I -

- Lorsque $\alpha > 0$, on a $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors

$$\begin{aligned}\sqrt{1+n^\alpha} - 1 &= n^\alpha\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}} - 1\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha\left(1+\frac{1}{2n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) - 1\\ &= n^\alpha - \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

  la série est donc divergent grossièrement.

- Lorsque $\alpha = 0$, on a

$$u_n = \begin{cases} \lambda(\sqrt{2}-1) & n = 3k, k \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt{2}-1 & sinon \end{cases}$$

  donc $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série est donc divergent grossièrement.

- Lorsque $\alpha < 0$, on a $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors

$$\begin{aligned}\sqrt{1+n^\alpha} - 1 &= 1 + \frac{1}{2}n^\alpha + o(n^\alpha) - 1\\ &= \frac{1}{2}n^\alpha + o(n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{-\alpha}}\end{aligned}$$

  donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{-\alpha}}$ cars elles sont à termes positifs.

On a $\sum u_n$ est divergente grossièrement lorsque $\boxed{\alpha \geq 0}$

II -

On a $\sum |u_n|$ a le même nature que $\sum \frac{1}{n^{-\alpha}}$, qui est divergent lorsque $\alpha < -1$, donc $\sum u_n$ est convergente absolument lorsque $\boxed{\alpha < -1}$

III -

III.A -

On a $w_n = u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}$, donc

$$\begin{aligned}
w_n &= \lambda\left(\sqrt{1+\frac{1}{3n}}-1\right)+\left(\sqrt{1+\frac{1}{3n+1}}-1\right)+\left(\sqrt{1+\frac{1}{3n+2}}-1\right)\\
&= \lambda\left(\frac{1}{6n}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3n}\right)^2\right)+\frac{1}{6n+2}+\frac{1}{6n+4}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(3n+1)^2}+\frac{1}{(3n+2)^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{\lambda}{6n}-\frac{\lambda}{72n^2}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{18n^2}+\frac{1}{6n}-\frac{2}{18n^2}-\frac{1}{72n^2}-\frac{1}{72n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{\lambda}{6n}-\frac{\lambda}{72n^2}+\frac{2}{6n}-\frac{14}{72n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{w_n = \frac{\lambda+2}{6n}-\frac{\lambda+14}{72n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

III.B -

Supposons que

$$\Phi : \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 3n \end{array}$$

On a Φ est strictement croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}, \Phi(n+1)-\Phi(n) = 3$. Lorsque $\alpha = -1$, $\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Par sommation par parquets de longueur bornée, on a $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.

- Lorsque $\lambda \neq -2$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}$, $\sum w_n$ est donc divergente (série de Riemann diverge).
- Lorsque $\lambda = -2$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{6n^2}$, $\sum w_n$ est donc converge (série de Riemann converge).

Finalement, on a $\sum u_n$ converge si $\boxed{\lambda = -2}$

IV -

Lorsque $\alpha = -1, \lambda = -2$, on a $w_n = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et $\sum w_n$ converge. On suppose que $v_n = -w_n = \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, qui est une série à termes positfs.

IV.A -

Par comparaison des séries à termes positfs, on a $R_n(w) = -R_n(v) = -R_n(\frac{1}{6n^2})$, en notant $f : n \mapsto \frac{1}{6n^2}$, par une comparaison série-intégrale, on a : $R_n(v) \sim \frac{1}{6n}$ car $f(n) = o\left(\frac{1}{6n}\right) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,dt\right)$, on a donc $\boxed{R_n(w) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}}$

IV.B -

On a $R_{3n-1}(u) = \sum_{k=3n}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} w_k = R_n(w)$, donc $\boxed{R_{3n-1}(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}}$.
Et puis, on a

$$\begin{aligned}
R_{3n}(u) &= R_{3n-1}(u) - u_{3n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n} - (-2)\left(\sqrt{\frac{1}{3n}+1} - 1\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{R_{3n}(u) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}}$

IV.C -

On a

$$\begin{aligned}
R_{3n+1}(u) &= R_{3n}(u) - u_{3n+1} \\
&= \frac{1}{6n} - \left(\sqrt{1+\frac{1}{3n+1}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{6n} - \left(1 + \frac{1}{6n+2} - 1 + o\left(\frac{1}{3n+1}\right)\right) \\
&= o(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

Il tends vers 0 le plus vite lorsque n tends vers $+\infty$