Математическое и компьютерное моделирование

Лабораторная работа № 4

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Несмотря на простоту экспоненциального закона, многие популяции фактически увеличивается со скоростью экспоненты в некоторый промежуток времени их существования. Процессом управляют два параметра: начальная численность популяции и темп роста на единицу популяции. Оба они могут быть легко определены с помощью экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

Если параметр темпа роста отрицателен, то процесс является вымиранием и происходит с экспоненциальной скоростью.

Под популяцией имеется в виду некоторое число скрещивающихся особей одной разновидности. Часто подразумевается географическая локализация, например, население Острова Пасхи, кролики в Австралии или бактериальная колония в чашке Петри.

1 Модель Мальтуса.

Первая изданная модель, предсказывающая темп роста популяции, была дана Томасом Мальтусом в 1798, который предположил, что темп роста популяции пропорционален ее объему y, то есть,

$$\frac{dy}{dt} = ry, \tag{1}$$

где r — константа, характеризующая пропорциональность. Это уравнение легко решается методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{y} = rdt, \qquad \ln y = rt + c.$$

Если задано начальное условие

$$y\left(t_0\right) = y_0, \tag{2}$$

то есть, задана задача Коши (1)-(2), то

$$\begin{cases} y_0 = e^c; \\ y = y_0 e^{rt}. \end{cases}$$

Из формулы $y = y_0 e^{rt}$ следует, что со временем численность популяции растет неограниченно по экспоненциальному закону. В соответствии с этим законом изолированная популяция развивалась бы в условиях неограниченных ресурсов. В природе такие условия встречаются крайне редко. Примером может служить размножение видов, завезенных в места, где есть много пищи и отсутствуют конкурирующие виды и хищники (кролики в Австралии). Уравнение (1) достаточно точно описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой в условиях избытка пищи и места популяции простейших организмов, например популяция пенициллиновых грибков, выращиваемых в культиваторе, до истощения культуральной среды.

2 Модель Ферхюльста.

Уравнение (1) справедливо лишь для ограниченного периода времени, в конечном счете, растущая популяция исчерпает наличные ресурсы. Численность популяции может стабилизироваться на некотором устойчивом уровне; она может испытывать регулярные или нерегулярные флуктуации или может сокращаться. Поведение популяции, численность которой стабилизируется на некотором устойчивом уровне, часто описывают с помощью логистического уравнения, предложенного Ферхюльстом в 1838 г.:

$$\frac{dy}{dt} = ry - \delta y^2, \tag{3}$$

где

- r — темп роста популяции (параметр имеет единицы измерения $\texttt{время}^{-1}$),
- y — численность популяции, сс δ – число встреч членов популяции, при которой они могут конкурировать за какой-либо ресурс,
- t — время.

Уравнение Ферхюльста отличается от уравнения экспоненциального роста (уравнения Мальтуса) выражением δy^2, которое отражает ограниченность ресурсов.

Слагаемое δy^2, пропорциональное количеству встреч между особями, учитывает сокращение популяции, объяснимое многими причинами (конкуренция внутри популяции, недостаток места, и пищи, передача инфекции из-за тесноты и т.д.). Коэффициент δ называется коэффициентом внутривидовой конкуренции.

Величина $K = \frac{r}{\delta}$ называется **емкостью экологической ниши** популяции и соответствует такой численности популяции, при которой фактическая скорость воспроизводства в результате конкуренции настолько снижена, что популяция в целом может только восстанавливать в каждом поколении свою численность. В этот момент количество родившихся особей уравновешивается количеством погибших.

Логистическое уравнение является простейшим дифференциальным уравнением, обладающим двумя требуемыми свойствами:

1. при малых значениях уравнение (3) сводится к уравнению (1) и рост носит экспоненциальный характер;

2. с возрастанием t величина монотонно приближается к постоянному значению.

Пусть известна численность популяции в момент времени t_0, т.е. задано начальное условие

$$y\left(t_0\right) = y_0. \tag{4}$$

Найдем точное решение задачи Коши (3)-(4):

Имеем

$$\frac{dy}{dt} = ry - \delta y^2.$$

Разделим переменные

$$\frac{dy}{y\left(1 - \frac{\delta}{r}y\right)} = rdt,$$
$$\frac{\left(1 - \frac{\delta}{r}y + \frac{\delta}{r}y\right)dy}{y\left(1 - \frac{\delta}{r}y\right)} = rdt,$$
$$\frac{dy}{y} - \frac{d\left(1 - \frac{\delta}{r}y\right)}{1 - \frac{\delta}{r}y} = rdt.$$

Проинтегрируем полученное выражение

$$\ln y - \ln\left(1 - \frac{\delta}{r}y\right) + C = rt,$$
$$C \cdot \frac{y}{1 - \frac{\delta}{r}y} = e^{rt},$$

Получим решение

$$y = \frac{r}{\delta + C \cdot r \cdot e^{-rt}}. \tag{5}$$

Найдем :

$$y\left(t_0\right) = \frac{r}{\delta + C \cdot r \cdot e^{-rt_0}},$$

отсюда

$$C = \frac{(r - \delta y_0)e^{rt_0}}{ry_0}\ . \tag{6}$$

Если начальная численность популяции меньше величины экологической емкости популяции $y_0 < K = \frac{r}{\delta}$, то с течением времени ее размер будет расти, приближаясь к своему предельному значению K. При этом, если начальная численность составляет менее половины емкости экологической ниши, на начальном этапе скорость роста популяции будет возрастать, пока численность не достигнет значения $\frac{K}{2}$, а затем начнет снижаться, стремясь к нулю.

Если начальная численность популяции составляет более половины емкости экологической ниши, то размер популяции будет увеличиваться, стремясь к значению $\frac{K}{2}$, а скорость ее роста будет неуклонно снижаться.

Изменение характера развития популяции (переход от возрастания скорости роста к снижению в точке $\frac{K}{2}$ произошло до того, как исследователь начал за ней наблюдать (т. е. до момента времени t_0).

Если же размер популяции y_0 в начальный момент времени больше предельно возможного значения, то численность популяции будет снижаться.

Пример 1. *В 1937 г. на остров Протекшен у побережья штата Вашингтон завезли двух самцов и шесть самок обыкновенного фазана (Phasianus colchicus). Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой, $r = 1,13$ год$^{-1}$, $K = 2500$ особей, $\delta = \frac{r}{K}$. Пользуясь уравнением Ферхюльста рассчитать рост численности фазанов с 1937 года по 1957 год.*

Нахождение точного и приближенного решения Ферхюльста в MATLAB.

Зададим временной промежуток, начальную численность, r и K:

```
t0=0;
t1=20;
y0=8;
r=1.13;
K=2500;
δ=r/K.
```

Для точного решения создадим массив из нулей и создадим массив для времени

```
YTOCHN=zeros(1,n+1);
T=t0:h:t1;
```

По формулам (5) и (6) найдем точное решение

```
C=(r-delta*y0)*exp(r*t0)/(y0*r);
for i=1:n+1
YTOCHN(i)=r/(delta+C*r*exp(-r*T(i)));
end
```

Построим график решения:

```
plot(T, YTOCHN, 'bo-');
xlabel('Years');
ylabel('Phasianus colchicus');
axis([0 20 0 2550]);
set(gca,'XTickLabel',{1937:2:1957});
```

Получим

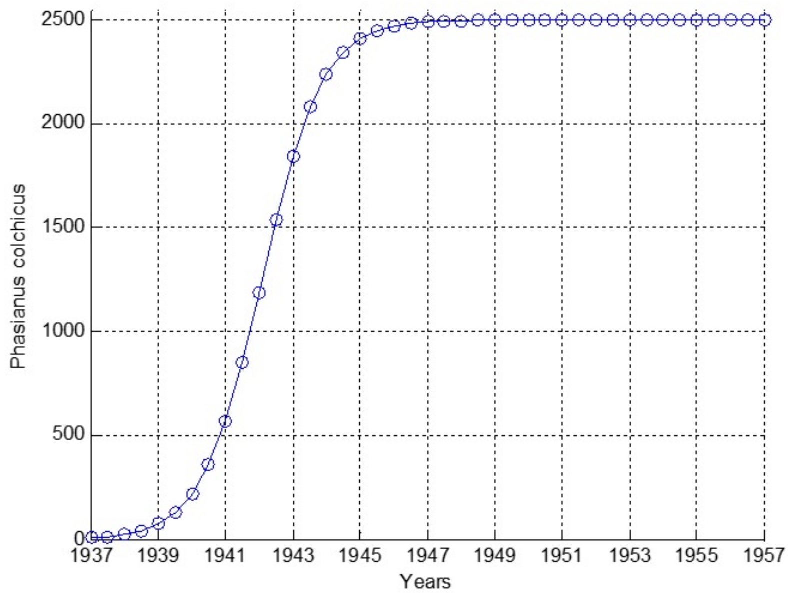

Рис. 1: Точное решение задачи.

Видим, что, исходя из уравнения Ферхюльста численность популяции фазанов начитает стабилизироваться с 1946 года.

Нахождение приближенного решения уравнения Ферхюльста.

Простейшим численным методом решения рассматриваемой нами задачи Коши является метод Эйлера, называемый иногда методом ломаных Эйлера.

Дана задача Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть $t \in [t_0, T]$. Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на n частей точками

$$t_i = t_0 + ih, \quad h = \frac{T - t_0}{n}.$$

Рассмотрим уравнение из (7) в точках t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; и заменим производную $y'(t_i)$ разностной формулой

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}.$$

Тогда получим рекуррентную формулу метода Эйлера для вычисления приближенных значений $y\left(t_{i+1}\right)$:

$$y_{i+1}=y_i+hf\left(t_i,y_i\right), \qquad i=0,1,\ldots,n-1.$$

Здесь через y_i обозначены приближенные значения $y\left(t_i\right)$, т.е. $y_i \approx\ y\left(t_i\right)$.

Зададим число шагов n, шаг h, матрицу из нулей для приближенного решения Y и начальное число особей y_0

```
n=40;
h=(t1-t0)/n;
Y=zeros(1,n+1);
Y(1)= y0;
```

Найдем приближенное решение, абсолютную и относительную погрешности, построим графики точного и приближенного решений, сведем результаты в Excel:

```
for i=1:n
Y(i+1)=Y(i)+h*Y(i)*(r-delta*Y(i));
end
abs1=abs(YTOCHN-Y);
otn1=abs1./YTOCHN;
points=1:(n+1);
Names={'Time t','Exact solution','Numerical solution','Abs','Otn'};
xlswrite('LR02.xls',points','a2:a32');
xlswrite('LR02.xls',Names,'b1:f1');
xlswrite('LR02',T','b2:b32');
xlswrite('LR02.xls',Y','c2:c32');
xlswrite('LR02.xls',YTOCHN','d2:d32');
xlswrite('LR02.xls',abs1','e2:e32');
xlswrite('LR02.xls',otn1','f2:f32');
plot(T, Y, 'm*-');
hold on;
grid on;
plot(T, YTOCHN, 'bo-');
xlabel('Years');
ylabel('Phasianus colchicus');
axis([0 20 0 2550]);
set(gca,'XTickLabel',{1937:2:1957});
```

Получим

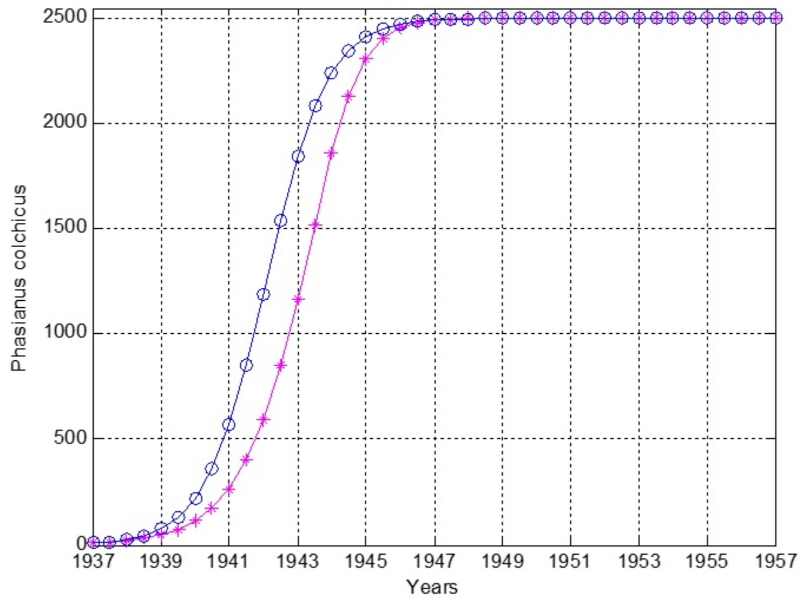

Рис. 2: Точное и приближенное решения задачи.

	Time t	Exact solution	Numerical solution	Abs	Otn
1	0	8	8	0	0
2	0,5	12,505536	14,04145825	1,535922248	0,10938481
3	1	19,53582005	24,60028004	5,064459989	0,205870014
4	1,5	30,48730588	42,96185205	12,47454618	0,290363324
5	2	47,50257216	74,61533704	27,11276488	0,363367184
6	2,5	73,83155771	128,3720342	54,54047651	0,424862602
7	3	114,3144395	217,3865246	103,0720851	0,474142017
8	3,5	175,948777	358,7868568	182,8380798	0,509600829
9	4	268,3633343	569,225717	300,8623827	0,528546715
10	4,5	403,7123514	853,8722837	450,1599323	0,527198201
11	5	594,9755222	1192,915148	597,9396257	0,501242378
12	5,5	851,1336252	1540,589075	689,4554496	0,447527158
13	6	1168,303294	1846,449781	678,1464873	0,367270474
14	6,5	1519,919891	2081,302565	561,3826739	0,269726605
15	7	1856,579266	2243,485475	386,9062095	0,17245764
16	7,5	2126,550186	2347,451169	220,9009829	0,094102483
17	8	2306,030294	2410,951935	104,9216406	0,043518761
18	8,5	2407,120098	2448,598345	41,4782465	0,016939588
19	9	2457,647614	2470,523752	12,87613792	0,005211906
20	9,5	2481,17133	2483,161178	1,989848016	0,000801337
21	10	2491,729407	2490,401579	1,327828299	0,000533178
22	10,5	2496,386833	2494,535584	1,851248877	0,000742122
23	11	2498,425322	2496,891311	1,534011047	0,000614368
24	11,5	2499,314455	2498,232196	1,082258477	0,00043321
25	12	2499,701682	2498,994944	0,706737561	0,000282809
26	12,5	2499,870211	2499,428667	0,441544283	0,000176658
27	13	2499,943538	2499,675245	0,268293032	0,000107331
28	13,5	2499,975438	2499,815412	0,160026458	6,40153E-05
29	14	2499,989316	2499,895084	0,094231411	3,76941E-05
30	14,5	2499,995352	2499,940369	0,054983312	2,19938E-05
31	15	2499,997978	2499,966108	0,031870493	1,27484E-05

Вывод. Численность фазанов стабилизируется на 1947 году, достигнув численности, равной емкости ниши популяции в 2500 фазанов.

Задание 1.

Найти точное и приближенное решение задачи Коши для уравнения Ферхюльста и сделать выводы.

Вариант 1.

В Кузнецком Алатау на одном из охотучастков велась добыча соболя. Через некоторое время охотоведы заметили резкое снижение численности популяции. Когда численность соболя на участке упала ниже известной критической величины 1120 особей, был сделан вывод о неконтролируемом браконьерском промысле. Контролируемый промысел был остановлен, и был организован ежегодный учет численности популяции соболя. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой, $r = 1,39$ год$^{-1}$, $K = 3459$ особей, $\delta = \frac{r}{K}$. Пользуясь уравнением Ферхюльста рассчитать рост численности соболей с 1950 года по 1970 год.

Вариант 2.

Популяция бактерий растет в условиях ограниченного питания. В начальный момент времени популяция составляла 1 бактерию, $r = 5$ мин$^{-1}$, $K = 10000$. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности бактерий в течении 30 минут.

Вариант 3.

Рассмотрим популяцию капрового жука в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю. Изначальная численность взрослых жуков 2, $r = 2,3$ мес$^{-1}$ и $K = 400$. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности жуков в течении 12 месяцев.

Вариант 4.

Модель Ферхюльста может быть использована для описания экспериментальных данных о росте бактерии Paramecium Aurelia для которой $r = 0,79$ день$^{-1}$ и $K = 543$. Предполагая, что изначальный объем популяции 1 бактерия на см^3 рассчитать рост популяции в течение 25 дней.

Вариант 5.

В 1985 году Krug и Taubert получили экспериментальные данные для EAT (клеток брюшной водянки Ehrilch ascites tumour) мыши: $K = 150 \times 10^7$ и $r = 0,6$ день$^{-1}$. Предполагая, что изначальное количество опухолевых клеток 4×10^7 рассчитать рост опухоли в течение 17 дней.

Вариант 6.

Рост популяции крыс в вольере описывается уравнением Ферхюльста. Емкость экологической ниши для нее равна $K = 1000$. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции и сведите результаты в таблицу, если известно, что начальная численность равна: 10, скорость роста r равна $0,5$ день$^{-1}$ в течение 100 дней.

Вариант 7.

Модель Ферхюльста может быть использована для описания экспериментальных данных о росте бактерии Paramecium caudatum для которой $r = 0,66$ день$^{-1}$ и $K = 202$. Предполагая, что изначальный объем популяции 1 бактерия на см^3 рассчитать рост популяции в течение 12 дней.

Вариант 8.

Исследование популяции большой синицы, обитающей в смешанном лиственном лесу в районе Лауэрсмер на севере Нидерландов ведется с 1993 года. В 1993 году число синиц было 2464. Предполагается, что динамика популяции описывается уравнением Ферхюльста. Емкость леса как экологической ниши для нее равна $K = 4000$. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции и сведите результаты в таблицу, если известно, что темп роста $r = 0,87$ год$^{-1}$ в течение 40 лет.

Вариант 9.

Пусть изначально в пруду 100 карасей. Предположим, что темп роста $r = 0,5$ мес$^{-1}$, а емкость пруда $K = 1000$. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции и сведите результаты в таблицу для 21 месяца.

Вариант 10.

Пусть начальная численность белощекой казарки в 1945 году, в заповеднике 10 птиц. Предположим, что темп роста $r = 1,1$ год$^{-1}$, а емкость заповедника $K = 4500$. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции и сведите результаты в таблицу для с 1945 по 1970 годы.

Вариант 11.

В 1911 году 25 оленей были завезены на остров Святого Павла в Приболофс у берегов Аляски. Предполагаем, что рост этой популяции происходит по логистической кривой, $r = 0,7$ год$^{-1}$, $K = 2000$ особей, $\delta = \frac{r}{K}$. Пользуясь уравнением Ферхюльста рассчитать рост численности оленей на острове Святого Павла с 1911 года по 1938 год.

Вариант 12.

Рост популяции тасманийских овец показывает хорошее соответствие логистической модели. Изначально, в 1820 году, в Тасманию было завезено 200 овец. Предполагаем, что рост этой популяции происходит по логистической кривой, $r = 1,5$ год$^{-1}$, $K = 1800$ овец, $\delta = \frac{r}{K}$. Пользуясь уравнением Ферхюльста рассчитать рост численности овец с 1820 года по 1940 год.

Вариант 13.

Чёрную львинку разводят в промышленном масштабе в качестве альтернативного источника белка и жира для кормовых целей и в качестве сырья для химической промышленности. Пусть изначальная численность взрослых мух 2, $r = 2,5$ день$^{-1}$, $K = 500$. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности мух в течении 30 дней.

Вариант 14.

Изначальная оценка численности арктического финвала на 1972 год 50 особей. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой, $r = 0,5$ год$^{-1}$, $K = 600$ китов, $\delta = \frac{r}{K}$. Пользуясь уравнением Ферхюльста рассчитать рост численности китов с 1972 года по 2000 год.

Вариант 15.

Рассмотрим популяцию зернового точильщика в 20-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю. Изначальная численность взрослых жуков 4, $r = 2,5$ мес$^{-1}$, $K = 700$. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности жуков в течении 2 месяцев.

Вариант 16.

Выращивание Daphnia magna является важной задачей. Daphnia magna используется в различных областях исследований, таких как: экотоксикология, популяционная генетика, эволюция пола и др. Пусть емкость экологической ниши в аквариуме для нее равна $K = 1500$. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции и сведите результаты в таблицу, если известно, что начальная численность равна 50, скорость роста r равна $2,5$ день$^{-1}$, в течение 30 дней.

Вариант 17.

В городе с населением $K = 10000$ человек распространяется заразная болезнь. На момент обнаружения вспышки было 200 инфицированных. Используя логистическую модель распространения болезни, найдите количество инфицированных через три месяца после вспышки, постройте точный и приближенный графики динамики численности зараженных и сведите результаты в таблицу, если известно, что скорость распространения заболевания r равна $2,5$ день$^{-1}$.

Вариант 18.

Популяция кроликов на лугу составляет 200 кроликов в момент времени $t = 0$. Через месяц популяция кроликов увеличилась на 4%. Используя начальную популяцию в 200 кроликов и темп роста $r = 0,04$ мес$^{-1}$ и учитывая, что емкость луга равна $K = 750$ кроликов, постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции кроликов на лугу и сведите результаты в таблицу.

Вариант 19.

Общее число людей, инфицированных вирусом, часто растет по логистической кривой. Предположим, что изначально вирусом заражены 10 человек, и что на ранних стадиях вируса (со временем t, измеряемым в неделях) число инфицированных людей растет с темпом роста $r = 0,178$ нед$^{-1}$. Предполагается, что в долгосрочной перспективе заражаются около $K = 5000$ человек, постройте точный и приближенный графики динамики численности зараженных за 10 недель и сведите результаты в таблицу.

Вариант 20.

Популяция вида лосей на острове Рединг в Канаде отслеживается в течение нескольких лет. Изначальная популяция составляла 600 особей, темп роста $r = 0,02$ год$^{-1}$. Остров изолирован, поэтому здесь нет охоты или миграции. Емкость острова как экологической ниши для лосей равна 1000. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности лосей в течении 20 лет.

Вариант 21.

Общее число людей, инфицированных вирусом, часто растет подобно логистической кривой. Предположим, что изначально вирусом заражены 25 человек, и что на ранних стадиях вируса (со временем, t, измеряемым в неделях) число инфицированных людей растет растет с темпом роста $r = 1,7$ нед$^{-1}$. По оценкам, в долгосрочной перспективе заражаются примерно 6500 человек. Постройте точный и приближенный графики динамики численности зараженных за 27 недель и сведите результаты в таблицу.

Вариант 22.

Рассмотрим популяцию белохвостого оленя (Odocoileus virginianus) в штате Кентукки. Перед охотничьим сезоном 2004 года он оценивал популяцию в 900000 оленей. Популяция оленей, у которой много еды и на которую не охотятся люди или другие хищники, будет удваиваться каждые три года. Это наблюдение соответствует темпу прироста $r = 0,2311$ год$^{-1}$, поэтому приблизительный темп прироста составляет $23,11\%$ в год. Емкость экологической ниши популяции оленей округах Кентукки $K = 1072764$ оленя. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции оленей в штате Кентукки за 20 лет и сведите результаты в таблицу.

Вариант 23.

На острове размещают двух обезьян. Темп роста популяции обезьян $r = 0,25$ год$^{-1}$ (25% в год), а предполагаемая емкость острова — $K = 25$ обезьян. Когда популяция обезьян достигает 16 обезьян? Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции обезьян за 15 лет и сведите результаты в таблицу.

Вариант 24.

Модель Ферхюльста может быть использована для описания экспериментальных данных о росте бактерии Enterococcus faecalis для которой $r = 0,8$ день$^{-1}$ и $K = 500$. Предполагая, что изначальный объем популяции 1 бактерия на см^3, рассчитать рост популяции в течение 15 дней.

Вариант 25.

Рассмотрим популяцию золотистой бронзовки. Изначальная численность взрослых жуков 6, $r = 1,8$ мес$^{-1}$, $K = 300$. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности жуков в течении 15 месяцев.

Вариант 26.

Асцитная опухоль Эрильха у мыши развивается по логистическому закону. Смерть происходит при $K = 150 \times 10^7$ опухолевых клеток, темп роста $r = 0,6$ день$^{-1}$. Когда опухоль диагностировали в организме мыши было 4×10^7 опухолевых клеток. Постройте точный и приближенный графики динамики роста опухоли за 17 дней и сведите результаты в таблицу.

Вариант 27.

Популяция рыб в искусственном водоеме растет при определенных и регулируемых условиях относительно их ресурсов и пространства, так что ее темп роста составляет $r = 0,8$ мес$^{-1}$, а емкость водоема составляет $K = 780500$ рыб. Изначальная численность 20 рыб. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности рыб в течении 12 месяцев.

Вариант 28.

Строится заповедник бабочек, вмещающий $K = 2000$ бабочек, и изначально туда заселяют 400 бабочек. Темп роста популяции $r = 0,5$ мес$^{-1}$. Когда популяция достигнет 1500 бабочек? Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции бабочек за 15 месяцев и сведите результаты в таблицу.

Вариант 29.

Популяция лягушек в пруду имеет темп роста $r = 0,5$ год$^{-1}$ (5% в год). Если начальная популяция составляет 1000 лягушек, а емкость пруда составляет 6000, какова популяция лягушек будет через 10 лет? Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции лягушек в пруду за 20 лет и сведите результаты в таблицу.

Вариант 30.

Популяция оленей в парке имеет емкость $K = 200$ и темп роста $r = 0,2$ год$^{-1}$ (2% в год). Если начальная популяция составляет 50 оленей, какова популяция оленей через 12 лет? Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции олене в парке за 30 лет и сведите результаты в таблицу.

Задание 2.

Пусть $y = y(t)$ плотность популяции в момент времени t. Если в основе размножения лежит скрещивание, предполагающее встречи между особями разных полов одного и того же вида, то прирост будет тем выше, чем больше количество встреч между особями r, а последнее пропорционально второй степени y. Таким образом, для разнополой популяции в условиях неограниченных ресурсов можно записать

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ry^2, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{8}$$

Задача Коши (8) хорошо описывает тот факт, что при низких плотностях популяций скорость размножения резко падает, так как вероятность встречи двух особей разных полов уменьшается при понижении плотности популяции пропорционально квадрату плотности. В (8) число r и начальное условие $y_0 \neq 0$ — число особей, которое было изначально, выбираются студентом самостоятельно.

Найти приближенное решение задачи Коши (8). Построить графики точного и приближенного решения задачи Коши (8). Найти абсолютную и относительную погрешности.

Задание 3.

Пусть $y = y(t)$ плотность популяции в момент времени t. При наличии хищника модель популяционной динамики усложняется и принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - BP\left(\frac{y^2}{A^2+y^2}\right), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{9}$$

Первый член $Ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ в правой части — это просто логистический рост популяции. Здесь R — максимальная скорость роста популяции, K — емкость среды. Второй член $BP\left(\frac{y^2}{A^2+y^2}\right)$ — функциональная реакция хищника, умноженная на количество хищников P, B — максимальная скорость хищничества отдельного хищника (в среднем скорость поедания жертв), а A — объем популяция, когда скорость хищничества составляет половину максимальной.

В (9) числа A, B, R, P, K и начальное условие $y_0 \neq 0$ — число особей, которое было изначально, выбираются студентом самостоятельно.

Найти приближенное решение задачи Коши (9). Построить график приближенного решения задачи Коши (9).

Список литературы

[1] Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии — Изд-во РХД, М-Ижевск, 2011 г. 560 стр.

[2] Brauer F., Castillo-Chávez C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Texts in Applied Mathematics, Volume 40. New York: Springer. 416 p.