Examen final de CCQ **Juny 2023**

1. Sigui el qubit descrit pel ket $|\psi>= A\left(4|0> +3(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)|1>\right)$.

   (a) Normalitzeu correctament el qubit

$$\langle\psi|\psi\rangle = A^2 \sum c_i^* c_i = A^2\left[4^2 + 3^2\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac12 i\right)\right] = A^2\left[16 + 9\cdot\left(\frac34+\frac14\right)\right] = A^2\cdot 25 = 1$$

$$A = \pm\frac15$$

   (b) En quina direcció de l'esfera de Bloch apunta el qubit anterior? Doneu θ i φ entre 0 i π i entre 0 i 2π, respectivament.

Tenim
$$|\psi\rangle = \frac45|0\rangle + \frac35\underset{1\cdot e^{i30^\circ}}{\underset{\shortparallel}{\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)}}|0\rangle = \frac45|0\rangle+\frac35 e^{i30^\circ}|1\rangle \equiv \cos\left(\frac\theta2\right)|0\rangle + \sin\left(\frac\theta2\right)e^{i\phi}|1\rangle$$

$$\underline{\underline{\phi = 30^\circ}} \qquad \cos\left(\frac\theta2\right) = \frac45 \Rightarrow \underline{\underline{\theta = 73.7^\circ}}$$

   (c) Quina és la probabilitat de trobar l'estat anterior en $|+>_y = 1/\sqrt{2}(|0> +i|1>)$ si fem una mesura en la base $\{|+>_y, |->_y\}$?

$$p = \langle\psi|+\rangle_y\,{}_y\langle+|\psi\rangle = \left(\frac{1}{10\sqrt2}\right)^2(11-3\sqrt3 i)(11+3\sqrt3 i) = \frac{1}{100\cdot2}(11^2+27) = \frac{148}{200}\simeq \underline{\underline{0.74}}$$

$${}_y\langle+|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt2}(1,-i)\begin{pmatrix}4/5\\ \frac35 e^{i30^\circ}\end{pmatrix} = \frac1{\sqrt2}\left[\frac45+\frac35 e^{i30-i90}\right] = \frac{1}{5\sqrt2}\left[4+3e^{-i60^\circ}\right] = \frac{1}{10\sqrt2}(11-3\sqrt3 i)$$

   (d) Si l'operador energia $\hat{E}$ està definit com $\hat{E}|0>= E_0|0>$ i $\hat{E}|1>= E_1|1>$, on E_0 i E_1 són els valors (reals) de les energies dels estats $|0>$ i $|1>$, respectivament, quin seria el valor esperat de la mesura de l'energia de l'estat $|\psi>$, és a dir, $<\psi|\hat{E}|\psi>$?

$$\langle\psi|\hat E|\psi\rangle = \langle\psi|\hat E\,\frac15\left[4|0\rangle+3e^{-i60^\circ}|1\rangle\right] = \langle\psi|\frac15\left[4E_0|0\rangle+3e^{-i60^\circ}E_1|1\rangle\right] =$$

$$= \frac15\left(4, 3e^{+i60^\circ}\right)\frac15\begin{pmatrix}4E_0\\ 3e^{-i60^\circ}E_1\end{pmatrix} = \frac1{25}\left[16E_0+9E_1\right] \simeq 0.64E_0+0.36E_1$$

2. Considereu l'estat de dos qubits: $|\Phi> = \frac{1}{\sqrt{6}}|00> - \frac{i}{\sqrt{3}}|01> + \frac{1}{2\sqrt{3}}|10> - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}|11>$

(a) Comproveu si està normalitzat.

$$\langle \phi | \phi \rangle = \sum c_i^* c_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \left(\frac{-i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

(b) És un estat separable o entrellaçat? Perquè?

Si és separable $\quad [a|0\rangle + b|1\rangle][c|0\rangle + d|1\rangle] = \underbrace{ac}_{\alpha}|0\rangle|0\rangle + \underbrace{ad}_{\beta}|0\rangle|1\rangle + \underbrace{bc}_{\gamma}|1\rangle|0\rangle + \underbrace{bd}_{\delta}|1\rangle|1\rangle$

per tant cal que $\alpha\delta = \beta\gamma$

en aquest cas $\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) \stackrel{?}{=} \left(-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ $\quad$ clarament $\underline{\underline{\text{no}}}$ ho verifica

(c) Quina és la probabilitat de trobar el resultat 01 en mesurar els dos qubits?

$$p = c^* c = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{-i}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

(d) Quines són les probabilitats de trobar els resultats 0 i 1 en mesurar el qubit de la dreta?

$$p_0 = \langle \psi | \underbrace{\mathbb{I} \otimes |0\rangle\langle 0| \psi \rangle}_{=} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}}|1\rangle|0\rangle$$

(e) Si en mesurar el qubit de la dreta hem trobat el resultat 1, en quin estat es trobarà el qubit de l'esquerra? I si ara mesuréssim aquest últim, quina seria la probabilitat de què donés 1?

$$|\phi\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}}|1\rangle\right]|0\rangle + \underbrace{\left[-\frac{i}{\sqrt{3}}|0\rangle - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}|1\rangle\right]}|1\rangle$$

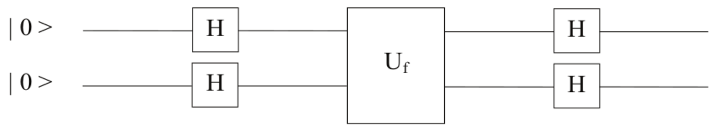
seria aquest normalitzat correctament

$$N^2 \cdot \left[\frac{1}{3} + \frac{5}{12}\right] = 1 \Rightarrow N^2 \frac{9}{12} = 1 \Rightarrow N^2 = \frac{4}{3}$$

quedaria en l'estat $\quad |\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[-\frac{i}{\sqrt{3}}|0\rangle - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}|1\rangle\right] = \underline{\underline{-\frac{2}{3}i|0\rangle - \frac{\sqrt{5}}{3}|1\rangle}}$

$$p(1) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \simeq \underline{\underline{0.55}}$$

3. Considereu una funció $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$. Ens diuen que la funció és constant (o bé val 0, o bé val 1, per tots els valors d'entrada) o balancejada (mateix nombre de 0's que de 1's com a sortida). Per tal de fer-ho apliquem l'algorisme de Deutsch generalitzat que, en el cas de dos qubits d'entrada, es representa:



(a) Determineu la matriu $M = H \otimes H$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Determineu la matriu U_f

$$U_f |x\rangle_n = (-1)^{f(x)} |x_n\rangle \Rightarrow U_f = \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{f(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{f(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{f(3)} \end{pmatrix}$$

(c) Apliqueu la seqüència $M\ U_f\ M$ al vector corresponent a l'entrada $|0>|0>$ i determineu l'expressió general del vector de sortida.

$$M|0\rangle|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{U_f}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{f(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{f(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{f(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} \\ (-1)^{f(1)} \\ (-1)^{f(2)} \\ (-1)^{f(3)} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overset{M}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} \\ (-1)^{f(1)} \\ (-1)^{f(2)} \\ (-1)^{f(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)} + (-1)^{f(2)} + (-1)^{f(3)} \\ (-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)} + (-1)^{f(2)} - (-1)^{f(3)} \\ (-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)} - (-1)^{f(2)} - (-1)^{f(3)} \\ (-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)} - (-1)^{f(2)} + (-1)^{f(3)} \end{pmatrix}$$

(d) Les possibles sortides són els estats $\{|0>|0>, |0>|1>, |1>|0>, |1>|1>\}$ (o els vectors corresponents) que corresponen als valors $\{0, 1, 2, 3\}$. Suposem que finalment mesurem i trobem el valor 1. Quin tipus de funció és?

Només s'obtindrà $1 \equiv |0\rangle|1\rangle$ si $(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)} + (-1)^{f(2)} - (-1)^{f(3)} = \pm 1 \Rightarrow$ balancejada

(e) Quina informació addicional podem donar sobre la funció? (per exemple, per quins valors d'entrada dóna igual i per quins diferent).

Haurà de ser $f(0) = f(2) \neq f(1) = f(3)$

(f) Responeu les mateixes preguntes anteriors suposant que la mesura hagués estat 2.

Llavors cal $f(0) = f(1) \neq f(2) = f(3)$

4. Volem usar l'algorisme de Shor per trobar el període de la funció $f(x) = 7^x \bmod 10$.

(a) Quin és el número de qubits, n, que necessitarem?

Ha de ser $2^n > N^2 = 10^2 = 100 \Rightarrow n \ln 2 > \ln 100 \Rightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 2} = 6.6 \Rightarrow n = 7$

(b) Si en fer la mesura final del registre de l'input trobem el valor $y_l = 32$, podem deduir-ne el període r? Expliqueu com i quin període obteniu.

Es mesura $y_\ell = \ell \frac{2^n}{r} + \Delta_\ell$

el període es trobarà a partir dels convergents de $\frac{y_\ell}{2^7} = \frac{32}{128}$

Fem la taula

n	0	1
a_n	$\left[\frac{32}{128}\right] = 0$	$\left[\frac{1}{x_0}\right] = \left[\frac{128}{32}\right] = 4$
x_n	$x_0 = x - a_0 = \frac{32}{128}$	$\frac{128}{32} - 4 = 0$
p_n	$a_0 = 0$	$a_0 a_1 + 1 = 1$
q_n	$q_0 = 1$	$a_1 = 4$
$f(q_n)$	$7^1 = 7$	$7^4 = 1$

$\Rightarrow r = 4$

(c) Apart del valor $y_l = 32$, quins altres valors podríem haver trobat en avaluar el registre input? Comproveu si podríem extreure'n el període d'aquests altres, raonant la vostra resposta.

En principi $y_\ell = \ell \frac{2^n}{r} + \Delta_\ell \underset{\uparrow\,\text{aquí}}{=} \ell \cdot \frac{2^7}{4} + \Delta_\ell = \ell\, 32 + \underbrace{\Delta_\ell}_{\text{haurà de ser sempre } \emptyset}$

estem en un cas en que $\frac{2^n}{r}$ és enter, només poden sortir

$0,\ 1\cdot 32,\ 2\cdot 32,\ \underbrace{3}_{=\,r-1}\cdot 32 = 0,\ \underbrace{32,\ 64,\ 96}_{\text{qualsevol d'aquests tres permet trobar } r}$

$y_\ell = 64$

n	0	1
a_n	$\left[\frac{64}{128}\right] = 0$	$\left[\frac{1}{x_0}\right] = \left[\frac{128}{64}\right] = 0$
x_n	$x_0 = x - a_0 = \frac{64}{128}$	$\frac{128}{32} - 0 = 4$
p_n	$a_0 = 0$	$a_0 a_1 + 1 = 1$
q_n	$q_0 = 1$	$a_1 = 4$
$f(q_n)$	$7^1 = 7$	$7^4 = 1 \Rightarrow \boxed{r = 4}$

$y_\ell = 96$

n	0	1	2
a_n	$\left[\frac{96}{128}\right] = 0$	$\left[\frac{1}{x_0}\right] = \left[\frac{128}{96}\right] = 1$	$\left[\frac{96}{32}\right] = 3$
x_n	$x_0 = x - a_0 = \frac{96}{128}$	$\frac{128}{96} - 1 = \frac{32}{96}$	$\frac{96}{32} - 3 = 0$
p_n	$a_0 = 0$	$a_0 a_1 + 1 = 1$	$a_2 p_1 + p_0 = 3\cdot 1 + 0 = 3$
q_n	$q_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 q_1 + q_0 = 3\cdot 1 + 1 = 4$
$f(q_n)$	$7^1 = 7$	$7^1 = 1$	$7^4 = 1 \Rightarrow \boxed{r = 4}$