Computació Numèrica

Sistemes d'equacions lineals

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

7 de març de 2023

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Pràctica 3

MATLAB®

Conceptes generals

`Matlab` treballa essencialment només amb un tipus d'objecte, una matriu rectangular de nombres reals o complexes.

En particular, per matrius d'una fila o columna parlarem de vectors.

Matrius

Una matriu s'obté entrant la llista explícita dels seus elements, separats per blancs o comes, fent servir punt i coma per acabar una fila, i entre claudàtors.

$\gg$ `A = [1 1; 2 2]`

Podem fer referència als elements de la matriu,

$\gg$ A(2,2) ens retorna 2,

i modificar el seu valor si així convé $\gg$ A(2,2)=5.

Les matrius no s'han de dimensionar, això permet d'afegir files ($\gg$ `A=[A;3 3]`) o treure-les-en ($\gg$ `A=A(1:2,:)`) i retornem a la matriu `A` inicial.

Com definir una matriu?

a) Per la llista explícita dels seus elements.
b) Fent ús de funcions predefinides en `Matlab`:

   `rand` , `randn` , `zeros` , `eye` , `ones` , `magic` , `hilbert` , `diag`.
c) Llegint dades des d'un fitxer extern.
d) Executant un `script` definit per nosaltres.

Per practicar...

Exercici 1 Definiu la matriu $U = (u_{ij})_{15\times 15}$ i el vector $b = (b_i)_{15\times 1}$ com

$$u_{ij} = \begin{cases} \cos(ij) & i \leq j\,, \\ 0 & i > j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = \tan(i)\,.$$

Exercici 2 Definiu la matriu $L = (u_{ij})_{20\times 20}$ i el vector $b = (b_i)_{20\times 1}$ com

$$l_{ij} = \begin{cases} i + j & i \geq j\,, \\ 0 & i < j\,, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad b_i = i\,.$$

Funcions matricials

a) La trasposada d'una matriu `A`, s'obté per `A'`.
b) La inversa d'una matriu `A`, s'obté per `inv(A)`.
c) La diagonal d'una matriu `A`, s'obté per `diag(A)`.
d) El determinant d'una matriu `A`, s'obté per `det(A)`.
e) `rank(A)` és el rang d'una matriu `A`.
f) `norm(A)` és la norma d'una matriu `A`.
g) `norm(v)` és el mòdul d'un vector `v`.

Funcions predefinides

a) `A\b`, solució del sistema $Ax = b$.

b) `[L,U,P]=lu(A)`, factorització $PA = LU$.

c) `L=chol(A)`, factorització $A = LL'$.

d) `[Q,R]=qr(A)`, factorització $A = QR$.

e) `[V,D]=eig(A)`, vectors i valors propis.

f) `[S,V,D]=svd(A)`, descompossició en valors singulars.

g) Parts d'una matriu:

- superior `triu(A)`,
- inferior `tril(A)`,
- diagonal `diag(A)`.

Per practicar...

Exercici 3 Per a les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comproveu les igualtats següents:

a) $(AB)C = A(BC)$,

b) $A(B + C) = AB + AC$,

c) $(AB)^t = B^t A^t$.

d) $(A + B)C = AC + BC$.

Sistemes d'equacions lineals

Mètodes directes

Exercici 4 Escriviu un script de `Matlab` per trobar la solució d'un sistema lineal triangular superior (inferior) $AX = B$ pel mètode de substitució enrera (endavant). Feu jocs de proves.

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcr} 3x - 2y + z - t & = & 8 \\ 4y - z + 2t & = & -3 \\ 2z + 3t & = & 11 \\ 5t & = & 15 \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \left\{ \begin{array}{lcr} 5x & = & -10 \\ x + 3y & = & 4 \\ 3x + 4y + 2z & = & 2 \\ -x + 3y - 6z - t & = & 5 \end{array} \right.$$

Exercici 5 Resoleu per eliminació gaussiana el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Per practicar...

Factorització LU

Exercici 6 Trobeu la descomposició LU de la matriu del sistema d'equacions lineals A i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següent:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & -8 & 4 & 10 & -10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 & -39 \\ -6 & 4 & 2 & -18 & -16 \end{array}\right)$$

Per practicar...

Factorització Txoleski

Exercici 7 Trobeu la descomposició de Txoleski i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següent:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -2 \end{array}\right.$$

En Matlab la factorització $R'R = A$ s'obté per [R]=chol(A).

Tota matriu simètrica i definida positiva té factorització $R'R = A$.

Exercici 8 Trobeu la descomposició QR i després resoleu el sistema d'equacions lineals $Ax = b$ següents:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 & = & 0.23 \\ 0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 & = & 0.32 \\ 0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 & = & 0.33 \\ 0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 & = & 0.31 \end{array}\right.$$

En Matlab la factorització $A = QR$ s'obté per [Q,R]=qr(A).

Vector residu

Com a criteri de comparació entre la solució exacta $\mathbf{x}$, i la solució calculada $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, del sistema lineal $A\mathbf{x} = b$ definim el vector residu $r(\mathbf{x}^*)$ per:

$$r(\mathbf{x}^*) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}^* = b - A\mathbf{x}^* \,.$$

Nombre de condició

Es diu que el sistema $Ax = B$ està mal condicionat si A té un nombre de condició gran.

`Matlab`

- ✓ `cond(A,p)` Mesura el mal condicionament

  `cond(eye)=1`

  `cond(matsingular)=`∞

- ✓ `rcond(A,p)` Mesura el bon condicionament

  `rcond(eye)=1`

  `rcond(matsingular)=0`

Exercici 9

Resoleu sistema $Ax = b$ si

$$(A|\, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right)$$

Comproveu, després, que $(6\,, -7.2\,, 2.9\,, -0.1)^t$ i $(1.50\,, 0.18\,, 1.19\,, 0.89)^t$ donen residus molt petits.
Estimeu el nombre de condició de la matriu.
Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Per practicar. . .

Nombre de condició i vector residu

Exercici 10

Feu una predicció de com petits canvis en A afecten a la solució x del sistema d'equacions $Ax = b$. Poseu a prova la vostra predicció per a $b = (100, 1)^t$ i les matrius següents

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Sabeu donar una explicació del que s'observa?

Sistemes d'equacions lineals

Mètodes iteratius

Mètodes iteratius

MATLAB®

- ✓ `D=diag(diag(A));` Diagonal de la matriu A.
- ✓ `d=diag(1 ./diag(A))` Inversa de la diagonal de A.
- ✓ `L=tril(A,-1)` Part triangular inferior de la matriu A.
- ✓ `U=triu(A,1)` Part triangular superior de la matriu A.

Mètode de Jacobi

$$Ax = b \Longleftrightarrow x^{k+1} = B_J\, x^k + c_J\,, \quad \forall\ k \geq 0\,.$$

- ✓ $B_J = -D^{-1}(L+U)$ Matriu d'iteració del mètode.
- ✓ $c_J = D^{-1}b$ Vector d'iteració del mètode.
- ✓ $\rho(B_J) < 1$ Convergència a priori.
- ✓ $\|x^{k+1} - x^k\| < \epsilon$ Convergència a posteriori.

Mètode de Gauss-Seidel

$$Ax = b \Longleftrightarrow x^{k+1} = B_{GS}\, x^{k} + c_{GS}\,, \quad \forall\ k \geq 0\,.$$

- ✓ $C = (L + D)^{-1}$ — Matriu auxiliar del mètode.
- ✓ $B_{GS} = -C\ U$ — Matriu d'iteració del mètode.
- ✓ $c_{GS} = C\ b$ — Vector d'iteració del mètode.
- ✓ $\rho(B_{GS}) < 1$ — Convergència a priori.
- ✓ $\|x^{k+1} - x^{k}\| < \epsilon$ — Convergència a posteriori.

Mètodes de relaxació - variant JACOBI

Són una generalització dels dos mètodes estudiats; sumem i restem x_i^k en l'expressió del mètode de Jacobi,

$$x_{Ji}^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k \right) k \geq 0 \,.$$

$$x_i^{k+1} = \omega x_{Ji}^{k+1} + (1-\omega) x_i^k \quad k \geq 0 \,.$$

✓ $C = D^{-1}$ Matriu auxiliar.

✓ $B_{sor} = C\left((1-\omega)D - \omega(L+U)\right)$ Matriu d'iteració.

✓ $c_{sor} = \omega \; C \; b$ Vector d'iteració.

Mètodes de relaxació - variant SEIDEL

Són una generalització dels dos mètodes estudiats; sumem i restem x_i^k en l'expressió del mètode de Jacobi,

$$x_{Si}^{k+1} = x_i^k + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k \right) k \geq 0\,.$$

$$x_i^{k+1} = \omega x_{Si}^k + (1-\omega) x_i^k \quad k \geq 0\,.$$

✓ $C = (D + \omega L)^{-1}$ Matriu auxiliar.

✓ $B_{sor} = C\left((1-\omega)D - \omega U\right)$ Matriu d'iteració.

✓ $c_{sor} = \omega\ C\ b$ Vector d'iteració.

Exercici 11 Escriviu un programa que implementi els algoritmes de Jacobi i Gauss - Seidel. Proveu-lo per:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Exercici 12 Introduiu un test de convergència per als algoritmes de Jacobi i Gauss - Seidel. Proveu-lo per

$$\text{a) } (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 10 & -7 & 0 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\text{b) } (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ 12 & -8 & 4 & 10 & -10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 & -39 \\ -6 & 4 & 2 & -18 & -16 \end{array}\right).$$

Exercici 13

Resoleu pel mètode de Jacobi i de Gauss-Seidel els sistemes $Ax = b$ donat per

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

prenent $x^{(0)} = (0\,,0\,,0\,,0)^\top$ i una tolerància $0.5 \cdot 10^{-12}$. Quantes iteracions calen?

Calculeu els errors $\delta^k = ||x^k - x^{k-1}||$ i estudieu δ^k/δ^{k-1}.

Exercici 14

Determineu el factor w òptim per a resoldre

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 10x & + & 5y & & & & & = & 6 \\ 5x & + & 10y & - & 4z & & & = & 25 \\ & - & 4y & + & 8z & - & t & = & -11 \\ & & & - & z & + & 5t & = & -11 \end{array}\right.$$

fent ús dels mètode de sobrerelaxació variants de Jacobi i de Gauss-Seidel. Feu un estudi per $0 < \omega < 2$. Presenteu els resultats en una taula.

Exercici 15

Resoleu pel mètodes de classe el sistema $Ax = b$ donat per

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 & -5 \\ -5 & 12 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3.45 \\ 9.96 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 0.14 \\ 0.95 \\ 0.37 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

prenent $x^{(0)} = (0\,,0\,,0\,,0)^\top$ i una tolerància $0.5 \cdot 10^{-12}$. Quantes iteracions calen?

Calculeu els errors $e^k = ||x^k - x^*||$, $\delta^k = ||x^k - x^{k-1}||$.
Estudieu e^k/e^{k-1} i δ^k/δ^{k-1}.

Autoavaluació

Exercici 16 Feu servir $(0.33116, 0.70000)^t$ com a punt inicial per resoldre pel mètode de Gauss-Seidel el sistema $Ax = b$. Què passa?

$$A = \begin{pmatrix} 0.96326 & 0.81321 \\ 0.81321 & 0.68654 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.88824 \\ 0.74988 \end{pmatrix}.$$

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center,
  Tutorials