

Ответы и решения

Часть 1

Ответами к заданиям 1-19 являются число или последовательность цифр.

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1-5.

Саша летом отдыхает у бабушки в деревне Масловка. В субботу они собираются съездить на велосипедах в село Захарово в магазин. Из деревни Масловка в село Захарово можно проехать по прямой лесной дорожке. Есть более длинный путь: по прямолинейному шоссе через деревню Вёсенка до деревни Полянка, где нужно повернуть под прямым углом направо на другое шоссе, ведущее в село Захарово. Есть и третий маршрут: в деревне Вёсенка можно свернуть на прямую тропинку в село Захарово, которая идёт мимо пруда.

Лесная дорожка и тропинка образуют с шоссе прямоугольные треугольники.



По шоссе Саша с бабушкой едут со скоростью 20 км/ч, а по лесной дорожке и тропинке — со скоростью 15 км/ч. На плане изображено взаимное расположение населённых пунктов, сторона каждой клетки равна 1 км.

1 342

2 35

3 25

4 116

5 746

6 40,81

7 3

8 125

9 -10,6

10 0,94

11 321

12 15

13 3

14 -60

15 15

16 24

17 49

18 2

19 1

Часть 2

При выполнении заданий 20-25 используйте отдельный лист бумаги. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение и ответ. Пишите чётко и разборчиво.

20 Решение.

Из равенства $\frac{4a - 5b + 6}{5a - 4b + 6} = 3$ следует, что:

$$3 \cdot (5a - 4b + 6) = 4a - 5b + 6 \Leftrightarrow 15a - 12b + 18 = 4a - 5b + 6 \Leftrightarrow 11a - 7b = -12.$$

Тогда: $11a - 7b + 21 = -12 + 21 = 9$.

Ответ: 9.

21 Решение.

Пусть x км/ч – скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля $x - 30$ км/ч.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
Первый автомобиль	x	$\frac{540}{x}$	540
Второй автомобиль	$x - 30$	$\frac{540}{x - 30}$	540

Так как первый автомобиль приехал на 3 часа раньше второго, то его время в пути на 3 часа меньше. Следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{540}{x - 30} - \frac{540}{x} = 3 &\Leftrightarrow \frac{540x - 540(x - 30)}{x(x - 30)} = 3 \Leftrightarrow \frac{540 \cdot 30}{x(x - 30)} = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x - 30) = 540 \cdot 30, \\ x - 30 \neq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 30x - 5400 = 0, \\ x \neq 30, \\ x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим первое уравнение последней системы:

$$x^2 - 30x - 5400 = 0; \quad D = (-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5400) = 22500; \quad \begin{cases} x = \frac{30 + 150}{2} = 90, \\ x = \frac{30 - 150}{2} = -60. \end{cases}$$

Корень $x = -60$ не подходит по смыслу задачи, так как $x > 0$. Поэтому скорость первого автомобиля, равна 90 км/ч.

Ответ: 90 км/ч.

22 Решение.

Область определения функции: $1 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Упростим заданную функцию:

$$y = \frac{(x^2 + 6,25)(x - 1)}{1 - x} = -\frac{(x^2 + 6,25)(x - 1)}{x - 1} = -(x^2 + 6,25) = -x^2 - 6,25, \quad x \neq 1.$$

Следовательно, графиком исходной функции является парабола $y = -x^2 - 6,25$, с выколотой точкой, ветви которой направлены вниз. Найдём вершину параболы:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0.$$

Для построения графика функции $y = -x^2 - 6,25$ возьмём значения $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$:

$$y(-2) = -(-2)^2 - 6,25 = -4 - 6,25 = -10,25;$$

$$y(-1) = -(-1)^2 - 6,25 = -1 - 6,25 = -7,25;$$

$$y(0) = -0^2 - 6,25 = -6,25;$$

$$y(1) = -1^2 - 6,25 = -1 - 6,25 = -7,25;$$

$$y(2) = -2^2 - 6,25 = -4 - 6,25 = -10,25.$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-10,25	-7,25	-6,25	-7,25	-10,25

График исходной функции, с выколотой точкой $(1; -7,25)$, изображён на рис. 1.

Графиком функции $y = kx$ является множество прямых проходящих через точку $(0; 0)$.

Прямая $y = kx$ будет иметь с графиком построенной функции одну общую точку в следующих случаях:

1) если прямая $y = kx$ пересекает график параболы $y = -x^2 - 6,25$ в двух точках, одна из которых является выколотой точкой с координатами $(1; -7,25)$. Для нахождения углового коэффициента k подставим координаты этой точки в уравнение прямой $y = kx$:

$$-7,25 = k \cdot 1 \Leftrightarrow k = -7,25.$$

На рис. 2 это случай (1).

2) если прямая $y = kx$ касается графика параболы $y = -x^2 - 6,25$. При этом точка касания $x \neq 1$. Для этого система уравнений $\begin{cases} y = -x^2 - 6,25, \\ y = kx \end{cases}$ должна иметь одно решение.

Следовательно, квадратное уравнение:

$$-x^2 - 6,25 = kx \Leftrightarrow x^2 + kx + 6,25 = 0$$

должно иметь одно решение, что реализуется, если его дискриминант равен нулю:

$$D = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6,25 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 25 \Leftrightarrow k = \pm 5.$$

Так как прямая $y = kx$ проходит через точку $x = 1$ при $k = -7,25$, то при $k = \pm 5$ она будет касаться параболы в точках отличных от $x = 1$. На рис. 2 случаи касания (2) и (3).

Следовательно, при $k = -7,25$, $k = -5$ и $k = 5$ прямая $y = kx$ будет иметь с графиком заданной функции ровно одну общую точку.

Ответ: $-7,25$; -5 ; 5 .

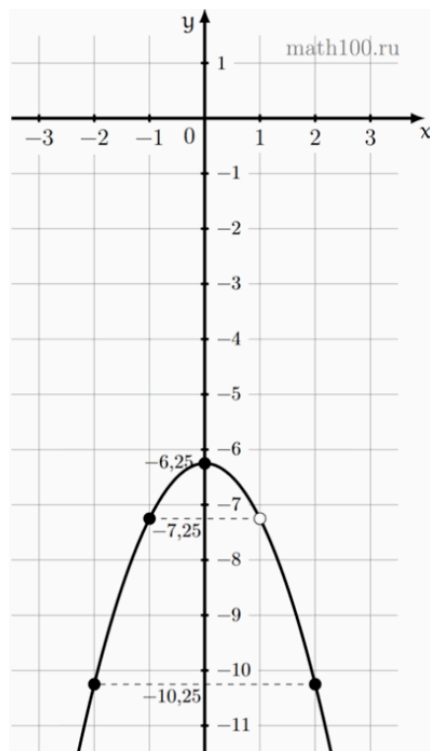


Рис. 1

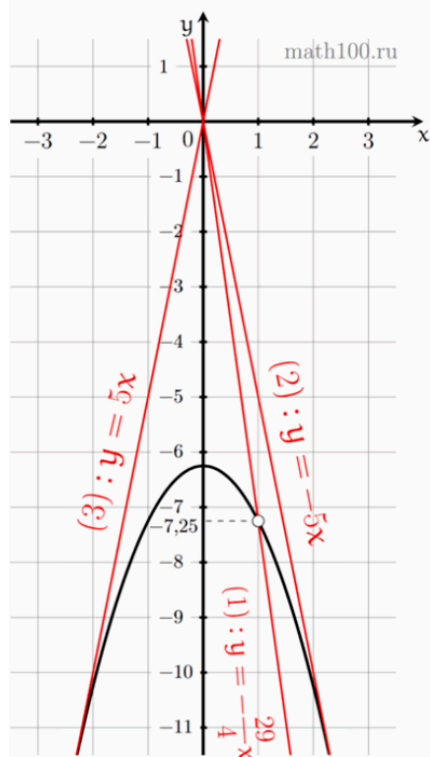
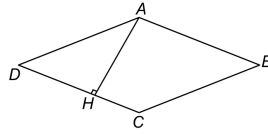


Рис. 2

Решение.

Введем буквенные обозначения, как показано на рисунке ниже.



AHD — прямоугольный треугольник. Из условия нам известно, что $DH = 21$, и сторона ромба равна $21 + 8 = 29$. У ромба все стороны равны, поэтому $AD = 29$.

Тогда по теореме Пифагора получим:

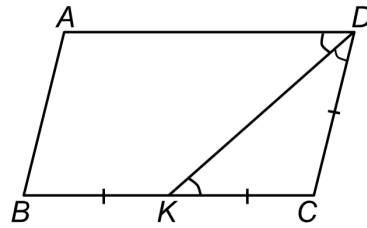
$$AH^2 = AD^2 - DH^2,$$

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2},$$

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{29^2 - 21^2} = \\ &= \sqrt{400} = 20. \end{aligned}$$

Решение.

Введем буквенные обозначения, как показано на рисунке ниже.



Из условия нам известно, что

$$BC = 2CD,$$

а точка K — середина стороны BC . Получаем, что

$$KC = CD = \frac{1}{2}BC.$$

Следовательно, $KC = CD$.

Треугольник KCD — равнобедренный, так как две его стороны равны. У равнобедренного треугольника углы при основании равны, поэтому

$$\angle CKD = \angle CDK.$$

Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны.

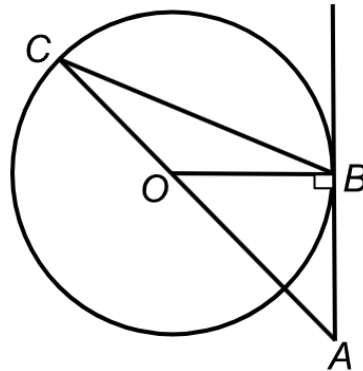
Нам известно, что $AB \parallel CD$, а DK — секущая, получаем, что

$$\angle DKC = \angle KDA.$$

Следовательно, DK — биссектриса, так как она делит угол ADC на два равных угла.

Решение.

Введем буквенные обозначения, как показано на рисунке ниже.



Проведем радиус к точке касания B .

Касательной к окружности является прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку.

Следовательно,

$$OB \perp AB.$$

ABO — прямоугольный треугольник. Из условия нам известно, что $AB = 15$, а диаметр окружности равен 16, следовательно,

$$OB = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Тогда по теореме Пифагора получим:

$$\begin{aligned} AO^2 &= AB^2 + BO^2, \\ AO &= \sqrt{AB^2 + BO^2}, \\ AO &= \sqrt{15^2 + 8^2} = \\ &= \sqrt{289} = 17. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} AC &= CO + AO, \\ AC &= 8 + 17 = 25. \end{aligned}$$