I -

I.A -

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha} z^n$. Pour $z \neq 0$, $u_n(z) \neq 0$, donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha} z^{n+1}}{\frac{1}{(n)^\alpha} z^n}\right| = \left|(\frac{n}{n+1})^\alpha z\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |z|$$

Par le critère de d'Alembert
$\sum u_n(z)$ est absolument convergente lorsque $|z| < 1$
$\sum u_n(z)$ est grossièrement divergente lorsque $|z| > 1$
On a donc $\boxed{R(\sum \frac{1}{n^\alpha} z^n) = 1}$

I.B -

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n! \times z^{n^2}$. Pour $z \neq 0$, $u_n(z) \neq 0$, donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|(n+1) \times z^{2n+1}\right|$$

Par le critère de d'Alembert
lorsque $|z| < 1$, $|(n+1) \times z^{2n+1}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\sum u_n(z)$ est absolument convergente
lorsque $|z| \geq 1$, $|(n+1) \times z^{2n+1}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, $\sum u_n(z)$ est grossièrement divergente
On a donc $\boxed{R(\sum n! \times z^{n^2}) = 1}$

I.C -

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n! \times z^{n!}$. Pour $z \neq 0$, $u_n(z) \neq 0$, donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|(n+1) \times z^{n \times n!}\right|$$

Par le critère de d'Alembert
lorsque $|z| < 1$, $\left|(n+1) \times z^{n \times n!}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\sum u_n(z)$ est absolument convergente
lorsque $|z| \geq 1$, $\left|(n+1) \times z^{n \times n!}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, $\sum u_n(z)$ est grossièrement divergente
On a donc $\boxed{R(\sum n! \times z^{n!}) = 1}$

II -

II.A -

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Pour $z \neq 0$, $u_n(z) \neq 0$, donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|(\frac{n+1}{n+2}) \times z\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |z|$$

Par le critère de d'Alembert
$\sum u_n(z)$ est absolument convergente lorsque $|z| < 1$
$\sum u_n(z)$ est grossièrement divergente lorsque $|z| > 1$
On a donc $\boxed{R(\sum \frac{z^{n+1}}{n+1}) = 1}$

II.B -

On a $x = |z| \in \mathbb{R}_+$, donc

- lorsque $x > 1$, $\sum u_n(z)$ est grossièrement divergente
- lorsque $x < 1$, on note

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{e^{(n+1)i\theta}}{n+1} x^{n+1}$$

  la série dérivée est donc $\sum_{n\geq 0} e^{(n+1)i\theta} x^n$, de même rayon de convergence $R = 1$.
  Pour tout $x \in [0, 1[$, on a donc

$$S^{'}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{(n+1)i\theta} x^n = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\theta} x)^n = \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}$$

  car $|e^{i\theta} x| = |e^{i\theta}||x| < 1$ Donc

$$S(x) = -\ln(1 - e^{i\theta} x) + C$$

  Comme $S(0) = 0$, on a $C = 0$, donc $S(x) = -\ln(1 - e^{i\theta} x)$
- lorsque $x = 1$, $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{e^{(n+1)i\theta}}{n+1}$. On sait que cette série converge sauf en $z = 1$ d'après le cours.

II.C -

Soient $\theta \in]0, 2\pi[$, on a $x = |z| = 1$. Par les résultats précédents, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)i\theta}}{n+1}$ converge, et par continuité radicale, on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)i\theta}}{n+1} = \lim_{x\to 1^-} S(x) = -(1 - e^{i\theta})}$$