I -

I.A -

Soient $i \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$, on a

$$H_i(a) = \begin{cases} \frac{a\times(a-1)\times\cdots\times(a-i+1)}{i!} = \frac{a!}{i!(a-i)!} = \binom{a}{i} & a \geq 0 \\ (-1)^i \frac{(i-1-a)\times(i-2-a)\times\cdots\times(-a)}{i!} = (-1)^i \frac{(i-1-a)!}{i!(-1-a)!} = (-1)^i \binom{i-1-a}{i} & a < 0 \end{cases}$$

et on a $H_0 = 1$. En tous cas, on a $H_i(a) \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, H_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}}$

I.B -

soit $i \in \mathbb{N}^*$, on a

$$deg(H_i) = deg(\frac{a \times (a-1) \times \cdots \times (a-i+1)}{i!}) = i$$

et $deg(H_0) = 0$

On a alors $\forall i \in \mathbb{N}$, $deg(H_i) = i$. D'après le cours, on a donc $\boxed{(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{K}[X]}$

I.C -

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + (Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\Delta(P) + \Delta(Q) \end{aligned}$$

alors $\boxed{\Delta \text{ est une application linéaire}}$

I.D -

Soit $(n, i) \in \mathbb{N}^2$, montrer que

$$\Delta^n(H_i) = \begin{cases} 0 & i < n \\ 1 & i = n \\ \frac{X\times(X-1)\times\cdots\times(X-i+(n+1))}{(i-n)!} & i > n \end{cases}$$

par récurrence sur n

- initialisation : soit $n = 0$, c'est le même que la définition de H_i
- hérédité : supposons que le résultat est vrai au rang n, pour le rang $n+1$
  - Si $i = n+1$, alors $i > n$, $\Delta^n(H_i) = \frac{X\times(X-1)\times\cdots\times(X-i+(n+1))}{(i-n)!} = X$,
    donc $\Delta^{n+1}(H_i) = \Delta(\Delta^n(H_i)) = (X+1) - X = 1$
  - Si $i < n+1$, alors $i \leq n$, donc $\Delta^n(H_i)$ est un polynôme constant. On a $\Delta^{n+1}(H_i) = \Delta(\Delta^n(H_i)) = 0$

- Si $i > n+1$, alors $i > n$, donc

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1}(H_i) &= \Delta(\Delta^n(H_i)) \\ &= \frac{(X+1)\times X\times\cdots\times(X-i+(n+2))}{(i-n)!} - \frac{X\times(X-1)\times\cdots\times(X-i+(n+1))}{(i-n)!} \\ &= \frac{X\times\cdots\times(X-i+(n+2))}{(i-n)!}((X+1)-(X-i+(n+1))) \\ &= \frac{X\times\cdots\times(X-i+(n+2))}{(i-n-1)!}\end{aligned}$$

Le résultat est encore vrai au rang $n+1$

On en déduit

$$\Delta^n(H_i) = \begin{cases} 0 & i < n \\ \frac{X\times(X-1)\times\cdots\times(X-i+(n+1))}{(i-n)!} = \boxed{H_{i-n}} & i \geq n \end{cases}$$

Car la famille $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$, soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $m >= 0$, il s'écrit comme $P = \sum_{k=0}^{m} a_k H_k$, avec les $a_i \in \mathbb{C}$.
On a $\forall n \in [\![0, m]\!]$, $\Delta^n(P) = a_n + \sum_{k=n+1}^{m} a_k H_k$, donc $\Delta^n(P)(0) = a_n + \sum_{k=n+1}^{m} a_k H_k(0) = a_n$
On a donc les coordonnées de P dans cette base est $\boxed{(P(0), \Delta(P)(0), \cdots, \Delta^m(P)(0))}$

I.E -

Supposons que $m \in \mathbb{N}, P = \sum_{i=0}^{m} a_i H_i$

- sens indirect : soient $(a_i)_{i\in[\![0,m]\!]}$ entiers, soit $a \in \mathbb{Z}$, car $\forall i \in [\![0, m]\!]$, $H_i(a) \in \mathbb{Z}$, donc $\forall i \in [\![0, m]\!]$, $a_i H_i(a) \in \mathbb{Z}$, donc $P(a) \in \mathbb{Z}$. Donc $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$
- sens direct : supposons que $\forall a \in \mathbb{Z}$, $P(a) \in \mathbb{Z}$ Montrer que «$\forall n \in [\![0, m]\!], (a_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{Z}$» par récurrence
  - $n = 0$: $P(0) = \sum_{i=0}^{m} a_i H_i(0) = a_0 \in \mathbb{Z}$
  - Supposons que $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{Z}$, on a

$$P - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k H_k$$

Donc

$$\Delta^{n+1}\left(P - \sum_{k=0}^{n} a_k H_k\right) = \Delta^{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{m} a_k H_k\right)$$

Donc $a_{n+1} = \Delta^{n+1}(P)(0) \in \mathbb{Z}$

Finalement, on a $P(\mathbb{Z}) \in \mathbb{Z}$ si et seulement si les coordonnées sont entières

I.F -

On a $\Delta(X+1) = 1 = \Delta(X+2)$, donc $\boxed{\Delta \text{ n'est pas injective}}$
Pour $P = \sum_{i=0}^{m+1} b_i X^i \in \mathbb{C}[X]$, on va chercher $Q = \sum_{i=0}^{m+1} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q = P(X+1) - P(X)$

On a

$$\begin{aligned}
P(X+1)-P(X) &= \sum_{i=0}^{m+1} b_i (X+1)^i - \sum_{i=0}^{m+1} b_i X^i \\
&= \sum_{i-0}^{m+1} b_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} X^j - \sum_{i=0}^{m+1} b_i X^i \\
&= \sum_{i-0}^{m+1} b_i \left(-X^i + \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} X^j \right) \\
&= \sum_{i-0}^{m+1} b_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} X^j \right) \\
&= \sum_{i-0}^{m} b_{i+1} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i+1}{j} X^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=j+1}^{m+1} \binom{i}{j} b_i \right) X^j
\end{aligned}$$

en faisant une sommation des paquets(de somme finie a termes positifs)
Alors pour tout $P = \sum_{i=0}^{m+1} b_i X^i \in \mathbb{C}[X]$, il existe $Q = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j \in \mathbb{C}[X]$, avec $\forall j \in [\![0, m]\!], a_j = \sum_{i=j+1}^{m+1} \binom{i}{j} b_i$ tel que $Q = P(X+1) - P(X)$, donc $\boxed{\Delta \text{ est surjective}}$