I - le « paradoxe » des anniversaires

I.A -

I.A.1 -

Lorsque l'on tire successivement au hasard n jetons avec remise parmi M jetons numérotés de 1 à M, on peut modélise $\boxed{\Omega = \{1, 2, \cdots, M\}^n}$,
muni de $\boxed{\text{la probabilité uniforme } \mathbb{P}}$ car c'est une situation d'équiprobabilité.

I.A.2 -

$A_n \subset \Omega$ signifie que «A_n contient n éléments tous distincts»
C'est-à-dire $\boxed{A_n \text{ contient des n-arrangements de } \{1, 2, \cdots, M\}}$

I.A.3 -

Il y a M^n n-uplets de $\{1, 2, \cdots, M\}$ qui contient M éléments, et $\frac{M!}{(M-n)!}$ n-arrangements lorsque $n \leq M$, ou 0 n-arrangements de Ω lorsque $n > M$. Comme $\mathbb{P}$ est la possibilité uniforme,
Finalement,

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{\#A_n}{\#\Omega} = \begin{cases} \frac{M!}{(M-n)!M^n} & n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$$

En fait, si l'on tire successivement au moins $M + 1$ fois, la répétition est inévitable.

I.B -

I.B.1 -

On modélise la situation par $\Omega = \{1, \cdots, 365\}^n$, $\mathbb{P}$ la possibilité uniform sur Ω.
Soit A_n est l'événement que parmi une classe de n élèves, au moins deux étudiants soient nés le même jour. Alors $\overline{A_n}$ est l'événement que parmi une classe de n élèves, tous les étudiants soient nés les jours tous différents, c'est-à-dire $\overline{A_n}$ est une élément de Ω sans répétition des éléments. Pour les n élèves, le premier peut choisir 365 dates comme sa naissance, il en rest 364 dates possibles pour le deuxième élève à choisir sans répétition $\cdots$. On notice que par la principe des tiroirs, la répétition est inévitable pour $n > 365$
Finalement,

$$\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \begin{cases} 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n} & n \leq 365 \\ 0 & n > 365 \end{cases}$$

I.B.2 -

Il faut que $1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n} \geq 50\%$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui nous donne que $\boxed{n \geq 23}$. Le résultat me parait très surprenant

II - familles sommables et probabilités

II.A -

On pose $\Omega = \mathbb{N}^2$, on a donc $\forall (n,p) \in \Omega$, $g(n,p) = \alpha\beta(1-\alpha)^n(1-\beta)^p \geq 0$ avec $(\alpha,\beta) \in (0,1)^2$. Et puis,

$$\begin{aligned}\sum_{(n,p)\in\Omega} g(n,p) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \alpha\beta(1-\alpha)^n(1-\beta)^p \\ &= \alpha\beta\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\alpha)^n\sum_{p=0}^{+\infty}(1-\beta)^p\end{aligned}$$

Puisque $(\alpha,\beta) \in (0,1)^2$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\alpha)^n$ converge, et vaut $\frac{1}{\alpha}$. De même, $\sum_{p=0}^{+\infty}(1-\beta)^p$ converge, et vaut $\frac{1}{\beta}$.
On a donc $\sum_{(n,p)\in\Omega} g(n,p) = 1$, car g est positif, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}$, si on pose $\mathbb{P}((n,p)) = g(n,p)$, $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur l'espace probabilisable discret $(\mathbb{N}^2, \mathscr{P}(\mathbb{N}^2))$

II.B -

$(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ est un espace probabilisable, et la variable aléatoire X définie par

$$X = \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto & n \end{array}$$

X est une variable aléatoire discrète, car $X(\mathbb{N}^2) = \mathbb{N}$ est dénombrable. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X = k) = \{(n,p) \in \mathbb{N}^2, X(n,p) = k\} = \{(k,p) \in \mathbb{N}^2, p \in \mathbb{N}\}$. Et on a des évènement $(X = i)$ et $(X = j)$ sont disjoints lorsque $i \neq j$
Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha\beta(1-\alpha)^k(1-\beta)^p \\ &= \alpha\beta(1-\alpha)^k\sum_{p=0}^{+\infty}(1-\beta)^p \\ &= \alpha(1-\alpha)^k\end{aligned}$$

Comme $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^k = 1$ pour $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$,
la loi de X est bien donnée par $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \alpha(1-\alpha)^k, \forall k \in \mathbb{N}}$.
De même, la loi de Y est donnée par $\boxed{\mathbb{P}(Y = m) = \beta(1-\beta)^m, \forall m \in \mathbb{N}}$.

II.C -

II.C.1 -

L'évènement $(X = k, Y = m) = \{(n,p) \in \mathbb{N}^2, X(n,p) = k, Y(n,p) = m\} = \{(k,m)\}$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k, Y = m) &= \mathbb{P}(\{k,m\}) \\ &= \alpha\beta(1-\alpha)^k(1-\beta)^m \\ &= [\alpha(1-\alpha)^k][\beta(1-\beta)^m] \\ &= \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = m)\end{aligned}$$

X et Y sont donc indépendantes.

$$(X = Y) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((X = k) \cap (Y = k))$$

C'est une union disjointe, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k, Y = k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^k \beta(1-\beta)^k\\ &= \alpha\beta \sum_{k=0}^{+\infty} [(1-\alpha)(1-\beta)]^k\end{aligned}$$

Or $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, on a donc $\boxed{\mathbb{P}(X = Y) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}}$

II.C.2 -

Or X et Y sont donc indépendantes, et $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, on a

$$(X > Y) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left((X = k) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}, n<k} (Y = n) \right) \right)$$

C'est une union disjointe, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > Y) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}, n<k} \mathbb{P}(X = k, Y = n)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha(1-\alpha)^k \beta(1-\beta)^n\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha(1-\alpha)^k \sum_{n=0}^{k-1} \beta(1-\beta)^n \right)\\ &= \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} (1-\alpha)^k \beta \frac{1-(1-\beta)^k}{1-(1-\beta)}\\ &= \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} (1-\alpha)^k - \alpha \sum_{k=1}^{+\infty} (1-\alpha)^k (1-\beta)^k\\ &= \alpha \frac{1-\alpha}{1-(1-\alpha)} - \alpha \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}\\ &= 1 - \alpha - \alpha \frac{\alpha\beta - \alpha - \beta + 1}{\alpha + \beta - \alpha\beta}\end{aligned}$$

Finalement, on a $\boxed{\mathbb{P}(X < Y) = \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-\alpha\beta}}$