I - TD 1-10

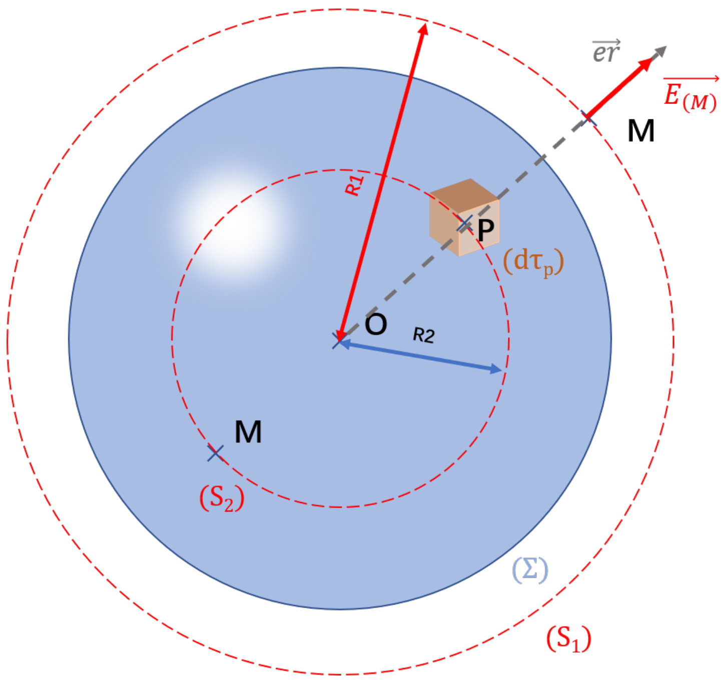

FIGURE 1 – le système étudiée

I.A -

Le système (Σ) étudiée : Le boule chargée
On a la charge élémentaire $\delta Q = \rho(P,t)\,d\tau_P$, avec $\rho(P,t)$ la densité volumique de charge. Pour une répartie uniformément et supposant que la charge est indépendant du temps, on a $\rho(P,t) = \rho$
Dans le modèle d'une distribution de charge continue, on a

$$Q_{tot} = e = \iiint_{P\in(\Sigma)} \rho\,d\tau_P = \rho \iiint_{P\in(\Sigma)} d\tau_P = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Donc la charge totale $\boxed{Q_{tot} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}$

I.B -

Pour un point $M = (r,\theta,\varphi)$ quelconque, le système (Σ) est symétrique par rapport à O, donc $\overrightarrow{E(M)}$ est selon la direction $\vec{e}_r$: $\overrightarrow{E(M)} = E(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r$
Le système (Σ) est invariante par rotation autour du point O, donc la norme du champ électrostatique $E(M)$ ne dépend que de la distance : $\overrightarrow{E(M)} = E(r)\vec{e}_r$
On va employer les coordonnées sphériques, et on a donc $\overrightarrow{E(M)} = E(R)\vec{e}_r$ par la symétrie

- Cas 1 : Soit $M = (R_1,\theta,\varphi)$ se trouve à l'extérieur de la boule, on pose (S_1) la surface fermée qui passe par M, avec le rayon $R_1 \geq R$. (S_1) est une surface iso-E comme tous les points sur (S_1) ont la même distance par rapport à O. Donc on a le flux qui traverse (S_1)

$$\Phi_1 = \oiint_{M\in(S_1)} \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dS_M} = \oiint_{M\in(S_1)} E(R_1)\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r = 4\pi R_1^2 E(R_1)$$

et selon le théorème de Gauss, on a aussi

$$\Phi_1 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R^3\rho}{3\epsilon_0}$$

On a donc

$$4\pi R_1^2 E(R_1) = \frac{4\pi R^3\rho}{3\epsilon_0}$$

d'où

$$\boxed{E(R_1) = \frac{R^3\rho}{3R_1^2\epsilon_0}}$$

- Cas 2 : Soit $M = (R_2, \theta, \varphi)$ se trouve à l'intérieur de la boule, on pose (S_2) la surface fermée qui passe par M, avec le rayon $R_2 < R$. (S_2) est une surface iso-E comme tous les points sur (S_2) ont la même distance par rapport à O. Donc on a le flux qui traverse (S_1)

$$\Phi_2 = \oiint_{M\in(S_2)} \overrightarrow{E(M)} \cdot \overrightarrow{dS_M} = \oiint_{M\in(S_2)} E(R_2)\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r = 4\pi R_2^2 E(R_2)$$

et selon le théorème de Gauss, on a aussi

$$\Phi_1 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi R_2^3\rho}{3\epsilon_0}$$

On a donc

$$4\pi R_2^2 E(R_2) = \frac{4\pi R_2^3\rho}{3\epsilon_0}$$

d'où

$$\boxed{E(R_2) = \frac{R_2\rho}{3\epsilon_0}}$$

On a donc pour $M = (r, \theta, \varphi)$ quelconque

$$\boxed{\overrightarrow{E(M)} = \begin{cases} \frac{R^3\rho}{3r^2\epsilon_0}\vec{e}_r & r \geq R \\ \frac{r\rho}{3\epsilon_0}\vec{e}_r & 0 \leq r < R \end{cases}}$$

On notice que $\overrightarrow{E(M)}$ est continue en $r = R$

I.C -

On a

$$\overrightarrow{E(M)} = -\overrightarrow{grad}V(M) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi\right)$$

En faisant des projections, on a

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

Donc $V = V(r)$, $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr}$
Pour $r \geq R$, on a

$$\frac{R^3\rho}{3r^2\epsilon_0} = -\frac{dV}{dr}$$

On a donc

$$\int_{V_\infty}^{V(r)} dV = -\int_{r_\infty}^{r} \frac{R^3\rho}{3r'^2\epsilon_0}\,dr'$$

En prenant $V_\infty = 0$, on a donc $V(r) = \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0}\frac{1}{r}$
Pour $0 \leq r < R$, on a

$$\frac{r\rho}{3\epsilon_0} = -\frac{dV}{dr}$$

Donc

$$\int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\int_{R}^{r} \frac{r'\rho}{3\epsilon_0}\,dr'$$

Pour que V soit continue, on a $V(R) = \frac{R^2\rho}{3\epsilon_0}$, on a donc $V(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(r^2 + R^2)$
Finalement, on a pour $M = (r, \theta, \varphi)$ quelconque

$$\boxed{V(M) = \begin{cases} \frac{R^3\rho}{3\epsilon_0}\frac{1}{r} & r \geq R \\ \frac{\rho}{6\epsilon_0}(r^2 + R^2) & 0 \leq r < R \end{cases}}$$

II - TD 2-8

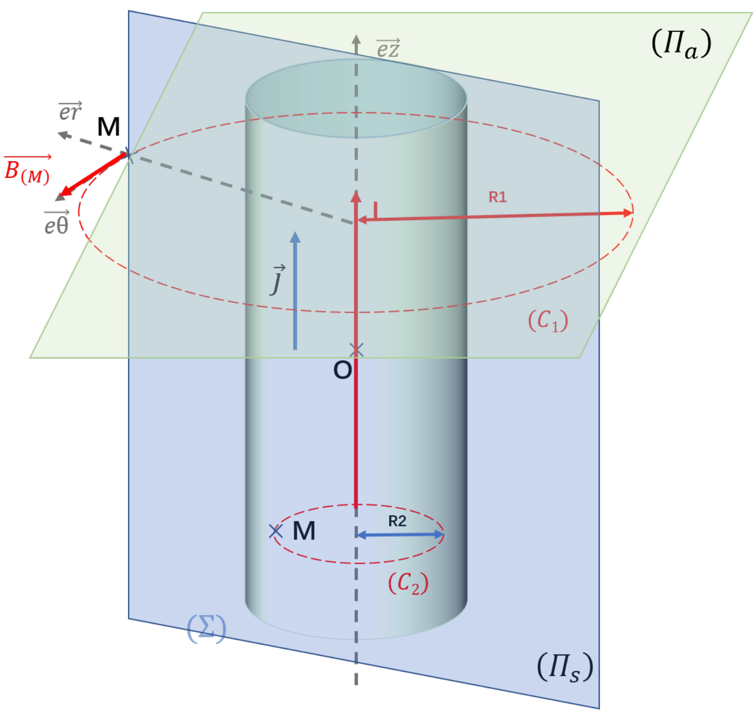

FIGURE 2 – le système étudiée

II.A -

Le système (Σ) étudiée : La distribution cylindrique de courant
On note $\vec{j} = j\vec{e_z}$ le vecteur densité volumique de courant est supposé uniforme et dirigé suivant Oz
On a l'intensité du courant électrique

$$I = \iint_{M\in(S)} \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS_M} = j\iint_{M\in(S)} dS = \pi R^2 j$$

Donc on a $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{e}_z$
On va employer les coordonnées cylindriques

II.B -

Pour un point $M = (r, \theta, z)$ quelconque, le système (Σ) est symmétrique par rapport à (Π_s) qui traverse M et $\vec{e}_z$, donc $\overrightarrow{B(M)}$ est perpendiculaire à (Π_s)
(Σ) est aussi antisymmétrique par rapport à (Π_a) qui traverse M et perpendiculaire à $\vec{e_z}$, donc $\overrightarrow{B(M)}$ appartient à (Π_a).
Ainsi, on a $\overrightarrow{B(M)}$ est selon la direction de $\vec{e}_\theta$, donc il s'écrit $\overrightarrow{B(M)} = B(r,\theta,z)\vec{e}_\theta$
Le système (Σ) est invariante par rotation autour de l'axe $\vec{e_z}$, donc la norme du champ électrostatique $B(M)$ ne dépend que de l'angle : $\overrightarrow{B(M)} = B(r,z)\vec{e}_\theta$
Il est aussi invariante par translation selon $\vec{e}_z$, donc la norme $B(M)$ ne dépend de z, on a donc $\overrightarrow{B(M)} = B(r)\vec{e}_\theta$

- Cas 1 : Soit $M = (R_1, \theta, z)$ se trouve à l'extérieur de la cylindre, on pose $(\mathscr{C}_1)$ le contour fermée qui passe par M, avec le rayon $R_1 \geq R$. $(\mathscr{C}_1)$ est une surface iso-B comme tous les points sur $(\mathscr{C}_1)$ ont la même distance par rapport à e_z. Donc on a la circulation qui traverse $(\mathscr{C}_1)$

$$C_1 = \oint_{M\in(\mathscr{C}_1)} \overrightarrow{B(M)}\cdot\overrightarrow{dl_M} = \oint_{M\in(\mathscr{C}_1)} B(R_1)\vec{e}_\theta\cdot dl\vec{e}_\theta = 2\pi R_1 B(R_1)$$

  et selon le théorème d'Ampère, on a aussi

$$C_1 = \mu_0 I_{int} = \mu_0 I$$

  On a donc

$$2\pi R_1 B(R_1) = \mu_0 I$$

  d'où

$$\boxed{B(R_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}}$$

- Cas 2 : Soit $M = (R_2, \theta, z)$ se trouve à l'intérieur de la cylindre, on pose $(\mathscr{C}_2)$ le contour fermée qui passe par M, avec le rayon $R_2 < R$. (S_2) est une surface iso-B comme tous les points sur $(\mathscr{C}_2)$ ont la même distance par rapport à e_z. Donc on a la circulation qui traverse $(\mathscr{C}_2)$

$$C_2 = \oint_{M\in(\mathscr{C}_2)} \overrightarrow{B(M)}\cdot\overrightarrow{dl_M} = \oint_{M\in(\mathscr{C}_2)} B(R_2)\vec{e}_\theta\cdot dl\vec{e}_\theta = 2\pi R_2 B(R_2)$$

et selon le théorème d'Ampère, on a aussi

$$C_2 = I_{int}\mu_0 = \frac{\pi R_2^2}{\pi R^2}\mu_0 I$$

On a donc

$$2\pi R_2 B(R_2) = \frac{R_2^2}{R^2}\mu_0 I$$

d'où

$$\boxed{B(R_2) = \frac{R_2}{2\pi R^2}\mu_0 I}$$

On a donc pour $M = (r, \theta, z)$ quelconque

$$\boxed{\overrightarrow{B(M)} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta & r \geq R \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\vec{e}_\theta & 0 \leq r < R \end{cases}}$$

On notice que $\overrightarrow{B(M)}$ est continue en $r = R$