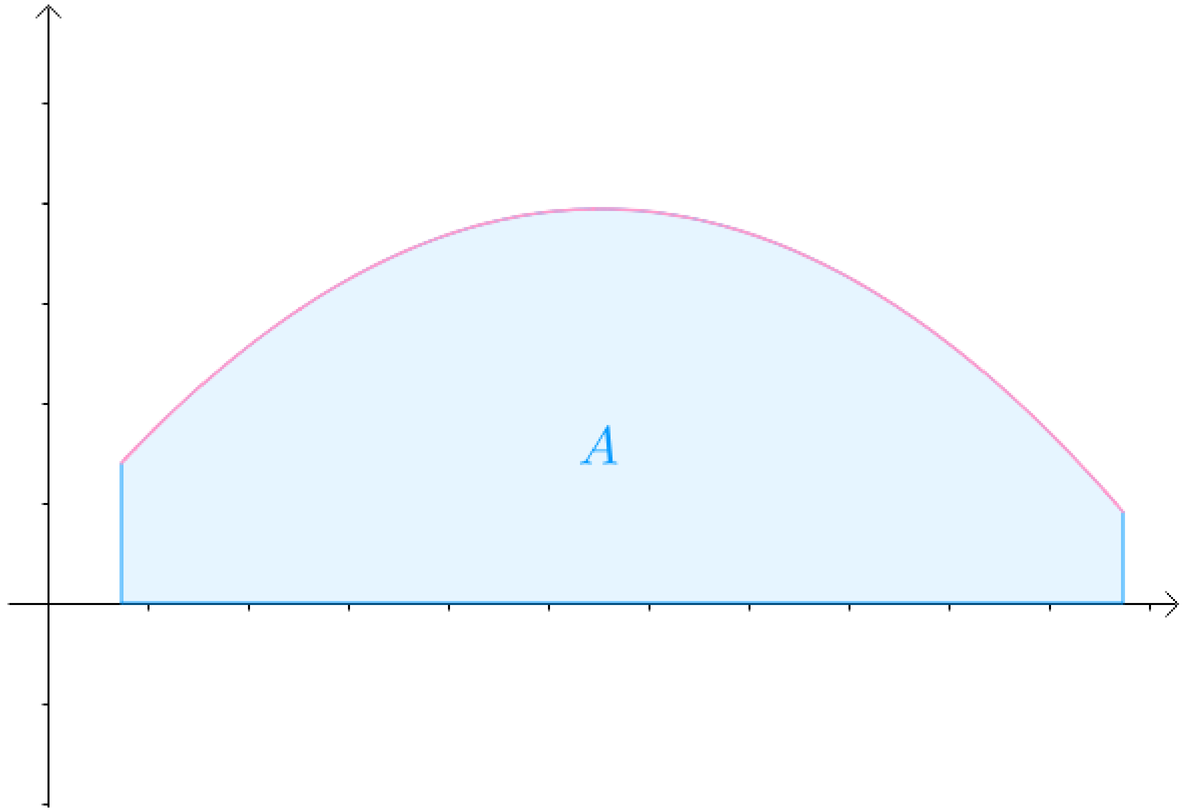
第二课 -- Maker Club

机器学习中的微积分

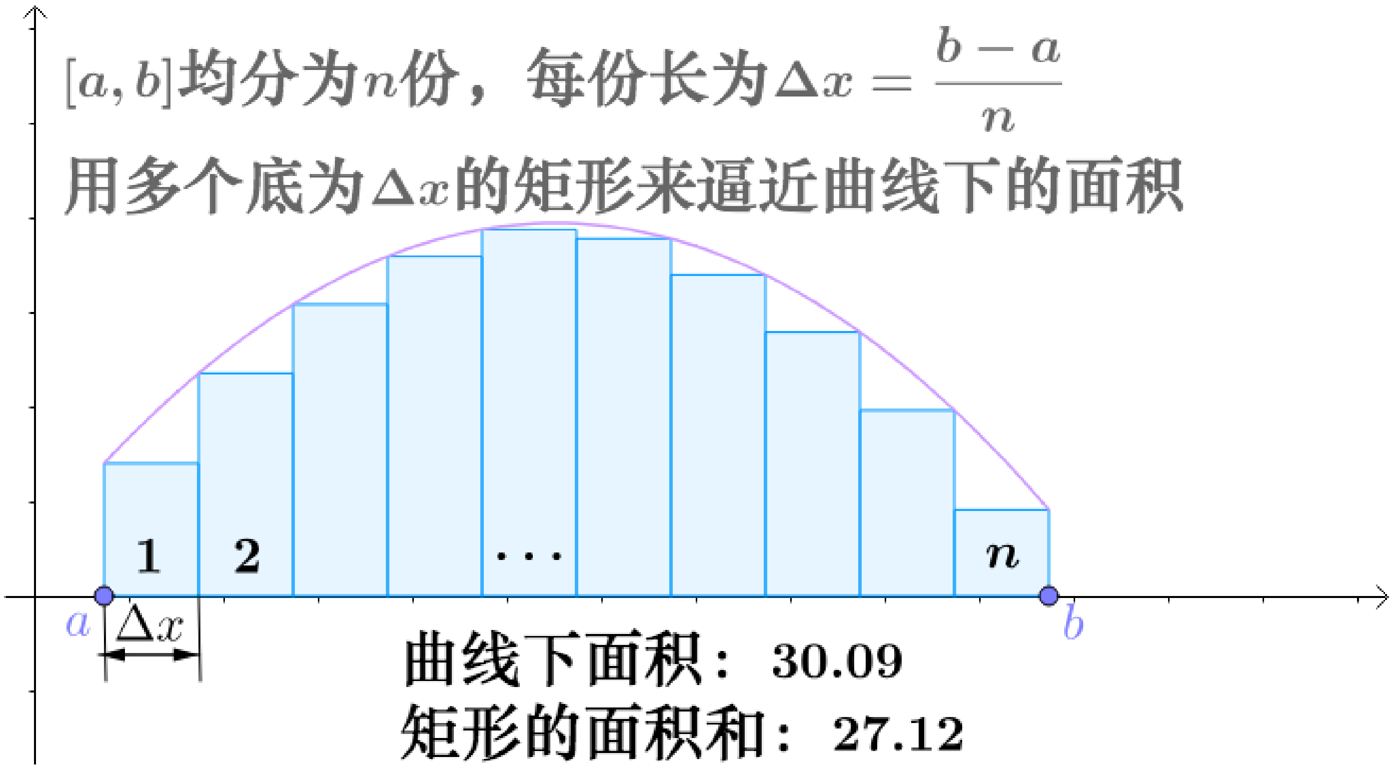
微积分这部分知识点会在高等数学或数学分析中详细分析，因此这里我们只简述一下机器学习中可能会涉及到的知识点。

微积分的思想：线性近似，以直代曲

1. 微分和积分



对于曲线下的面积A，用微积分的思想，可以用矩形来逼近曲线下面积：



n越大，效果越好

可以想见，当Δx无限接近0时，矩形的面积和就与曲线下的面积相等。

数学家用微积分来命名这样的计算方法。其中微分，指的是Δx无限接近0时，微小的矩形面积：

积分，指的是把无数这样微小矩形的面积加起来，以得到曲线下面积：

导函数

设函数$y=f(x)$在开区间内的每点处都可导，则称函数$y=f(x)$在开区间内可导。 这时，对于任意$x\in I$，都对应着$f(x)$的一个确定的导数值，这就构成了新的函数，这个函数叫作$y=f(x)$的导函数，记作y'或$f'(x)$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，定义式为：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

或：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

初等函数求导

常数函数	$f(x)=C,C\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
幂函数	$f(x)=x^{\alpha},\alpha\in\mathbb{R}$	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$
三角函数	$f(x)=\sin x$ $f(x)=\cos x$	$f'(x)=\cos x$ $f'(x)=-\sin x$
指数函数	$f(x)=a^{x},a>0,a\neq 1$ $f(x)=e^{x}$	$f'(x)=a^{x}\ln a$ $f'(x)=e^{x}$
对数函数	$f(x)=\log_{a}x,a>0,a\neq 1$ $f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$ $f'(x)=\frac{1}{x}$

导数的运算

和与差：

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$$

积：

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

商：

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^{2}(x)}(v(x)\neq 0)$$

复合函数求导：

链式法则：

如果$u=g(x)$在点a可导，而$y=f(u)$在点$b=g(a)$可导，那么复合函数$y=f[g(x)]$在点a可导，且其导数为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(b)g'(a)$$

或：

$$\frac{\mathrm{d}y}{dx}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

多元微积分

多元函数，就是自变量不止1个的函数，如$f(x,y)=x^2+y^2$

偏导数

偏导数表示了多元函数中某一元变化对函数变化的影响大小，或者说是函数在该元方向上的变化率。

f对x的偏导记作：

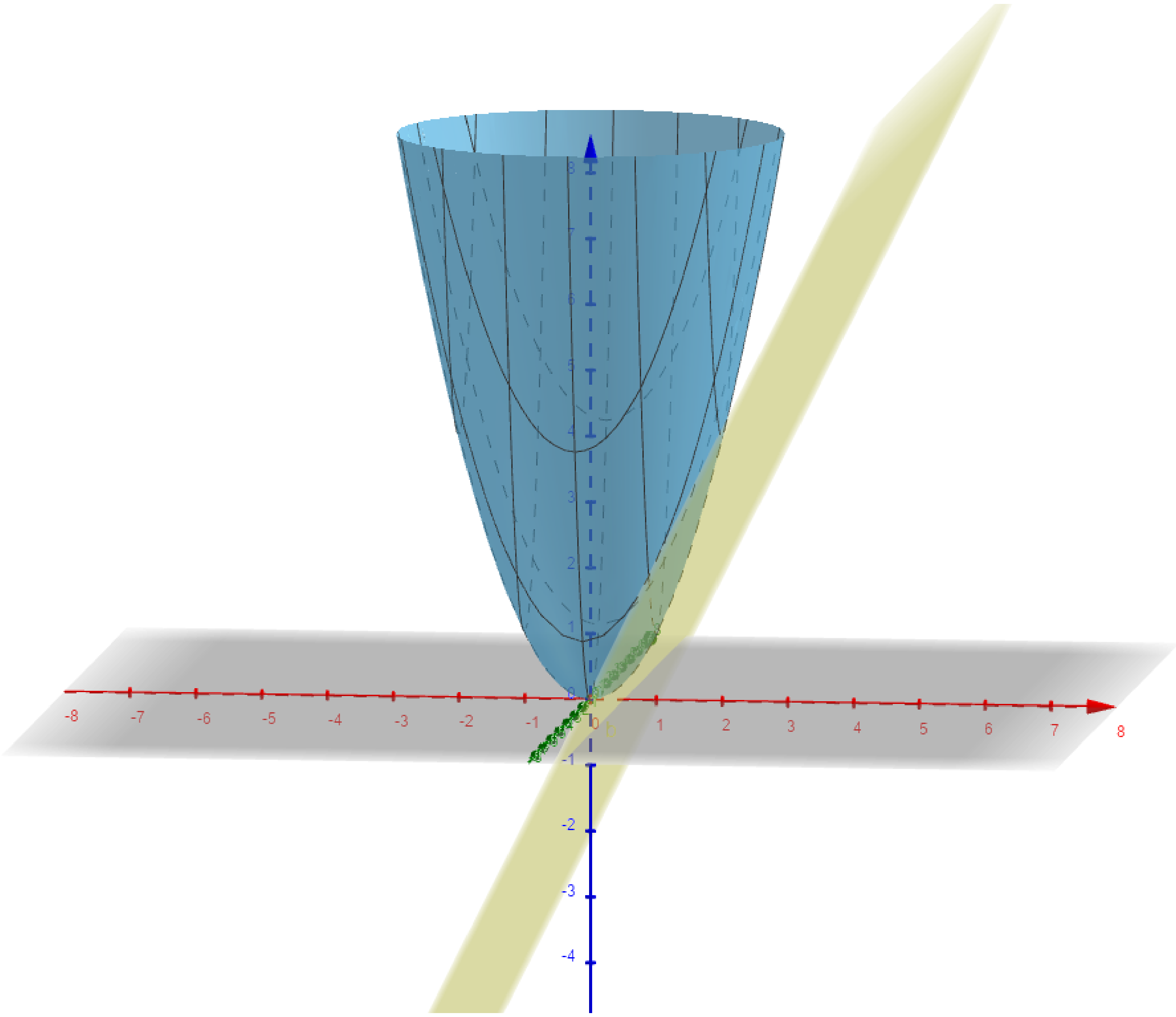
$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

f对y的偏导记作：

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

求偏导的方法：将与该元无关的其他自变量都当作常数，将式子当作一元函数进行求导，如之前的$f(x,y)=x^2+y^2$，要求$\frac{\partial f}{\partial x}$，可把y当作常量：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+0$$



可理解函数图像在某个因变量轴上的切平面的斜率。

梯度

梯度的是一个向量，表示某一函数在该点处的方向导数沿着该方向取得最大值，即函数在该点处沿着该方向（此梯度的方向）变化最快，变化率最大（为该梯度的模）。

设二元函数$z = f(x, y)$在D上有一阶连续偏导，则对于一点$P(x, y)$可定义向量函数：$[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}]$，该函数称为函数$z = f(x, y)$的梯度，记作$grad\ f(x, y)$或$\bigtriangledown f$