I - Principe de Huygens-Fresnel (formulation moderne)

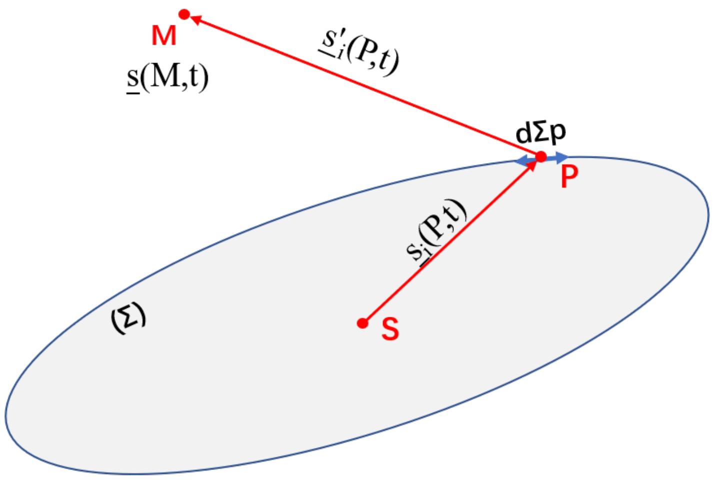

FIGURE 1 – Figure du système

Pour une source ponctuelle monochromatique S entourée d'une surface (Σ). (Σ) peut être décomposée en éléments de surface $d\Sigma_P$ centré autour de points P.
Le signal reçu en P s'écrit $\underline{s}_i(P,t) = \underline{A}_i(P)e^{i\omega t}$, avec $\underline{A}_i(P)$ l'amplitude complexe, ω la pulsation de la source S
On peur considérer chaque élément de surface $d\Sigma_P$ comme une source secondaire ponctuelle qui émet des ondes sphériques. Les ondes issues de $d\Sigma_P$ ont la même pulsation ω que la source, est elles ont un déphasage nul avec l'onde incidente en P. Ses amplitudes sont proportionnelles à celle de l'onde incidente à la surface $d\Sigma_P$.
On obtient donc le signal émis par $d\Sigma_P$ est

$$\underline{s}_i^{'}(P,t) = K\underline{A}_i(P)e^{i\omega t}\, d\Sigma_P$$

Donc le signal $\underline{s}(M,t)$ reçu en un point M étudié est la superposition des signaux émis par toutes les sources secondaires ponctuelles P, et les ondes sont incoincohérentes entre eux.
En faisant la superposition, on obtiene le signal reçu par M

$$\boxed{\underline{s}(M,t) = \iint_{(\Sigma)} K * \underline{A}_i(P)e^{i(\omega t - \varphi(M))}\, d\Sigma_P}$$

avec $\varphi(M) = k_0(PM) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(PM)$ le déphasage, K est une constante de proportionnalité homogène à l'inverse d'une surface,

I.A - L'amplitude diffractée

On a déjà en point M, l'amplitude complexe s'écrit

$$\underline{A}_{diff}(M) = \underline{A}_{diff}(\alpha,\beta) = K\underline{A}_0 \int_{x=-\frac{a}{2}}^{x=\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}[(\alpha_0-\alpha)x+(\beta_0-\beta)y]}\, dxdy$$

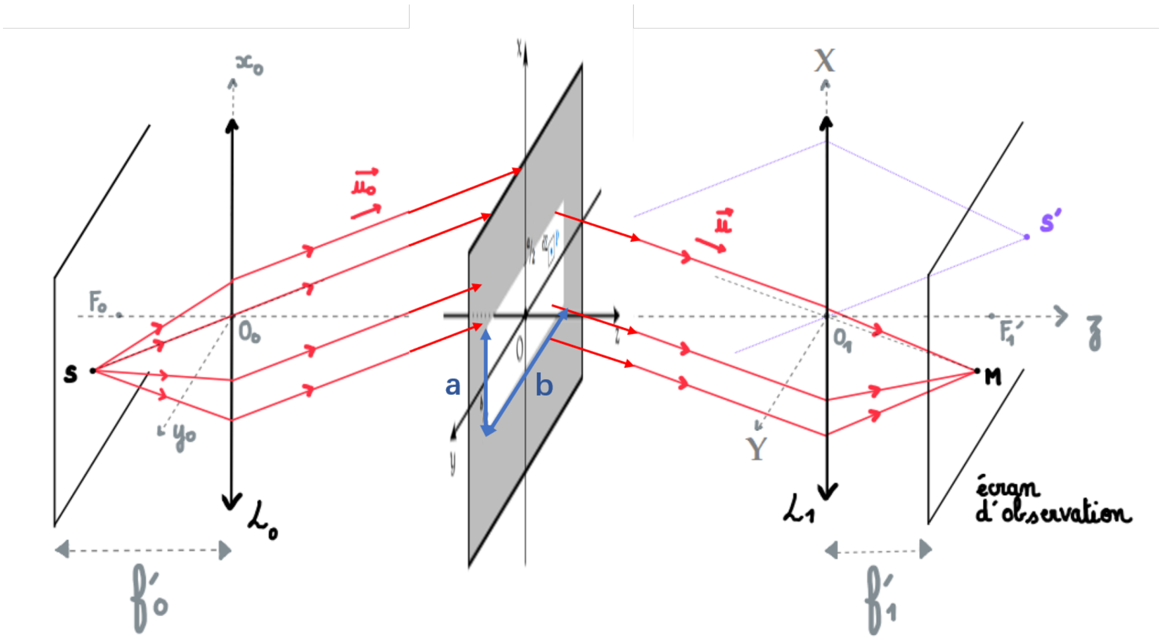

FIGURE 2 – L'amplitude diffractée pour conditions de Fraunhofer

Selon le théorème de Fubini, on a donc

$$\underline{A}_{diff}(M) = K\underline{A}_0 \int_{x=-\frac{a}{2}}^{x=\frac{a}{2}} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}[(\alpha_0-\alpha)x]}\,dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}[(\beta_0-\beta)y]}\,dy$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{x=-\frac{a}{2}}^{x=\frac{a}{2}} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}[(\alpha_0-\alpha)x]}\,dx &= \left[\frac{1}{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha)} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}[(\alpha_0-\alpha)x]}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\
&= \frac{1}{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha)}\left(e^{-\frac{i\pi}{\lambda_0}[(\alpha_0-\alpha)a]} - e^{\frac{i\pi}{\lambda_0}[(\alpha_0-\alpha)a]}\right) \\
&= \frac{1}{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha)}\left(-2i\sin(\frac{\pi}{\lambda_0}[(\alpha_0-\alpha)a])\right) \\
&= a\frac{\sin(\frac{a\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha))}{\frac{a\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha)} \\
&= a\,sinc(\frac{a\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha))
\end{aligned}$$

De même,

$$\int_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}[(\beta_0-\beta)y]}\,dy = b\,sinc(\frac{b\pi}{\lambda_0}(\beta_0-\beta))$$

Donc

$$\boxed{\underline{A}_{diff}(M) = K\underline{A}_0 ab\,sinc(\frac{a\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha))\,sinc(\frac{b\pi}{\lambda_0}(\beta_0-\beta))}$$

Donc dans le cas de la diffraction à l'infini d'une onde monochromatique plane par une ouverture rectangulaire de surface ab, l'éclairement obtenu sur l'écran s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(M) &= \underline{A}_{diff}(M)\underline{A}^*_{diff}(M)\\ &= K^2\underline{A}_0\underline{A}^*_0 a^2b^2\, sinc^2(\frac{a\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha))\, sinc^2(\frac{b\pi}{\lambda_0}(\beta_0-\beta))\\ &= \boxed{\mathcal{E}_{max}\, sinc^2(\frac{a\pi}{\lambda_0}(\alpha_0-\alpha))\, sinc^2(\frac{b\pi}{\lambda_0}(\beta_0-\beta))}\end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}_{max} = K^2|\underline{A}_0|^2a^2b^2$, l'éclairement maximal, obtenu dans la direction de l'optique géométrique($\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$)