

**Тренировочная работа в формате ЕГЭ
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Дата: _____ 2025 года

Вариант _____

Выполнена: ФИО _____ класс _____

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

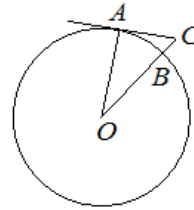
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

- 1 Найдите угол ACO , если его сторона CA касается окружности с центром O , отрезок CO пересекает окружность в точке B (см. рис.), а дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 17° . Ответ дайте в градусах.

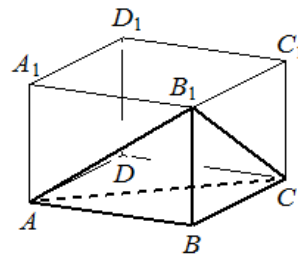


73
Ответ:

- 2 Длины векторов \vec{a} и \vec{b} равны 3 и 7, а угол между ними равен 60° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

10,5
Ответ:

- 3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 7$, $BC = 6$, $AA_1 = 5$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 .



35
Ответ:

- 4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 4 из Аргентины, 7 из Бразилии, 5 из Парагвая и 4 из Уругвая. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Бразилии.

0,35
Ответ:

- 5 Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,8. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

0,488
Ответ:

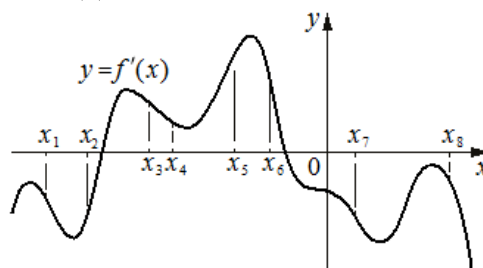
6 Найдите корень уравнения $5^{2-x} = 125$.

Ответ: -1

7 Найдите значение выражения $\frac{3 \sin 68^\circ}{\cos 34^\circ \cdot \cos 56^\circ}$.

Ответ: 6

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции $f(x)$?



Ответ: 4

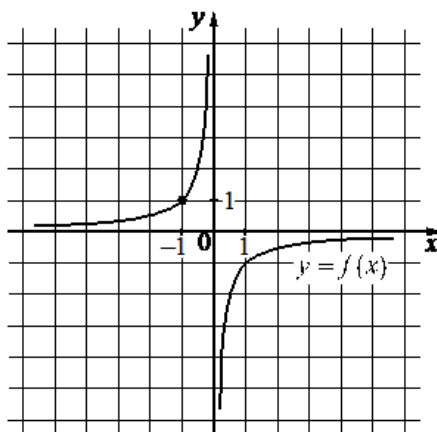
9 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где H — высота столба воды в метрах, $H_0 = 8$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{72}$ м/мин² и $b = -\frac{2}{3}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. Сколько минут вода будет вытекать из бака?

Ответ: 24

10 Заказ на изготовление 323 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 2 детали больше второго?

Ответ: 19

- 11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: -0.1

- 12 Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 16x^2 + 64x + 12$.

Ответ: -8

13

а) Решите уравнение $16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x}$;

б) Найдите все корни принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: **Решение.**

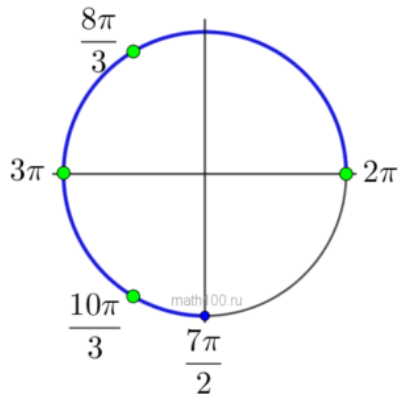
а)

$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x} \Leftrightarrow 4^{2 \sin x} = 4^{-2 \sin 2x} \Leftrightarrow 2 \sin x = -2 \sin 2x.$$

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то уравнение примет вид:

$$2 \sin x = -4 \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x (2 + 4 \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$,

с помощью тригонометрической окружности. Получим значения:

$$x = 2\pi; \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}; \quad x = 3\pi; \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $2\pi; \frac{8\pi}{3}; 3\pi; \frac{10\pi}{3}.$

Ответ:

ОТВЕТ: а) $\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б) $2\pi; \frac{8\pi}{3}; 3\pi; \frac{10\pi}{3}.$

14

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$. Четырёхугольник $AMKN$ - равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что точка N - середина ребра BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 12, а высота призмы равна 2.

Ответ: **Решение.**

а) Пусть отрезки MF и KE - высоты призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

Тогда отрезок FE параллелен и равен отрезку MK , а значит, параллелен отрезку AN и равен $\frac{2}{3}AN$.

Следовательно, треугольники FBE и ABN подобны с коэффициентом $\frac{2}{3}$.

Значит, $BN = \frac{3}{2}BE = \frac{3}{2}B_1K = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.

Следовательно, точка N - середина BC .

б) Так как объём призмы равен 12, а её высота равна 2, площадь параллелограмма $ABCD = 6$.

Прямоугольные треугольники AFM и NEK равны по катету и гипотенузе, значит, $AF = EN$.

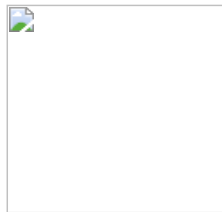
Тогда ABN равнобедренный треугольник с основанием $AN = 3$.

Площадь этого треугольника равна 1,5.

Значит, его высота h , проведённая из вершины B , равна 1, а высота трапеции $AMKN$ равна

$$\sqrt{BB_1^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{3}.$$

Средняя линия трапеции равна $\frac{5}{2}$, а значит, её площадь равна $\frac{5\sqrt{37}}{6}$.



Ответ:

б) $\frac{5\sqrt{37}}{6}$.

15

Решите неравенство $2x - 5 > 7$

Ответ: **Решение.**

$$2x - 5 > 7 \Leftrightarrow 2x > 12 \Leftrightarrow x > 6 \Leftrightarrow x \in (6; +\infty).$$

Ответ: $(6; +\infty)$.

Ответ:

ОТВЕТ: $(6; \infty)$.

В июле 2026 года Николай планирует открыть накопительный счёт на три года. Его условия таковы:

- 1 июля 2026 года Николай помещает на счёт 488 000 рублей;
- 30 июня каждого года сумма на счёте увеличивается на 25% по сравнению с суммой, находящейся на счёте 29 июня;
- 1 июля 2027, 2028 и 2029 годов Николай снимет со счёта некоторую одну и ту же сумму денег;
- 1 июля 2029 года остаток на счёте должен оказаться равным 0 рублей.

Найдите сумму, которую Николай должен снимать со счёта каждый год.

Ответ: **Решение.**

$A = 488\,000$ рублей сумма которую положил Николай на счёт. Через год сумма на счёте увеличивается на 25%, то есть в $\frac{100 + 25}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = t$ раз.

1 июля 2027, 2028 и 2029 годов со вклада снимают по x рублей.

| Год | Сумма на счёте после начисления процентов (руб) | Сумма которую сняли со счёта (руб) | Остаток на счёте после снятия (руб) |
|-----|---|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | At | x | $At - x$ |
| 2 | $(At - x)t$ | x | $(At - x)t - x$ |
| 3 | $((At - x)t - x)t$ | x | $((At - x)t - x)t - x$ |

Так как 1 июля 2029 года остаток на счёте должен оказаться равным 0 рублей, то:

$$((At - x)t - x)t - x = 0 \Leftrightarrow At^3 - xt^2 - xt - x = 0 \Leftrightarrow At^3 = x(t^2 + t + 1)$$

$$x = \frac{A \cdot t^3}{t^2 + t + 1} = \frac{488000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} + 1} = \frac{488000 \cdot 5^3}{4^3} \cdot \frac{4^2}{5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2} =$$

$$= \frac{488000 \cdot 125}{4 \cdot 61} = \frac{122000 \cdot 125}{61} = 250000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 250 000 рублей.

Ответ:

ОТВЕТ: 250 000 рублей.

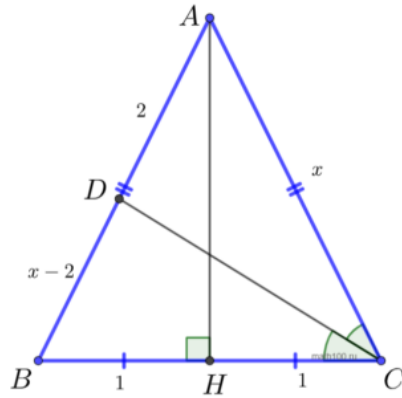
17

Биссектриса CD угла ACB при основании равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) делит сторону AB так, что $AD = BC = 2$.

а) Докажите, что $CD = BC$.

б) Найдите площадь треугольника ABC .

Ответ: **Решение.**



а) Пусть $AB = AC = x$, тогда $BD = x - 2$. По свойству биссектрисы CD :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{5}; \quad x_2 = 1 - \sqrt{5}, \text{ где } x_2 < 0 \text{ не подходит.}$$

Найдём длину биссектрисы CD :

$$CD = \sqrt{AC \cdot BC - AD \cdot BD} = \sqrt{2x - 2x + 4} = 2.$$

$CD = 2, BC = 2 \Leftrightarrow CD = BC$. Что и требовалось доказать.

б) По теореме Пифагора из треугольника AHC найдём AH :

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 1} = \sqrt{2\sqrt{5} + 5}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{2\sqrt{5} + 5}.$$

Ответ: $\sqrt{2\sqrt{5} + 5}$.

Ответ:

ОТВЕТ: $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

Решите уравнение при всех значениях параметра a : $a^2x - 5a = 9x - 15$.

Ответ: **Решение.**

$$a^2x - 5a = 9x - 15 \Leftrightarrow a^2x - 9x = 5a - 15 \Leftrightarrow (a^2 - 9)x = 5a - 15.$$

$$a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ a = 3. \end{cases}$$

Если $a = -3$, то уравнение примет вид: $0 \cdot x = -30$, то есть оно не имеет решений.

Если $a = 3$, то уравнение примет вид: $0 \cdot x = 0$, то есть $x \in R$.

$$\text{Если } a \neq \pm 3, \text{ то: } x = \frac{5(a-3)}{(a-3)(a+3)} = \frac{5}{a+3}.$$

ОТВЕТ: нет решений при $a = -3$; $x \in R$ при $a = 3$; $x = \frac{5}{a+3}$ при $a \neq \pm 3$.

Ответ:

ОТВЕТ: нет решений при $a = -3$; $x \in R$ при $a = 3$; $x = \frac{5}{a+3}$ при $a \neq \pm 3$.

На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных на карточках цифр трёхзначное число A . Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число B и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трёх карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число C (возможно, то же самое, что и Петя).

- а) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если $A < 150$?
- б) Может ли быть верным равенство $A = B + C$, если числа B и C делятся на 3?
- в) Найдите наибольшее число A , для которого может быть верным равенство $A = B + C$.

Ответ: **Решение.**

а) Если $A = 109$, $B = 90$ и $C = 19$, то $A < 150$ и равенство $A = B + C$ верно.

б) Заметим, что если верно равенство $A = B + C$, то одна из цифр, написанных на карточках, - это 1, поскольку сумма двух двузначных чисел не превосходит 198.

Если числа B и C делятся на 3, то число A тоже делится на 3. Значит, на карточке, которую не взял Петя, написана цифра 0, 3, 6 или 9.

Таким образом, на одной из карточек, выбранной Петей, написана цифра 1.

Следовательно, число B равно 12, 15, 18, 21, 51 или 81. Аналогично число C тоже равно одному из этих чисел.

Если первая цифра одного из чисел B и C равна 1, то $B + C \leq 18 + 81 = 99$. Следовательно, вторая цифра каждого из чисел B и C равна 1. Тогда последняя цифра числа A равна 2. Значит, на карточках написаны цифры 1, 2 и одна из цифр 0, 3, 6 или 9.

Таким образом, $B = C = 21$, а в этом случае сумма $B + C$ - двузначное число. Значит, если числа B и C делятся на 3, то равенство $A = B + C$ не может быть верным.

в) Если $A = 189$, $B = 98$ и $C = 91$, то равенство $A = B + C$ верно.

Предположим, что $A > 189$ и равенство $A = B + C$ верно. Тогда на карточках написаны цифры 1, 9 и ещё одна цифра u .

Если первая цифра одного из чисел B и C не равна 9, то $B + C \leq 89 + 99 = 188$. Следовательно, каждое из чисел B и C равно 91 или $90 + u$. Сумма двух таких чисел равна 182, $181 + u$ или $180 + 2u$. С другой стороны, $A = 190 + u$. Значит, равенство $A = B + C$ не может быть верным.

Таким образом, число A не может быть больше 189. Следовательно, наибольшее число A , для которого может быть верным равенство $A = B + C$, это число 189.

Ответ:

а) да; б) нет; в) 189
