Математическое и компьютерное моделирование
Лабораторная работа № 2
ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Изучение механического движения — изменения положения тел в пространстве с течением времени — основывается на применении законов и уравнений динамики. Динамика, созданная трудами Г. Галилея, И. Ньютона, Ж. Л. Д'Аламбера, Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа и др., лежит в основе прикладной механики, изучающей законы движения устройств, механизмов и машин. Выполнение устройствами, механизмами и машинами своих функций связано с движением и, как следствие, с износом и возможным разрушением. Одним из наиболее важных механических движений, встречающихся в науке и технике, является колебательное движение. Для моделирования будем использовать систему СИ.

1 Простой гармонический осциллятор

Определение 1. *В классической механике* **гармонический осциллятор** *— это система, которая при смещении из положения равновесия испытывает восстанавливающую силу $\vec{F}$, пропорциональную смещению (согласно закону Гука)*

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \tag{1}$$

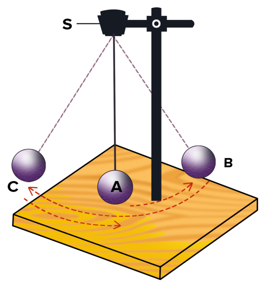
где k — положительная константа. Если $\vec{F}$ — единственная сила, действующая на систему, то система называется **простым гармоническим осциллятором***, и она совершает простое гармоническое движение: синусоидальные колебания вокруг точки равновесия с постоянной амплитудой и постоянной частотой (которая не зависит от амплитуды).*

Примеры гармонических осцилляторов (см. Рис. 1):

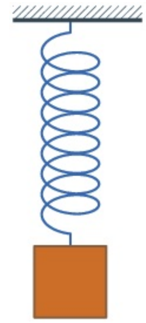
- простой маятник, качающийся вперед и назад,
- масса, движущаяся вверх и вниз, когда она подвешена к концу пружины,
- масса, движущаяся вперед и назад под действием пружины на плоскости.

Другие примеры — вибрирующая струна гитары, молекулы воздуха в звуковой волне, ионные центры в твердых телах и др. Колебания встречаются не только в технике, но и в природе, и в обществе, словом, во всех явлениях, поскольку всему присуще движение.

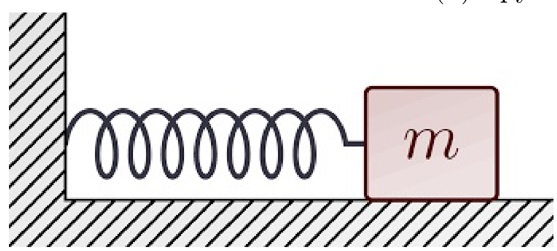
В рассмотренных примерах появляются такие объекты как пружина и груз. Предполагается, что у груза есть масса, а форма его не важна. Пружина — упругий элемент машин и различных механизмов, способный накапливать, поглощать или отдавать механическую энергию. Чтобы получить простейшую модель, массой пружины можно сначала пренебречь.



(a) Простой маятник



(b) Груз висит на пружинке



(c) Груз лежит, закрепленный на пружинке

Рис. 1: Примеры гармонических осцилляторов

В уравнении (1) константа k — механическая жёсткость, представляющая собой способность твёрдого тела, конструкции или её элементов сопротивляться деформации (изменению формы и/или размеров) от приложенного усилия вдоль выбранного направления в заданной системе координат.

Оценивать жёсткость принято коэффициентом жёсткости k — отношением величины усилия (силы), прилагаемого к конструкции, к максимальной деформации, вызванные этой силой:

$$k = \frac{F}{\delta},$$

где F — абсолютная величина силы, приложенной к телу, δ — деформация, вызванная силой $\vec{F}$ вдоль направления действия силы (например, изменение длины растянутой пружины рис. 2).

Коэффициент жесткости. Вычислить коэффициент жесткости пружины экспериментальным путем можно при помощи простейших инструментов: самой пружины, линейки и груза, который будет воздействовать на опытный образец. Для определения коэффициента жесткости растяжения производятся следующие расчеты.

1. Измеряется длина пружины, подвешенной вертикально, с одной свободной стороной — L_1.

2. Измеряется длина пружины с подвешенным грузом — L_2. Если взять груз массой 100 гр., то он будет воздействовать силой в 1 Н (Ньютон) — абсолютная величина F.

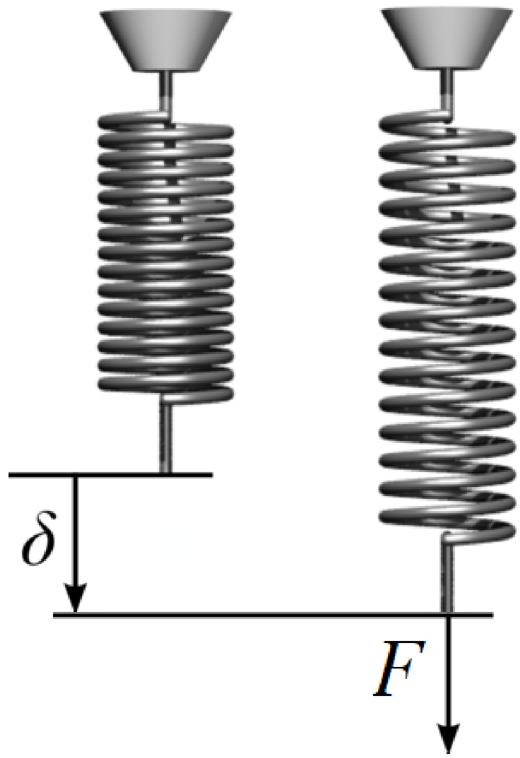


Рис. 2: Жесткость $k = \frac{F}{\delta}$.

3. Вычисляется разница между последним и первым показателем длины $\delta{=}L_2{-}L_1$.

4. Рассчитывается коэффициент жесткости по формуле: $k = \frac{F}{\delta}$.

В случае, когда мы моделируем математический маятник, изображенный на Рис. 1а, то жесткость k находится по формуле

$$k = \frac{g}{L}, \tag{2}$$

где L — длина подвеса, $g = 9,81$ м/с^2 — ускорение свободного падения.

Построение различных моделей одного и того же объекта может иметь целью различную точность, детализацию его свойств. Предположим сначала, что противодействующие силы (в частности, сила трения) пренебрежимо малы и нас интересуют характер и частота колебаний.

Математическая модель гармонического осциллятора при отсутствии противодействующих сил имеет вид

$$
\begin{cases} mx'' + kx = 0, & x = x(t); \\ x(0) = x_0, & x'(0) = v_0. \end{cases} \tag{3}
$$

В (3)

- m — масса груза,
- k — жесткость пружины для случаев, изображенных на Рис. 1b и 1c и $k = \frac{g}{L}$, где L — длина подвеса, $g = 9,81$ м/с^2 — ускорение свободного падения для случая, изображенного на Рис. 1a,
- x_0 — начальное положение, v_0 — начальная скорость для случаев, изображенных на Рис. 1b и 1c и x_0 — угол отклонения и его производная v_0 для случая, изображенного на Рис. 1a.

В реальной системе колебания все-таки затухают, но никаких сведений об этом мы получить из уравнения $mx'' + kx = 0$ мы не можем. Для некоторых вопросов могут оказаться существенными форма груза или расположение его центра масс, о чем также уравнение $mx'' + kx = 0$ не говорит, и т. д.

Примеры из жизни, в которых реализуются принципы простого гармонического движения, включают часы с маятником часы, струнные музыкальные инструменты и системы подвески транспортных средств.

Пример 1. *Пусть блок, подвешенный на пружине вертикально, имеет массу* 1 *кг, а пружина имеет длину* 0,5 *м с жесткостью пружины* k*, равной* 100 *н/м. Блок смещен на* 0,01 *м* (1 *см*) *от положения равновесия и выведен из состояния покоя в момент времени* $t = 0$ *при нулевой начальной скорости. Найти уравнение и начальные условия, моделирующее систему, закон движения блока и построить его график при* t *от* 0 *до* 5.

Решение. Длина пружины не играет никакой роли в этой модели, она включена в задачу, чтобы можно было построить мысленную картину физической системы. В силу (3) уравнение, моделирующее систему имеет вид

$$x'' + 100x = 0,$$

а начальные условия

$$x(0) = 0,01, \qquad x'(0) = 0.$$

Уравнению $x'' + 100x = 0$ соотвествует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 100 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 = -100, \qquad \lambda = \pm 10i,$$

тогда общее решение уравнения $x'' + 100x = 0$ имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t.$$

Используя начальные условия, получим

$$x(0) = C_1 = 0,01, \qquad x'(0) = C_2 = 0.$$

Тогда закон движения блока примет вид (см. Рис. 3).

$$x(t) = 0,01 \cos 10t.$$

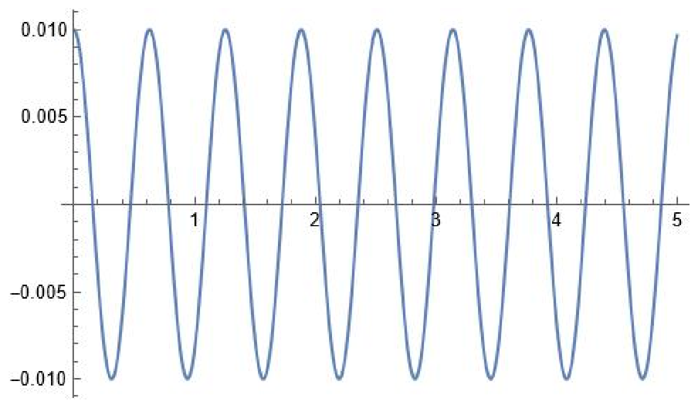


Рис. 3: Закон движения блока $x(t) = 0,01 \cos 10t$.

Из примера 1 видно, что колебания не затухают, а это значит, что такая модель будет полезной лишь для небольшого промежутка времени. Чтобы получить затухающие колебания нужно учесть влияние противодействующих сил.

2 Гармонический осциллятор с демпфированием

Искусственное подавление колебаний механических, электрических и др. систем называется **демпфированием колебаний**. Демпфирование может осуществляться за счёт увеличения затухания, для чего на системе устанавливаются демпферы, например, поршни, движущиеся в вязкой среде. Другой пример — инерционный демпфер — устройство, встроенное в конструкцию здания, или иной технический объект, предназначенный для снижения амплитуды его механических колебаний, вызванных его работой, например от двигателя или от внешнего воздействия (например, от сейсмических колебаний при землетрясениях или от воздействия ветра), в силу особенностей конструкции. Применение демпферов в сооружениях позволяет снизить дискомфорт людей от колебания здания, а также предотвратить его повреждение или разрушение в случае землетрясений и ураганов. Как правило, такие демпферы представляют собой бетонные или стальные блоки, соединённые с конструкцией здания с помощью пружин или тросов, также могут быть маятникового и жидкостного исполнения.

Математическая модель гармонического осциллятора с демпфированием имеет вид

$$\begin{cases} mx'' + fx' + kx = 0, \qquad x = x(t); \\ x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0. \end{cases} \tag{4}$$

В (4)

- m — масса груза,
- f — коэффициент трения,
- k — жесткость пружины для случаев, изображенных на Рис. 1b и 1c и $k = \frac{g}{L}$, где L — длина подвеса, $g = 9,81$ м/с^2 — ускорение свободного падения для случая, изображенного на Рис. 1a,
- x_0 — начальное положение, v_0 — начальная скорость для случаев на Рис. 1b и 1c и x_0 — угол отклонения и его производная v_0 для случая на Рис. 1a.

Рассмотрим как решается задача (4). Характеристическое уравнение для уравнения

$$mx'' + fx' + kx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x'' + \frac{f}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

имеет вид

$$\lambda^2 + \frac{f}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0. \tag{5}$$

Выпишем следующие два его решения:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{f}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{f}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.$$

Для дальнейшего упрощения введем новые константы:

$$\delta = \frac{f}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Корни характеристического уравнения теперь могут быть записаны в виде:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Дальнейшее решение зависит от значений λ_1 и λ_2:

1. λ_1 и λ_2 — два сопряженных комплексных решения $\delta < \omega_0$,

2. λ_1 и λ_2 — два вещественных решения, отличающиеся друг от друга $\delta > \omega_0$,

3. λ_1 и λ_2 — два одинаковых вещественных решения $\delta = \omega_0$.

Каждый из трех вариантов требует разного подхода к решению.

2.1 Случай малого затухания

Затухающие колебания возникают при $\delta < \omega_0$ или $f < 2\sqrt{km}$. В этом случае дискриминант характеристического уравнения (5) отрицателен. Поэтому λ_1 и λ_2 являются комплексными числами.ъ Вводя обозначение $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ получаем $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$ и решение уравнения $mx'' + fx' + kx = 0$ запишется в виде:

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t) = \\ = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} e^{-\delta t} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin\omega t \right).$$

Пусть $\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \cos\varphi$, $\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}} = \sin\varphi$. Вводя обозначение $2A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, получим

$$x(t) = 2Ae^{-\delta t} \left(\cos\varphi \cos\omega t + \sin\varphi \sin\omega t\right) = 2Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi). \tag{6}$$

Здесь A — амплитуда, а φ — фазовый угол. Константы A и φ можно вычислить из начальных условий, таких как:

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0.$$

Например, можно задать начальное положение и начальную скорость маятника

$$x(0) = 2, \qquad x'(0) = 0,$$

а также $\omega_0 = 1,5$, $\delta = 0,3$, что даст $\omega{=}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}{=}\sqrt{2,25 - 0,09}{=}\sqrt{2,16}{=}1,47$ и общее решение примет вид

$$x(t) = 2Ae^{-0,3t} \cos(\varphi + 1,47t).$$

Из начальных условий находим

$$2A\cos(\varphi) = 2, \qquad -2.94A\sin(\varphi) - 0.6A\cos(\varphi) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$A\cos(\varphi) = 1, \qquad A\sin(\varphi) = -0,2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{tg}\,(\varphi) = -0,2 \qquad \Rightarrow$$

$$\varphi = -0,2, \qquad A = \frac{1}{\cos(\varphi)} = \frac{1}{0,98} = 1,02$$

и

$$x(t) = 2,04e^{-0,3t} \cos(1,47t - 0,2).$$

График этого решения при малом затухании при t от 0 до 10 приведен на Рис. 4.

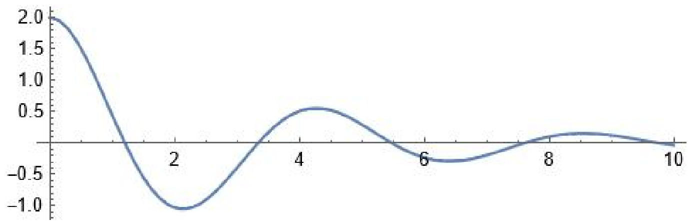


Рис. 4: Закон движения при малом затухании $x(t) = 2,04e^{-0,3t}\cos(1,47t - 0,2)$.

Пример 2. *Математический маятник массой $m = 200$ гр, подвешенный на струне длины $L = 50$ см совершает небольшие колебания в среде, в которой коэффициент затуханий $f = 0,9c^{-1}$. Пусть в начальный момент маятник отклонён от вертикали на угол $\frac{\pi}{4}$ и опущен без начальной скорости. Выписать уравнение математического маятника с трением и решить начальную задачу для этого уравнения. Построить график этого решения при t от 0 до 2.*

Решение. Имеем $m = 200$ гр $= 0,2$ кг, $f = 0,9$с$^{-1}$, $L = 50$ см $= 0,5$ м, $k = \frac{g}{L} = \frac{9,81}{0,5} = 19,62$с$^{-2}$. Математическая модель такого маятника имеет вид

$$\begin{cases} 0,2x'' + 0,9x' + 19,62x = 0, \qquad x = x(t); \\ x(0) = \frac{\pi}{4}, \qquad x'(0) = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda^2 + 4,5\lambda + 98,1 = 0.$$

В нашем случае

$$\delta = \frac{f}{2m} = \frac{0,9}{2 \cdot 0,2} = 2,25; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19,62}{0,2}} = \sqrt{98,1} = 9,9;$$

следовательно, $2,25 = \delta < \omega_0 = 22,15$ и дискриминант характеристического уравнения

$$D = 20,25 - 392,4 = -372,15 < 0$$

и мы наблюдаем случай малого затухания. Найдем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{98,1 - 5,06} = \sqrt{93,04} = 9,65$$

и комплексно сопряженные корни

$$\lambda_1 = -2,25 - 9,65i, \qquad \lambda_2 = -2,25 + 9,65i.$$

Тогда, используя решение (6), получим

$$x(t) = 2Ae^{-2,25t}\cos(\varphi + 9,65t).$$

Найдем A и φ из начальных условий:

$$x(0) = 2A\cos(\varphi) = \frac{\pi}{4}, \qquad -19,3A\sin(\varphi) - 4,5A\cos(\varphi) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$A\cos(\varphi) = \frac{\pi}{8}, \qquad A\sin(\varphi) = -\frac{4,5\pi}{8\cdot 19,3} = -\frac{45\pi}{1544} \qquad \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = -\frac{45}{193} = -0,23 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = -0,23; \qquad A = 0,4;$$

получим

$$x(t) = 0,8e^{-2,25t}\cos(9,65t - 0,23).$$

График решения при t от 0 до 2 приведен на Рис. 5.

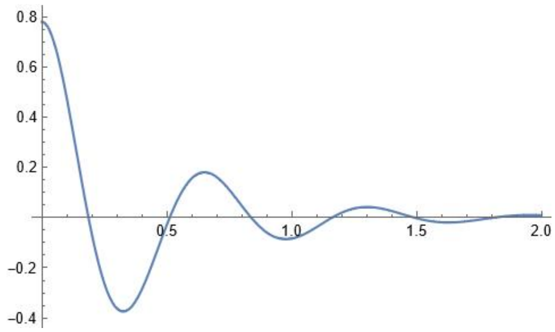


Рис. 5: Закон движения при критическом затухании $x(t) = 0,8e^{-2,25t}\cos(9,65t - 0,23)$.

2.2 Случай сверхдемпфирования

Если $\delta > \omega_0$, то это случай сильного трения. Дискриминант характеристического уравнения (5) положителен и существуют два различных действительных решения λ_1 и λ_2. Тогда общее решения дифференциального уравнения $mx'' + fx' + kx = 0$ запишется в виде:

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t},$$

которое можно далее преобразовать, подставив λ_1 и λ_2:

$$x(t) = C_1e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})\,t} + C_2e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})\,t}. \tag{7}$$

Давайте теперь посмотрим на показатель в (7). Показатели должны быть отрицательными значениями, поскольку для случая сверхдемпфирования должно быть верно $\delta>\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$.

Поэтому решение (7) является сложением двух экспоненциально убывающих функций.

Чтобы упростить решение, мы заменим квадратный корень новой константой: $\alpha=\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$. После подстановки новой константы в решение (7) мы можем переписать его в виде:

$$x(t) = e^{-\delta t}\Big(C_1e^{\alpha t} + C_2e^{-\alpha t}\Big)$$

Это решение для случая сверхдемпфирования. Константы интегрирования C_1 и C_2 можно определить из заданных начальных условий.

Например, можно задать начальное положение и начальную скорость маятника

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = 2,$$

а также $\omega_0 = 1$, $\delta = 1,5$, что даст $\alpha = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{2,25 - 1} = \sqrt{1,25} = 1,12$ и общее решение

$$x(t) = e^{-1,5t}\left(C_1 e^{1,12t} + C_2 e^{-1,12t}\right).$$

Из начальных условий находим $C_1 + C_2 = 0$, $-0,38C_1 - 2,62C_2 = 2 \Rightarrow C_1 = 0,89$, $C_2 = -0,89$ и

$$x(t) = 0,89e^{-1,5t}(e^{1,12t} - e^{-1,12t}).$$

График этого решения при сверхдемпфировании при t от 0 до 7 приведен на Рис. 6.

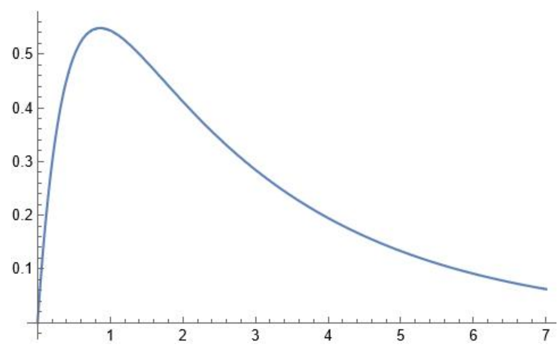


Рис. 6: Закон движения при сильном демпфировании $x(t) = 0,89e^{-1,5t}(e^{1,12t} - e^{-1,12t})$.

2.3 Критически затухающий случай

Критическое затухание возникает когда $\delta = \omega_0$. Это переход от сверхдемпфирования к малому затуханию. В этом случае характеристическое уравнение (5) имеет единственное решение:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\delta. \tag{8}$$

Тогда мы получим общее решение дифференциального уравнения $mx'' + fx' + kx = 0$ в виде:

$$x(t) = e^{-\delta t}(C_1 + t\,C_2). \tag{9}$$

Константы C_1 и C_2 должны быть получены из начальных условий конкретной задачи:

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0.$$

Например, можно задать начальное положение и начальную скорость маятника

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = 2,$$

а также $\delta = 1,5$, что даст общее решение

$$x(t) = e^{-1,5t}(C_1 + t\,C_2).$$

Из начальных условий находим $C_1 = 0, \qquad C_2 = 2$ и

$$x(t) = 2te^{-1,5t}.$$

График этого решения при критическом затухании при t от 0 до 7 приведен на Рис. 7.

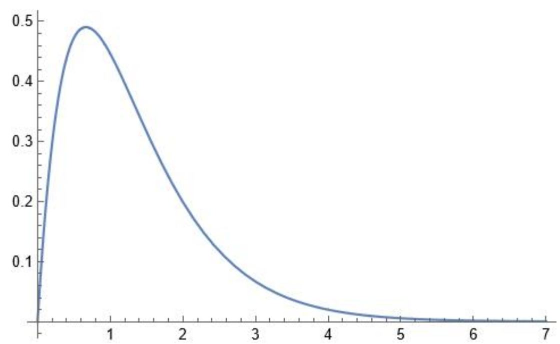


Рис. 7: Закон движения при критическом затухании $x(t) = 2te^{-1,5t}$.

Задание.

Математический маятник массой m гр, подвешенный на струне длины L см совершает небольшие колебания в среде, в которой коэффициент затуханий $f\,\text{с}^{-1}$. Пусть в начальный момент маятник отклонён от вертикали на угол φ и опущен с начальной скоростью v_0. Выписать уравнение математического маятника с трением и решить начальную задачу для этого уравнения. Построить график решения при $t \in [0, b]$.

Вариант	m	L	f	φ	v_0	b
1	100	40	1	$\frac{\pi}{3}$	2	5
2	270	60	$0,5$	$\frac{\pi}{4}$	3	7
3	330	100	$0,66$	$\frac{\pi}{5}$	1	6
4	150	50	$1,2$	$\frac{\pi}{6}$	5	8
5	250	140	$0,7$	$\frac{\pi}{3}$	4	10
6	350	75	$2,4$	$\frac{\pi}{4}$	$1,5$	11
7	450	160	$0,15$	$\frac{\pi}{7}$	$2,5$	5
8	400	95	$0,5$	$\frac{\pi}{8}$	$0,2$	12
9	50	30	$1,5$	$\frac{\pi}{3}$	$0,7$	6
10	80	120	$0,3$	$\frac{\pi}{4}$	$0,6$	4
11	600	150	$2,4$	$\frac{\pi}{5}$	1	6
12	420	65	$0,3$	$\frac{3\pi}{4}$	$0,2$	7
13	530	80	$3,9$	$\frac{\pi}{3}$	$1,3$	5
14	120	95	$1,2$	$\frac{2\pi}{7}$	$1,5$	7
15	75	450	$0,2$	$\frac{3\pi}{7}$	$0,3$	10
16	275	55	$0,4$	$\frac{3\pi}{5}$	$1,1$	5
17	360	75	$0,5$	$\frac{\pi}{4}$	$0,7$	8
18	170	100	$3,6$	$\frac{\pi}{6}$	$1,5$	8
19	125	35	$1,3$	$\frac{\pi}{12}$	$2,5$	6
20	520	30	$0,2$	$\frac{\pi}{10}$	3	9
21	260	60	$0,15$	$\frac{\pi}{3}$	$4,5$	15
22	325	70	$1,35$	$\frac{2\pi}{5}$	$3,5$	12
23	415	65	$0,25$	$\frac{\pi}{4}$	$2,3$	11
24	62	45	$1,15$	$\frac{\pi}{6}$	$0,6$	12
25	170	25	$1,25$	$\frac{\pi}{7}$	$2,3$	10
26	330	30	$2,4$	$\frac{\pi}{11}$	$0,5$	5
27	235	110	$0,1$	$\frac{2\pi}{3}$	$2,25$	11
28	355	50	$0,65$	$\frac{3\pi}{4}$	$1,25$	17
29	425	60	$1,75$	$\frac{5\pi}{7}$	$0,75$	8
30	85	85	$0,35$	$\frac{\pi}{3}$	$2,15$	10