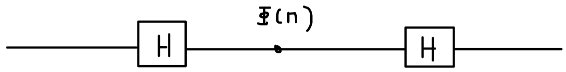
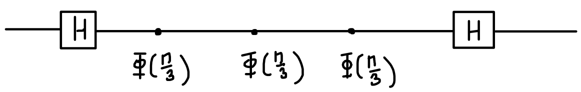
1. (3p) Trobeu una matriu que implementi ($\sqrt[3]{NOT}$). Quina altra matriu podria ser-ho també?

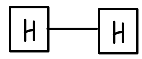
Partim de la porta NOT en termes del conjunt universal (per un qubit) phase shift + H

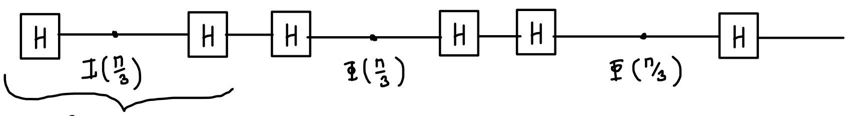


↓ donat que les fases es sumen per operadors consecutius



$$\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{i\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{i\psi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{i(\phi+\psi)}\end{pmatrix}$$

↓ podem afegir tants parells  com vulguem donat que $H^2 = \mathbb{I}$



per tant $\Rightarrow \sqrt[3]{NOT}$

i la matriu associada

$$H\cdot\Phi\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cdot H = H\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{i\pi/3}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\e^{i\pi/3}&-e^{i\pi/3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+e^{i\frac{\pi}{3}}&1-e^{i\pi/3}\\1-e^{i\pi/3}&1+e^{i\pi/3}\end{pmatrix}=$$

que considerant $\begin{cases}\cos(\pi/3)=1/2\\ \sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2\end{cases}$ $=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$

Tenim doncs $\sqrt[3]{NOT}\cdot\sqrt[3]{NOT}\cdot\sqrt[3]{NOT}=NOT$

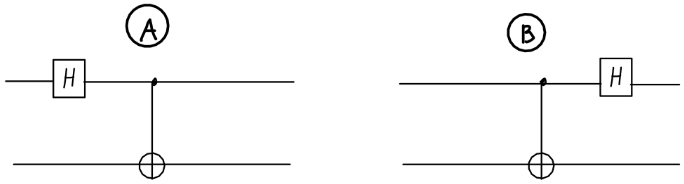
si fem l'adjunt — al ser NOT una porta hermítica

$$\left(\sqrt[3]{NOT}\right)^{+}\left(\sqrt[3]{NOT}\right)^{+}\left(\sqrt[3]{NOT}\right)=NOT^{+}\overset{\downarrow}{=}NOT$$

per tant també serà arrel cúbica la matriu

$$\left(\sqrt[3]{NOT}\right)^{+}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$$

2. El protocol de teleportació i el d'entanglement swapping estan basats en les combinacions de portes A i B. Per una banda sabem que l'esquema A produeix l'estat entrellaçat $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle]$ a partir de l'estat factoritzable $|0\rangle|0\rangle$. Anem a veure què fa l'esquema B.



(a) (3p) Deduir la matriu de cada muntatge (en el cas A per exemple caldrà trobar la matriu corresponent a $H \otimes I$ i combinar-la amb $CNOT$).

A

$$\text{C-NOT} \cdot (H \otimes \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B

$$(H \otimes \mathbb{I}) \cdot \text{C-NOT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (2p) Quina matriu obtenim si les apliquem una després de l'altra? Què significa respecte a la funció de B?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

$\Rightarrow$ la B és la inversa del muntatge A que entrellaça, per tant d'alguna manera és un circuit que "des-entrellaça"

(c) (1p) Fem un parell de comprovacions. Quin estat obtenim si apliquem B sobre $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle]$? el resultat és un estat factoritzable o entrellaçat?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle|0\rangle$$

com era d'esperar ha invertit l'efecte del muntatge A i el resultat és producte de dos estats (factoritzable)

(d) (1p) I si actua sobre un estat factoritzable com $\frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + |1\rangle]\frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + |1\rangle]$? el resultat és un estat factoritzable o entrellaçat?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle\right] = |0\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]$$

Segueix resultant un estat factoritzable

(tot i que no és cert en general)