I - Activité 2-3

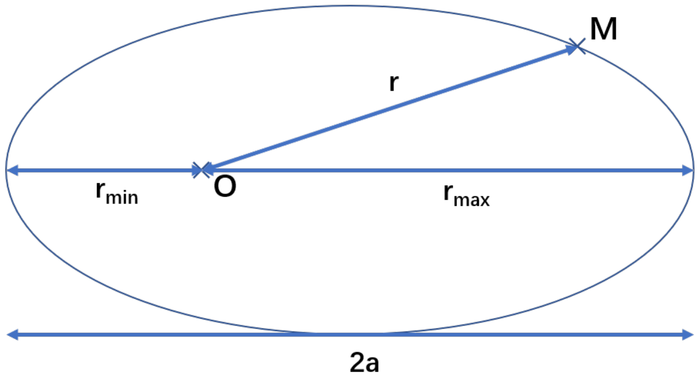

FIGURE 1 – le système étudiée

I.A -

Pour un point matériel M de masse m suivant une force conservative centrale, on a

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

avec

$$E_{p,eff}(r) = E_p(r) + \frac{L_O^2}{2mr^2}$$

où $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, L_O le norme du mouvement cinétique.
Lorsque $r = r_{min}$ ou $r = r_{max}$, on a $\dot{r} = 0$, et l'énergie potentielle est donnée par $E_p(r) = -\frac{K}{r}$, K est une constante.
On a donc r_{min} et r_{max} sont les deux raccines de cette équation

$$E_m = E_{p,eff}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{L_O^2}{2mr^2}$$

soit

$$E_m \times r^2 + K \times r - L_O^2 = 0$$

donc on a

$$r_{min} + r_{max} = -\frac{K}{E_m}$$

Comme $r_{min} + r_{max} = 2a$, où a est le demi-grand axe de l'ellipse, on a finalement

$$\boxed{E_m = -\frac{K}{2a}}$$

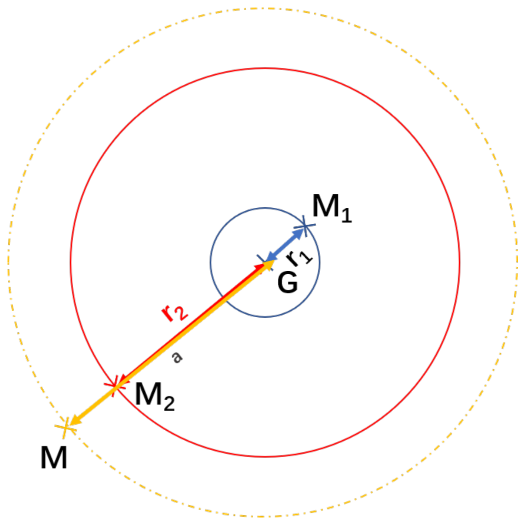

FIGURE 2 – le système étudiée

II - Exercice 2-7

Considerons le système Terre-Soliel, puisque $m_{terre} \ll m_{soleil}$, on a donc l'approximation

$$\frac{T_{t-s}^2}{a_{t-s}^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_{soliel}}$$

avec $T_{t-s} \simeq 1\, ans$ la période de révolution, et $a_{t-s} = 1$ unité astronomique, on en déduit la constante gravitationnelle

$$G = \frac{4\pi^2 a_{t-s}^3}{T_{t-s}^2 m_{soleil}}$$

Pour le système (Σ) des deux étoiles (M_1, m_1) et (M_2, m_2), on sait que il tourne autour de leur barycentre G, on a donc

$$\overrightarrow{GM_1} = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{GM}$$

où M est la particule fictive vérifiant $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$, donc

$$|\frac{-m_2}{m_1 + m_2}| = \frac{\|\overrightarrow{GM_1}\|}{\|\overrightarrow{GM}\|} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

on a donc $m_1 = 5m_2$

On sait que le point M vérifie

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

avec $T_M = 20ans$, $a_M = \|\overrightarrow{GM}\| = 18$ unités astronomiques, donc

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 a_M^3}{GT_M^2}$$

A.N.

$$m_1 + m_2 = \frac{a_M^3 T_{t-s}^2 m_{soleil}}{a_{t-s}^3 T_M^2} = \frac{18^3}{20^2}\, m_{soleil} = 14.58\, m_{soleil}$$

On a donc $\boxed{m_1 = 12.15\, m_{soleil}, m_2 = 2.43\, m_{soleil}}$