MAT121 V22 Løsningsforslag for oppgavene 1–18 fra eksamen mai 2019

Fremgangsmåten for settene fra juni og høsten 2019 er den samme.

Løsning oppgave 1.1. Vi radreduserer utvidet koeffisientmatrise:

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 & a \\ 0 & 0 & -8 & -8 & 4 & b \\ 1 & -7 & -4 & 2 & 7 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 & a \\ 0 & 0 & -8 & -8 & 4 & b \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 2 & c-a \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -7 & 0 & 6 & 5 & a \\ 0 & 0 & -8 & -8 & 4 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c-a-\frac{b}{2} \end{array}\right].$$

Fra siste rad ser vi at systemet er konsistent hvis og bare hvis $c - a - \frac{b}{2} = 0$ (vi bruker Teorem 2, avsnitt 1.2), dvs. $2(a - c) + b = 0$. □

Løsning oppgave 2.1. La A være standardmatrisen til Φ. Den gitte informasjonen betyr at $A\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ og derfor (etter rotasjon 90 grader mot klokken) $A\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$, altså $A\begin{bmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$, som gir

$$A = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\4 & 3\end{bmatrix}^{-1} = 5I\frac{1}{25}\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\-4 & 3\end{bmatrix}.$$

□

Løsning oppgave 3.1. La A være standardmatrisen til T. Den gitte informasjonen betyr at $A\vec{\alpha}_1 = 2\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2$, $A\vec{\alpha}_2 = 2(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) + \vec{\alpha}_3$, $A\vec{\alpha}_3 = 2(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3) + \vec{\alpha}_4$ og $A\vec{\alpha}_4 = 2\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4$, som gir oss matriseligningen

$$A\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{=:B} = \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 3\\1 & 3 & 4 & 2\\1 & 2 & 2 & 1\\2 & 2 & 3 & 3\end{bmatrix}}_{=:C}.$$

Vi regner ut B^{-1}:

$$
\left[\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1
\end{array}\right].
$$

Dette gir

$$
A = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.
$$

□

Løsning oppgave 4.1. Vi bruker isomorfien $T\colon V \to \mathbb{R}^4$ gitt ved $T(\vec{\alpha}_j) = \mathbf{e}_j$ for $j = 1, 2, 3, 4$, og lar $H = T(W)$, som er et underrom av $\mathbb{R}^4$, med samme dimensjon som W. Så vi må finne $\dim(H)$. Vi bruker at $H = \text{Spenn}\{T(\vec{\gamma}_1), T(\vec{\gamma}_2), T(\vec{\gamma}_3), T(\vec{\gamma}_4)\}$. Vi regner ut $T(\vec{\gamma}_1) = T(\vec{\alpha}_2) - T(\vec{\alpha}_3) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ etc., og danner matrisen som har disse vektorene som søyler:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.
$$

Vi radreduserer for å finne antallet pivoter:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Det er 2 pivoter, altså er $\dim(W) = \dim(H) = \dim(\text{Col}(A)) = 2$. □

Løsning oppgave 5.1. La A være standardmatrisen til T. Fra den gitte informasjonen ser vi at A er den samme 4×4-matrisen som i forrige oppgave. Det er 2 pivoter, derfor $4 - 2 = 2$ frie variable. Derfor er $\dim(\text{Nul}(A)) = 2$. □

Løsning oppgave 6.1. Med A som i de to foregående oppgavene løser vi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fra radreduksjonen i oppgave 4.1 ser vi at løsningen er

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og de to vektorene på høyresiden gir da en basis for $\mathrm{Nul}(A)$. □

Løsning oppgave 7.1. Vi trekker rad 3 fra rad 1 (påvirker ikke determinanten), og reduserer dermed til

$$\begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & -3\sqrt{10} & -2 \\ 2\sqrt{10} & -2\sqrt{10} & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Så trekker vi 3/2 ganger rad 2 fra rad 1 (påvirker ikke determinanten), og reduserer til

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 2\sqrt{10} & -2\sqrt{10} & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ekspansjon langs første rad gir determinanten $(-5)(2\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = -20\sqrt{10}$. □

Løsning oppgave 8.1. Arealet det spørres etter er lik $|\det(A)|$ ganger arealet av S (Teorem 10, avsnitt 3.3). Men vi ser at $\det(A) = 0$, så arealet blir null. □

Løsning oppgave 9.1. Fra Teorem 8, avsnitt 3.3, har vi $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$. Vi tar invers av begge sider og får $A = \det(A)[\mathrm{adj}(A)]^{-1}$. Derfor er $[\mathrm{adj}(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A = (-1/2)A$. □

Løsning oppgave 10.1. Matrisen M det spørres etter er bestemt ved at $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Vi setter inn $\mathbf{x} = \mathbf{b}_j$ for $j = 1, 2$ og finner da

$$M = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}.$$

For å finne $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}$ må vi løse $\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1$, og tilsvarende for $\mathbf{b}_2$. Vi løser begge samtidig ved å redusere den utvidede koeffisientmatrisen

$$\left[\begin{array}{cc:cc} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ -4 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 7 & -35 & -21 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right].$$

Altså er $M = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$. □

Løsning oppgave 11.1. Matrisen er øvre triangulær, så egenverdiene er tallene langs diagonalen. $\square$

Løsning oppgave 12.1. Vi ser direkte at $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ er egenvektorer svarende til henholdsvis $\lambda = 0$ og $\lambda = 2$. For å finne egenvektorene svarende til $\lambda = -1$ løser vi $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siden $A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, har vi $x_1 = 0$ og $x_2 = -\frac{5}{3}x_3$, der x_3 er fri. Det gir løsningene $\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, og $x_3 = 3$ gir egenvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\square$

Løsning oppgave 13.1. Matrisen er symmetrisk og derfor (ortogonalt) diagonaliserbar. Vi sjekker dimensjonen til egenrommene svarende til $\lambda = 2$ og $\lambda = 8$. Siden $A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, med 1 pivot og 2 frie variable, har egenrommet dimensjon 2, dvs. multiplisiteten til $\lambda = 2$ er lik 2. Det betyr at dimensjonen til egenrommet til $\lambda = 8$ må være $3 - 2 = 1$, og det er ingen andre egenverdier enn disse to. Egenverdiene listet etter multiplisitet er altså $\lambda = 2, 2, 8$, og det eneste riktige svaralternativet blir dermed det som har disse langs diagonalen. $\square$

Løsning oppgave 14.1. $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 42 \end{bmatrix}$ har invers lik $\frac{1}{14 \cdot 42} \begin{bmatrix} 42 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & \frac{1}{42} \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. $\square$

Løsning oppgave 15.1. Normalligningen er $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, som gir (ved hjelp av forrige oppgave)

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{x} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Løsning oppgave 16.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ har karakteristisk polynom $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda - 3)(\lambda + 7)$, som gir egenverdiene $\lambda = 3, -7$ (én positiv og én negativ). Formen er derfor ikke definitt. $\square$

Løsning oppgave 17.1. Fra forrige oppgave har vi egenverdiene $\lambda = 3, -7$. Vi finner tilsvarende egenvektorer ved å se på henholdsvis $A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ og $A + 7I = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ som gir egenvektorer henholdsvis $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, som begge har lengde $\sqrt{10}$. Vi deler på lengden og ganger den siste egenvektoren med -1. Med ombyttet rekkefølge har vi da en basis som svarer til svaralternativ 4, som da må være det riktige. $\square$

Løsning oppgave 18.1. Det ortogonale komplementet til W er løsningsmengden til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

som gir løsningene $\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Den siste vektoren utspenner derfor det ortogonale komplementet til W. $\square$