Computació Numèrica

Integració numèrica

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

2 de maig de 2023

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 27 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

El manual de referència és
http://www.mathworks.es/es/help/matlab/

Fórmules de Newton-Côtes

Exercici 1

Aplicació per dades discretes

Trobeu la distància que ha recorregut un mòvil a partir de les dades de la següent taula:

t min	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
v m/s	1	8	4	3.5	5	1	0

a) Representa gràficament les dades de la taula.

b) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode del punt mig.

c) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode dels trapezis.

d) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode de Simpson.

Exercici 2

Comproveu que:

$$\text{a) } S(f,h) = \frac{2}{3}R(f,h) + \frac{1}{3}T(f,h)$$

$$\text{b) } S(f,h) = \frac{4}{3}T\left(f,\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}T(f,h)$$

Pràctica 21

Aplicació per funcions

- R(f,h) Escriviu un `script` per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta del rectangle.
- T(f,h) Escriviu un `script` per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta dels trapezis. Consulteu l'ajuda de Matlab per la comanda `trapz`.
- S(f,h) Escriviu un `script` per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta de Simpson.

Les dades han d'ésser a, b, i n, així com una `function` que avalui $f(x)$ per a qualsavol $x \in [a, b]$ i el resultat un valor aproximat de

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Pràctica 21

Joc de proves

Joc de proves per als programes d'integració numèrica.

$$\text{a)}\ I = \int_1^2 \ln(x)\,dx\,, \qquad \int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x\,.$$

$$\text{b)}\ I = \int_0^{\pi/4} \cos^2(x)\,dx\,, \qquad \int \cos^2(x)\,dx = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\,.$$

Pràctica 22

Aplicació per dades discretes

Calculeu $\displaystyle\int_{1}^{1.8} f(x)\,dx$ per les dades de la següent taula:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.544	1.667	1.811	1.972	2.152	2.351	2.576	2.828	3.107

a) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode dels trapezis prenent $h = 0.4,\ 0.2,\ 0.1$.

b) Explica l'estratègia i dona el resultat pel mètode de Simpson prenent $h = 0.4,\ 0.2,\ 0.1$.

Integració Adaptativa

Joc de proves per als programes d'integració numèrica.

$$\text{a) } I = \int_1^2 \ln(x)\, dx \ = 2\ln(2) - 1$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\pi/4} \cos^2(x)\, dx \ = \left[\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\right]_0^{\pi/4}$$

$$\text{c) } I = \int_{\frac{2}{7\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2} \ \ dx$$

Feu ús de la rutina `quadgui` de C. Moler
Feu ús de la rutina `integral` de MATLAB®
Feu ús de la rutina `int` de la *Toolbox Simbolic Math* de MATLAB®

Mètode de Romberg

Pràctica 24

Romberg

Mitjançant el mètode de Romberg, calculeu:

$$\text{a)}\ \int_0^1 \sqrt{x}\sin(x)\,dx\,, \qquad \text{b)}\ \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$\text{c)}\ \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx\,, \qquad \text{d)}\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\,.$$

Pràctica 24

Exemple

$$\int_0^{0.8} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 0.772095 \pm 0.0000005$$

h	T_1	T_2	T_3
0.8	0.758680		
0.4	0.768760	0.772120	
0.2	0.771262	0.772096	0.772095
0.1	0.771887	0.772095	0.772095

Taula: Mètode de Romberg

Pràctica 24

Romberg (II)

(I) Escriure una funció (`ROMBERG8`) per avaluar $I = \int_a^b f(x)dx$, les dades d'entrada han de ser els límits d'integració a i b, l'integrand $f(x)$. La fórmula d'integració és:

$$I \approx \frac{h}{5670}\left[217\left(f(a)+f(b)\right)+1024\left(f(a+\frac{h}{8})+f(a+\frac{3h}{8})+f(a+\frac{5h}{8})+f(a+\frac{7h}{8})\right)\right.$$
$$\left.+352\left(f(a+\frac{h}{4})+f(a+\frac{3h}{4})\right)+436f(a+\frac{h}{2})\right]+O(h^8)\,.$$

(II) Escriure un `script` (`ROMBERG8COMPOST`) per avaluar integrals mitjançant la fórmula composta de `ROMBERG8`.

Feu un joc de proves prenent $f(x) = 1,\ x,\ \sin(x)$.

Pràctica 24

Exercici

Calculeu la integral $I = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx$

a) Fent ús del mètode dels trapezis per $h = \dfrac{1}{2^k},\quad 0 \leq k \leq 5.$

b) Fent ús del mètode de Simpson prenent $h = \dfrac{1}{2^k},\quad 0 \leq k \leq 5.$

c) Fent ús del mètode de `ROMBERG8COMPOST` prenent $n = 1, 2, \ldots, 6$ subintervals.

d) Doneu els decimals exactes i les xifres significatives del les vostres aproximacions, sabent que $\int_{0}^{t} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\, erf\,(t)\,.$

Consulteu l'ajuda de Matlab per la funció `erf`

Mètodes de Montecarlo

Pràctica 25

Integració de Montecarlo

a) Calculeu $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx\,.$

b) Calculeu $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{(3/2)}\,dx\,,$

c) Com s'ha de pendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis?

Per trapezis useu $h = 0.1\,,\ h = 0.05.$ Per MonteCarlo, la mostra de mida prou gran $(N > 1000)$

Integració Gaussiana

Pràctica 26

Fent ús d'una fórmula d'integració gaussiana de dos punts ($m = 2$), calculeu:

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} e^x \, dx \,, \quad \text{b)} \int_{0}^{1} \left(7 + 14x^6\right) \, dx \,, \quad \text{c)} \int_{0}^{3} x^2 e^x \, dx \,.$$

Pràctica 26

Integreu pel mètode de Gauss-Legendre de quatre punts $(m = 4)$,

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} \cos(x), dx\,, \qquad \text{c)} \int_{0}^{1} \ln(x)\sin^2(x)\,dx\,,$$

$$\text{b)} \int_{-1}^{1} e^x\,dx\,, \qquad \text{d)} \int_{0}^{\pi/3} \ln\left(1+\cos(x)\right)\,dx\,.$$

Pràctica 26

Calculeu les integrals següents per Gauss-Txebixev, amb punts $m = 2, 3, 4$ i 5.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\cos(\pi x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx\,.$

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center, Tutorials