# I -

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, pour tout $x \in ]-1,1[$, on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} x^n$$

avec le rayon de convergence $R = 1$ On a donc $\forall x \in ]-1,1[$,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(1 - 2k)}{2^n n!} x^n$$

il faut $|x| < \frac{1}{4}$ pour que cette série entière soit convergente si on remplace $x$ par $-4x$, donc $\forall x \in ]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, on a

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(1 - 2k)}{2^n n!} (-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k - 1)}{2^n n!} (4x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-3)!}{(n-2)! 2^{2n-1} n!} (4x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n-1)(n-1)! 2^{2n-1} n!} (4x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \binom{2n-1}{n} x^n
\end{aligned}$$