

Ответы и решения

1 73

2 10,5

3 35

4 0,35

5 0,488

6 -1

7 6

8 4

9 24

10 19

11 -0,1

12 -8

13 Решение.

a)

$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x} \Leftrightarrow 4^{2 \sin x} = 4^{-2 \sin 2x} \Leftrightarrow 2 \sin x = -2 \sin 2x.$$

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то уравнение примет вид:

$$2 \sin x = -4 \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x (2 + 4 \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

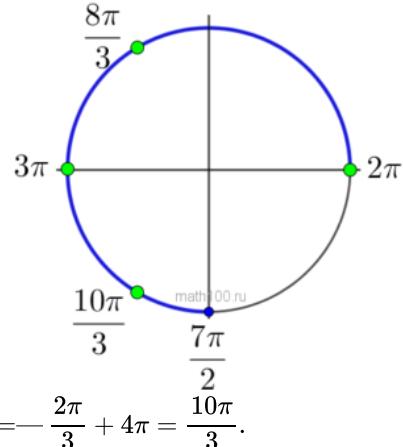
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$, с помощью тригонометрической окружности. Получим значения:

$$x = 2\pi; \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}; \quad x = 3\pi; \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$;

б) $2\pi, \frac{8\pi}{3}, 3\pi, \frac{10\pi}{3}$.



14 Решение.

a) Пусть отрезки MF и KE - высоты призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Тогда отрезок FE параллелен и равен отрезку MK , а значит, параллелен отрезку AN и равен $\frac{2}{3}AN$.

Следовательно, треугольники FBE и ABN подобны с коэффициентом $\frac{2}{3}$.

$$\text{Значит, } BN = \frac{3}{2}BE = \frac{3}{2}B_1K = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2}BC.$$

Следовательно, точка N - середина BC .

б) Так как объём призмы равен 12, а её высота равна 2, площадь параллелограмма $ABCD = 6$.

Прямоугольные треугольники AFM и NEK равны по катету и гипотенузе, значит, $AF = EN$.

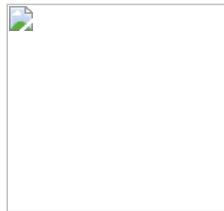
Тогда ABN равнобедренный треугольник с основанием $AN = 3$.

Площадь этого треугольника равна 1,5 .

Значит, его высота h , проведённая из вершины B , равна 1 , а высота трапеции $AMKN$ равна

$$\sqrt{BB_1^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{3}.$$

Средняя линия трапеции равна $\frac{5}{2}$, а значит, её площадь равна $\frac{5\sqrt{37}}{6}$.



Ответ:

$$6) \frac{5\sqrt{37}}{6}.$$

15 Решение.

$$2x - 5 > 7 \Leftrightarrow 2x > 12 \Leftrightarrow x > 6 \Leftrightarrow x \in (6; +\infty).$$

Ответ: $(6; \infty)$.

16 Решение.

$A = 488\ 000$ рублей сумма которую положил Николай на счёт. Через год сумма на счёте увеличивается на 25%, то есть в $\frac{100 + 25}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = t$ раз.

1 июля 2027, 2028 и 2029 годов со вклада снимают по x рублей.

Год	Сумма на счёте после начисления процентов (руб)	Сумма которую сняли со счёта (руб)	Остаток на счёте после снятия (руб)
1	At	x	$At - x$
2	$(At - x)t$	x	$(At - x)t - x$
3	$((At - x)t - x)t$	x	$((At - x)t - x)t - x$

Так как 1 июля 2029 года остаток на счёте должен оказаться равным 0 рублей, то:

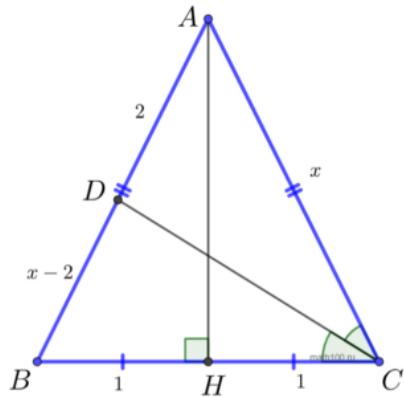
$$((At - x)t - x)t - x = 0 \Leftrightarrow At^3 - xt^2 - xt - x = 0 \Leftrightarrow At^3 = x(t^2 + t + 1)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{A \cdot t^3}{t^2 + t + 1} = \frac{488000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} + 1} = \frac{488000 \cdot 5^3}{4^3} \cdot \frac{4^2}{5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2} = \\ &= \frac{488000 \cdot 125}{4 \cdot 61} = \frac{122000 \cdot 125}{61} = 250000 \text{ рублей.} \end{aligned}$$

Ответ: 250 000 рублей.

17 Решение.

а) Пусть $AB = AC = x$, тогда $BD = x - 2$. По свойству биссектрисы CD :



$$\begin{aligned} \frac{AD}{BD} &= \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{5}; \quad x_2 = 1 - \sqrt{5}, \text{ где } x_2 < 0 \text{ не подходит.} \end{aligned}$$

Найдём длину биссектрисы CD :

$$CD = \sqrt{AC \cdot BC - AD \cdot BD} = \sqrt{2x - 2x + 4} = 2.$$

$CD = 2, BC = 2 \Leftrightarrow CD = BC$. Что и требовалось доказать.

б) По теореме Пифагора из треугольника AHC найдём AH :

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 1} = \sqrt{2\sqrt{5} + 5}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{2\sqrt{5} + 5}.$$

Ответ: $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

18 Решение.

$$\begin{aligned} a^2x - 5a = 9x - 15 &\Leftrightarrow a^2x - 9x = 5a - 15 \Leftrightarrow (a^2 - 9)x = 5a - 15. \\ a^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ a = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $a = -3$, то уравнение примет вид: $0 \cdot x = -30$, то есть оно не имеет решений.

Если $a = 3$, то уравнение примет вид: $0 \cdot x = 0$, то есть $x \in R$.

$$\text{Если } a \neq \pm 3, \text{ то: } x = \frac{5(a-3)}{(a-3)(a+3)} = \frac{5}{a+3}.$$

Ответ: нет решений при $a = -3; x \in R$ при $a = 3; x = \frac{5}{a+3}$ при $a \neq \pm 3$.

19 Решение.

а) Если $A = 109$, $B = 90$ и $C = 19$, то $A < 150$ и равенство $A = B + C$ верно.
б) Заметим, что если верно равенство $A = B + C$, то одна из цифр, написанных на карточках, - это 1, поскольку сумма двух двузначных чисел не превосходит 198.

Если числа B и C делятся на 3, то число A тоже делится на 3. Значит, на карточке, которую не взял Петя, написана цифра 0, 3, 6 или 9.

Таким образом, на одной из карточек, выбранной Петей, написана цифра 1.

Следовательно, число B равно 12, 15, 18, 21, 51 или 81. Аналогично число C тоже равно одному из этих чисел.

Если первая цифра одного из чисел B и C равна 1, то $B + C \leq 18 + 81 = 99$. Следовательно, вторая цифра каждого из чисел B и C равна 1. Тогда последняя цифра числа A равна 2. Значит, на карточках написаны цифры 1,2 и одна из цифр 0, 3, 6 или 9.

Таким образом, $B = C = 21$, а в этом случае сумма $B + C$ - двузначное число. Значит, если числа B и C делятся на 3, то равенство $A = B + C$ не может быть верным.

в) Если $A = 189$, $B = 98$ и $C = 91$, то равенство $A = B + C$ верно.

Предположим, что $A > 189$ и равенство $A = B + C$ верно. Тогда на карточках написаны цифры 1,9 и ещё одна цифра u .

Если первая цифра одного из чисел B и C не равна 9, то $B + C \leq 89 + 99 = 188$. Следовательно, каждое из чисел B и C равно 91 или $90 + u$. Сумма двух таких чисел равна 182, $181 + u$ или $180 + 2u$. С другой стороны, $A = 190 + u$. Значит, равенство $A = B + C$ не может быть верным.

Таким образом, число A не может быть больше 189. Следовательно, наибольшее число A , для которого может быть верным равенство $A = B + C$, это число 189.

Ответ:

а) да; б) нет; в) 189