I - Exercice 1

I.A -

Comme f est positive, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+, f^{"}(x) \geq f(x) \geq 0$, donc $f^{"}$ est positive, $\boxed{f \text{ est donc convexe}}$
Car f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a donc la courbe représentative de f est au-dessus ses tangentes.
Soit $a \in \mathbb{R}_+$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq f^{'}(a)(x-a)+f(a)$. Si $f^{'}(a) > 0$, on a $f(x) \geq f^{'}(x-a)+f(a) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, c'est l'absurde($f$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ d'après l'énoncé). Donc $f^{'}(a) \leq 0$
On a donc $\forall a \in \mathbb{R}_+, f^{'}(a) \leq 0$, donc $f^{'}$ est négative sur $\mathbb{R}_+$, $\boxed{f \text{ est donc décroissante}}$

I.B -

f est décroissante est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc f admet une limite, on le note l
Car $f^{"}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $f^{'}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. $f^{'}$ admet aussi une limite car elle est majorée par 0, on le note $l^{'}$
Soit $a \in \mathbb{R}_+$, soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x > a$, d'après TAF, on a il existe $\xi \in]a,x[$, tel que $f^{'}(\xi) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, on a donc $l^{'} = f^{'}(\xi) \xrightarrow[x \to +\infty]{} (l - f(a)) \times 0 = 0$. Alors $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f^{'}(x) = l^{'} = 0}$,
On a aussi $\forall x \in \mathbb{R}_+, f^{"}(x) \geq f(x) \geq l$ car f est décroissante, donc de même méthode, soit $b \in \mathbb{R}_+$, soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x > b$, d'après TAF, on a il existe $\lambda \in]b,x[$, tel que $l \leq f^{"}(\lambda) = \frac{f^{'}(x)-f^{'}(b)}{x-b}$, donc $l \leq \frac{l^{'}-f^{'}(b)}{x-b} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Car f est positive, donc $l \geq 0$, donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l = 0}$

I.C -

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h^{'}(x) = [f^{"}(x) - f(x)]e^{-x} \leq 0$, $\boxed{h \text{ est donc croissante}}$
De puis, on a $h(x) = \frac{f(x)+f^{'}(x)}{e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, car h est croissante, on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) \leq 0}$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) + f^{'}(x) \leq 0$ car $x \mapsto e^{-x}$ est positive. Et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+, g^{'}(x) = [f(x) + f^{'}(x)]e^x \leq 0$, $\boxed{\text{g est donc décroissante}}$

I.D -

Car g est décroissante, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(0)e^0 \geq f(x)e^x$, donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq f(0)e^{-x}}$

II - Exercice 2

II.A -

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $u_n = \frac{|x-a_n|}{3^n}$. C'est une série à termes positifs.
On a $u_n \sim \frac{1}{3^n}$ car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $\sum u_n$ converge car $\sum \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique

converge. Donc $\boxed{\text{f est bien définie sur } \mathbb{R}}$ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
f(tx+(1-t)y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|tx+(1-t)y-a_n|}{3^n} \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|tx-ta_n|}{3^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|(1-t)y-(1-t)a_n|}{3^n} \\
&= t\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n} + (1-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|y-a_n|}{3^n} \\
&= tf(x)+(1-t)f(y)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{f est donc convexe}}$

II.B -

soit $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|f(a_0+h)-f(a_0)-|h|| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_0+h-a_n|}{3^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_0-a_n|}{3^n} - |h|\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_0+h-a_n|}{3^n} + |h| - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_0-a_n|}{3^n} - |h|\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_0-a_n|}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|h|}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_0-a_n|}{3^n}\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|h|}{3^n}\right| \\
&= |h|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\right) \\
&\leq \frac{|h|}{2}
\end{aligned}$$

Car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ converge(série géométrique convergente), et vaut $\frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$

Donc, on a $\boxed{\forall h \in \mathbb{R}, |f(a_0+h)-f(a_0)-|h|| \leq \dfrac{|h|}{2}}$

Car f est convexe, elle admet les dérivées à droite et à gauche en tous les $a_i, i \in \mathbb{N}$

On le montre par l'absurde : supposons que f est dérivable en tous les points de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $i \in \mathbb{N}$, on note $f_d^{'}(a_i)$ la dérivée de a_i à droite, $f_g^{'}(a_i)$ la dérivée de a_i à gauche, $f_g^{'}(a_i) \leq f_d^{'}(a_i)$ car f est convexe

On suppose que $f_d^{'}(a_i) = f_g^{'}(a_i)$.

On a $|f(a_0+h)-f(a_0)-|h|| \leq \frac{|h|}{2}$, soit $h \neq 0$

- $h > 0$, on a donc

$$\frac{-h}{2} \leq f(a_0+h)-f(a_0)-h \leq \frac{h}{2}$$

donc

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(a_0+h)-f(a_0)}{h} \leq \frac{3}{2}$$

donc

$$\frac{1}{2} \leq f_d^{'}(a_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a_0+h)-f(a_0)}{h} \leq \frac{3}{2}$$

- $h < 0$, on a donc

$$\frac{h}{2} \leq f(a_0+h) - f(a_0) + h \leq -\frac{h}{2}$$

donc

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{f(a_0+h)-f(a_0)}{h} \leq -\frac{1}{2}$$

donc

$$-\frac{3}{2} \leq f_g^{'}(a_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a_0+h)-f(a_0)}{h} \leq -\frac{1}{2}$$

on a

$$f_d^{'}(a_0) \geq \frac{1}{2} > -\frac{1}{2} \geq f_g^{'}(a_0)$$

Donc il est impossible que $f_d^{'}(a_0) = f_g^{'}(a_0)$, c'est l'absurde.
Finalement, $\boxed{\text{f n'est pas dérivable en } a_0}$

II.C -

Initialisation : f n'est pas dérivable en a_0
Hérédité : on suppose que (H_k) : f n'est pas dérivable en tous les a_i, $i \in [\![0, \cdots, k]\!]$ soit vrai.
Pour le rang $k+1$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n} = \sum_{n=0}^{k} \frac{|x-a_n|}{3^n} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n}$$

Si on note $\forall i \in \mathbb{N}, b_i = a_{i+k+1}$, donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de réels bornée.
On a donc

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{3^n} = \frac{1}{3^{k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-b_n|}{3^n}$$

qui n'est pas dérivable en $b_0 = a_{k+1}$
Et on a $\sum_{n=0}^{k} \frac{|x-a_n|}{3^n}$ est dérivable en a_{k+1} lorsque $a_{k+1} \neq a_i, \forall i \in [\![0, \cdots, k]\!]$ (lorsque il existes $i \in [\![0, \cdots, k]\!]$ tel que $a_i = a_{k+1}$, f est indérivable en cet $a_i = a_{k+1}$)
Alors, f n'est pas dérivable en a_{k+1}. Par notre hypothèse que f n'est pas dérivable en tous les a_i, $i \in [\![0, \cdots, k]\!]$, on a donc f n'est pas dérivable en tous les a_i, $i \in [\![0, \cdots, k+1]\!]$, (H_{k+1}) est encore vraie.
Finalement, on a $\boxed{\text{f n'est pas dérivable en tous les } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}}$