I - la distance maximale

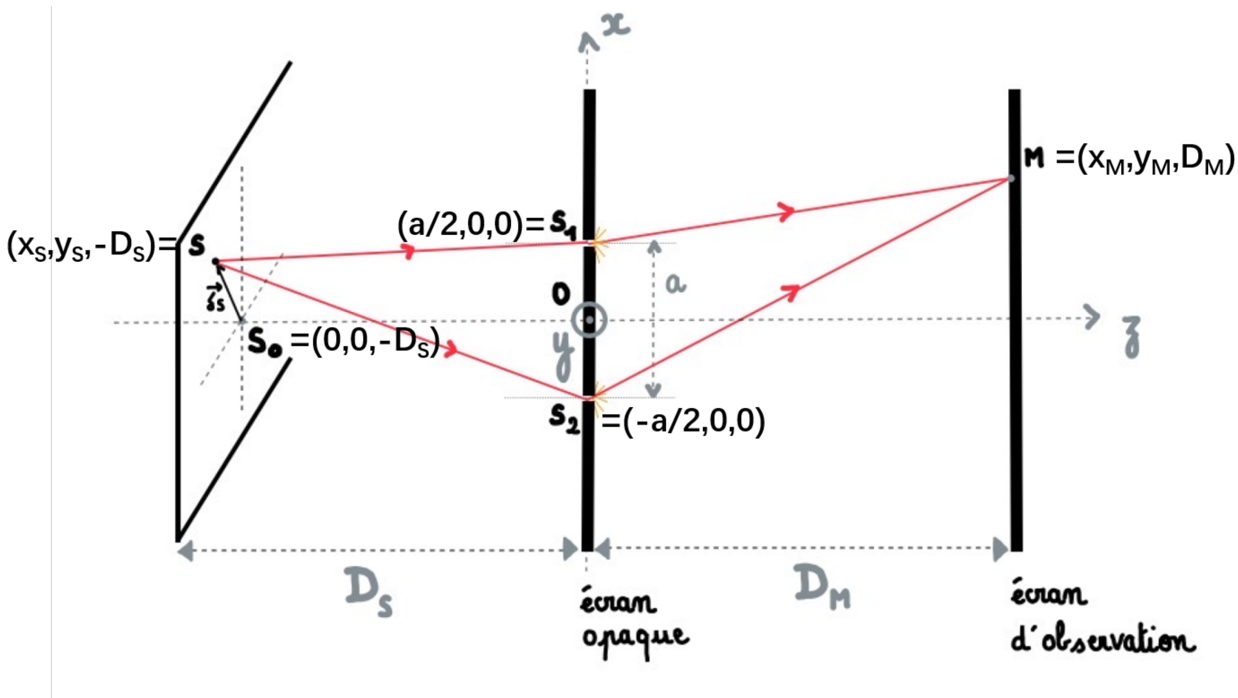

Figure 1 – Expérience des trous de Young

On commence par

$$\delta_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1$$

Supposons que l'expérience est fait dans un milieu homogène d'indice de fraction n : $(SM)_1 = n * SM = n * S_1M + n * SS_1 = (S_1M) + (SS_1)$, de même, $(SM)_2 = (S_2M) + (SS_2)$, on arrive à

$$\delta_{2/1}(M) = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M) = SS_2 - SS_1 + S_2M - S_1M$$

lorsque on fait l'expérience dans le vide($n = 1$). En appliquant les coordonnées, on a

$$\begin{aligned}
\delta_{2/1}(M) &= (SS_2 - SS_1) + (S_2M - S_1M) \\
&= \left(\sqrt{\left(x_s + \frac{a}{2}\right)^2 + y_s^2 + D_s^2} - \sqrt{\left(x_s - \frac{a}{2}\right)^2 + y_s^2 + D_s^2}\right) \\
&+ \left(\sqrt{\left(x_M + \frac{a}{2}\right)^2 + y_M^2 + D_M^2} - \sqrt{\left(x_M - \frac{a}{2}\right)^2 + y_M^2 + D_M^2}\right) \\
&= D_s\left(\sqrt{\left(\frac{x_s + \frac{a}{2}}{D_s}\right)^2 + \left(\frac{y_s}{D_s}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{x_s - \frac{a}{2}}{D_s}\right)^2 + \left(\frac{y_s}{D_s}\right)^2 + 1}\right) \\
&+ D_M\left(\sqrt{\left(\frac{x_M + \frac{a}{2}}{D_M}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{D_M}\right)^2 + 1} - \sqrt{\left(\frac{x_M - \frac{a}{2}}{D_M}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{D_M}\right)^2 + 1}\right)
\end{aligned}$$

Lorsque l'on fait l'observation au voisinage de l'axe O_z et à grande distance, c'est à dire que $|x_s| \ll D_s, |y_s| \ll D_s, |x_M| \ll D_M, |y_M| \ll D_M, |a| \ll D_S, |a| \ll D_M$. Donc

$$\left(\frac{x_M + \frac{a}{2}}{D_M}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{D_M}\right)^2 \ll 1, \left(\frac{x_M - \frac{a}{2}}{D_M}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{D_M}\right)^2 \ll 1$$

et

$$\left(\frac{x_s + \frac{a}{2}}{D_s}\right)^2 + \left(\frac{y_s}{D_s}\right)^2 \ll 1, \left(\frac{x_s - \frac{a}{2}}{D_s}\right)^2 + \left(\frac{y_s}{D_s}\right)^2 \ll 1,$$

Par développement limité à l'ordre 1 que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ lorsque $x \ll 1$, on a

$$\begin{aligned}\delta_{2/1}(M) &= D_s\left(1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_s + \frac{a}{2}}{D_s}\right)^2 + \left(\frac{y_s}{D_s}\right)^2\right) - 1 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_s - \frac{a}{2}}{D_s}\right)^2 + \left(\frac{y_s}{D_s}\right)^2\right)\right) \\ &+ D_M\left(1 + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_M + \frac{a}{2}}{D_M}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{D_M}\right)^2\right) - 1 - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_M - \frac{a}{2}}{D_M}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{D_M}\right)^2\right)\right) \\ &= D_s\left(\frac{\left(x_s + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x_s - \frac{a}{2}\right)^2}{D_s^2}\right) + D_M\left(\frac{\left(x_M + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x_M - \frac{a}{2}\right)^2}{D_M^2}\right)\end{aligned}$$

Finalement, on a $\boxed{\delta_{2/1}(M) = \frac{ax_s}{D_s} + \frac{ax_M}{D_M}}$.

On a donc le déphasage $\phi_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1}(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax_s}{D_s} + \frac{ax_M}{D_M}\right)$

L'éclairement est donc $\boxed{\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax_s}{D_s} + \frac{ax_M}{D_M}\right)\right)}$

Pour la frange brillante d'ordre 0, il faut que $\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax_s}{D_s} + \frac{ax_M}{D_M}\right) = 0$, d'où $x_{M,0} = -x_s\frac{D_M}{D_s}$, qui a une traslation de $-x_s\frac{D_M}{D_s}$ que $x'_{M,0} = 0$(le cas où $S = S_0$). Comme l'interfrange ne change pas, $\boxed{\text{tous les franges sont translatées de } -x_s\frac{D_M}{D_s} \text{ selon l'axe } O_x}$.