I - Exercice 1 : Manipulations sur les bornes inférieures et supérieures

I.A -

Soit $(a,b) \in (A \cup B)^2$, on va distinguer deux cas :

- S'il existe $p \in A$, $q \in B$ tels que $d(a,b) \leq d(p,q)$, alors pour tout $c \in A$, $d \in B$ on a

$$d(a,b) \leq d(p,q) \leq d(p,c) + d(c,d) + d(d,q)$$

car $(c,p) \in A^2$, $(d,q) \in B^2$, par la définition de borne supérieur, on a donc

$$d(a,b) - d(c,d) \leq d(p,c) + d(d,q) \leq diam(A) + diam(B)$$

indépendant du choix de $(a,b) \in (A \cup B)^2$, on peut passer à la limite de cette inégalité, on obtient

$$diam(A \cup B) - d(c,d) \leq diam(A) + diam(B)$$

donc

$$diam(A \cup B) - (diam(A) + diam(B)) \leq d(c,d)$$

indépendant de choix du $(c,d) \in A \times B$, on peut passer à la limite de cette inégalité, on obtient

$$diam(A \cup B) - (diam(A) + diam(B)) \leq d(A,B)$$

Finalement,

$$diam(A \cup B) \leq d(A,B) + diam(A) + diam(B)$$

- S'il n'existe pas $p \in A$, $q \in B$ tels que $d(a,b) \leq d(p,q)$, c'est à dire $(a,b) \in A^2$ ou $(a,b) \in B^2$ et donc $diam(A \cup B) = diam(A)$ ou $diam(A \cup B) = diam(B)$, on a bien

$$diam(A \cup B) \leq diam(A) + diam(B) + d(A,B)$$

En tout cas, on a $\boxed{diam(A \cup B) \leq diam(A) + diam(B) + d(A,B)}$

I.B -

Soient $(x,y) \in E^2$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $d(y,u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(y,A)$,
Soit $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire, on a $d(x,u_n) - d(y,u_n) \leq d(x,y)$. Donc

$$d(x,A) - d(y,u_n) \leq d(x,u_n) - d(y,u_n) \leq d(x,y)$$

On peut passer à la limite de cette inégalité, on obtient

$$d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$$

De même, on a aussi $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$
Finalement, on a donc $\boxed{\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) \geq |d(x,A) - d(y,A)|}$

I.C -

- Par définition, $A \subset \overline{A}$, donc $\{(x,a), a \in A\} \subset \{(x,a), a \in \overline{A}\}$, donc $\{d(x,a), a \in A\} \subset \{d(x,a), a \in \overline{A}\}$, on a donc

$$d(x,\overline{A}) = inf\{d(x,a), a \in \overline{A}\} \leq inf\{d(x,a), a \in A\} = d(x,A)$$

- Soit $a \in \overline{A}$, par définition, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a $d(x,u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x,a)$. Par la définition de borne inférieure, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x,u_n) \geq d(x,A)$. Donc $d(x,a) \geq d(x,A)$, ce qui est indépendant du choix de a. On peut passer à la limite de cette inégalité, donc $d(x,\overline{A}) \geq d(x,A)$

Par double inégalité, on a $\boxed{d(x,\overline{A}) = d(x,A)}$

II - Exercice 2

- On suppose que $k \geq \sqrt{2}$, on va montrer F_k est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
  Soit $x \in F_k$, alors il existe $a \in \mathbb{N}^*$, tel que $x \in BF((\frac{1}{a},\frac{1}{a}),\frac{k}{a})$. Et on a

$$\begin{aligned}\|x,(1,1)\|_2 &\leq \|x,(\frac{1}{a},\frac{1}{a})\|_2 + \|(\frac{1}{a},\frac{1}{a}),(1,1)\|_2 \\ &\leq \frac{k}{a} + \sqrt{2}(1-\frac{1}{a}) \\ &= \sqrt{2} + \frac{k-\sqrt{2}}{a}\end{aligned}$$

  Car $a \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq \sqrt{2}$, on a donc $\frac{k-\sqrt{2}}{a} \leq k-\sqrt{2}$, donc

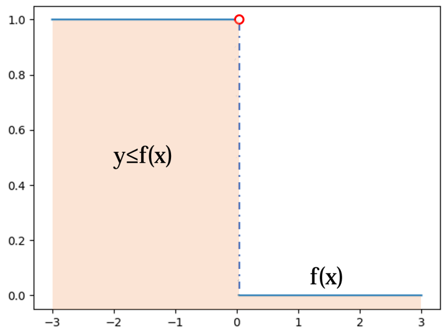
$$\|x,(1,1)\|_2 \leq \sqrt{2} + k - \sqrt{2} \leq k$$

  donc $x \in BF((1,1),k)$, donc $F_k \subset BF((1,1),k)$.
  D'autre part, on a clairement $BF((1,1),k) \subset F_k$, donc $F_k = BF((1,1),k)$ qui est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$
  Donc lorsque $k \geq \sqrt{2}$, F_k est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
- Soit $k < \sqrt{2}$, on peut définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (\frac{1}{n} - \frac{k}{\sqrt{2}n}, \frac{1}{n} - \frac{k}{\sqrt{2}n})$.
  La suite converge vers $(0,0)$, et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u_n, (\frac{1}{n},\frac{1}{n})\| = \|(\frac{k}{\sqrt{2}n},\frac{k}{\sqrt{2}n})\| = \frac{k}{n}$$

  Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in BF((\frac{1}{n},\frac{1}{n}),\frac{k}{n}) \subset F_k$
  Mais $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $\|(0,0),(\frac{1}{a},\frac{1}{a})\| = \frac{\sqrt{2}}{a} > \frac{k}{a}$, donc $(0,0) \notin F_k$, F_k n'est pas un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

Finalemnt, on a F_k est fermé si et seulement si $\boxed{k \geq \sqrt{2}}$



III - Exercice 3

III.A -

F n'est pas un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$. En fait, on peut définir une suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) = (-2^{-n}, 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n < 0$, donc $f(x_n) = 1 \geq y_n$, donc $(x_n, y_n) \in F$.
Mais $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,1) \notin F$, donc $\boxed{\text{F n'est pas fermé}}$

III.B -

On note

$$P = F \cup \{(0, y), y \in]0, 1]\}$$

- On va montrer P est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.
  Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de P qui converge dans $\mathbb{R}^2$, alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x, y)$, donc on a $\|(x_n, y_n), (x, y)\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$
  - Si $x < 0$, on peut prendre $\epsilon = -\frac{x}{2} > 0$, alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|x_n - x| \leq \epsilon = -\frac{x}{2}$. c'est à dire soit $n \geq N_1$, $x_n \leq \frac{x}{2} < 0$, donc $y_n \leq f(x_n) = 1$. On a donc $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \leq 1 = f(x)$, donc $(x, y) \in P$
  - Si $x > 0$, on peut prendre $\epsilon = \frac{x}{2} > 0$, alors il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|x_n - x| \leq \epsilon = \frac{x}{2}$. c'est à dire soit $n \geq N_2$, $x_n \geq \frac{x}{2} > 0$, donc $y_n \leq f(x_n) = 0$. On a donc $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \leq 0 = f(x)$, donc $(x, y) \in P$
  - Si $x = 0$, car $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq f(x_n) \leq 1$, donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \leq 1$, donc $(x, y) \in P$

  En tout cas, on a $(x, y) \in P$, donc P est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$
- Puisque $F \subset P$, donc $\overline{F} \subset \overline{P} = P$ comme P est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$
- Soit $(x, y) \in P$, on peut toujours trouver une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F qui converge vers (x, y)
  - Si $x = 0$, on a $y \leq 1$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = -2^{-n} < 0$, $y_n = y$, donc soit $n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq f(x_n) = 1$, donc $(x_n, y_n) \in F$, et on a $\|(x_n, y_n), (x, y)\|_1 = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc (x, y) est la limite d'une suite de F, donc $(x, y) \in \overline{F}$

- Si $x > 0$, on a $y \leq f(x) = 0$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x + 2^{-n} > 0$, $y_n = y$, donc soit $n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq f(x_n) = 0$, donc $(x_n, y_n) \in F$, et on a $\|(x_n, y_n), (x, y)\|_1 = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc (x, y) est la limite d'une suite de F, donc $(x, y) \in \overline{F}$
- Si $x < 0$, on a $y \leq f(x) = 1$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x - 2^{-n} < 0$, $y_n = y$, donc soit $n \in \mathbb{N}$, $y_n \leq f(x_n) = 1$, donc $(x_n, y_n) \in F$, et on a $\|(x_n, y_n), (x, y)\|_1 = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc (x, y) est la limite d'une suite de F, donc $(x, y) \in \overline{F}$

On a $\forall (x, y) \in P$, $(x, y) \in \overline{F}$, donc $P \subset \overline{F}$

Finalement, on a

$$\boxed{\overline{F} = P = F \cup \{(0, y), y \in]0, 1]\}}$$