Математическое и компьютерное моделирование

Лабораторная работа № 5

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛИ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

1 Законы Осипова–Ланчестера

Законы Осипова–Ланчестера (законы Ланчестера) — математическая формула для расчета относительных сил пары сражающихся сторон — подразделений вооруженных сил. В статье «Влияние численности сражающихся сторон на их потери», опубликованной журналом «Военный сборник» в 1915 году, генерал-майор Корпуса военных топографов М. П. Осипов описал математическую модель глобального вооружённого противостояния, практически применяемую в военном деле при описании убыли сражающихся сторон с течением времени и, входящую в математическую теорию исследования операций, на год опередив английского математика Ф. У. Ланчестера (см. [1]).

Пусть символ A обозначает количество солдат Красных сил. Каждый из них имеет наступательную огневую мощь α, то есть количество солдат противника, которое он может вывести из строя (например, убить или ранить) в единицу времени. Аналогично, у Синих есть количество солдат B, каждый из которых имеет наступательную огневую мощь β.

В современных боевых действиях, когда боевые единицы сторон удалены друг от друга и ведут прицельный огонь, они способны поражать несколько целей, и могут поражаться с нескольких направлений.

Коэффициент убыли зависит теперь только от количества боевых единиц, ведущих огонь. Ланчестер установил, что мощность группировки в этом случае пропорциональна не количеству боевых единиц, которое она имеет, а квадрату от числа единиц. Это называется квадратичным законом Ланчестера. Точнее, закон определяет потери боевых единиц, которые сражающаяся сторона нанесет за определенный период времени, по сравнению с теми, которые нанесет противостоящая сторона [1].

Предположим, что две армии, красная и синяя, вступают в бой друг с другом. Красные стреляет в Синих непрерывным потоком пуль. Тем временем Синие стреляют в Красных непрерывным потоком пуль.

Закон Осипова–Ланчестера рассчитывает количество солдат, потерянных с каждой стороны, используя следующую пару уравнений.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\beta B; \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\alpha A, \end{cases} \tag{1}$$

Система (1) описывает идеализированный случай артиллерийской дуэли между двумя противниками.

Здесь $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ представляет скорость изменения количества красных солдат в конкретный момент. Отрицательное значение указывает на потери солдат. Аналогичным образом, $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ представляет собой скорость изменения количества синих солдат.

1.1 Точное решение системы Осипова-Ланчестера

Для решения системы

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\beta B; \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\alpha A, \end{cases} \tag{2}$$

будем использовать преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функции $f(t)$ имеет вид

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Преобразование Лапласа производной определяется по формуле

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) - f(0).$$

Обратным преобразованием Лапласа функции комплексного переменного $F(s)$ называется функция $f(t)$ вещественной переменной, такая что:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \int\limits_{\sigma_1 - i\omega}^{\sigma_1 + i\omega} e^{st} F(s)\, ds, \tag{3}$$

где σ_1 — действительное число, такое что контур интегрирования находится в области сходимости $F(s)$.

Обратное преобразования Лапласа функции $\frac{As-\beta B}{s^2-\alpha\beta}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As-\beta B}{s^2-\alpha\beta}\right\}(t) = A\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}t\right) - \frac{\sqrt{\beta}B\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}t\right)}{\sqrt{\alpha}}.$$

Применяя преобразование Лапласа к системе (2), получим

$$\begin{cases} s\mathcal{L}\left\{A(t)\right\}(s) - A(0) = -\beta\mathcal{L}\left\{B(t)\right\}(s); \\ s\mathcal{L}\left\{B(t)\right\}(s) - B(0) = -\alpha\mathcal{L}\left\{A(t)\right\}(s). \end{cases} \tag{4}$$

Введем обозначения $\mathcal{L}\left\{A(t)\right\}(s) = \widehat{A}$, $\mathcal{L}\left\{B(t)\right\}(s) = \widehat{B}$ и перепишем систему (4) в виде

$$\begin{cases} s\widehat{A} + \beta\widehat{B} = A(0); \\ \alpha\widehat{A} + s\widehat{B} = B(0). \end{cases} \tag{5}$$

Умножим первое уравнение системы (5) на s, а второе на β и вычтем второе уравнение из первого:

$$-\begin{cases} s^2\widehat{A} + \beta s\widehat{B} = sA(0); \\ \alpha\beta\widehat{A} + \beta s\widehat{B} = \beta B(0), \end{cases}$$

получим

$$s^2\widehat{A} - \alpha\beta\widehat{A} = sA(0) - \beta B(0),$$

откуда

$$\widehat{A} = \frac{sA(0) - \beta B(0)}{s^2 - \alpha\beta}.$$

Аналогично, получаем

$$\widehat{B} = \frac{sB(0) - \alpha A(0)}{s^2 - \alpha\beta}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа по формуле (3) находим, что решение системы (2) имеет вид

$$A(t) = A(0)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha\beta}t\right) - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}B(0)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha\beta}t\right), \tag{6}$$

$$B(t) = B(0)\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha\beta}t\right) - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}A(0)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha\beta}t\right). \tag{7}$$

1.2 Квадратичный закон Ланчестера

Проанализируем динамику системы (2). Из уравнений $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\beta B$ и $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\alpha A$ получаем, что

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}B} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{B}{A},$$

откуда

$$\alpha A\mathrm{d}A = \beta B\mathrm{d}B.$$

Интегрируя, получим

$$\alpha\frac{A^2(t)}{2} = \beta\frac{B^2(t)}{2} + C_1.$$

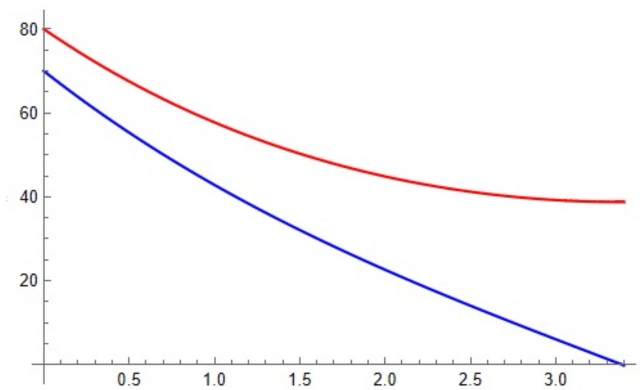
Умножая последнее выражение на 2 и переобозначая константу, запишем

$$\alpha A^2(t) - \beta B^2(t) = C.$$

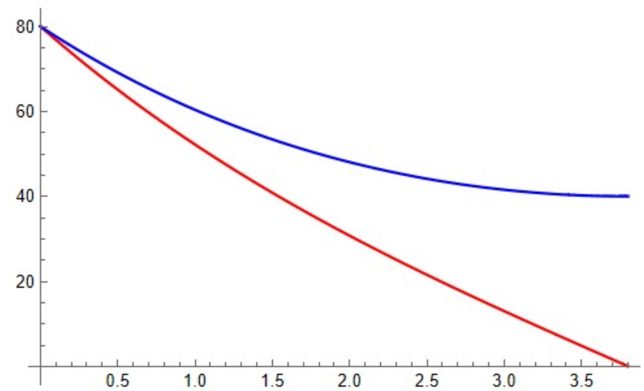
Подставив в это выражение $t - 0$, получим «квадратичный закон боевых действий»

$$\alpha A^2(0) - \beta B^2(0) = C, \tag{8}$$

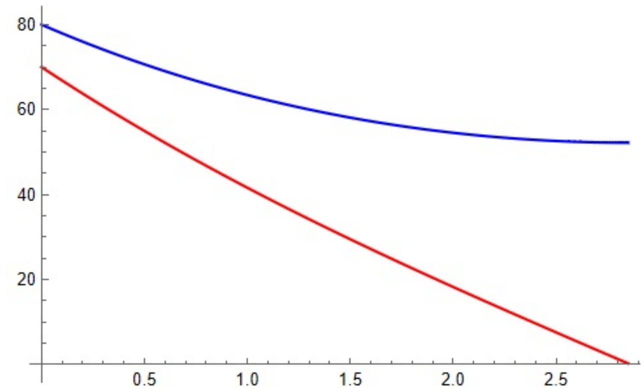
где $A(0)$ — изначальная численность красной армии, $B(0)$ — изначальная численность синей армии.



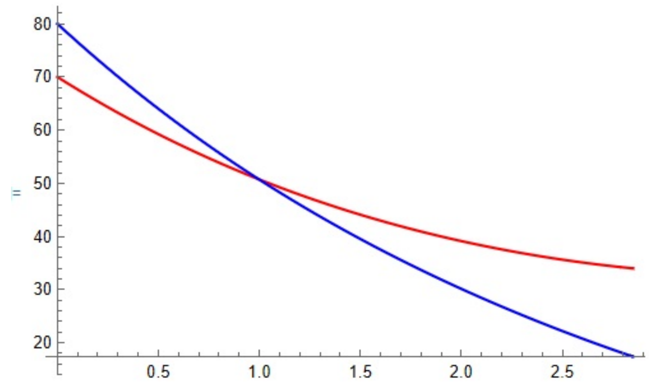
(a) $\alpha = \beta = 0,4$; $A(0) = 80$; $B(0) = 70$



(b) $\alpha = 0,3$; $\beta = 0,4$; $A(0) = B(0) = 80$



(c) $\alpha = 0,3$; $\beta = 0,4$; $A(0) = 70$; $B(0) = 80$



(d) $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,3$; $A(0) = 70$; $B(0) = 80$

Рис. 1: Графики решений (6)

Равенство (8) однозначно определяет исход битвы:

- При $C>0$ побеждает Красная армия.
- При $C<0$ побеждает Синяя армия.
- В случае $C=0$ стороны уничтожают друг друга одновременно, и победителя нет.

Построим графики решений (6) при различных значениях A, B, α, β и выясним какой будет исход войны при различных их соотношениях A, B, α, β .

Решение (6) показывает, что:

1. Если $\alpha = \beta$, т. е. обе стороны имеют одинаковую огневую мощь, победит сторона, у которой в начале битвы больше солдат (см. Рис. 1a);
2. Если $A = B$, то есть обе стороны имеют одинаковое количество солдат, победит сторона с большей огневой мощью (см. Рис. 1b);
3. Если $A > B$ и $\alpha > \beta$, то выиграют Красные, а если $A < B$ и $\alpha < \beta$, выиграют Синие (см. Рис. 1c);
4. Если $A > B$, но $\alpha < \beta$, или $A < B$, но $\alpha > \beta$, выигрышная сторона будет зависеть от того, больше или меньше отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ квадрата отношения $\frac{A}{B}$ (см. Рис. 1d).

Уточним пункт 4, рассмотрев соотношение (8):

$$\alpha A^2(0) - \beta B^2(0) = C,$$

тогда однозначно определяется победитель. При $C>0$ побеждает Красная армия, при $C<0$ — синяя, в случае $C=0$ стороны уничтожают друг друга одновременно, и победителя нет.

Таким образом, если численность и огневая мощь неравны в противоположных направлениях, для победы требуется превосходство в огневой мощи, равное квадрату численного превосходства; или, говоря по-другому, эффективность армии возрастает пропорционально квадрату числа входящих в нее людей, но только линейно с их боеспособностью.

1.3 Трафальгарская битва

Пример 1. Результаты квадратичного закона боевых действий можно применить к Трафальгарской битве (1805 г.) между британским флотом под предводительством адмирала лорда Нельсона и франко-испанским флотом под предводительством адмирала Пьера-Шарля Вильнёва. Вначале британский флот A имел 27 кораблей и в общей сложности 2148 морских орудий. Франко-испанский флот B был больше по численности: 33 корабля и 2568 морских орудий (см. [2]). При этом, предположим, что британский флот был в два раза эффективнее франко-испанского.

Пусть $A(0) = 27$ — начальное количество линейных кораблей англичан, $B(0) = 33$ — начальное количество линейных кораблей французов и испанцев. То что британский флот эффективнее в два раза дает $\alpha = 2 \cdot 2148 = 4296$ и $\beta = 2568$. Тогда модель (2) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -2568B; \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -4296A, \end{cases} \tag{9}$$

График решения приведен на рис. 2.

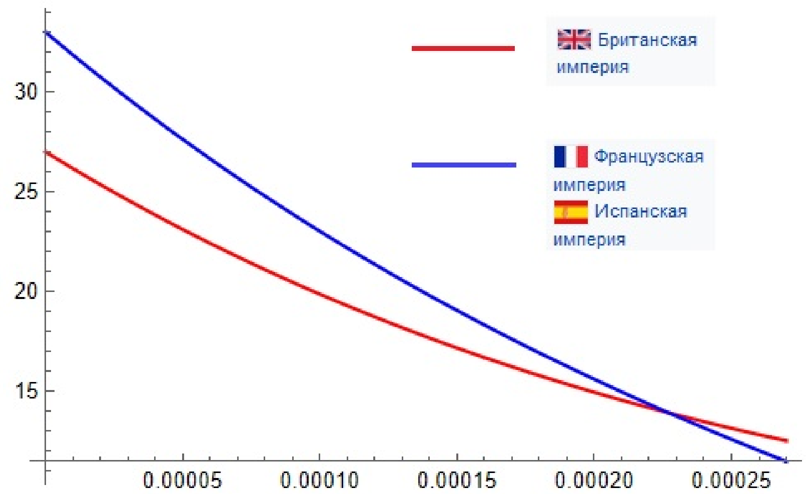


Рис. 2: Трафальгарская битва

Из соотношения

$$\alpha A^2(0) - \beta B^2(0) = C = 4296 \cdot 729 - 2568 \cdot 1089 = 3131784 - 2796552 = 335232 > 0,$$

и графика 2 мы видим, что британский флот должен одержать победу в этой битве, как оно и произошло. Однако, битва шла не так как на рис. 2. Хотя передовые корабли британских колонн сильно пострадали, а флагман Нельсона — HMS Victory был практически выведен из строя, большой опыт и подготовка Королевского флота преодолели численное превосходство французских и испанских ВМС. Франко-испанский флот потерял 22 судна, британцы же не потеряли ни одного корабля. Поэтому, предположение о том, что британский флот был в два раза эффективнее франко-испанского требуется усилить. В любом случае, это сражение уже произошло, итог его известен и подтверждается квадратичным законом боевых действий. Победа подтвердила техническое превосходство британской морской артиллерии и лишила Наполеона боеспособного флота, превратив Британию в безраздельную владычицу морей на долгие годы.

2 Общая модель Осипова–Ланчестера

В наиболее общем виде модели Осипова-Ланчестера можно описать уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = a \cdot A + b \cdot AB + c \cdot B + d; \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = e \cdot B + f \cdot AB + g \cdot A + h. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь коэффициенты a и e определяют небоевой ущерб; коэффициенты b и f — потери из-за воздействия по целям, занимающие большую площадь и представляющие собой совокупность точечных целей, расположенных на территории с небольшими промежутками (места скопления войск и транспорта, железнодорожные узлы, аэродромы); коэффициенты c и g — ущерб на линии фронта; коэффициенты d и h — дополнительные резервы личного состава и вооружений.

Более простая система Осипова-Ланчестера — это система в так называемой нормальной форме

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -a \cdot A - c \cdot B \pm d; \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -e \cdot B - g \cdot A \pm h, \end{cases} \tag{11}$$

где a и e определяют скорость небоевых потерь; c и g — боевых потерь.

Такая система уже не решается явно. Но ее можно решить численно.

Пример 2. Решим систему

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -0,5 \cdot A - 0,4 \cdot AB - 0,5 \cdot B + 0,7; \\ \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -0,7 \cdot B - 0,2 \cdot AB + 0,6 \cdot A + 0,4 \end{cases} \tag{12}$$

в MATLAB при начальных данных

$$A(0) = 100, \qquad B(0) = 80.$$

Имеем функцию, задающую систему

```
function du = diffsys1(t,u)
x = u(1);
y = u(2);
a = -0.5;
b = -0.4;
c = -0.5;
d = 0.7;
e = -0.7;
f = -0.2;
g = 0.6;
h = 0.4;
```

```
du = zeros(2,1);
du(1) =a*x+b*x*y+c*y+d;
du(2) =e*y+f*x*y+g*x+h;
```

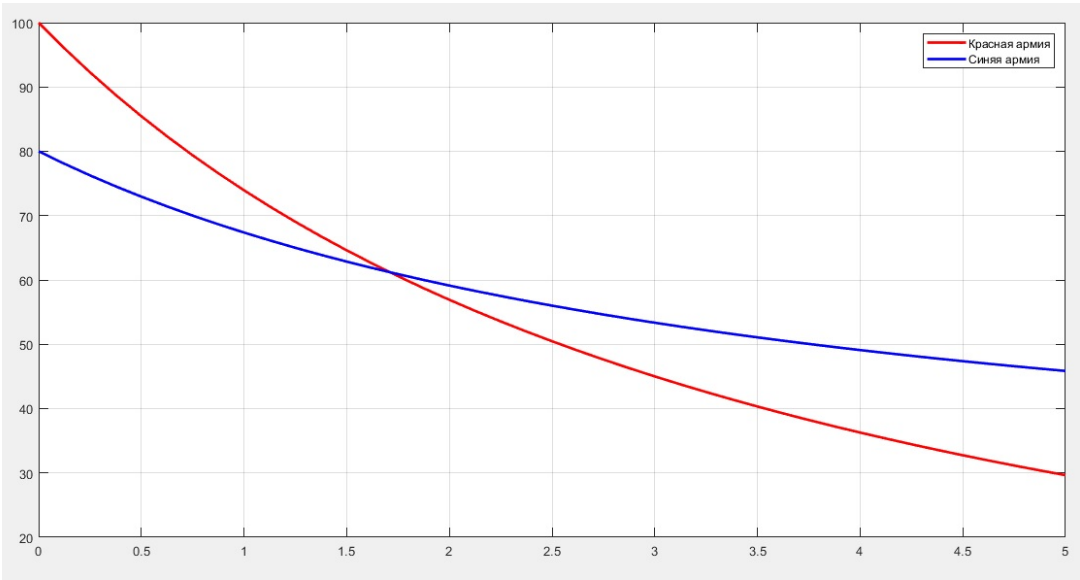


Рис. 3: Результат битвы

С помощью функции ode45 найдем решение системы и построим график.

```
clear, clc
Tk = [0, 0.05]; % диапазон времени
u0 = [100, 80]; % начальное количество солдат
[T M] = ode45('diffsys1',Tk,u0); % решаем
X = M(:,1); % Красная армия
Y = M(:,2); % Синяя армия
% рисуем, подписываем:
p1=plot(100*T,X,'r')
hold on
p2=plot(100*T,Y,'b')
grid on
set(p1,'LineWidth',2)
set(p2,'LineWidth',2)
legend('Красная армия','Синяя армия')
fprintf('Количество выживших солдат в конце периода: \n')
fprintf('Красная армия: %5.0f \n Синяя армия: %5.0f \n', X(end), Y(end))
```

Получаем ответ:

```
Количество выживших солдат в конце периода:
Красная армия: 30
Синяя армия: 46
```

График решения приведен на рис. 2.

Мы видим, что несмотря на изначальный численный перевес Красной армии в битве победила синяя армия.

3 Задания.

Задание 1.

Составить систему Осипова–Ланчестера и найти точное задачи Коши для этой системы. Построить графики, выписать квадратичный закон и сделать выводы. Временной промежуток студент выбирает самостоятельно, исходя из своей задачи.

Вариант 1.

20 ноября (2 декабря) 1805 года произошло решающее сражение наполеоновской армии против армий третьей антифранцузской коалиции — битва при Аустерлице в Моравии. Это сражение вошло в историю как «битва трёх императоров», поскольку против армии императора Наполеона I сражались армии императоров австрийского Франца II и русского Александра I. Силы сторон 73 200 человек со стороны французской армии, 85 400 человек со стороны русско-австрийской армии. Предположим, что французская армия была в был в полтора раза эффективнее союзной. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 2.

Битва при Абидосе — морское сражение, произошедшее в 411 году до н. э. между афинским и спартанским флотами в ходе Пелопоннесской войны. Оно завершилось победой афинян благодаря прибытию в разгар боя подкрепления во главе с Алкивиадом. Афиняне располагали 76 судами против 86 триер спартанцев. Предположим, что афинский флот был в полтора раза эффективнее спартанского. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 3.

Битва при Каннах — крупнейшее сражение Второй Пунической войны, произошедшее 2 августа 216 года до н. э. около города Канны в области Апулии на юго-востоке Италии. Карфагенская армия полководца Ганнибала состояла из 50 тысяч воинов, римская армия под командованием консулов Луция Эмилия Павла и Гая Теренция Варрона состояла из 87 тысяч воинов. Предположим, что карфагенская армия была в два раза эффективнее римской. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 4.

Люди — не единственные животные, которые воюют. Муравьи тоже воюют, и в таких же катастрофических масштабах. Пусть сражаются 23215 красных муравьев и 63721 черных муравьев. Предположим, что красные муравьи в был в 2,5 раза эффективнее черных. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве.

Вариант 5.

Битва при Геттисберге, состоявшаяся 1-3 июля 1863 года, была крупнейшим и самым дорогостоящим сражением Гражданской войны в США и часто считается поворотным моментом в войне. Потомакская армия Союза состояла из 71699 человек, Северовирджинская армия состояла из 93921 человека. Предположим, что огневая мощь армии США была 0.583, а огневая мощь Потомакской армии 1. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 6.

Битва при Требии — сражение Второй Пунической войны, произошедшее 18 декабря 218 до н. э. около реки Треббия, Северная Италия. Карфагенская армия полководца Ганнибала состояла из 31 тысячи воинов, римская армия под командованиемконсула Тиберия Семпрония Лонга состояла из 45 тысяч воинов. Предположим, что карфагенская армия была в два раза эффективнее римской. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 7.

Битва у Вимейру — ключевое сражение периода первого французского вторжения в Португалию. Произошло 21 августа 1808 года около деревни Вимейру, расположенной на реке Масейра на пути к Лиссабону. Сражались английская армия генерала Артура Уэлсли (будущего герцога Веллингтона), усиленная португальскими ополченцами и французской армией генерала Жана Андоша Жюно. Силы французов — 14 000 солдат, силы англичан — 18778 солдат, португальцев — 585 человек. Предположим, что огневая мощь армии французов 0,75, а англичан и португальцев — 0,393. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 8.

Битва за Иводзиму — сражение между войсками Японской империи и США за остров Иото (Иводзима) в Тихом океане, начавшееся 19 февраля и завершившееся 26 марта 1945 года. Это была первая военная операция сил США на территории Японии. Императорская армия Японии соорудила на острове мощную линию обороны, благодаря которой на протяжении месяца удавалось отбивать атаки противника. Силы японцев — 21 000 солдат, силы США — 110 000 солдат. Предположим, что огневая мощь армии Японии в 2.6 раз больше огневой мощи армии США. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 9.

Уравнения Осипова-Ланчестера подходят для взаимодействия между лекарством и раковыми клетками, т. е. лекарство можно рассматривать как нападающего, раковые клетки можно рассматривать как защитников. Конечно, раковые клетки также можно рассматривать как нападающих. Пусть A — противораковые препараты, B — раковые клетки. $\alpha = 5$ — скорость уничтожения раковых клеток, т. е. сколько раковых клеток может быть убито одной единицей препарата. $\beta = 0,12$ — скорость уничтожения защитника, т. е. сколько единиц препарата может быть нейтрализовано единицей раковых клеток. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, удалось ли победить болезнь.

Вариант 10.

Марафонская битва — одно из крупнейших сухопутных сражений греко-персидских войн, состоявшееся 12 сентября 490 года до н. э. неподалёку от греческого города Марафон приблизительно в 42 км от Афин. На стороне греков выступало 10 000 афинян и 1000 платейцев, а на стороне империи Ахеменидов — 26 000 персов. Предположим, что огневая мощь персидской армии была 0,112, а огневая мощь армии греков 0,626. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 11.

Пусть сражается армия кротов A и армия хомяков B. Предположим, что начальные величины сил равны $A(0) = 200$ солдат и $B(0) = 500$ солдат, и что $\alpha = 0,3$ и $\beta = 0,1$. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве.

Вариант 12.

Фермопильское сражение — сражение в сентябре (предположительно с 17 по 19 число) 480 года до н. э. в ходе греко-персидской войны 480—479 гг. до н. э. в ущелье Фермопилы. Персидской армии, численность которой составляла 250 тысяч человек, противостояло 7700 греков. Предположим, что огневая мощь персидской армии была 0,0189, а огневая мощь армии греков 19,92. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 13.

Первое сражение войны Алой и Белой розы — первая битва при Сент-Олбансе — состоялась 22 мая 1455 года в городе Сент-Олбанс, в 22 милях (35 км) к северу от Лондона. Ричард, герцог Йоркский и его союзник Ричард, граф Уорик сразились с Ланкастерами под командованием Эдмунда, герцога Сомерсета, убитого в этом сражении. На стороне Йорков было 3000 человек, на стороне Ланкастеров — 2500 человек. Предположим, что огневая мощь Йорков была 1,35, а огневая мощь Ланкастеров 1,95. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 14.

Операция «Литой свинец» — кодовое название израильской военной операции в секторе Газа, начавшейся 27 декабря 2008 года. Цель операции — уничтожение военной инфраструктуры правящего в Газе исламского радикального движения ХАМАС. На стороне ЦАХАЛ — армии обороны Израиля было 10000 человек, на стороне ХАМАС — 20000 человек. Предположим, что огневая мощь ЦАХАЛ была 6,95, а огневая мощь ХАМАС 1,74. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 15.

Первая Сеульская операция — операция Корейской народной армии в ходе Корейской войны произошла 25 июня–2 июля 1950. На стороне Южной Кореи было 65000 человек, на стороне Северной Кореи — 107000 человек. Предположим, что огневая мощь Северной Кореи была 1,18, а огневая мощь Южной Кореи 3,21. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 16.

Битва при Анню — крупное танковое сражение, проходившее 12–14 мая 1940 года у Анню, Бельгия, во время Второй мировой войны, часть битвы за Бельгию. Было крупнейшим танковым сражением в истории на тот момент. На стороне Нацистской Германии было 618 танков, на стороне Франции и Бельгии — 600 танков. Предположим, что огневая мощь Нацистской Германии была 9,31, а огневая мощь Франции и Бельгии 9,87. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 17.

Битва при Стоук-Филд состоялась 16 июня 1487 года и стала последним сражением войны Алой и Белой розы. На стороне Йорков было 8000 человек, на стороне Ланкастеров (Тюдоров) — 12000 человек. Предположим, что огневая мощь Йорков была 12,75, а огневая мощь Ланкастеров 5,67. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 18.

Сражение при Калиакрии — последнее морское сражение русско-турецкой войны 1787–1791 годов между флотами России и Османской империи, состоявшееся 31 июля (11 августа) 1791 года в Чёрном море у мыса Калиакра (северная Болгария). Русский флот под командованием контр-адмирала Фёдора Фёдоровича Ушакова в составе 7 линейных кораблей, 10 фрегатов и 19 меньших судов (всего 36) встретился с соединенным турецко-алжирским флотом (капудан-паша Хуссейн и алжирский паша Саид-Али) в составе 18 линейных кораблей, 17 фрегатов и

48 меньших судов (всего 83). Предположим, что огневая мощь Российской империи была 34,5, а огневая мощь Османской империи 6,5. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 19.

Война Алой и Белой розы велась между сторонниками дома Ланкастеров, возглавляемого психически неуравновешенным королём Генрихом VI, и сторонниками дома Йорков, возглавляемого Ричардом, герцогом Йоркским. Вторая битва при Сент-Олбансе — сражение английской войны Алой и Белой розы, состоявшееся 17 февраля 1461 года в городе Сент-Олбанс. На стороне Йорков было 10000 человек, на стороне Ланкастеров — 15000 человек. Предположим, что огневая мощь Йорков была 7,6, а огневая мощь Ланкастеров 3,42. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 20.

Выборгское морское сражение — сражение в ходе Русско-шведской войны (1788—1790), произошедшее 22 июня (3 июля) 1790 года в Выборгском заливе Балтийского моря. На стороне русских было 30 линейных кораблей 11 фрегатов 20 вспомогательных галер 8 гребных шхерных фрегатов 52 малые галеры (всего 121), на стороне шведов было 22 линейных корабля 13 фрегатов 366 малых кораблей (всего 401). Предположим, что огневая мощь русских была в 11 раз больше чем огневая мощь шведов. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 21.

Ледовое побоище, также битва на Чудском озере — битва, произошедшая на льду Чудского озера в субботу 5 апреля 1242 года с участием новгородцев и владимирцев под предводительством князя Александра Невского с одной стороны и войсками Ливонского ордена и дерптского епископа — с другой. На стороне Новгорода и Владимира было 4000 человек, на стороне Ливонского ордена — 5000 человек. Предположим, что огневая мощь новгородцев и владимирцев была 5,6, а огневая мощь Ливонского ордена 3,5. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 22.

Куликовская битва (Мамаево или Донское побоище) — крупное средневековое сражение между объединённым русским войском во главе с Великим князем Владимирским и князем московским Дмитрием Ивановичем и войском правителя западной части Золотой Орды Мамая, состоявшееся 8 сентября 1380 года в районе к югу от впадения реки Непрядва в Дон, на Куликовом поле (юго-восток Тульской области). На стороне Великого княжества Московское было 20000 человек, на стороне Мамаевой Орды — 30000 человек. Предположим, что огневая мощь русских войск была 7,8, а огневая мощь Мамаевой Орды 5,1. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 23.

Грюнвальдская битва (Битва при Танненберге, Битва при Жальгирисе) — решающее сражение Великой войны 1409—1411 годов, происшедшее 15 июля 1410 года. Сражались Союз Королевства Польского и Великого княжества Литовского под предводительством короля Владислава II Ягайло и великого князя литовского Витовта и войско Тевтонского ордена. На стороне Союза было 16000 человек, на стороне Тевтонского ордена — 11000 человек. Предположим, что огневая мощь Союза была 4,58, а огневая мощь Тевтонского ордена 4,9. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 24.

26 августа (7 сентября) 1812 состоялась одно из самых известных сражений — Бородинская битва. Сражение в каком-то смысле парадоксальное: его итоги и в России, и во Франции считают победой. Сражение произошло между русской армией под командованием генерала от инфантерии светлейшего князя Михаила Голенищева-Кутузова и французской армией под командованием императора Наполеона I Бонапарта. На стороне России было 130000 человек, на стороне Франции — 138000 человек. Предположим, что огневая мощь России была 7,83, а огневая мощь Франции 6,69. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 25.

Битва при Кадеше — сражение между войсками Египетского и Хеттского царств, сильнейших держав Ближнего Востока, в конце XIV — начале XIII веков до н. э.. Войска возглавляли фараон Рамсес II и царь Муваталли II. Столкновение произошло в городе Кадеше на реке Оронт (территория современной Сирии). На стороне Египта было 20000 человек, на стороне Хеттского царства — 30000 человек. Предположим, что огневая мощь Египта была 8,43, а огневая мощь хеттов — 5,73. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 26.

9 июня 1863 года в самом начале Геттисбергской кампании между федеральной кавалерией под командованием Альфреда Плезантона и кавалерией Конфедерации под командованием Джеба Стюарта произошла битва за станцию Бренди — крупнейшее кавалерийское сражение Американской Гражданской войны, а также вообще крупнейшее кавалерийское сражение на американском континенте. Силы федеральной кавалерии — 11 000 всадников, силы Конфедерации — 9500 всадников. Предположим, что огневая мощь армии федеральной кавалерии была 0.745, а огневая мощь армии Конфедерации 1. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 27.

Битва при Заме — последнее сражение Второй Пунической войны, произошедшее 19 октября 202 до н. э. около Замы (современный Тунис), Африка. Карфагенская армия полководца Ганнибала состояла из 38 тысяч воинов, римская армия под командованием консула консул Публия Корнелия Сципиона состояла из 30 тысяч воинов. Предположим, что римская армия была в два раза эффективнее карфагенской. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 28.

Битва при Верцеллах или Сражение на Раудийском поле — последняя битва Кимврской войны, состоявшаяся 30 июля 101 года до н. э. между коалицией германских племён (кимвров и тевтонов) и легионами Римской республики Гая Мария. Армия кимвров состояла из 200 тысяч воинов, римская армия состояла из 50 тысяч воинов. Предположим, что римская армия была в три раза эффективнее кимврской. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 29.

Битва при Каррах — одно из величайших сражений в истории Древнего Рима Битва произошла 9 июня 53 года до н. э. в окрестностях древнего города Карры, ныне Харран (совр. Турция). Со стороны римлян было 7 легионов, 4 тысячи конницы и 4 тысячи лёгкой пехоты. Общая численность римского войска оценивается в 40 тыс. человек. Со стороны парфян — 10 тысяч конных лучников и 1 тысяча катафрактов из личной царской дружины (всего 11 тысяч человек). Предположим, что армия парфян была в пять раз эффективнее римской. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Вариант 30.

Битва при Фарсале — решающее сражение гражданской войны 49—45 годов до н. э. между войсками Гая Юлия Цезаря и Гнея Помпея, боровшихся за единоличную власть над Римом. Битва произошла 9 августа 48 года до н. э. в окрестностях Фарсала (Фессалия, Греция). Со стороны цезарианцев (армия Цезаря) было 22 тысяч человек. Со стороны республиканцев (армия Помпея) — 40 тысяч человек. Предположим, что армия цезарианцев была в три раза эффективнее римской. Составить для указанных данных систему Осипова–Ланчестера, решить эту систему, построить графики решений, используя квадратичный закон Ланчестера и график, выяснить, кто победил в этой битве. Проверить соответствует ли результат действительности.

Задание 2.

Решить систему (10) или (11) численно, используя данные своего варианта или любое другое сражение, подобрав недостающие коэффициенты a, b, c, d, e, f, g, h самостоятельно. Временной промежуток студент выбирает самостоятельно, исходя из своей задачи.

Список литературы

[1] https://ru.wikipedia.org/wiki/Законы_Осипова_—_Ланчестера

[2] Philip Chan, The Lanchester Square Law: Its Implications for Force Structure and Force Preparation of Singapore's Operationally-Ready Soldiers, Pointer, journal of the singapore armed forces, V.42, No.2, p. 47-60.