1. (4p) Per cadascuna de les següents matrius dieu si pot correspondre a un observable, a una evolució temporal i/o a una funció (possibilitats no excloients).

Recordem les condicions
$$\begin{cases} ① \text{ Observable} \longrightarrow \text{matriu hermítica} \quad A = A^{+} \\ ② \text{ Evolució temporal} \longrightarrow \text{matriu unitària} \quad A^{+}A = \mathbb{I} \equiv A^{-1} = A^{+} \\ ③ \text{ Funció} \longrightarrow \begin{cases} \text{real i simètrica} \\ \text{feta de 0s i 1s} \\ \text{el primer qubit no és alterat} \end{cases} \end{cases}$$

(A)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Clarament $A = A^{+}$ $\Rightarrow$ pot correspondre a un observable

b) $A^{+}A = \mathbb{I}$ $\Rightarrow$ pot representar una evolució unitària

c) És real i simètrica, també feta de 0s i 1s

però per exemple $A\,|00\rangle = |10\rangle = |1\rangle|0\rangle$

el 1er qubit s'ha invertit $\rightarrow$ no pot ser una funció

(B)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $A = A^{+}$ $\Rightarrow$ hermítica, pot ser un observable

b) $A^{+}A = \mathbb{I}$ $\Rightarrow$ pot correspondre a evolució temporal

c) No està feta de 0s i 1s, no pot ser una funció

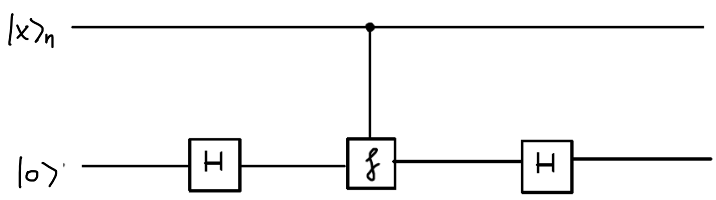
(C)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $A = A^{+}$ $\rightarrow$ observable

b) $A^{+}\cdot A = A\cdot A = \mathbb{I}$ $\rightarrow$ pot ser una evolució temporal

c) real + simètrica + feta de 0s i 1s
$A\,|0\rangle|0\rangle = |0\rangle|1\rangle \qquad A\,|0\rangle|1\rangle = |0\rangle|0\rangle$ $\Big\}$ $\rightarrow$ pot ser una funció

2. (3 p) Hem vist que per funcions binàries el següent muntatge acaba donant el mateix estat de partida multiplicat per una fase, una peça clau de tots els algorismes deterministes que hem vist. Què obtindríem si, a l'entrada, canviem el qubit inferior ($|1\rangle$ a la figura) pel qubit $|0\rangle$?



$$|x\rangle_n|0\rangle \xrightarrow{\mathbb{I}\otimes H} |x\rangle_n \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|x\rangle_n|0\rangle + |x\rangle_n|1\rangle\right] \xrightarrow{U_f}$$

$$\xrightarrow{U_f} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|x\rangle_n|f(x)\rangle + |x\rangle_n|1\oplus f(x)\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|x\rangle_n|f(x)\rangle + |x\rangle_n|1-f(x)\rangle\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathbb{I}\otimes H} \frac{|x\rangle_n}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1-f(x)\rangle + (-1)^{f(x)}|f(x)\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|f(x)\rangle + (-1)^{1-f(x)}|1-f(x)\rangle\right]\right\}$$

$$\text{si } f(x) = 0 \Rightarrow \frac{|x\rangle_n}{2}\left[|1\rangle + (-1)^0|0\rangle + |0\rangle + (-1)^{1-0}|1-0\rangle\right] = |x\rangle_n|0\rangle$$

$$\text{si } f(x) = 1 \Rightarrow \frac{|x\rangle_n}{2}\left[|0\rangle + (-1)^1|1\rangle + |1\rangle + (-1)^0|0\rangle\right] = |x\rangle_n|0\rangle$$

la sortida és igual a l'entrada, no hi ha cap efecte

3. (3 p) Estudiem la implementació de la transformada de Fourier quàntica per 3 qubits.

(a) Sabem que el resultat serà un estat separable, completeu la següent expansió (a partir de l'expressió general coneguda)

$$|\Phi\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\pi x_0}|1\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots)\frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots).$$

L'expressió general és

$$U_{QFT}|y\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left[\sum_{y_{n-1}=0}^{1} e^{i\pi x y_{n-1}}|y_{n-1}\rangle\right]\left[\sum_{y_{n-2}=0}^{1} e^{i\frac{\pi}{2}x y_{n-2}}|y_{n-2}\rangle\right]\cdots\left[\sum_{y_0=0}^{1} e^{i\frac{\pi}{2^{n-1}}x y_0}|y_0\rangle\right] =$$

(per $n=3$) $$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sum_{y_2=0}^{1} e^{i\pi x y_2}|y_2\rangle\right]\left[\sum_{y_1=0}^{1} e^{i\frac{\pi}{2}x y_1}|y_1\rangle\right]\left[\sum_{y_0=0}^{1} e^{i\frac{\pi}{4}x y_0}|y_0\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}x}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}x}|1\rangle\right] =$$

($x = x_2 2^2 + x_1 2^1 + x_0$) $$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi(\cancel{4x_2}+\cancel{2x_1}+x_0)}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi(\cancel{2x_2}+x_1+\frac{x_0}{2})}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi(x_2+\frac{x_1}{2}+\frac{x_0}{4})}|1\rangle\right]$$

$\downarrow$ $e^{i2\pi}=1$

(b) Demostreu que el circuit de la figura produeix un resultat molt similar a l'estat separable del cas anterior

$$|x_2\rangle|x_1\rangle|x_0\rangle \xrightarrow{H\otimes I\otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_2}|1\rangle\right]|x_1\rangle|x_0\rangle \xrightarrow{B(\frac{\pi}{2})\otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle|x_1\rangle + e^{i\pi x_2}|1\rangle|x_1\rangle e^{i\frac{\pi}{2}x_1}\right]|x_0\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_2 + i\frac{\pi}{2}x_1}|1\rangle\right]|x_1\rangle|x_0\rangle \xrightarrow{I\otimes H\otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_2 + i\frac{\pi}{2}x_1}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_1}|1\rangle\right]|x_0\rangle$$

$$\xrightarrow[I \text{ pel } 2^n]{B(\pi/4) \text{ entre } 1^r \text{ i } 3^r} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_2 + i\frac{\pi}{2}x_1 + i\frac{\pi}{4}x_0}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_1}|1\rangle\right]|x_0\rangle \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{I\otimes B(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_2 + i\frac{\pi}{2}x_1 + i\frac{\pi}{4}x_0}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_1 + i\frac{\pi}{2}x_0}|1\rangle\right]|x_0\rangle \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{I\otimes I\otimes H} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_2 + i\frac{\pi}{2}x_1 + i\frac{\pi}{4}x_0}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_1 + i\frac{\pi}{2}x_0}|1\rangle\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + e^{i\pi x_0}|1\rangle\right]$$

com veiem el 1r i el 3r qubits estan intercanviats, però a banda d'això tot és igual

(c) Fer un esquema de les portes que caldria aplicar a la sortida per tal d'obtenir exactament el mateix estat del primer apartat.

Només ens cal aplicar un SWAP a la sortida