# I - Exercice 1

Notons $B$ l'évènement correspondant à « le téléphone est défectueux » et $A$ l'évènement correspondant à « le test est positif ». On veut calculer la probabilité si le test soit efficace, c'est-à-dire $\mathbb{P}(B|A)$. D'après les données,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{10000} \quad \mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{9999}{10000}$$

On a aussi $\mathbb{P}(A|B) = 99\%$ et $\mathbb{P}(A|\overline{B}) = 0.1\%$,
or $B$ et $\overline{B}$ est un système complet d'évènement($\mathbb{P}(\overline{B}) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$), on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) > 0$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})} \\
&= \frac{99\% * \frac{1}{10000}}{99\% * \frac{1}{10000} + 0.1\% * \frac{9999}{10000}}
\end{aligned}$$

Finalement, on a $\boxed{\mathbb{P}(B|A) = 9\%}$, le résultat n'est pas satisfaisant.

# II - Exercice 2

## II.A -

On a clairement que $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2$, pour une variable aléatoire $X$,

$$(X > n+k) = \{a \in \mathbb{N}, a > n+k\} \subset \{a \in \mathbb{N}, a > n\} = (X > n)$$

On a donc $(X > n+k) \cap (X > n) = (X > n+k)$. Alors,

$$\mathbb{P}(X > n+k) = \mathbb{P}((X > n+k) \cap (X > n)) = \mathbb{P}(X > n+k | X > n)\mathbb{P}(X > n)$$

Par la définition de « sans mémoire », on a donc $\boxed{\mathbb{P}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(X > n)}$

## II.B -

### II.B.1 -

Lorsque $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
Et on a $(X > n+k) = \bigcup_{i > n+k} (X = i)$, une union dénombrable et disjoint deux-à-deux.
Donc

$$\mathbb{P}(X > n+k) = \sum_{i > n+k} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=n+k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}$$

Or $p \in ]0,1[$, la somme converge, et on a $\mathbb{P}(X > n+k) = (1-p)^{n+k}$. Par la même méthode, on a $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n, \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$. Nous avons bien $\mathbb{P}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > k)$, ce qui montre que $X$ est sans mémoire.

### II.B.2 -

Si on suppose que $X$ modélise le rang du premier succès lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p$, l'évènement $(X > n + k)$ correspondant « on obtient le premier succès après $n + k$ fois ». On peut aussi obtenir le même résultat si d'abord on fait $n$ fois la succession sans succès : $(X > n)$, et ensuite, on fait une autre succession pour $k$ fois : $(X > k)$. Car ces deux étapes sont indépendantes, sa possibilité est calculée par multiplication. On a donc le même résultat : $\boxed{\mathbb{P}(X > n + k) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > k)}$

## II.C -

### II.C.1 -

Si on prend $k = 0$, la formule devient $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > 0)$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) > 0$, on a donc $\boxed{\mathbb{P}(X > 0) = 1}$

### II.C.2 -

On va prendre $p = \mathbb{P}(X = 1)$

- $p = \mathbb{P}(X = 1) > 0$ car c'est une possibilité.
- $(X > 0) = (X = 1) \cup (X > 1)$ une union dénombrable et disjoint, donc
  $1 = \mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X > 1)$, d'où $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbb{P}(X > 1) < 1$

On a donc $p \in ]0, 1[$, et on a $\mathbb{P}(X > 1) = 1 - p$
On va montrer l'énoncé par récurrence sur $n$

- $n = 0$ : $\mathbb{P}(X > 0) = (1 - p)^0 = 1$, on l'a montrée
- Suppose que $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$, donc par la définition de sans mémoire, on a

$$\mathbb{P}(X > n + 1) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > 1) = (1 - p)^n * (1 - p) = (1 - p)^{n+1}$$

  l'énoncé est encore valide

On a donc $\boxed{\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n}$

### II.C.3 -

On a montré que $\mathbb{P}(X > 0) = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, (X > n - 1) = (X = n) \cup (X > n)$ une union dénombrable et disjoint, donc $p = \mathbb{P}(X > n - 1) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X > n)$, d'où $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n)$ et on a montré que $\mathbb{P}(X > n - 1) = (1 - p)^{n-1}$, $\mathbb{P}(X > n) = (1 - p)^n$, et donc

$$\mathbb{P}(X = n) = (1 - p)^{n-1} - (1 - p)^n = p * (1 - p)^{n-1}$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p * (1 - p)^{n-1}$
Or $p \in ]0, 1[$, on a $\boxed{P \sim \mathscr{G}(p)}$