Computació Numèrica

Pràctica 5
Sistemes d'equacions lineals (III)

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

14 de març de 2023

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Pràctica 5

1. Valors i vectors propis
   - Mètodes iteratius
     - Pràctica 7: Mètode de les potències.
     - Pràctica 8: Quocient de Rayleigh.
   - Mètodes de factorització
     - Pràctica 9: Mètode QR.
2. Valors Singulars
     - Pràctica 10 SVD.
3. Referències

Valors i vectors propis

Per practicar...

Mètode de les potències, valor propi de mòdul màxim. Algorisme.

1.- $x^0 = (\; , \; , \ldots , \;)^t$

2.- $z^k = Ax^k$

3.- $m_{k+1} = \|z^k\|_\infty$

4.- $x^{k+1} = \dfrac{1}{m_{k+1}} z^k$

5.- **criteri de parada** $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < \epsilon$

L'aproximació del valor propi és m_{k+1}
i la del vector propi és x^{k+1}.

Per practicar...

Mètode de les potències, valor propi de mòdul mínim. Algorisme.

1.- $x^0 = (\ , \ , \ldots , \ )^t$

2.- Resoldre $Az^k = x^k$

3.- $m_{k+1} = \|z^k\|_\infty$

4.- $x^{k+1} = \dfrac{1}{m_{k+1}} z^k$

5.- **criteri de parada** $\|x^{k+1} - x^k\|_\infty < \epsilon$

L'aproximació del valor propi és $\dfrac{1}{m_{k+1}}$ i la del vector propi és x^{k+1}.

Per practicar...

Mètode de les potències, valor propi mòdul màxim

Calculeu, amb quatre xifres significatives, el valor propi dominant de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{10} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pràctica

Calculeu els valor propis de mòdul màxim i mínim, així com els vectors propis corresponents de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 12 & 3 & 5 \\ 3 & 13 & 0 & 7 \\ 2 & 11 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quocient de Rayleigh

Modifiqueu a l'algoritme anterior amb

$$m_k = \frac{\left(x^k\right)^t \cdot z^k}{(x^k)^t \cdot (x^k)}$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{10} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pràctica

Afegiu el criteri del quocient de Rayleigh als vostres scripts del mètode de la potència.

Calculeu els valor propis de mòdul màxim i mínim, així com els vectors propis corresponents de les matrius següents:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 & -15 \\ 12 & 388 & 309 & 185 \\ 16 & 309 & 312 & 80 \\ -15 & 185 & 80 & -600 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

MÈTODES DE FACTORITZACIÓ

- Mètode QR de Francis (1961).

Utilitza la factorització de la matriu A en QR amb Q matriu ortogonal (o unitària) i R matriu triangular superior.

El mètode comença amb $A_1=A$, s'obtenen
Q_k matriu ortogonal (o unitària) i
R_k matriu triangular superior
tals que $\mathbf{A_k = Q_k R_k}$ per expressar (1)
la matriu següent com $\mathbf{A_{k+1} = R_k Q_k}$. (2)

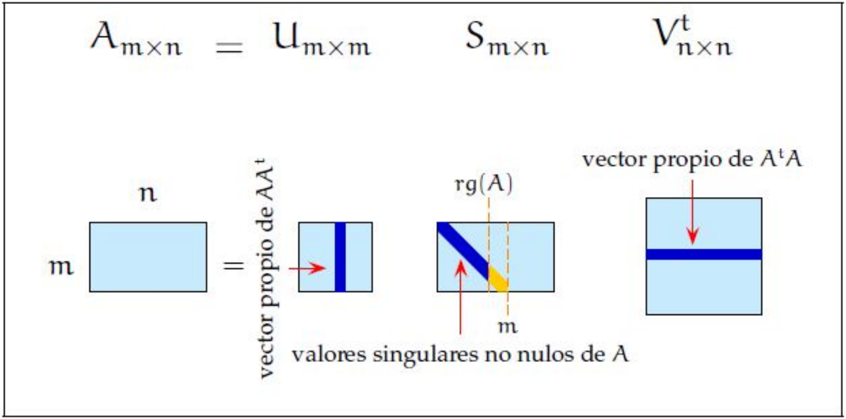
Pràctica

Determineu els valors propis de les matrius seguents pel mètode **QR**.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 & -15 \\ 12 & 388 & 309 & 185 \\ 16 & 309 & 312 & 80 \\ -15 & 185 & 80 & -600 \end{pmatrix}$$

Valors Singulars - SVD

Descomposició en Valors Singulars



Determineu una funció quadràtica que satisfaci al màxim (error quadràtic mínim) la taula següent:

X	8	10	12	16	20	40
Y	0.88	1.22	1.64	2.72	3.96	11.96

Feu una predicció per l'abscisa $x = 14$ i per $x = 40$. Cal que feu us de la rutina `svd` del MATLAB® que dóna la descompossició en valors singulars.

Pràctica

Descomposició en valors singulars

La taula següent ens dóna el nombre de bacteris per unitat de volum en funció del temps transcorregut:

Hores x	0	1	2	3	4	5	6
Bacteris y	32	47	65	92	132	190	275

Calculeu una corba del tipus $y = ab^x$ que aproximi aquest núvol de punts. Feu una predicció del nombre de bacteris al cap de 7 hores. Cal que feu us de la rutina `svd` del `Matlab` que dóna la descomposició en valors singulars.

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center, Tutorials