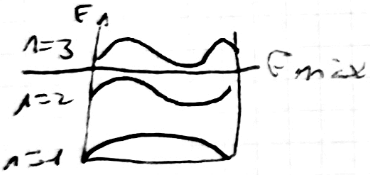
5 - QBits

Computació clàssica → bits $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Computació quàntica → qbits: Estats quàntics qualsevol en un sistema que té una base de 2 estats → $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$

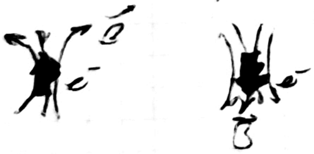
Com podem implementar un qbit?

Opció 1: Partícula en un pou:



} 2 estats

Opció 2: Spin: Un e^- té un camp magnètic. Aquest pot tenir dues orientacions. Se l'anomena spin:



Opció 3: Llum (fotons) polaritzada. Pot estar polaritzada vertical o horitzontalment. 2 estats.

Estat general d'un qbit: $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle, (c_0, c_1 \in \mathbb{C})$

Treballarem amb <u>SUPERPOSICIONS</u> (∞ possibles estats)

Un qbit ha de complir la següent condició: $c_0^* \cdot c_0 + c_1^* c_1 = 1$

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= r_0 e^{i\phi_0} \\ c_1 &= r_1 e^{i\phi_1} \end{aligned}\right\} |\psi\rangle = r_0 e^{i\phi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\phi_1}|1\rangle, (r_0, r_1 \geq 0)$$

$$|\psi\rangle = \boxed{e^{i\phi_0}}\left(r_0|0\rangle + r_1 e^{i\overbrace{(\phi_1-\phi_0)}^{\phi}}|1\rangle\right) = r_0|0\rangle + r_1 e^{i\phi}|1\rangle$$

$c_0^* c_0 + c_1^* c_1 = 1$ $\Big\}$ $r_0^2 + r_1 e^{-i\phi} \cdot r_1 e^{i\phi} = r_0^2 + r_1^2 = 1$

↳ Fase global

↳ Es pot descartar, ja que no té cap implicació

$r_0^2 + r_1^2 = 1 \rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Podem expressar un qbit com:

$$|\psi\rangle = \cos\alpha\,|0\rangle + \sin\alpha \cdot e^{i\phi}\,|1\rangle$$

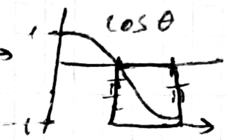
Només depèn de 2 angles

$\theta \in [0, \pi]$

$\phi \in [0, 2\pi]$

$\left.\begin{array}{l}\alpha = \theta \\ \phi = \phi\end{array}\right\}$! Compte! $\boxed{r_0, r_1 \geq 0}$!

Si fem que $r_0 = \cos\theta$ Error $\rightarrow$



No pot ser!

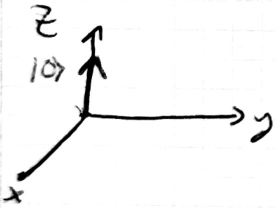
Solució: $\boxed{r_0 = \cos\frac{\theta}{2}}$

Per tant, la forma més general d'un qbit serà:

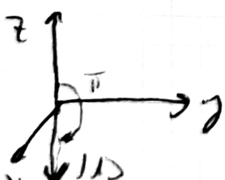
$$\boxed{\begin{array}{c}|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi}\,|1\rangle \\ \theta \in [0, \pi],\ \phi \in [0, 2\pi]\end{array}}$$

Finalitat el podem representar gràficament.

Cas $\theta = 0 \rightarrow \cos(0)\,|0\rangle + \cancel{\sin(0)}^{\,0}\,|1\rangle = |0\rangle$



Cas $\theta = \pi \rightarrow \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\,0}|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle = |1\rangle$

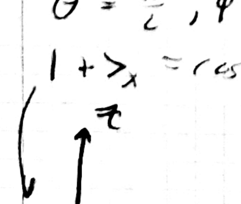


Com que tots els estats tenen longitud = 1, estan en una esfera, l'esfera de Bloch.

Veiem més estats especials.

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$

$|+\rangle_x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle + |1\rangle\right]$



2n element de la base?

1r el. $\Rightarrow |+\rangle = \cos(\frac{\pi}{4})|0\rangle + \sin(\frac{\pi}{4})|1\rangle$

$|-\rangle = \cos(\frac{\alpha}{2})|0\rangle + \sin(\frac{\alpha}{2}) e^{i\gamma}|1\rangle$

(α, γ) incògnites

Com que estem en una base, s'ha de complir $\langle -|-\rangle = 1$ i $\langle +|+\rangle = 1$.
També sabem que $|+\rangle$ i $|-\rangle$ han de ser ortogonals, per tant, s'ha de complir que $\langle +|-\rangle = 0 \rightarrow \underbrace{\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\theta}\right)}_{\langle +|} \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}e^{i\gamma}\end{pmatrix}}_{|-\rangle}$

Fem el producte escalar: $\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}e^{i(\gamma-\theta)} = 0$

Una solució possible:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\alpha}{2} &= \sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} &= \cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}\right\} \cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}e^{i(\gamma-\theta)} = 0$$

Perquè es cancel·lin ambdós termes, el signe d'un ha de ser l'oposat al de l'altre, per tant: $e^{i(\gamma-\theta)} = -1 \rightarrow e^{i\pi} = -1 \rightarrow \gamma - \theta = \pi$

La base, per tant, ens queda:

~~$|+\rangle_{\theta,\phi} = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + \sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle e^{i\phi}$~~

$$\left.\begin{aligned}|+\rangle_{\theta,\phi} &= \cos(\tfrac{\theta}{2})|0\rangle + \sin(\tfrac{\theta}{2})\cdot e^{i\phi}|1\rangle \\ |-\rangle_{\theta,\phi} &= \sin(\tfrac{\theta}{2})|0\rangle - \cos(\tfrac{\theta}{2})\cdot e^{i\phi}|1\rangle\end{aligned}\right\} \text{Base general}$$

Per tant: $|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle - |1\rangle]$

Exercici: $|+\rangle_y$ i $|-\rangle_y$?

$\sqrt{e^{i\pi}} = \sqrt{-1} = i$

$|+\rangle_y \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}$

$|+\rangle_y = \cos(\frac{\pi}{4})|0\rangle + \sin(\frac{\pi}{4})e^{i\frac{\pi}{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}|1\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + i|1\rangle]$

$|+\rangle_y = \cos\frac{\pi}{4}|0\rangle + \sin(\frac{\pi}{4})|1\rangle\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$|-\rangle_y = \cos(\frac{\alpha}{2})|0\rangle + \sin(\frac{\alpha}{2})\cdot e^{i\gamma}|1\rangle$

$\langle +|-\rangle = 0 \rightarrow \left(\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})e^{-i\phi}\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2}e^{i\gamma}\end{pmatrix} \rightarrow$ ídem al x:

$\therefore |-\rangle_y = \sin(\frac{\pi}{4})|0\rangle - \cos(\frac{\pi}{4})e^{i\frac{\pi}{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle - i|1\rangle]$

Projectors:

Tenim: $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ vectors propis d'un cert observable

$\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ idem amb un altre observable

Quan tinc un estat $|\psi\rangle$, com puc calcular la probabilitat que el mesurar un cert observable surti un cert valor propi?

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i \underbrace{|i\rangle}_{\text{base}} = \sum_i \langle i|\psi\rangle |i\rangle$$

probabilitat de i: $P_i = c_i^* c_i$

En termes de brackets: $\underbrace{\langle\psi|i\rangle}_{c_i^*} \underbrace{\langle i|\psi\rangle}_{c_i}$

Tenim, per tant, que: $P_i = \langle\psi|\boxed{i\rangle\langle i}|\psi\rangle$

S'assembla molt a $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$

Aquest $|i\rangle\langle i|$ ha de ser un operador. En direm projector (P_i o Π_i)

Concloem que:

$\langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle$: Probabilitat que al mesurar un estat $|\psi\rangle$ amb l'observable que té autovectors $\{|i\rangle\}$ obtinguem l'estat $|i\rangle$

Fem un exemple:

Prenent com a base: $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + |1\rangle]$ probabilitat de $|0\rangle$:

$$P_0 = \underbrace{\langle +|0\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \underbrace{\langle 0|+\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}$$

Exercici:

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$. Mesuro ~~l'observ~~ l'observable que té per VEPS $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$. Amb quina probabilitat n'obtindrem cadascun?

$$P_{|+\rangle_x} = \langle\psi|\Pi_{+x}|\psi\rangle = \langle\psi|+_x\rangle_x\langle +|\psi\rangle = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{18}} = \boxed{0,9714}$$ → El quadrat ve pq cap dels 2 té part complexa.

$$P_{|-\rangle_x} = \langle\psi|\Pi_{-x}|\psi\rangle = \langle\psi|-_x\rangle\langle -_x|\psi\rangle = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{18}} = \boxed{0,0286}$$

I si ara ho fem amb l'eix y?

$$P_{|+\rangle_y} = \langle\psi|\Pi_{+y}|\psi\rangle = \langle\psi|+_y\rangle\langle +_y|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix} =$$

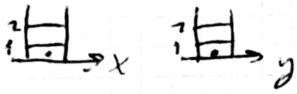
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Registre quàntic:

2 qbits. Cada qbit té el seu propi espai de Hilbert (totes les CL de la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) amb producte escalar, projectors, operadors...

Si els combino, quin és l'espai de Hilbert resultant?

Agafem el cas del pou:

 $\rightarrow \hat{H}\,\psi(x,y,t) = i\hbar\,\dot{\psi}(x,y,t)$

Resoldríem l'eq. de Schrödinger per als 2 qbits. Separem variables.

$\psi(x,y)\cdot\phi(t)$. Ens queda:

$\hat{H}\,\psi(x,y) = E\,\psi(x,y) \rightarrow (\hat{H}_1(x) + \hat{H}_1(y))\,\psi(x,y)$

$\phi(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

Sabem que per al qbit x: solucions: $\{\varphi_i(x)\}$ i $\{E_i\}$

Per al qbit y: solucions $\{\varphi_j(y)\}$ i $\{E_j\}$

Provem ara si el producte a continuació és o no solució:

$$(\hat{H}_1(x) + \hat{H}_1(y))\,\varphi_i(x)\varphi_j(y) = (E_i\,\varphi_i(x))\,\varphi_j(y) + (E_j\cdot\varphi_j(y))\,\varphi_i(x) =$$

$$= \underbrace{(E_i + E_j)}_{E}\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)$$

Concloem que: $\{\varphi_i(x)\varphi_j(y)\}$ són solucions amb energies $\{E_i + E_j\}$

Principi. L'espai de Hilbert resultant és aquell en el que la seva base està formada per tots els productes entre les bases de cada qbit.

A això se'n diu el producte tensorial d'espais de Hilbert.

En termes de kets: $\{|i\rangle \otimes |j\rangle\}$ → base de l'espai resultant.

Diferents notacions:

- $|0\rangle \otimes |0\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle$, $|1\rangle \otimes |0\rangle$, $|1\rangle \otimes |1\rangle$
- $|0\rangle|0\rangle$, $|0\rangle|1\rangle$, $|1\rangle|0\rangle$, $|1\rangle|1\rangle$
- $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$
- $|0\rangle_2$, $|1\rangle_2$, $|2\rangle_2$, $|3\rangle_2$
- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Exercici:

$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle+|1\rangle)(|0\rangle+|1\rangle)$. Escriu en les diferents notacions.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) =$$
$$= \frac{1}{2}(|0\rangle_2 + |1\rangle_2 + |2\rangle_2 + |3\rangle_2) =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

En general, si tinc dos estats: $(a_1|0\rangle + b_1|1\rangle)\otimes(a_2|0\rangle + b_2|1\rangle) =$

$= (a_1a_2|0\rangle_2 + a_1b_2|1\rangle_2 + b_1a_2|2\rangle_2 + b_1b_2|3\rangle_2)$.

També: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \\ a_1 b_2 \\ b_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ b_1\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Està normalitzat?

$\langle\psi|\psi\rangle = 1?$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{2}(1,1,1,1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1$$

$||$

$$\left(\frac{1}{2}\underbrace{(\langle 0| + \langle 1|)}_{qbit_1}\underbrace{(\langle 0| + \langle 1|)}_{qbit_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\underbrace{(|0\rangle+|1\rangle)}_{qbit_1}\underbrace{(|0\rangle+|1\rangle)}_{qbit_2}\right) = \frac{1}{4}\underbrace{\Big(\underset{1}{\langle 0|0\rangle} + \cancel{\langle 0|1\rangle}^{0} + \cancel{\langle 1|0\rangle}^{0} + \underset{1}{\langle 1|1\rangle}\Big)}_{qbit_1}$$

$$\underbrace{\Big(\underset{1}{\langle 0|0\rangle} + \cancel{\langle 0|1\rangle}^{0} + \cancel{\langle 1|0\rangle}^{0} + \underset{1}{\langle 1|1\rangle}\Big)}_{qbit_2} = \frac{1}{4}(2\cdot 2) = \boxed{1}$$

Exercici:

Normalitzar $|\psi\rangle = \frac{1}{N}\overbrace{(|0\rangle + 2|1\rangle)}^{\varphi_1}\overbrace{(|0\rangle - i|1\rangle)}^{\varphi_2}\overbrace{(|1\rangle)}^{\varphi_3}$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{N^2}(\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle)(\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle)(\langle\varphi_3|\varphi_3\rangle)$$

Recordem:

$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

$\langle\varphi|\varphi\rangle = a^*a + b^*b = (a^*, b^*)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1$

Llavors

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{N^2}(1\cdot 1 + 2\cdot 2)(1\cdot 1 + i(-i))(0\cdot 0 + 1\cdot 1) = 1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{N^2}(5)(2)(1) = 1$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{N^2}\cdot 10 = 1 \rightarrow N^2 = 10 \rightarrow \boxed{N = \sqrt{10}}$$

Quants elements té una base de n qbits? 2^n

Un problema quàntic de 100 qbits no es pot simular amb un ordinador clàssic, ja que es necessitaria simular 2^{100} possibles estats.

Producte tensorial d'operadors

Tenim $\hat{A}|\psi\rangle_a$ i $\hat{B}|\psi\rangle_b$, que són respectivament, l'espai de Hilbert del qbit a i el del qbit b.

Ara ens preguntem:

$$\hat{A}|\psi\rangle_a \otimes \hat{B}|\psi\rangle_b = ? \rightarrow \overset{?}{(\hat{A}\otimes\hat{B})}|\psi\rangle_a|\psi\rangle_b$$

Ho farem per a 2 qbits

$$\hat{A}|\psi\rangle_a \otimes \hat{B}|\psi\rangle_b = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & 4\times 4 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_{\hat{A}\otimes\hat{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 a_2 \\ a_1 b_2 \\ b_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{pmatrix}}_{|\psi\rangle_a|\psi\rangle_b}$$

Només farem la 1a fila, ja que la resta són extrapolables.

$$\hat{A}|\psi\rangle_a = \begin{pmatrix} A_{11}a_1 + A_{12}b_1 \\ A_{21}a_1 + A_{22}b_1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}|\psi\rangle_b = \begin{pmatrix} B_{11}a_2 + B_{12}b_2 \\ B_{21}a_2 + B_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11}a_1 + A_{12}b_1 \\ A_{21}a_1 + A_{22}b_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_{11}a_2 + B_{12}b_2 \\ B_{21}a_2 + B_{22}b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11}a_1 + A_{12}b_1)(B_{11}a_2 + B_{12}b_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$A_{11}B_{11}\boxed{a_1a_2} + A_{11}B_{12}\boxed{a_1b_2} + A_{12}B_{11}\boxed{b_1a_2} + A_{12}B_{12}\boxed{b_1b_2}$$

La primera fila de la matriu 4x4 ens quedaria:

$$A_{11}B_{11} \quad A_{11}B_{12} \quad A_{12}B_{11} \quad A_{12}B_{12}$$

Podem extrapolar això a la resta de la matriu

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cancel{A_{11}\ A_1}\ A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

Llavors:

$$\hat{A}\otimes\hat{B} = \begin{pmatrix} A_{11}\cdot B & A_{12}\cdot B \\ A_{21}\cdot B & A_{22}\cdot B \end{pmatrix}$$

Resum:

Producte tensorial d'estats:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cdot\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ b_1\cdot\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 \\ a_1b_2 \\ b_1a_2 \\ b_1b_2 \end{pmatrix}$$

Producte tensorial d'operadors

$$\hat{A}\otimes\hat{B} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}\cdot B & A_{12}\cdot B \\ \hline A_{21}\cdot B & A_{22}\cdot B \end{array}\right)$$

Exercici

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I \otimes H$?

$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$I \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$H \otimes I$?

$$H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Regla de Born generalitzada

La regla de Born ens deia com calcular probabilitats.

Un sol qbit $\rightarrow |\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$

$$p_i = c_i^* c_i$$

$$\sum_i c_i^* c_i = 1 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

Es pot fer més formal definint projectors:

$p_i = c_i^* c_i = \langle\psi|i\rangle\langle i|\psi\rangle = \langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle$

↳ valor esperat del projector associat a l'estat $|i\rangle$: $\Pi_i \equiv |i\rangle\langle i|$

2 qubits → Podem mesurar només un dels qubits.

Si mesurem el 1r qubit, quina és la probabilitat d'obtenir cada estat d'aquest 1r? En quin estat queda el 2n?

1 qubit: $p_i = \langle\psi|\Pi_i|\psi\rangle \rightarrow$ 2 qbits $= \langle\psi|\underset{1r}{\Pi_i} \otimes \underset{2n}{I}|\psi\rangle = p_i$

Amb números: $|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$

p_0 primer qbit $= \underbrace{\langle\psi|\,|0\rangle\langle 0|}\underbrace{\otimes I|\psi\rangle}$

$\frac{1}{2}(\langle 0|_b + \langle 1|_b)\frac{1}{2}(|0\rangle_b + |1\rangle_b)$

$$\frac{1}{4}(\langle 0|0\rangle + \langle 1|1\rangle) = \frac{1}{4}(2) = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_b + |1\rangle_b) \rightarrow 2n\ \text{qbit}$$

$$\frac{1}{2}(|0\rangle_b + |1\rangle_b) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_b + |1\rangle_b)}$$

En general, val l'expressió:

$|\psi\rangle = c_0|0\rangle|\psi_0\rangle + c_1|1\rangle|\psi_1\rangle$, c_0, c_1 tals que $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = \langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1$

$$= \sum_i c_i |i\rangle|j\rangle|k\rangle \ldots$$

$\langle\psi|\psi\rangle = c_0^* c_0 \langle 0|0\rangle\langle\psi_0|\psi_0\rangle + c_1^* c_1 \langle 1|1\rangle\langle\psi_1|\psi_1\rangle = c_0^* c_0 + c_1^* c_1$

Ho apliquem a l'exemple: $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle(|0\rangle+|1\rangle) + \frac{1}{2}|1\rangle(|0\rangle+|1\rangle) =$

factor comú qbit que vull mesurar; Normalitza

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \underbrace{\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)}_{|\psi_0\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \underbrace{\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)}_{|\psi_1\rangle}$$

c_0 ... c_1

$$P_{0\,1r\,q} = c_0^* c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exercici:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|0\rangle+2|1\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)|0\rangle$$

a) $P_{0\,2n\,q}$?

b) Estat resultant per a la resta?

a) Normalitzem els qbits:

① $\frac{1}{N}(1,2)\cdot\frac{1}{N}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1$

$\frac{1}{N^2}(1,2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1 \Rightarrow \frac{1}{N^2}(1+4)=1 \Rightarrow \frac{1}{N^2}=\frac{1}{5} \to N^2=5 \Rightarrow \boxed{N=\sqrt{5}}$

② $\frac{1}{N}(1,-1)\cdot\frac{1}{N}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{N^2}(1,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{N^2}(1+1) \Rightarrow N^2=2 \Rightarrow \boxed{N=\sqrt{2}}$

③ $\frac{1}{N}(1,0)\cdot\frac{1}{N}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{N^2}(1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{N^2}(1)=1 \Rightarrow N^2=1 \to \boxed{N=1}$

$$P_{0\,2n\,q} = c_0^* c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\to |\psi\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}(|0\rangle+2|1\rangle)}_{qbit\,1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)}_{qbit\,2}\cdot\underbrace{(|0\rangle)}_{qbit\,3}$$

Entrellaçament

Exemple 2 qbits:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle+|0\rangle|1\rangle+|1\rangle|0\rangle+|1\rangle|1\rangle) = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)}^{1r\ qubit}\cdot\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)}^{2n\ qubit}$$

Mesuro el 1r qubit i surt 0.

El 2n qubit queda en l'estat $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$ El 2n queda inalterat

ESTAT FACTORITZABLE: S'escriuen com un producte i la mesura d'un no afecta la de l'altre.

Postulat: La nova base és el $\otimes$. Llavors, és possible l'estat: $\underbrace{\overset{c_0c_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}(|0\rangle\overset{|\psi_0\rangle}{|0\rangle}+|1\rangle\overset{|\psi_1\rangle}{|1\rangle})}_{\text{Cat state}}$

$P_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ Estat del 2n $\to |0\rangle$

$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ Estat del 2n $\to |1\rangle$

En general tenim 2 tipus d'estats:

<u>Separables</u>:

$$|\psi\rangle = \underbrace{[a_1|0\rangle + b_1|1\rangle]}_{\text{Sistema a}} \otimes \underbrace{[a_2|0\rangle + b_2|1\rangle]}_{\text{Sistema b}} = \overset{\alpha}{a_1a_2}|0\rangle|0\rangle + \overset{\beta}{a_1b_2}|1\rangle + \overset{\gamma}{a_2 1}|1\rangle + \underset{\omega}{b_1b_2}|1\rangle|1\rangle$$

$$\alpha\omega = \beta\gamma$$

<u>Entrellaçats</u>:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle_a|0\rangle_b + |1\rangle_a|1\rangle_b] \rightarrow \text{Cat state}$$

Un estat separable compleix la igualtat $\alpha\omega = \beta\gamma$. Un d'entrellaçat, no.

Podem expressar els qubits en diferents bases.

Partint del Cat state:

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \qquad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

$$|+\rangle_x + |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\,|0\rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)\right)$$

$$= \dots = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|+\rangle + |-\rangle|-\rangle)$$

Resum part matemàtica:

- Cada sistema físic quàntic està associat a un espai de Hilbert complex:
  - Té una base $\rightarrow |\psi\rangle = \sum c_i|i\rangle \rightarrow$ Superposició quàntica
  - Té producte escalar $\langle\psi|\phi\rangle$
  - $\langle\psi|\psi\rangle = 1 \rightarrow$ estats acceptables.
- Cada observable té associats un conjunt de projectors, un per cada possible resultat del nostre experiment. $\Pi_i = |i\rangle\langle i| \rightarrow p_i = \langle\psi|\Pi_i|i\rangle$
- Si tenim més d'un sistema físic $\rightarrow$ producte tensorial dels espais de Hilbert $\rightarrow$ entrellaçament quàntic.
- Aquest espai producte del producte tensorial té els seus projectors generalitzats $(\Pi_i \otimes I \otimes I \dots)$