I - Exercice 1

I.A -

Comme X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, (X > k) = (X > n) \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^{n} (X = i) \right)$$

une union dénombrable disjointe, on a donc

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}, \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X > n) + \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X = i)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{P}(X > k) - \mathbb{P}(X > n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X = i)$$

à droite de l'équation, le terme $\mathbb{P}(X = k)$ est sommé pour k fois, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)}$$

I.B -

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k)$$

on sait que $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$ converge, et car ils sont de termes positifs, on a $\sum_k k\mathbb{P}(X = k)$ converge aussi.
On a donc la famille $(k\mathbb{P}(X = k))_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable, alors $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$

I.C -

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n\mathbb{P}(X = n) \geq 0$. Car X admet une espérance, alors la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable. C'est à dire la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.
On a donc $\boxed{n\mathbb{P}(X = n) = u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$. (sinon, la série diverge grossièrement)

Puisque on a $(X > n) = \bigcup_{i=n+1}^{+\infty}(X = i)$, car les probabilités sont positives, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\mathbb{P}(X > n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\sum_{i=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - \sum_{i=n+1}^{+\infty} i\mathbb{P}(X = i)\end{aligned}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \geq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k)$$

Car X admet une espérance, $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ converge, donc $\boxed{\sum_k \mathbb{P}(X > k) \text{ converge aussi}}$ (elle est une série à termes positifs est majorée)
Et on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\mathbb{P}(X > n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k)$$

quand n tends vers l'infini, et car $\sum_k \mathbb{P}(X = k)$ converge, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

Finalement, on a $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)}$

II - Exercice 2

On a $X \sim \mathscr{U}(0, n), Y \sim \mathscr{U}(0, n)$

II.A -

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq Z \leq n$, donc $\mathbb{E}(Z) \leq \mathbb{E}(n) = n$, qui est finie. Donc $\boxed{Z \text{ admet une espérance}}$.
Par la même méthode, $0 \leq Y \leq n$, $\boxed{Y \text{ admet une espérance}}$

II.B -

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{E}(|X-Y|) = \sum_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2} |i-j|\mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

car X et Y sont indépendantes, on a donc

$$\forall (i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2, \mathbb{P}(X=i,Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

donc

$$\mathbb{E}(|X-Y|) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2} |i-j|$$

par symétrie, on a

$$\sum_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2} |i-j| = 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X-Y|) &= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(i-j) \\ &= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}k \\ &= \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}\frac{i(i+1)}{2}\end{aligned}$$

Finalement, on a $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{n^2+2n}{3n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}}$

II.C -

Par la même méthode, on a

$$\mathbb{E}(\min(X,Y)) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2} \min(i,j) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j)$$

On va montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j) = \sum_{k=0}^{n}k^2$ par récurrence.

- $n = 1$:

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\min(i,j) = \min(0,0) + \min(0,0) + \min(0,0) + \min(1,1) = 1 = \sum_{k=0}^{1}k^2$$

  l'énoncé est vrai

- Supposons que l'énoncé est vrai pour rang n, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j) = \sum_{k=0}^{n}k^2$$

alors pour le rang $n+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}\min(i,j) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j) + \sum_{i=0}^{n+1}\min(i,n+1) + \sum_{j=0}^{n+1}\min(n+1,j) - \min(n+1,n+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\min(i,j) + 2*\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k^2
\end{aligned}$$

l'énoncé est aussi vrai

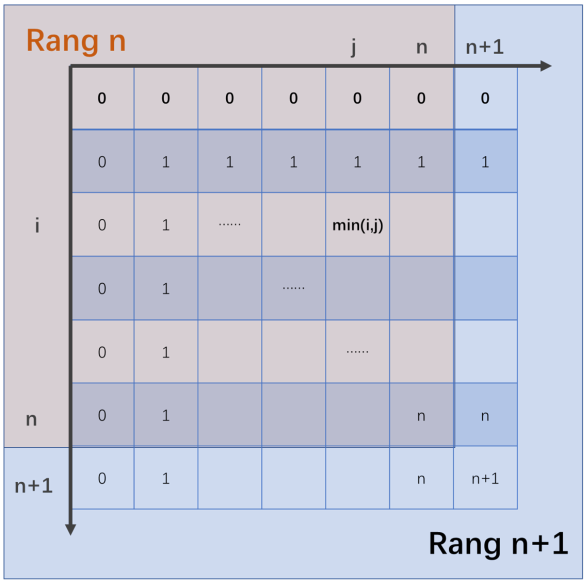

FIGURE 1 – Sommation de l'équation

On a donc

$$\mathbb{E}(\min(X,Y)) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} k^2$$

Finalement, $\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{2n^2+n}{6n+6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}}$

III - Exercice 3

III.A -

f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. f est aussi intégrable : elle est nulle dehors $[1,+\infty[$, est intégral sur $[1,+\infty[$(intégral de Riemann). Pour que f soit une densité, il faut que $\forall t\in\mathbb{R}, f(t)\geq 0$. Donc $a \geq 0$.

De plus, il faut que $\int_{t\in\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$, donc

$$1 = \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t\sqrt{t}}\,dt = a\left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^{+\infty} = 2a$$

donc $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ on a donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} 1_{[1,+\infty[}(t)$

III.B -

On a

$$\forall I \subset \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \in I) = \int_I f(t)\,dt$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

- si $x \leq 1$, on a $f(t) = 0$, donc $F_X(x) = 0$
- si $x > 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_1^x f(t)\,dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{2t\sqrt{t}}\,dt \\ &= \left[-t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^x \\ &= 1 - x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

on a donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - x^{-\frac{1}{2}} & x > 1 \end{cases}$$

$F_X(x)$ est à valeurs dans $[0,1]$, F_X est donc bien une fonction de répartition.

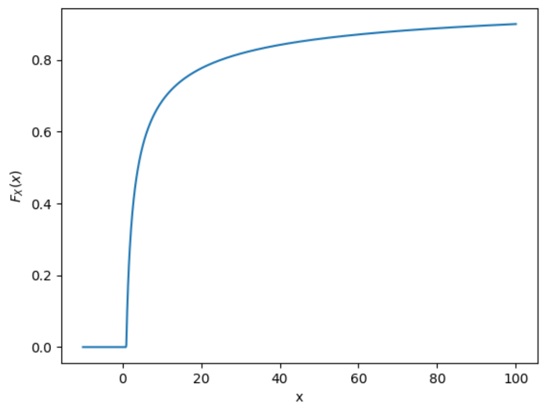

Figure 2 – figure de $F_X(x)$

III.C -

On a

$$\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|\, dt = \int_1^{+\infty} tf(t)\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$$

C'est une intégral divergente(intégral de Riemann), donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérence}}$

III.D -

On a

$$\int_{\mathbb{R}} |t^2 f(t)|\, dt = \int_1^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{2}\, dt$$

C'est une intégral divergente grossièrement, donc $\boxed{X \text{ n'admet pas de moment d'ordre 2}}$