

## Тренировочная работа в формате ОГЭ по МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС

Дата: \_\_\_\_ 2023 г.

Вариант №: \_\_\_\_

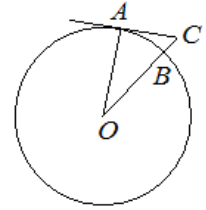
Выполнена: ФИО \_\_\_\_\_

### Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух частей, включающих в себя 25 заданий. Часть 1 содержит 19 заданий, часть 2 содержит 6 заданий с развёрнутым ответом. На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Ответы к заданиям 7 и 13 запишите в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа. Для остальных заданий части 1 ответом является число или последовательность цифр. Если получилась обыкновенная дробь, ответ запишите в виде десятичной. Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на отдельном листе бумаги. Задания можно выполнять в любом порядке. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер. Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у вас останется время, вы сможете вернуться к пропущенным заданиям. При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.** Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа. При выполнении работы вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом КИМ, и линейкой. Баллы, полученные вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов. После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

- 1 Найдите угол  $ACO$ , если его сторона  $CA$  касается окружности с центром  $O$ , отрезок  $CO$  пересекает окружность в точке  $B$  (см. рис.), а дуга  $AB$  окружности, заключённая внутри этого угла, равна  $17^\circ$ . Ответ дайте в градусах.



Ответ:

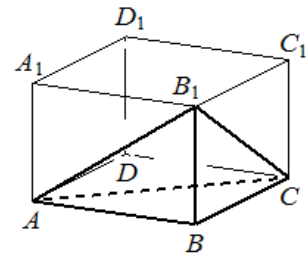
73

- 2 Длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны 3 и 7, а угол между ними равен  $60^\circ$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ:

10,5

- 3 В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известно, что  $AB = 7$ ,  $BC = 6$ ,  $AA_1 = 5$ . Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки  $A, B, C, B_1$ .



Ответ:

35

- 4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 4 из Аргентины, 7 из Бразилии, 5 из Парагвая и 4 из Уругвая. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Бразилии.

Ответ:

0,35

- 5 Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,8. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

Ответ:

0,488

- 6 Найдите корень уравнения  $5^{2-x} = 125$ .

Ответ:

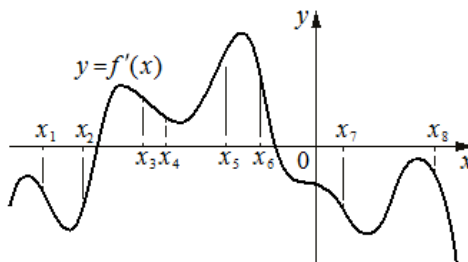
-1

- 7 Найдите значение выражения  $\frac{3 \sin 68^\circ}{\cos 34^\circ \cdot \cos 56^\circ}$ .

Ответ:

6

- 8 На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечено восемь точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ . Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции  $f(x)$ ?



Ответ:

4

- 9 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону  $H(t) = at^2 + bt + H_0$ , где  $H$  — высота столба воды в метрах,  $H_0 = 8$  м — начальный уровень воды,  $a = \frac{1}{72}$  м/мин<sup>2</sup> и  $b = -\frac{2}{3}$  м/мин — постоянные,  $t$  — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. Сколько минут вода будет вытекать из бака?

Ответ:

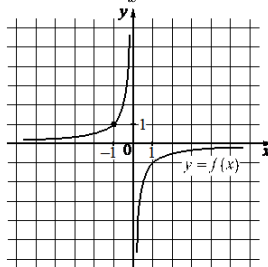
24

- 10 Заказ на изготовление 323 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 2 детали больше второго?

Ответ:

19

- 11 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \frac{k}{x}$ . Найдите значение  $f(10)$ .



Ответ:

-0.1

- 12 Найдите точку максимума функции  $y = x^3 + 16x^2 + 64x + 12$ .

Ответ:

-8

13

а) Решите уравнение  $16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x}$ ;

б) Найдите все корни принадлежащие промежутку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

Ответ:

**Решение.**

а)

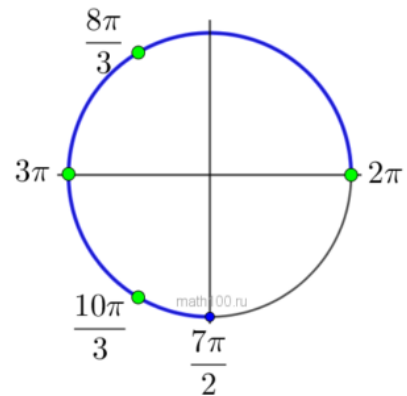
$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x} \Leftrightarrow 4^{2 \sin x} = 4^{-2 \sin 2x} \Leftrightarrow 2 \sin x = -2 \sin 2x.$$

Так как  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , то уравнение примет вид:

$$2 \sin x = -4 \sin x \cos x \Leftrightarrow \sin x (2 + 4 \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ , с помощью тригонометрической окружности. Получим значения:



$$x = 2\pi; \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}; \quad x = 3\pi; \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3}.$$

Ответ: а)  $\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б)  $2\pi; \frac{8\pi}{3}; 3\pi; \frac{10\pi}{3}.$

**Ответ:**

ОТВЕТ: а)  $\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

б)  $2\pi; \frac{8\pi}{3}; 3\pi; \frac{10\pi}{3}.$

- 14 В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . На рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно, причём  $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$ . Четырёхугольник  $AMKN$  - равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что точка  $N$  - середина ребра  $BC$ .

б) Найдите площадь трапеции  $AMKN$ , если объём призмы равен 12, а высота призмы равна 2.

Ответ:

**Решение.**

а) Пусть отрезки  $MF$  и  $KE$  - высоты призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

Тогда отрезок  $FE$  параллелен и равен отрезку  $MK$ , а значит, параллелен отрезку  $AN$  и равен  $\frac{2}{3} AN$ .

Следовательно, треугольники  $FBE$  и  $ABN$  подобны с коэффициентом  $\frac{2}{3}$ .

Значит,  $BN = \frac{3}{2} BE = \frac{3}{2} B_1 K = \frac{1}{2} B_1 C_1 = \frac{1}{2} BC$ .

Следовательно, точка  $N$  - середина  $BC$ .

б) Так как объём призмы равен 12, а её высота равна 2, площадь параллелограмма  $ABCD = 6$ .

Прямоугольные треугольники  $AFM$  и  $NEK$  равны по катету и гипотенузе, значит,  $AF = EN$ .

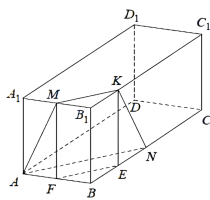
Тогда  $ABN$  равнобедренный треугольник с основанием  $AN = 3$ .

Площадь этого треугольника равна 1,5.

Значит, его высота  $h$ , проведённая из вершины  $B$ , равна 1, а высота трапеции  $AMKN$  равна

$$\sqrt{BB_1^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{3}.$$

Средняя линия трапеции равна  $\frac{5}{2}$ , а значит, её площадь равна  $\frac{5\sqrt{37}}{6}$ .



**Ответ:**

б)  $\frac{5\sqrt{37}}{6}$ .

- 15 Решите неравенство  $2x - 5 > 7$

Ответ:

**Решение.**

$$2x - 5 > 7 \Leftrightarrow 2x > 12 \Leftrightarrow x > 6 \Leftrightarrow x \in (6; +\infty).$$

Ответ:  $(6; +\infty)$ .

**Ответ:**

ОТВЕТ:  $(6; \infty)$ .

**16** В июле 2026 года Николай планирует открыть накопительный счёт на три года. Его условия таковы:

- 1 июля 2026 года Николай помещает на счёт 488 000 рублей;
- 30 июня каждого года сумма на счёте увеличивается на 25% по сравнению с суммой, находящейся на счёте 29 июня;
- 1 июля 2027, 2028 и 2029 годов Николай снимет со счёта некоторую одну и ту же сумму денег;
- 1 июля 2029 года остаток на счёте должен оказаться равным 0 рублей.

Найдите сумму, которую Николай должен снимать со счёта каждый год.

Ответ:

**Решение.**

$A = 488\,000$  рублей сумма которую положил Николай на счёт. Через год сумма на счёте увеличивается на 25%, то есть в  $\frac{100 + 25}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = t$  раз.

1 июля 2027, 2028 и 2029 годов со вклада снимают по  $x$  рублей.

Год	Сумма на счёте после начисления процентов (руб)	Сумма которую сняли со счёта (руб)	Остаток на счёте после снятия (руб)
<b>1</b>	$At$	$x$	$At - x$
<b>2</b>	$(At - x)t$	$x$	$(At - x)t - x$
<b>3</b>	$((At - x)t - x)t$	$x$	$((At - x)t - x)t - x$

Так как 1 июля 2029 года остаток на счёте должен оказаться равным 0 рублей, то:

$$((At - x)t - x)t - x = 0 \Leftrightarrow At^3 - xt^2 - xt - x = 0 \Leftrightarrow At^3 = x(t^2 + t + 1)$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{A \cdot t^3}{t^2 + t + 1} = \frac{488000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} + 1} = \frac{488000 \cdot 5^3}{4^3} \cdot \frac{4^2}{5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2} = \\&= \frac{488000 \cdot 125}{4 \cdot 61} = \frac{122000 \cdot 125}{61} = 250000 \text{ рублей.}\end{aligned}$$

Ответ: 250 000 рублей.

**Ответ:**

ОТВЕТ: 250 000 рублей.

- 17 Биссектриса  $CD$  угла  $ACB$  при основании равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) делит сторону  $AB$  так, что  $AD = BC = 2$ .

а) Докажите, что  $CD = BC$ .

б) Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

Ответ:

**Решение.**

а) Пусть  $AB = AC = x$ , тогда  $BD = x - 2$ . По свойству биссектрисы  $CD$ :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 + \sqrt{5}; \quad x_2 = 1 - \sqrt{5}, \text{ где } x_2 < 0 \text{ не подходит.}$$

Найдём длину биссектрисы  $CD$ :

$$CD = \sqrt{AC \cdot BC - AD \cdot BD} = \sqrt{2x - 2x + 4} = 2.$$

$CD = 2, BC = 2 \Leftrightarrow CD = BC$ . Что и требовалось доказать.

б) По теореме Пифагора из треугольника  $AHC$  найдём  $AH$ :

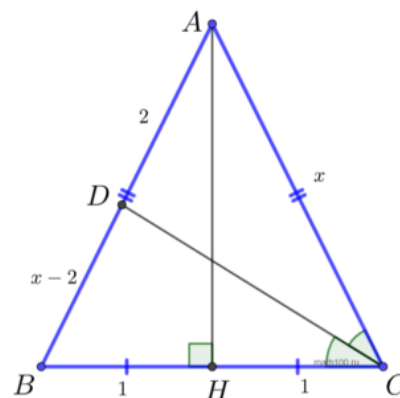
$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 1} = \sqrt{2\sqrt{5} + 5}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{2\sqrt{5} + 5}.$$

Ответ:  $\sqrt{2\sqrt{5} + 5}$ .

**Ответ:**

ОТВЕТ:  $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ .



- 18 Решите уравнение при всех значениях параметра  $a$ :  $a^2x - 5a = 9x - 15$ .

Ответ:

**Решение.**

$$a^2x - 5a = 9x - 15 \Leftrightarrow a^2x - 9x = 5a - 15 \Leftrightarrow (a^2 - 9)x = 5a - 15.$$

$$a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ a = 3. \end{cases}$$

Если  $a = -3$ , то уравнение примет вид:  $0 \cdot x = -30$ , то есть оно не имеет решений.

Если  $a = 3$ , то уравнение примет вид:  $0 \cdot x = 0$ , то есть  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Если } a \neq \pm 3, \text{ то: } x = \frac{5(a-3)}{(a-3)(a+3)} = \frac{5}{a+3}.$$

ОТВЕТ: нет решений при  $a = -3$ ;  $x \in \mathbb{R}$  при  $a = 3$ ;  $x = \frac{5}{a+3}$  при  $a \neq \pm 3$ .

**Ответ:**

ОТВЕТ: нет решений при  $a = -3$ ;  $x \in \mathbb{R}$  при  $a = 3$ ;  $x = \frac{5}{a+3}$  при  $a \neq \pm 3$ .

На столе лежит три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных на карточках цифр трёхзначное число  $A$ . Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число  $B$  и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих трёх карточек и составил из написанных на них цифр двузначное число  $C$  (возможно, то же самое, что и Петя).

- а) Может ли быть верным равенство  $A = B + C$ , если  $A < 150$ ?
- б) Может ли быть верным равенство  $A = B + C$ , если числа  $B$  и  $C$  делятся на 3?
- в) Найдите наибольшее число  $A$ , для которого может быть верным равенство  $A = B + C$ .

Ответ:

**Решение.**

а) Если  $A = 109$ ,  $B = 90$  и  $C = 19$ , то  $A < 150$  и равенство  $A = B + C$  верно.

б) Заметим, что если верно равенство  $A = B + C$ , то одна из цифр, написанных на карточках, - это 1, поскольку сумма двух двузначных чисел не превосходит 198.

Если числа  $B$  и  $C$  делятся на 3, то число  $A$  тоже делится на 3. Значит, на карточке, которую не взял Петя, написана цифра 0, 3, 6 или 9.

Таким образом, на одной из карточек, выбранной Петей, написана цифра 1.

Следовательно, число  $B$  равно 12, 15, 18, 21, 51 или 81. Аналогично число  $C$  тоже равно одному из этих чисел.

Если первая цифра одного из чисел  $B$  и  $C$  равна 1, то  $B + C \leq 18 + 81 = 99$ . Следовательно, вторая цифра каждого из чисел  $B$  и  $C$  равна 1. Тогда последняя цифра числа  $A$  равна 2. Значит, на карточках написаны цифры 1, 2 и одна из цифр 0, 3, 6 или 9.

Таким образом,  $B = C = 21$ , а в этом случае сумма  $B + C$  - двузначное число. Значит, если числа  $B$  и  $C$  делятся на 3, то равенство  $A = B + C$  не может быть верным.

в) Если  $A = 189$ ,  $B = 98$  и  $C = 91$ , то равенство  $A = B + C$  верно.

Предположим, что  $A > 189$  и равенство  $A = B + C$  верно. Тогда на карточках написаны цифры 1, 9 и ещё одна цифра  $u$ .

Если первая цифра одного из чисел  $B$  и  $C$  не равна 9, то  $B + C \leq 89 + 99 = 188$ . Следовательно, каждое из чисел  $B$  и  $C$  равно 91 или  $90 + u$ . Сумма двух таких чисел равна 182,  $181 + u$  или  $180 + 2u$ . С другой стороны,  $A = 190 + u$ . Значит, равенство  $A = B + C$  не может быть верным.

Таким образом, число  $A$  не может быть больше 189. Следовательно, наибольшее число  $A$ , для которого может быть верным равенство  $A = B + C$ , это число 189.

**Ответ:**

а) да; б) нет; в) 189

---