Ответы и решения

Ответом к каждому из заданий 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 73

2 10,5

3 35

4 0,35

5 0,488

6 -1

7 6

8 4

9 24

10 19

11 -0.1

12 -8

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 **Решение.**

а)

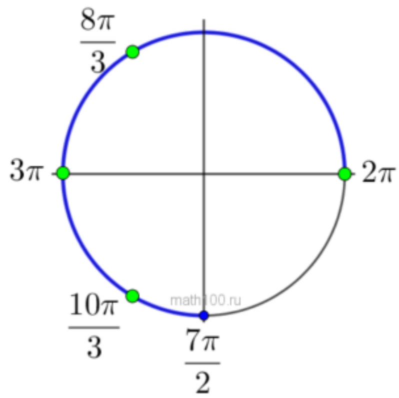
$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2\sin 2x} \quad \Leftrightarrow \quad 4^{2\sin x} = 4^{-2\sin 2x} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x = -2\sin 2x.$$

Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, то уравнение примет вид:

$$2\sin x = -4\sin x\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\,(2 + 4\cos x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in Z.$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$, с помощью тригонометрической окружности. Получим значения:



$$x = 2\pi; \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}; \quad x = 3\pi; \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pi k, \ \ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ \ k \in Z$;

б) $2\pi; \ \dfrac{8\pi}{3}; \ 3\pi; \ \dfrac{10\pi}{3}$.

14 **Решение.**

а) Пусть отрезки MF и KE - высоты призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$

Тогда отрезок FE параллелен и равен отрезку MK, а значит, параллелен отрезку AN и равен $\frac{2}{3}AN$.

Следовательно, треугольники FBE и ABN подобны с коэффициентом $\frac{2}{3}$.

Значит, $BN = \frac{3}{2}BE = \frac{3}{2}B_1K = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.

Следовательно, точка N - середина BC.

б) Так как объём призмы равен 12, а её высота равна 2, площадь параллелограмма $ABCD$ = 6.

Прямоугольные треугольники AFM и NEK равны по катету и гипотенузе, значит, $AF = EN$.

Тогда ABN равнобедренный треугольник с основанием $AN = 3$.

Площадь этого треугольника равна 1,5 .

Значит, его высота h, проведённая из вершины B, равна 1 , а высота трапеции $AMKN$ равна

$\sqrt{BB_1^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{3}$.

Средняя линия трапеции равна $\frac{5}{2}$, а значит, её площадь равна $\frac{5\sqrt{37}}{6}$.

Ответ:

б) $\frac{5\sqrt{37}}{6}$.

15 **Решение.**

$2x - 5 > 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 12 \quad \Leftrightarrow \quad x > 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (6; +\infty)$.

Ответ: $(6;\ \infty)$.

16 **Решение.**

$A = 488\,000$ рублей сумма которую положил Николай на счёт. Через год сумма на счёте увеличивается на 25%, то есть в $\frac{100+25}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = t$ раз.

1 июля 2027, 2028 и 2029 годов со вклада снимают по x рублей.

Год	Сумма на счёте после начисления процентов (руб)	Сумма которую сняли со счёта (руб)	Остаток на счёте после снятия (руб)
1	At	x	$At - x$
2	$(At - x)\,t$	x	$(At - x)\,t - x$
3	$((At - x)\,t - x)\,t$	x	$((At - x)\,t - x)\,t - x$

Так как 1 июля 2029 года остаток на счёте должен оказаться равным 0 рублей, то:

$$((At - x)\,t - x)\,t - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad At^3 - xt^2 - xt - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A\,t^3 = x\left(t^2 + t + 1\right)$$

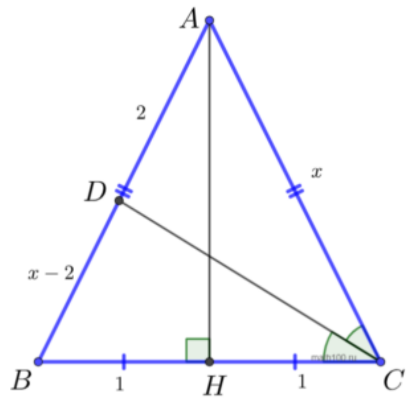
$$x = \frac{A \cdot t^3}{t^2 + t + 1} = \frac{488000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} + 1} = \frac{488000 \cdot 5^3}{4^3} \cdot \frac{4^2}{5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2} =$$

$$= \frac{488000 \cdot 125}{4 \cdot 61} = \frac{122000 \cdot 125}{61} = 250000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 250 000 рублей.

17 **Решение.**

а) Пусть $AB = AC = x$, тогда $BD = x — 2$. По свойству биссектрисы CD:



$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x — 2} = \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 — 2x — 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = 1 + \sqrt{5}; \quad x_2 = 1 — \sqrt{5},$$ где $x_2 < 0$ не подходит.

Найдём длину биссектрисы CD:

$$CD = \sqrt{AC \cdot BC — AD \cdot BD} = \sqrt{2x — 2x + 4} = 2.$$

$CD = 2$, $BC = 2 \Leftrightarrow CD = BC$. Что и требовалось доказать.

б) По теореме Пифагора из треугольника AHC найдём AH:

$$AH = \sqrt{AC^2 — CH^2} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 — 1} = \sqrt{2\sqrt{5} + 5}.$$

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{2\sqrt{5} + 5}.$$

Ответ: $\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

18 **Решение.**

$$a^2x - 5a = 9x - 15 \quad \Leftrightarrow \quad a^2x - 9x = 5a - 15 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a^2 - 9\right)x = 5a - 15.$$

$$a^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = -3, \\ a = 3. \end{array}\right.$$

Если $a = -3$, то уравнение примет вид: $0 \cdot x = -30$, то есть оно не имеет решений.

Если $a = 3$, то уравнение примет вид: $0 \cdot x = 0$, то есть $x \in R$.

Если $a \neq \pm 3$, то: $x = \dfrac{5\,(a-3)}{(a-3)\,(a+3)} = \dfrac{5}{a+3}$.

Ответ: нет решений при $a = -3$; $x \in R$ при $a = 3$; $x = \dfrac{5}{a+3}$ при $a \neq \pm 3$.

19 **Решение.**

а) Если $A = 109, B = 90$ и $C = 19$, то $A < 150$ и равенство $A = B + C$ верно.

б) Заметим, что если верно равенство $A = B + C$, то одна из цифр, написанных на карточках, - это 1, поскольку сумма двух двузначных чисел не превосходит 198.
Если числа B и C делятся на 3, то число A тоже делится на 3. Значит, на карточке, которую не взял Петя, написана цифра 0, 3, 6 или 9.
Таким образом, на одной из карточек, выбранной Петей, написана цифра 1.
Следовательно, число B равно $12, 15, 18, 21, 51$ или 81 . Аналогично число C тоже равно одному из этих чисел.

Если первая цифра одного из чисел B и C равна 1, то $B + C \leq 18 + 81 = 99$. Следовательно, вторая цифра каждого из чисел B и C равна 1. Тогда последняя цифра числа A равна 2. Значит, на карточках написаны цифры 1,2 и одна из цифр $0, 3, 6$ или 9.

Таким образом, $B = C = 21$, а в этом случае сумма $B + C$ - двузначное число. Значит, если числа B и C делятся на 3, то равенство $A = B + C$ не может быть верным.

в) Если $A = 189, B = 98$ и $C = 91$, то равенство $A = B + C$ верно.

Предположим, что $A > 189$ и равенство $A = B + C$ верно. Тогда на карточках написаны цифры 1,9 и ещё одна цифра u
Если первая цифра одного из чисел B и C не равна 9, то $B + C \leq 89 + 99 = 188$. Следовательно, каждое из чисел B и C равно 91 или $90 + u$. Сумма двух таких чисел равна 182, $181 + u$ или $180 + 2u$. С другой стороны, $A = 190 + u$. Значит, равенство $A = B + C$ не может быть верным.

Таким образом, число A не может быть больше 189. Следовательно, наибольшее число A, для которого может быть верным равенство $A = B + C$, это число 189.

Ответ:

а) да; б) нет; в) 189