

INFORME PROBLEMA 1

ESEIAAT

Estructures Aeroespacials



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

**Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa**

Autores:

Torrente Martí, Albert

Xu, Changxiang

3 de marzo de 2024

Índice

1. Introducción	2
2. Apartado 1	4
2.1. Gráfica de la estructura del marco deformado y el estado de tensión de cada barra. .	4
2.2. Fuerzas de reacción en los nodos prescritos.	6
3. Apartado 2	8
3.1. Obtener las coordenadas nodales y las matrices de conectividades para el modelo de barras de las dos ruedas.	8
3.2. Gráfica de la estructura deformada y estado tensional de cada barra.	9
3.3. Evaluación del riesgo de pandeo de los radios.	11
3.4. ¿Cuánta precarga (tensión inicial) en los radios se requiere para garantizar un factor de seguridad (para pandeo) de al menos 2,5?	12

1. Introducción

Este problema está dividido en dos apartados diferenciados. En el primero se nos pedía centrarnos en la estructura de la bicicleta sin tener en cuenta la estructura de las ruedas.

Se nos hacía saber que el ciclista tiene una masa de 75 kg, provocando una fuerza vertical, peso repartida entre los nodos 2,4 i 5 equivalentes de $0.5W$, $0.45W$ y $0.05W$ respectivamente, y que la bicicleta se mueve a una velocidad de 2.5 m/s^2 lo cual provoca una fuerza horizontal sobre el nodo 5. Además, se conocían algunas de las propiedades físicas de los materiales usados como el módulo de Young o la superficie transversal 1

En este primer apartado solo se nos pedía que mostrásemos la estructura deformada junto al estado tensional de las barras que conformaban la estructura y las reacciones de los nodos. Cabe destacar que en este apartado se nos pedía que calculásemos menos cosas debido a que se tuvo que hacer de cero todas las funciones para llegar al resultado final: vector de desplazamientos de los nodos, reacciones nodos y tensiones en las barras.

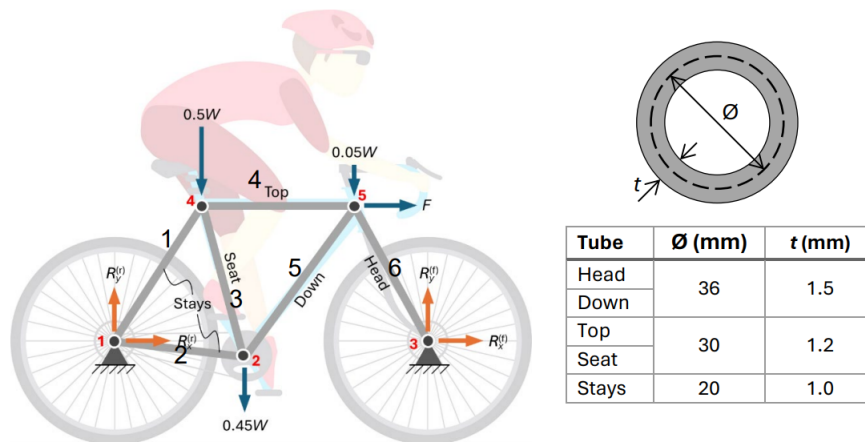


Figura 1: Esquema estructura bicicleta

En el segundo apartado, se nos pedía que se centrara en la estructura de las ruedas la cual se puede ver la figura 2 como se han modelado con dos tipos de barra diferentes. En este apartado se pedía calcular las posiciones nodales de la estructura junto con la matriz de conectividad de las barras y mostrar el estado tensional de la estructura junto con la estructura deformada.

Una vez realizado este análisis se pedía evaluar si había alguna barra a compresión que hubiese peligro de pandear y de ser así, calcular la precarga mínima para que dichas barras tuviesen como mínimo un factor de seguridad de 2.5 frente al pandeo.

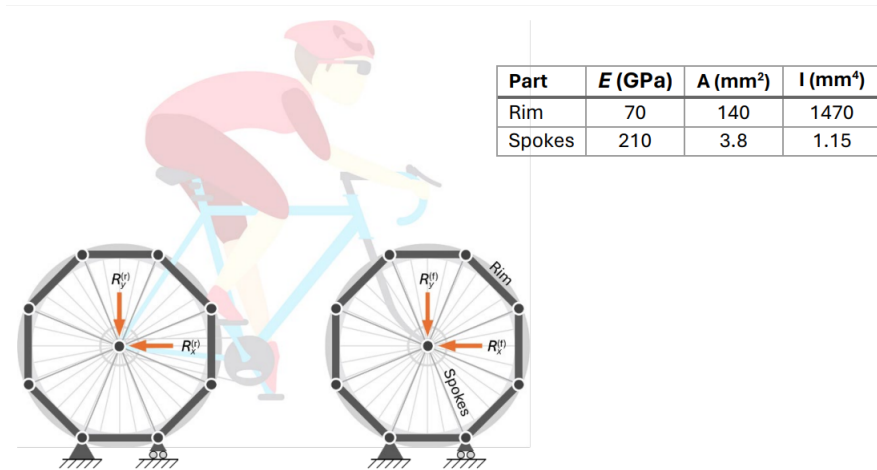


Figura 2: Esquema estructura ruedas.

2. Apartado 1

En este apartado, se centra en el análisis de la estructura de la bicicleta gracias al programa que hemos hecho a *Matlab*.

2.1. Gráfica de la estructura del marco deformado y el estado de tensión de cada barra.

Después de tener todas las funciones bien definidas, ahora solo falta poner los datos iniciales de problema, es decir, los datos necesarios para que el programa pueda funcionar y representar la gráfica pedida.

Primero de todo, como este problema es de 2D, los grados de libertad corresponden a 2. Aparte de esto, otros parámetros como coordenadas de los nudos, número total de los nudos y los grados de libertad ya están dados inicialmente o calculados automáticamente.

Segundo, sobre la matriz de conectividad nodal, hemos numerado y ordenado las barras como se muestra en la figura 3, de esta forma en la matriz de conectividad nodal, salen de manera ordenada las barras con los nodos que tocan (figura 4).

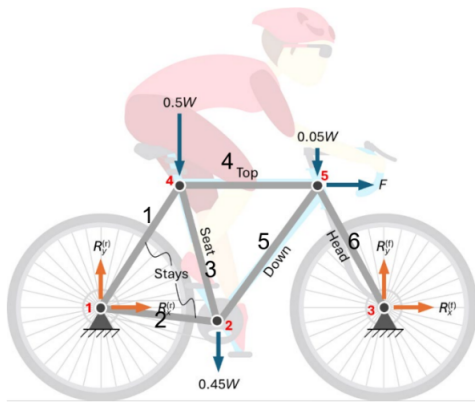


Figura 3: Esquema numeración de las barras.

```
% Nodal connectivities matrix
Tn = [% column_1 = element node 1 , column_2 = element node 2, ...
1 4 %barra 1
1 2 %barra 2
2 4 %barra 3
4 5 %barra 4
2 5 %barra 5
3 5 %barra 6
];
```

Figura 4: La matriz de conectividad nodal.

De seguidas, con la matriz anterior dada, nos crea la matriz de conectividades de grados de libertad con la función *connectDOF(data,Tn)* para indicar las posibles direcciones de ejes en cada nodo. En la matriz de propiedades de material (figura 5), se muestran informaciones relevantes como módulo de *Young* (en *MPa*), área de la sección (en *mm²*) y precarga de diferentes materiales (en *mm⁴*) involucrados de acuerdo con los datos del enunciado. Una vez definida esta matriz de material, con el fin de poder asignar estas propiedades de material al elemento correspondiente, se necesita también una matriz de conectividad de material tal y como se muestra en la figura 6.

```
% Material properties matrix
m = [% Each column corresponds to a material property (area, Young's modulus, etc.)
71*10^3 pi*((18.75)^2-(17.25)^2) 0
71*10^3 pi*((15.6)^2-(14.4)^2) 0
71*10^3 pi*((10.5)^2-(9.5)^2) 0
];
```

Figura 5: La matriz de propiedades de material.

```
% Material connectivities matrix
Tm = [% Each row is the material (row number in 'm') associated to each element
      3
      3
      2
      2
      1
      1
];
```

Figura 6: La matriz de conectividad de material.

Para que el problema quede bien definido, también se necesita introducir las condiciones de contorno, una de ellas es que el nodo 1 y 3 están fijos, es decir, están restringidos de cualquier movimiento tanto en eje x (indicado con 1) como en eje y (indicado con 2). Todo esto está guardado en la matriz de nodos fijos (figura 7).

```
% 1.3 Input boundary conditions
% Fixed nodes matrix
p = [% Each row is a prescribed degree of freedom | column_1 = node, column_2 = direction, column_3 = value of prescribed displacement
      1 1 0
      1 2 0
      3 1 0
      3 2 0
];
```

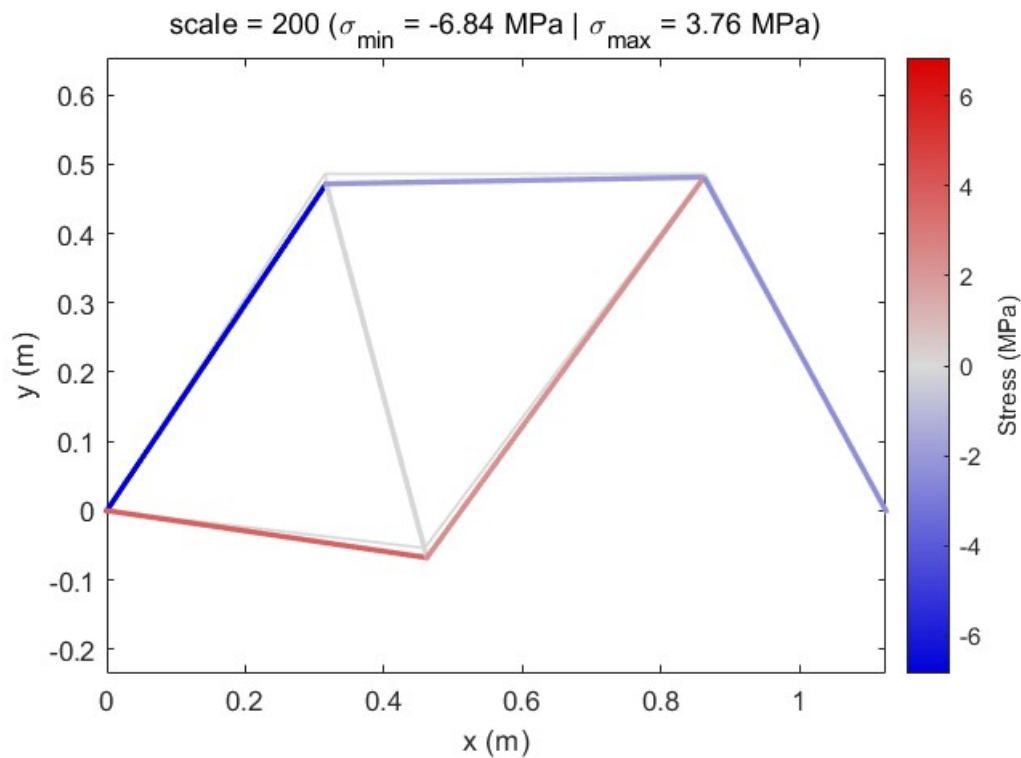
Figura 7: La matriz de nodos fijos, la primera columna indica el nodo, la segunda la dirección y la tercera el desplazamiento

Otra condición necesaria es las fuerzas aplicadas en los nodos, en este caso, según la figura 3, existen tres fuerzas definidas por peso aplicadas a los tres nodos respectivamente y una fuerza para producir la aceleración. Sabemos que el peso viene dado por $P = mg$, siendo g la aceleración estándar debida a la gravedad y la segunda ley de *Newton* nos indica que $F = ma$, siendo m la masa y a la aceleración de bicicleta en este caso, podemos calcular las fuerzas aplicadas (en N) en los nodos correspondientes tal y como se muestra en la columna 3 de la matriz de la figura 8.

```
% Point loads matrix
F = [% Each row is a point force component | column_1 = node, column_2 = direction (1 = x-direction, 2 = y-direction), column_3 = force magnitude
      2 2 -0.45*75*9.81
      4 2 -0.5*75*9.81
      5 2 -0.05*75*9.81
      5 1 75*2.5
];
```

Figura 8: La matriz de cargas puntuales.

Ahora bien, una vez introducidos todos los datos iniciales necesarios, gracias a las funciones de *solver* y de *postprocess*, se ha podido obtener la siguiente gráfica 9 de la estructura del marco deformado y el estado de tensión de cada barra de la estructura principal de la bicicleta.



Como se puede ver en la figura 9, las tres barras superiores están en compresión y la barra 1 (*stays*) es la barra que está más comprimida con una tensión de 6.84 MPa, ya que esa barra recibe una reacción vertical en el nodo 1 por la restricción y en el nodo superior existe una fuerza vertical de peso hacia abajo. Esto también pasa a la barra 6, pero en este caso, como la fuerza vertical aplicada es mucho menor que la anterior, la barra no resulta tan comprimida. Respecto a las dos barras situadas abajo (la barra 2 de *stays* y la 5 de *down*), los resultados muestran que están en tracción y la barra 2 recibe una tensión (3.76 MPa) más grande que la barra 5, todo esto cuadra con la restricción de desplazamiento en el nodo 1 y la fuerza vertical aplicada en el nodo 2. No obstante, cabe destacar que la tensión recibida por la barra 3 (*seat*) es 0 MPa, es decir, esa barra no está ni en tracción ni en compresión, cosa que indica esa barra puede resultar sobrante para esta configuración de barras y fuerzas aplicadas.

2.2. Fuerzas de reacción en los nodos prescritos.

6

$$R_{1,x} = -0,9647N$$

$$R_{1,y} = 388,4085N$$

$$R_{3,x} = -186,5352N$$

$$R_{3,y} = 347,3415N$$

En el nodo 1, se nota que recibe una fuerza de reacción vertical mucho más grande la horizontal, debido la compresión mencionada anteriormente de la barra 1. Y esto también pasa de manera similar al nodo 3, pero en este caso, no recibe una reacción vertical tan grande como la de barra 1, ya que esa barra está más inclinada que la barra 1 y hay una parte de compresión de la barra 6 está haciendo el componente horizontal de la reacción del nodo 3.

3. Apartado 2

En este apartado se analiza la estructura de las dos ruedas, pero simplificando su estructura en diferentes barras articuladas como se muestra en la figura 2. Además, en este caso, las cargas de entrada corresponden a las reacciones de los nodos fijos (1 y 3) obtenidos en el apartado 1.

3.1. Obtener las coordenadas nodales y las matrices de conectividades para el modelo de barras de las dos ruedas.

Si fijamos en una de las ruedas simplificadas mostradas en la figura 10, se puede notar claramente que su borde está formada por 8 barras con la misma longitud, formando un octógono, de esta forma se conoce su ángulo principal es 45° y aplicando trigonometría podemos sacar las coordenadas de los nodos de dos ruedas de manera secuencial a través de la función *nodal_2*.

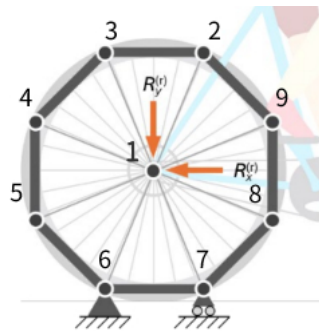


Figura 10: Gráfica de la estructura de la rueda simplificada.

Siguiendo el orden de nodo mostrado en la figura 10. Las coordenadas de la rueda trasera y de la rueda delantera (expresadas en metro) son respectivamente:

$x_1 =$

0	0
0.1339	0.3234
-0.1339	0.3234
-0.3234	0.1339
-0.3234	-0.1339
-0.1339	-0.3234
0.1339	-0.3234
0.3234	-0.1339
0.3234	0.1339

Figura 11: Coordenadas (x,y) de los nodos de la rueda posterior.

$x_2 =$

1.1250	0
1.2589	0.3234
0.9911	0.3234
0.8016	0.1339
0.8016	-0.1339
0.9911	-0.3234
1.2589	-0.3234
1.4484	-0.1339
1.4484	0.1339

Figura 12: Coordenadas (x,y) de los nodos de la rueda delantera.

Y en este caso, la matriz de conectividad (figura 13) para indicar las barras es la misma para las dos ruedas y contiene 16 filas, que corresponden a 16 barras, las primeras 8 son de radio (*spokes*) y la resta son de borde (*rim*).

```
% Nodal connectivities matrix
Tn_1 = [% column_1 = element node 1 , column_2 = element node 2, ...
1 2 %barra 1
1 3 %barra 2
1 4 %barra 3
1 5 %barra 4
1 6 %barra 5
1 7 %barra 6
1 8 %barra 7
1 9 %barra 8
2 3 %barra 9
3 4 %barra 10
4 5 %barra 11
5 6 %barra 12
6 7 %barra 13
7 8 %barra 14
8 9 %barra 15
2 9 %barra 16
];
```

Figura 13: La matriz de conectividad nodal para las dos ruedas.

3.2. Gráfica de la estructura deformada y estado tensional de cada barra.

Para poder representar la gráfica de la estructura deformada y estado tensional de cada barra de ruedas, tenemos que volver a introducir los parámetros iniciales como hemos hecho en el apartado 1.

Primer de todo, se necesitan las coordenadas de los nodos y sus matrices de conectividad, que ya están dadas en el apartado anterior. Respecto a la matriz de conectividad de grados de libertad, esta se devuelve con la función `connectDOF(data,Tn_1)`, conociendo las coordenadas de los nodos u otras informaciones relacionadas (`data`) y sus matrices de conectividad (`Tn_1`).

Segundo, es necesario también definir la matriz de propiedad de material (figura 14), como estas dos ruedas están construidas con los mismos tipos de material, comparten una matriz de propiedad común. Según los datos del enunciado, disponemos de informaciones sobre el módulo de *Young* (primera columna, en *MPa*), área (segunda columna, en mm^2), precarga (tercera columna, en *MPa*) y en la última columna se muestran los momentos inerciales de los dos materiales (borde (*rim*) y rayo (*spokes*), en mm^4).

```
% Material properties matrix
m_1 = [% Each column corresponds to a material property (area, Young's modulus, etc.)
70*10^3 140 0 1470
210*10^3 3.8 0 1.15
];
```

Figura 14: La matriz de propiedad de material de las dos ruedas

Y para asignar a cada barra su correspondiente propiedad de material, se necesita una matriz de conectividad como se muestra en la figura 15.

```
% Material connectivities matrix
Tm_1 = [% Each row is the material (row number in 'm') associated to each element
2
2
2
2
2
2
2
2
1
1
1
1
1
1
1
1
];
```

Figura 15: La matriz de conectividad de material de dos ruedas.

Por último, hay que poner las condiciones de frontera. Sobre los nodos fijos, sabemos de la figura 10 que el nodo 6 está fijado en el suelo y solo permite giros. En cambio, en el nodo 7, solo se restringe el movimiento vertical. Toda esta información está incluida en la matriz de nodos fijos (figura 16).

```
% Fixed nodes matrix
p_1 = [% Each row is a prescribed degree of freedom | column_1 = node, column_2 = direction, column_3 = value of prescribed displacement
      6 1 0
      6 2 0
      7 2 0
    ];
```

Figura 16: La matriz de nodos fijos, la primera columna indica el nodo, la segunda la dirección y la tercera el desplazamiento.

Sobre las fuerzas externas aplicadas a la rueda, en este caso, solo hay que definir un nodo por cada rueda, el cual está en el centro de la rueda (nodo 1). De acuerdo con los datos del enunciado, estos nodos se reciben las fuerzas accionadas por las barras conectadas, es decir, las fuerzas de reacción calculadas en los nodos correspondientes, pero cambiando de signo como se muestra en la tercera columna en las figuras 17, 18 para cada rueda.

```
% Point loads matrix
F_1 = [% Each row is a point force component | column_1 = node, column_2 = direction (1 = x-direction, 2 = y-direction), column_3 = force magnitude
      1 1 -r(1)
      1 2 -r(2)
    ];
```

Figura 17: Matriz de cargas puntuales de la rueda trasera.

```
% Point loads matrix
F_2 = [% Each row is a point force component | column_1 = node, column_2 = direction (1 = x-direction, 2 = y-direction), column_3 = force magnitude
      1 1 -r(3)
      1 2 -r(4)
    ];
```

Figura 18: Matriz de cargas puntuales de la rueda delantera.

Una vez tenemos los datos de entradas definidos, ahora con las funciones de *solver* y de *plot2DBars*, podemos representar la gráfica de la estructura deformada y estado tensional de cada barra en cada caso. Primero, observamos la figura 19 del estado tensional de cada barra de la rueda trasera.

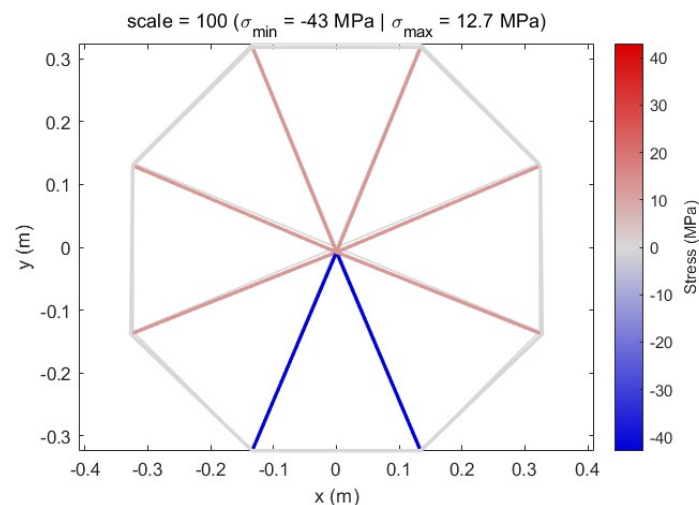


Figura 19: La estructura deformada y estado tensional de cada barra de la rueda trasera.

Como cabe esperar, por las fuerzas aplicadas en el nodo 1, las dos barras de rayo (*spoke*) situadas por debajo están en compresión con un valor de 43 MPa, no obstante, la resta de barras de rayo está en tracción con un valor de 12.7 MPa. Sobre las barras de borde (*rim*), parece que no reciben prácticamente nada de tensión. De la parte de deformación, como la dirección de fuerzas en el nodo es prácticamente vertical, solo hay unos pequeños desplazamientos hacia abajo en el nodo 1.

Respecto a la rueda delantera, se nota que en este caso, solo una de las barras de rayo (*spoke*) está en compresión con un valor de 102 MPa, una tensión mucho más grande que el caso anterior, probablemente debido a la gran fuerza tanto horizontal como vertical aplicada al nodo 1. Aparte de esto, la resta de las barras de rayo están en una tracción con una tensión (26.2 MPa), un poco superior que la del caso anterior. Respecto a las barras de borde, igual que el caso anterior, no están prácticamente ni en tracción ni en compresión. Sobre la deformación de la estructura, debido a que la distribución de fuerzas en el nodo 1 ya no es simétrica, sino también existe una fuerza horizontal hacia sentido del eje x positivo, se parece que toda la estructura de la rueda se inclina hacia sentido positivo del eje x.

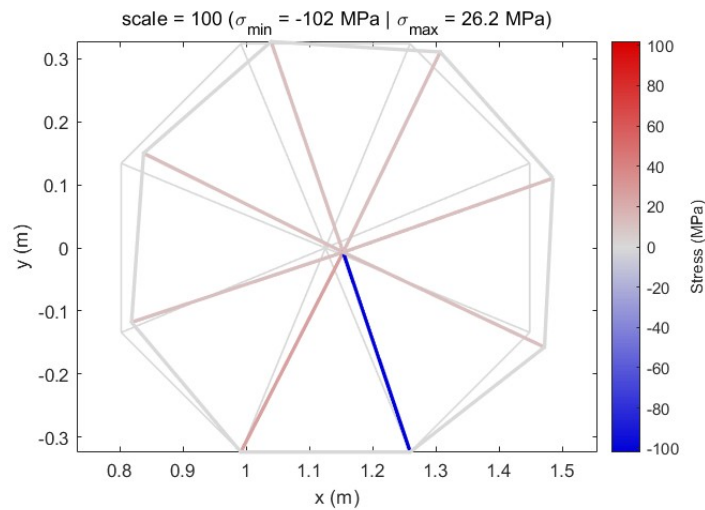


Figura 20: La estructura deformada y estado tensional de cada barra de la rueda delantera.

3.3. Evaluación del riesgo de pandeo de los radios.

En este apartado, nos pide evaluar el riesgo de pandeo de los radios de la rueda. Sabemos de la teoría que el fenómeno de pandeo solo se aparece en el caso de una compresión, por lo tanto, solo se debe fijar en las tres barras comprimidas mostradas anteriormente.

Para poder evaluar bien el riesgo de pandeo, es importante conocer la tensión crítica de la barra, que viene dada por la fórmula 2.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2 A} \quad (1)$$

Sustituyendo los valores de propiedades del material de la figura 14 y la longitud de la barra, podemos sacar la tensión crítica de los radios.

$$\sigma_{cr,spokes} = 5,1203 \text{ MPa}$$

Si calculamos el factor de seguridad de las barras comprimidas anteriormente, nos da claramente que las barras de rayo involucradas ya pasan la tensión crítica, especialmente la barra comprimida de la rueda delantera, cosa que indica que hay riesgo de pandeo de radios en ambas ruedas.

$$F_s = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}} \quad (2)$$

$$F_{s,trasero} = \frac{5,1203}{42,9535} = 0,1192$$

$$F_{s,delantera} = \frac{5,1203}{102,0274} = 0,0502$$

3.4. ¿Cuánta precarga (tensión inicial) en los radios se requiere para garantizar un factor de seguridad (para pandeo) de al menos 2,5?

Con el fin de evitar el riesgo de pandeo de los radios de la rueda, es necesario aplicar una cierta precarga a los rayos de las ambas ruedas. En el enunciado, nos pide un factor de seguridad mínimo de 2.5, para llegar esto, es necesario ir modificando los valores de precarga para el material de rayo en la matriz de propiedad (figura 14) y volver a calcular las tensiones de cada barra hasta que se llegue a un factor de seguridad de 2.5. Todo esto hemos conseguido con la función *prestress_calculation* y nos da que los valores de precarga necesarios para las barras de rayo de rueda trasera y delantera son respectivamente:

$$\sigma_{0,trasera} = 30,97 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{0,delantera} = 77,31 \text{ MPa}$$

Y las gráficas de la estructura deformada y el estado de tensión de cada barra de ambas ruedas se muestran posteriormente:

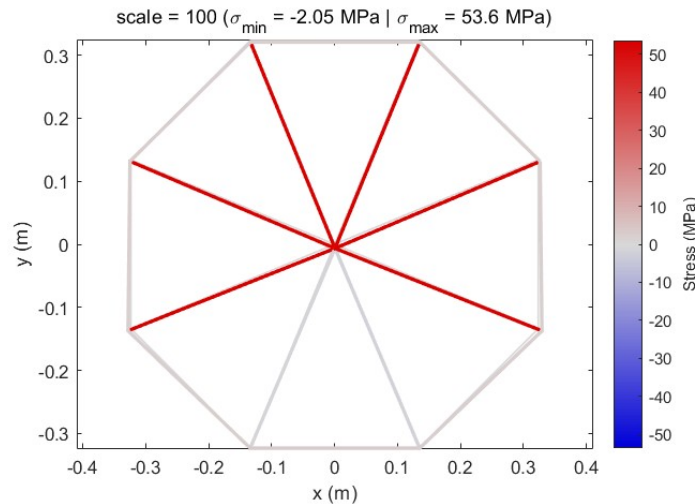


Figura 21: La estructura deformada y estado tensional de cada barra de la rueda trasera, después de aplicar la precarga de 30.97 MPa a los radios.

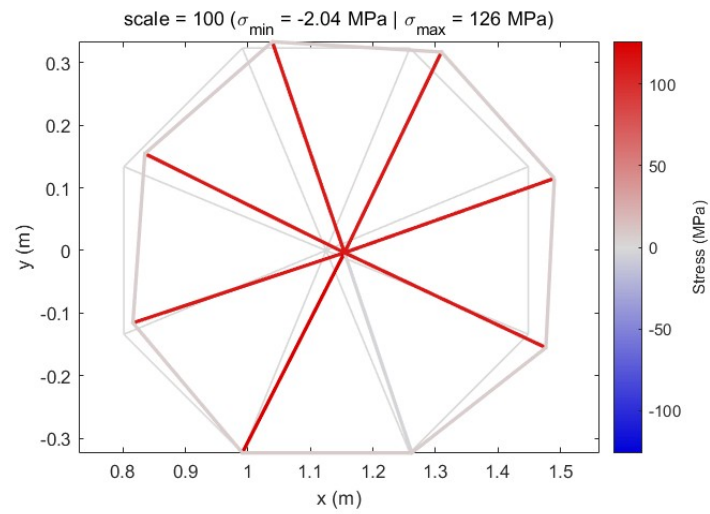


Figura 22: La estructura deformada y estado tensional de cada barra de la rueda delantera, después de aplicar la precarga de 77.31 MPa a los radios.

Como se puede observar en las figuras 21 y 22, aunque en este caso siguen habiendo deformaciones en dos casos, pero la tensión mínima se ha disminuido en ambos casos hasta aproximadamente -2.05 MPa, el valor máximo permitido para asegurar un factor de seguridad mínima de 2.5.