# I - Exercice 1-2 : Equilibrage d'une machine tournante

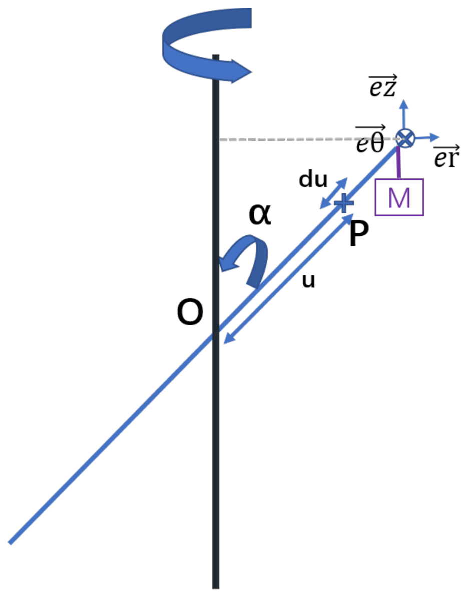


Figure 1 – la barre étudiée

## I.A -

- système $(\Sigma)$ : la barre de masse $m$ qui tourne autour d'un axe, sa masse lilinéique $\rho = \frac{m}{2L}$
- référentiel du laboratoire $(R)$, galiléen, de repère $(O, (\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_z}))$

Dans la base cylindrique, on a

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{e_\theta} \quad \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\vec{e_r} \quad \frac{d\vec{e_z}}{dt} = \vec{0}$$

Pour le point matériel $P$ sur la barre, on a sa position

$$\overrightarrow{OP} = u\sin\alpha\vec{e_r} + u\cos\alpha\vec{e_z}$$

donc sa vitesse

$$\overrightarrow{v}_{(R)}(P) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = usin\alpha\omega\vec{e_\theta}$$

Donc l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} E_c(\Sigma) &= \int_{(\Sigma)} \frac{1}{2}||\overrightarrow{v}_{(R)}(P)||^2 dm_P \\ &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}u^2\sin^2\alpha\omega^2\frac{m}{2L}du \\ &= \boxed{\frac{u^2\sin^2\alpha\omega^2 mL}{6}} \end{aligned}$$

## I.B -

Sa moment cinétique

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{O,(R)}(\Sigma) &= \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}_{(R)}(P) dm_P \\
&= \int_{-L}^{L} (u \sin \alpha \vec{e_r} + u \cos \alpha \vec{e_z}) \wedge (usin\alpha\omega\vec{e_\theta}) dm_P \\
&= \vec{e_z} \int_{-L}^{L} \omega u^2 \sin^2 \alpha dm_P - \vec{e_r} \int_{-L}^{L} \omega u^2 \sin \alpha \cos \alpha dm_P \\
&= \boxed{\frac{\omega \sin \alpha m L^2}{3} (\sin \alpha \vec{e_z} - \cos \alpha \vec{e_r})}
\end{aligned}$$

## I.C -

le moment dynamique

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_{O,(R)}(\Sigma)}{dt} &= \frac{\omega \sin \alpha m L^2}{3} \frac{d}{dt} (\sin \alpha \vec{e_z} - \cos \alpha \vec{e_r}) \\
&= \boxed{-\frac{mL^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{3} \vec{e_\theta}}
\end{aligned}$$

Le moment dynamique est parallèle à la direction de sa vitesse, qui rotate autour de $O_z$, donc $\boxed{\vec{L}_{O,(R)}(\Sigma) \text{ est en précession autour de } O_z}$

## I.D -

Pour que la barre reste à l'équilibre, il faut $\vec{F}_{ext \to (\Sigma) = 0}$, on a donc la force exercé par l'axe sur la barre $\boxed{\vec{F}_{(R),axe \to (\Sigma)} = -\vec{F}_{pes} = mg\vec{e_z}}$

Pour annuler leur moment en $O$, on peut suspendre un objet de masse $M$, qui vérifie $\vec{M}_{O,tot \to (R)}(\Sigma) = 0$, donc

$$\begin{aligned}
\vec{M}_{O,M \to (R)}(\Sigma) &= (L \sin \alpha \vec{e_r} + L \cos \alpha \vec{e_z}) \wedge (-Mg\vec{e_z}) \\
&= -MgL \sin \alpha (-\vec{e_\theta})
\end{aligned}$$

car le moment de poids est nul, on a donc $Mgl \sin \alpha \vec{e_\theta} - \frac{mL^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{3} \vec{e_\theta}$, d'où $\boxed{M = \frac{mL\omega^2 \cos \alpha}{3g}}$