I - la différence de marche

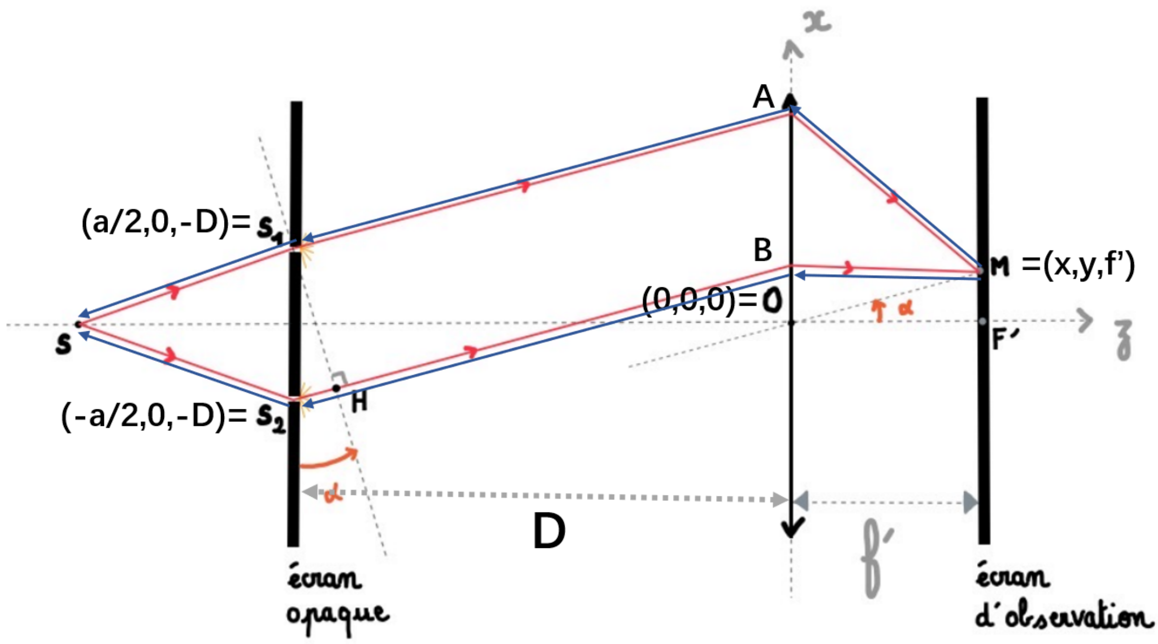

Figure 1 – Expérience des trous de Young

On commence par

$$\delta_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1$$

Supposons que l'expérience est fait dans un milieu homogène d'indice de fraction n : $(SM)_1 = n * SM = n * S_1M + n * SS_1 = (S_1M) + (SS_1)$, de même, $(SM)_2 = (S_2M) + (SS_2)$, on arrive à

$$\delta_{2/1}(M) = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

Car S_1 et S_2 sont symmétrique par rapport à l'axe O_z sur lequelle S se trouve, on a $SS_1 = SS_2$, donc $(SS_1) = (SS_2)$, d'où

$$\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M) = (S_2H) + (HM) - (S_1M)$$

Par principe du retour inverse de la lumière, on peut considerer les deux rayons en bleu, qui sont issus de M et qui suivent le même direction que les rayons en rouge, mais de sens opposites. On a donc

$$\phi(S_1) = \phi(M) + (MS_1)$$
$$\phi(H) = \phi(M) + (MH)$$

Et selon théorème de Malus, puisque S_1H est perpendiculaire aux deux rayons parallèles entre eux, S_1 et H sont sur la même surface d'onde, c'est à dire : $\phi(S_1) = \phi(H)$. On a donc $\phi(M) + (MS_1) = \phi(M) + (MH)$, d'où $(MS_1) = (MH)$, donc

$$\delta_{2/1}(M) = (S_2H) = \overline{S_2H}$$

lorsque on fait l'expérience dans le vide($n = 1$). On utilise la mesure algébrique ici pour faire des calculs suivants car $\overline{S_2H}$ est $\delta_{2/1}(M)$ sont de même signe (Si M est au-dessus de Oz, ils sont tous positifs, et si M est au-dessous, ils sont tous negatifs).

Puisque $\overrightarrow{S_2H}$ est le projection de $\overrightarrow{S_2S_1}$ sur $\overrightarrow{S_2B}$, qui est forcément parallèle à $\overrightarrow{OM}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\overline{S_2H} &= \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{S_2B}}{\|\ \overrightarrow{S_2B}\ \|} \\
&= \frac{\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{OM}}{\|\ \overrightarrow{OM}\ \|} \\
&= \frac{(a,0,0)\cdot(x,y,f')}{\|(x,y,f')\|} \\
&= \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2+f'^2}} \\
&= \frac{ax}{f'}\left(1+\left(\frac{x}{f'}\right)^2+\left(\frac{y}{f'}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Si on fait l'observation proche de l'axe est à une grande distance : $|x| \ll f'$ et $|y| \ll f'$, donc $\left(\frac{x}{f'}\right)^2 + \left(\frac{y}{f'}\right)^2 \ll 1$. Par développement limité à l'ordre 0, on a $\left(1+\left(\frac{x}{f'}\right)^2+\left(\frac{y}{f'}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1$. Finalement, la différence de marche est $\boxed{\delta_{2/1}(M) = \overline{S_2H} = \frac{ax}{f'}}$