I - Activité 1-3

Dans le référentiel (R), le moment cinétique du système (Σ) par rapport à A est défini par

$$\vec{L}_{A,(R)}(\Sigma) = \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_{(R)}(P)\, dm_P$$

Si on changement de point de référence B avec $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{A,(R)}(\Sigma) &= \int_{(\Sigma)} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) \wedge \vec{v}_{(R)}(P)\, dm_P \\
&= \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{v}_{(R)}(P)\, dm_P + \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}_{(R)}(P)\, dm_P \\
&= \vec{L}_{B,(R)}(\Sigma) + \overrightarrow{AB} \wedge \int_{(\Sigma)} \vec{v}_{(R)}(P)\, dm_P
\end{aligned}$$

Par la définition de quantité de mouvement $\vec{p}_{(R)}(\Sigma) = \int_{(\Sigma)} \vec{v}_{(R)}(P)\, dm_P$, on obtient

$$\boxed{\vec{L}_{A,(R)}(\Sigma) = \vec{L}_{B,(R)}(\Sigma) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{p}_{(R)}(\Sigma)}$$

II - Activité 1-4

Dans le référentiel (R), si on change deux points A et A' sur l'axe $\Delta(A, \vec{u})$, d'après le résultat précédent, on a

$$\vec{L}_{A,(R)}(\Sigma) \cdot \vec{u} = \vec{L}_{A',(R)}(\Sigma) \cdot \vec{u} + \overrightarrow{AA'} \wedge \vec{p}_{(R)}(\Sigma) \cdot \vec{u}$$

Par les calculs vectoriels $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$, on a alors

$$\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{p}_{(R)}(\Sigma) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AA'}) \cdot \vec{p}_{(R)}(\Sigma) = 0$$

car $\overrightarrow{AA'}$ est parallèle à $\vec{u}$.

On a donc $\boxed{\vec{L}_{A,(R)}(\Sigma) \cdot \vec{u} = \vec{L}_{A',(R)}(\Sigma) \cdot \vec{u}}$.

On peut donc définir le moment cinétique de (Σ) relativement à l'axe Δ par

$$\vec{L}_{\Delta,(R)}(\Sigma) = \vec{L}_{A,(R)}(\Sigma) \cdot \vec{u}$$

qui est indépendant du point choisi sur l'axe