen:

$x \backslash y$	0	1	2
0	0.05	0.25	0.1
1	0.1	0.05	0.1
2	0.25	0	0.1

(a) Finn de marginale sannsynlighetsfordelingene for X og Y. Hva er $P(X=2|Y=2)$? Er X og Y uavhengige tilfeldige variable? Begrunn svaret.

(b) Finn korrelasjonen mellom X og Y når du får vite at forventningene er $E(X) = 0.95$ og $E(Y) = 0.9$, og variansene $V(X) = 0.747$ og $V(Y) = 0.69$.

(c) Finn betinget forventning $E(Y|X=2)$ og betinget varians $V(Y|X=2)$.

7. **Ventetider**

Ventetiden T (i timer) mellom hver telefonsamtale en person mottar er tilfeldig med tetthetsfunksjon $f(t) = 1.8e^{-1.8t}$ for $t \geq 0$.

(a) Finn forventet tid mellom oppringninger og finn tilhørende varians.

(b) For to uavhengige ventetider T_1 og T_2, finn sannsynligheten for at både T_1 og T_2 er større enn 1.

8. **Bohrs atommodell**

Figur 1 viser Bohrs modell for hydrogenatomet (les figurteksten). Vi lar (X, Y) betegne posisjonen til elektronet i forhold til atomkjernen. I kvantemekanikk kan man aldri bestemme (X, Y) eksakt, men må i stedet bruke en sannsynlighetsfordeling. Vi antar at $X \sim N(0, 1)$ og $Y \sim N(0, 1)$, dvs. normalfordelte med forventning 0 og varians 1, og at X og Y er uavhengige av hverandre.

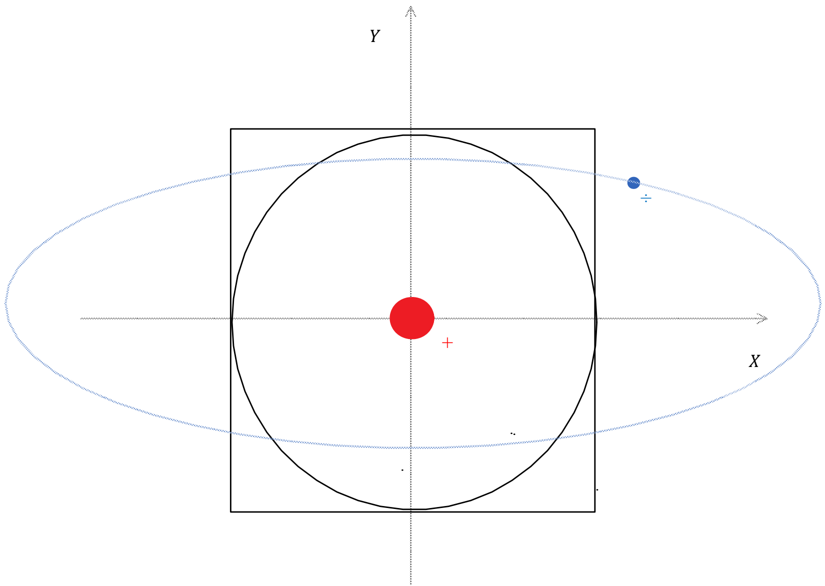

Figure 1: Bohrs atommodell med elektron (blått) og atomkjerne (rød). Den sorte sirkelen har radius $r = 2.15$.

(a) Hva er sannsynligheten for $-2.15 \leq X \leq 2.15$? Hva er sannsynligheten for at elektronet befinner seg inne i det sorte kvadratet. Hint: vi har antatt at X og Y er uavhengige tilfeldige variable.

(b) Hva er sannsynligheten for at elektronet befinner seg inne i den sorte sirkelen? Hjelp: avstanden fra elektronet til kjernen er $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, og det kan vises at den tilfeldige variabelen $U = R^2$ har en kji-kvadratfordeling med $\nu = 2$ frihetsgrader som også er en eksponensialfordeling (men hvilken?).