I - Activité 3-2

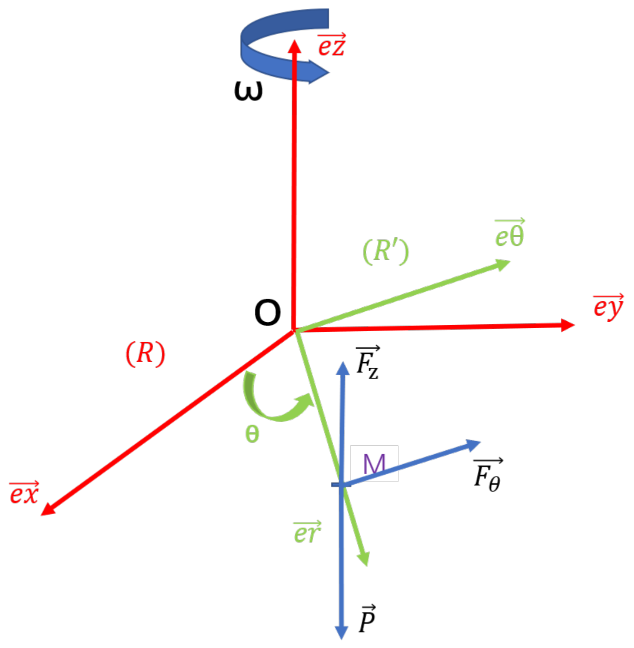

FIGURE 1 – le système étudiée

On note (R) le référentiel terrestre supposé galiléen, et $(R^{'})$ le référentiel tournant, $(O, \{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\})$ le repère lié à (R), et $(O, \{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}\})$ le repère lié à $(R^{'})$.
On a $\vec{\Omega}_{(R')/(R)} = \omega\vec{e_z}$

I.A -

système : le point matériel M de masse m, avec $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$ Bilan des actions :

- Poids $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$
- réaction exercée par les parois : $\vec{F} = F_\theta\vec{e_\theta} + F_z\vec{e_z}$

On a alors

$$\frac{dE_{m,(R')}(M)}{dt} = P_{\vec{P}} + P_{\vec{F}} = (\vec{P} + \vec{F}) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

On notice que $d\overrightarrow{OM}$ est toujours perpendiculaire à les forces $\vec{P}$ et $\vec{F}$, donc $\boxed{\frac{dE_{m,(R')}(M)}{dt} = 0}$, le système est donc conservatif dans $R^{'}$
On a $\vec{F}_{ext\to(M)} = -\overrightarrow{grad}E_p$, donc

$$\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e_z} = F_\theta\vec{e_\theta} + (F_z - mg)\vec{e_z}$$

On va démontrer plus tard que $F_z = mg$, donc on a

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{e_\theta} = \frac{dE_p}{d\theta}\vec{e_\theta} = F_\theta\vec{e_\theta}$$

On a finalement $\boxed{E_p = \theta F_\theta + cste}$
Le système $\boxed{\text{n'est pas conservatif}}$ dans (R) car $(R^{'})$ n'est pas en tranlation avec (R)

I.B -

On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$, donc

$$\vec{v}_{(R')}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{(R')} = \dot{r}\vec{e_r}, \quad \vec{a}_{(R')}(M) = \left(\frac{d\vec{v}_{(R')}(M)}{dt}\right)_{(R')} = \ddot{r}\vec{e_r}$$

Et on a

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 r\vec{e_r}, \quad \vec{a}_c(M) = 2\omega\vec{e_z} \wedge \dot{r}\vec{e_r} = 2\omega\dot{r}\vec{e_\theta}$$

On applique PFD sur M dans (R) :

$$\begin{aligned} m\ddot{r}\vec{e_r} &= \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_{ie\to M} + \vec{F}_{ic\to M} \\ &= m\omega^2 r\vec{e_r} + (F_\theta - m^2\omega\dot{r})\vec{e_\theta} + (F_z - mg)\vec{e_z} \end{aligned}$$

En faisant les projections sur $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_z}$, on obtient

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r, \quad F_\theta = m^2\omega\dot{r}, \quad F_z = mg$$

Donc on a $\boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$.
On a donc $r = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$, avec les conditions initiaux $r(t=0) = \frac{L}{2}$, $\dot{r}(t=0) = 0$. Ainsi, on a $C_1 = C_2 = \frac{L}{4}$.

Finalement, on a $\boxed{r = \dfrac{L}{4}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})}$

I.C -

Il faut que $r(t=T) = \frac{L}{4}(e^{\omega T} + e^{-\omega T}) = L$, et nécessairement $T \geq 0$.

On obtient donc $\boxed{T = \dfrac{\ln(2+\sqrt{3})}{\omega}}$

I.D -

On a déjà $F_\theta = m^2\omega\dot{r}$, $F_z = mg$. Donc la réaction exercée par les parois est $\boxed{\vec{F} = m^2\omega\dot{r}\vec{e_\theta} + mg\vec{e_z}}$

II - Exercice 4-5

Le repère : $(O, \{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}\})$

II.A -

Les systèmes :

- (R) : le système terrestre supposé galiléen
- (R_1) : le système tournant lié au cylindre extérieur
- (R_2) : le système tournant lié à la bille

Les vecteurs rotations :

- $\vec{\Omega}_{(R_1)/(R)} = \Omega\vec{e_z}$, avec Ω la vitesse angulaire du cylindre extérieur

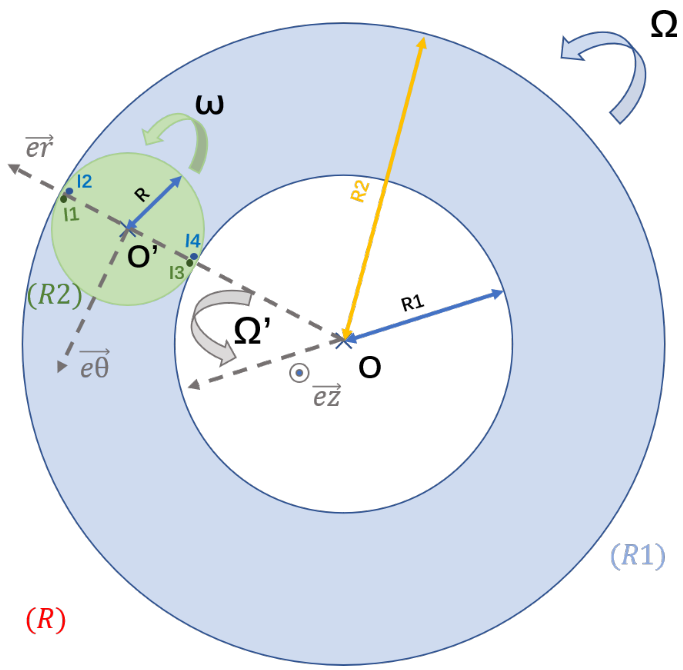

FIGURE 2 – le système étudiée

- $\vec{\Omega}_{(R_2)/(R)} = \omega \vec{e_z}$, avec ω la vitesse angulaire de la bille
- Ω' : la vitesse angulaire du O' par rapport à O

Les points :

- I_1 : Le point lié à la bille, qui coïncide avec I_2 à l'instant étudié
- I_2 : Le point lié au cylindre extérieur, qui coïncide avec I_1 à l'instant étudié
- I_3 : Le point lié à la bille, qui coïncide avec I_4 à l'instant étudié
- I_4 : Le point lié au cylindre intérieur, qui coïncide avec I_3 à l'instant étudié

Pour un contact sans glissement entre la bille et le cylindre intérieur, il faut que $\vec{v}_{(R)}(I_3) = \vec{v}_{(R)}(I_4)$. on a

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{(R)}(I_3) &= \vec{v}_{(R_2)}(I_3) + \vec{v}_{(R)}(O') + \vec{\Omega}_{(R_2)/(R)} \wedge \overrightarrow{O'I_3} \\
&= \vec{0} + \Omega'(R + R_1)\vec{e_\theta} + \omega \vec{e_z} \wedge (-R)\vec{e_r} \\
&= [\Omega'(R + R_1) - R\omega]\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Comme I_4 est immobile, on a $\Omega'(R + R_1) - R\omega = 0$

Pour un contact sans glissement entre la bille et le cylindre extérieur, il faut que $\vec{v}_{(R)}(I_1) = \vec{v}_{(R)}(I_2)$. on a

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{(R)}(I_2) &= \vec{v}_{(R_2)}(I_2) + \vec{\Omega}_{(R_1)/(R)} \wedge \overrightarrow{OI_2} \\
&= (\Omega R_2)\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{(R)}(I_1) &= \vec{v}_{(R_2)}(I_1) + \vec{v}_{(R)}(O') + \vec{\Omega}_{(R_2)/(R)} \wedge \overrightarrow{O'I_1} \\
&= \vec{0} + \Omega'(R + R_1)\vec{e_\theta} + \omega \vec{e_z} \wedge (R)\vec{e_r} \\
&= [\Omega'(R + R_1) + R\omega]\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Donc on a $\Omega^{'}(R+R_1)+R\omega=\Omega R_2$
Finalemant, on obtient

$$\boxed{\Omega^{'}=\frac{\Omega R_2}{2(R+R_1)},\quad \omega=\frac{\Omega R_2}{2R}}$$

II.B -

On a $E_{c,tot}=E_{c,(R_1)}+E_{c,(R_2)}$, avec

$$E_{c,(R_1)}=\frac{1}{2}I_\Delta(R_1)\Omega^2=\frac{1}{2}R_2^2m_2\Omega^2$$

et on a

$$\begin{aligned}
I_\Delta(R_2)&=\int_{(\Sigma)}d_{p,\Delta}^2dm_P\\
&=\int_{r\in[0,R],\theta\in[0,2\pi[}\rho[(r+R_1)^2+r^2+2r(r+R_1)\cos\theta]r\,drd\theta\\
&=\frac{3m}{2R}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{2}{3}R_1R+\frac{1}{2}R_1^2\right)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{E_{c,tot}=\frac{1}{2}R_2^2m_2\Omega^2+N\left(\frac{\Omega R_2}{2(R+R_1)}\right)^2\frac{3m}{4R}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{2}{3}R_1R+\frac{1}{2}R_1^2\right)}$$