

Ответы и решения

1 423

2 17

3 20

4 80

5 1272

6 0,8

7 3

8 78

9 -9

10 0,93

11 213

12 5

13 1

14 5

15 0,55

16 14

17 154

18 1,5

19 3

20 Решение.

$$x^4 = (x - 6)^2 \Leftrightarrow x^4 - (x - 6)^2 = 0.$$

Воспользуемся формулой сокращённого умножения: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$\begin{aligned} x^4 - (x - 6)^2 = 0 &\Leftrightarrow (x^2)^2 - (x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - (x - 6))(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 6 = 0, \\ x^2 + x - 6 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим первое уравнение последней совокупности:

$$x^2 - x + 6 = 0; \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0.$$

Так как дискриминант меньше нуля, то это уравнение не имеет решений.

Рассмотрим второе уравнение последней совокупности:

$$x^2 + x - 6 = 0; \quad D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25; \quad \begin{cases} x = \frac{-1 - 5}{2} = -3, \\ x = \frac{-1 + 5}{2} = 2. \end{cases}$$

Следовательно, исходное уравнение имеет 2 решения: $\begin{cases} x = -3, \\ x = 2. \end{cases}$

Ответ: $-3; 2$.

21 Решение.

Пусть первая труба пропускает x литров в минуту, тогда первая пропускает $x + 16$ литров в минуту.

	v (л/мин)	t (мин)	A (л)
Первая труба	x	$\frac{105}{x}$	105
Вторая труба	$x + 16$	$\frac{105}{x + 16}$	105

Первая труба тратит на 4 минуты больше чем вторая. Следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{105}{x} - \frac{105}{x + 16} = 4 &\Leftrightarrow \frac{105(x + 16) - 105x}{x(x + 16)} = 4 \Leftrightarrow \frac{105x + 1680 - 105x}{x(x + 16)} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 16x = 420, \\ x + 16 \neq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 16x - 420 = 0, \\ x \neq -16, \\ x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим первое уравнение последней системы:

$$x^2 + 16x - 420 = 0; \quad D = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420) = 1936; \quad \begin{cases} x = \frac{-16 + 44}{2} = 14, \\ x = \frac{-16 - 44}{2} = -30. \end{cases}$$

Корень $x = -30$ не подходит по смыслу задачи, так как $x > 0$. Поэтому вторая труба пропускает 14 литров в минуту.

Ответ: 14 л/мин.

22 Решение.

Для построения графика заданной функции воспользуемся тем, что:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда заданная функция примет вид:

$$y = \begin{cases} x \cdot x + x - 5x & \text{при } x \geq 0, \\ x \cdot (-x) - x - 5x & \text{при } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 - 6x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, получена кусочная функция.

Графиком квадратичной функции $y = -x^2 - 6x$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём вершину параболы:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot (-1)} = -3.$$

Для построения графика $y = -x^2 - 6x$ при $x < 0$ возьмём значения $x = -6, x = -5, x = -3, x = -1$ и $x = 0$:

$$y(-6) = -(-6)^2 - 6 \cdot (-6) = -36 + 36 = 0;$$

$$y(-5) = -(-5)^2 - 6 \cdot (-5) = -25 + 30 = 5;$$

$$y(-3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) = -9 + 18 = 9;$$

$$y(-1) = -(-1)^2 - 6 \cdot (-1) = -1 + 6 = 5;$$

$$y(0) = -0^2 - 6 \cdot 0 = 0.$$

x	-6	-5	-3	-1	0
y	0	5	9	5	0

Графиком квадратичной функции $y = x^2 - 4x$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём вершину параболы:

$$x_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2.$$

Для построения графика $y = x^2 - 4x$ при $x \geq 0$ возьмём значения $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ и $x = 4$.

$$y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0;$$

$$y(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3;$$

$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4;$$

$$y(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3;$$

$$y(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0.$$

x	0	1	2	3	4
y	0	-3	-4	-3	0

Построим график (см. рис. 1). Точка $(0; 0)$ является точкой стыка двух парабол.

Изобразим графики горизонтальных прямых $y = m$, при которых они будут иметь с графиком построенной функции ровно две общие точки (см. рис. 2). Точки пересечения прямых $y = m$ с графиком заданной функции отмечены красным цветом.

Подходят:

случай (1): прямая $y = -4$, проходящая через вершину $(2; -4)$ параболы, направленной ветвями вверх;

случай (2): прямая $y = 9$, проходящая через вершину $(-3; 9)$ параболы, направленной ветвями вниз.

Следовательно, при $m = -4$ и $m = 9$ прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $-4; 9$.

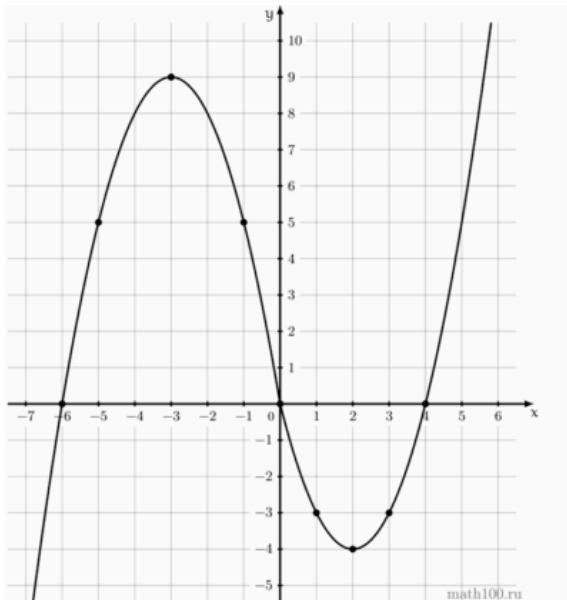


Рис. 1

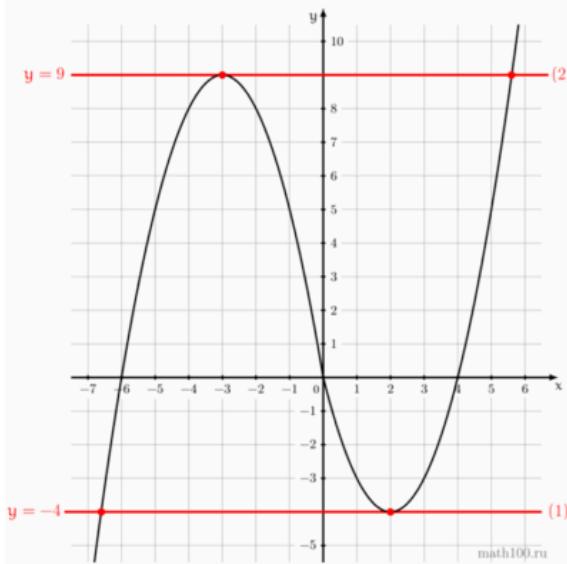
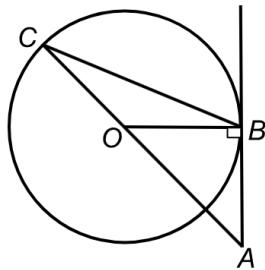


Рис. 2

23

Решение.

Введем буквенные обозначения, как показано на рисунке ниже.



Проведем радиус к точке касания B .

Касательной к окружности является прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку.

Следовательно,

$$OB \perp AB.$$

ABO — прямоугольный треугольник. Из условия нам известно, что $AB = 4$, а диаметр окружности равен 8,4, следовательно,

$$OB = \frac{1}{2} \cdot 8,4 = 4,2.$$

Тогда по теореме Пифагора получим:

$$AO^2 = AB^2 + BO^2,$$

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2},$$

$$AO = \sqrt{4^2 + 4,2^2} =$$

$$= \sqrt{33,64} = 5,8.$$

Следовательно,

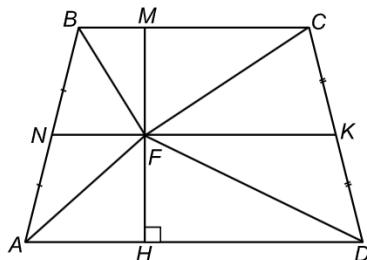
$$AC = CO + AO,$$

$$AC = 4,2 + 5,8 = 10.$$

24

Решение.

Введем буквенные обозначения, как показано на рисунке ниже.



Проведем высоту от верхнего основания трапеции к нижнему через точку F .

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S = \frac{1}{2} MH(BC + AD).$$

Значит, половина площади трапеции равна:

$$\frac{1}{4} MH(BC + AD).$$

Теорема Фалеса гласит, что если параллельные прямые (в данном случае $BC \parallel NK \parallel AD$) пересекают стороны угла и на одной из сторон угла отсекают равные отрезки, то и на другой его стороне они отсекают равные отрезки. Следовательно, $MF = FH$.

Рассмотрим треугольник BCF . Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Тогда получим:

$$S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MF.$$

Рассмотрим треугольник AFD . Нам известно, что $MF = FH$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{\triangle AFD} &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FH = \\ &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MF. \end{aligned}$$

Значит, сумма площадей треугольников BCF и AFD равна:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot BC \cdot MF + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MF = \\ &= \frac{1}{2} MF(BC + AD). \end{aligned}$$

Поскольку $MF = \frac{1}{2} MH$, получим:

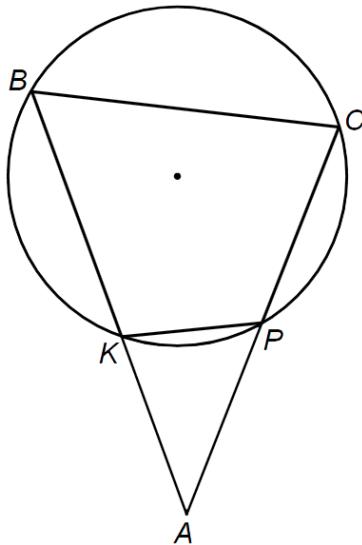
$$\frac{1}{4} MH(BC + AD).$$

Следовательно, сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.

25

Решение.

Введем буквенные обозначения, как показано на рисунке ниже.



Поскольку четырехугольник $KBCP$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов равна 180° : $\angle BKP + \angle BCP = 180^\circ$ и $\angle KBC + \angle KPC = 180^\circ$.

Углы называют **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие лежат на одной прямой. Сумма смежных углов равна 180° .

Углы BKP и PKA — смежные и в сумме составляют 180 градусов: $\angle BKP + \angle PKA = 180^\circ$.

Поскольку углы BKP и BCP в сумме равны 180 градусов, и углы BKP и PKA в сумме равны 180 градусов, имеем равенство:

$$\begin{aligned}\angle BKP + \angle BCP &= \\ &= \angle BKP + \angle PKA, \\ \angle BCP &= \angle PKA.\end{aligned}$$

Рассмотрим треугольники AKP и ABC .

Согласно первому признаку подобия, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

У треугольников AKP и ABC угол A — общий, и как мы ранее выяснили, $\angle BCP = \angle PKA$. Следовательно, они подобные, из чего следует, что:

$$\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{BA} = \frac{AK}{AC}.$$

Преобразуем равенство

$$\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC},$$

$$KP \cdot AC = AK \cdot BC.$$

Поделив обе части уравнения на BC , получим:

$$KP \cdot \frac{AC}{BC} = AK.$$

Нам известно, что $AK = 6$, $\frac{AC}{BC} = 1,5$. Тогда получим:

$$KP \cdot 1,5 = 6,$$

$$KP = \frac{6}{1,5} = 4.$$