1、一维无限区域上 Helmholtz 方程的 Green 函数满足:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2(x)\right)G(x;\xi)=-\delta(x-\xi),-\infty<x,\xi<+\infty$$

其中，$k(x)=\begin{cases}k_1,-\infty<x<0\\k_2,0<x<+\infty\end{cases}$，$G(x;\xi)$ 有界，$-\infty<\xi<0$，k_1 和 k_2 均为虚部大于零的常数，求解满足条件的 Green 函数。

解：一维均匀无限区域上 Helmholtz 方程的 Green 函数:

$$G(x)=\frac{i}{2k}e^{ik|x-\xi|},\quad \mathrm{Im}(k)>0$$

介质 1 中的场由 ξ 处源激发的入射波 G^{in} 和在 $x=0$ 界面上的反射波 G^{ref} 的叠加，即

$$G_1=G^{in}+G^{ref},\quad 其中 G^{in}=\frac{i}{2k_1}e^{ik_1|x-\xi|}$$

$$G^{ref}=G^{in}(0)R_{12}e^{-ik_1x}=\frac{i}{2k_1}e^{-ik_1\xi}R_{12}e^{-ik_1x}=\frac{i}{2k_1}R_{12}e^{-ik_1(\xi+x)}$$

所以

$$G_1=\frac{i}{2k_1}\left[e^{ik_1|x-\xi|}+R_{12}e^{-ik_1(\xi+x)}\right]$$

介质 2 中场为在 $x=0$ 界面上入射波的透射波

$$G_2=G^{in}(0)T_{12}e^{ik_2x}=\frac{i}{2k_1}e^{-ik_1\xi}T_{12}e^{ik_2x}$$

在边界 $x=0$ 上，满足边界条件

$$\begin{cases}G_1|_{x=0}=G_2|_{x=0}\\ \dfrac{dG_1}{dx}\Big|_{x=0}=\dfrac{dG_2}{dx}\Big|_{x=0}\end{cases}$$

带入解得:

$$\begin{cases}R_{12}=\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\\ T_{12}=\dfrac{2k_1}{k_1+k_2}\end{cases}$$

所以

$$G_1=\frac{i}{2k_1}\left[e^{ik_1|x-\xi|}+\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{-ik_1(\xi+x)}\right]$$

$$G_2=\frac{i}{k_1+k_2}e^{-ik_1\xi}e^{ik_2x}$$

边界条件的说明:
麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

将第二个方程带入第一个方程,可得

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$$

假设电磁波为 z 方向的平面波，则其解为

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{ikz}$$

$\vec{E}_0$ 为电场的方向.

由 $\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \left(\vec{E}_0 e^{ikz}\right) = 0$

由公式 $\nabla \cdot \left(u\vec{E}\right) = \nabla u \cdot \vec{E} + u\nabla \cdot \vec{E}$,可得

$$\nabla \cdot \left(\vec{E}_0 e^{ikz}\right) = ik\hat{e}_z \cdot \vec{E}_0 e^{ikz} + \nabla \cdot \vec{E}_0 e^{ikz} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{e}_z \cdot \vec{E}_0 = 0$$

上式说明电场方向与传播方向垂直. 假设电场方向为 x 方向,因此

$$E_x(z) = E_0 e^{ikz}$$

由 $\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu}\nabla \times \vec{E}$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{e}_y \frac{\partial E_x(z)}{\partial z}$$

带入上式,可看出磁场只有 y 方向的分量.因此

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{dE_x(z)}{dz}\hat{e}_y$$

在边界上电场切向方向连续和磁场切线方向连续,可得

$$\begin{cases} E_x(z)\big|_1 = E_x(z)\big|_2 \\ \frac{dE_x(z)}{dz}\big|_1 = \frac{dE_x(z)}{dz}\big|_2 \end{cases}$$

2、在第一类齐次边界条件下，一维有限区间上 Helmholtz 方程的 Green 函数满足如下方程。

$$\begin{cases}(\frac{\partial^2}{\partial^2 x}+k^2)G(x;\xi)=-\delta(x-\xi),a<x,\xi<b;\\ G(x;\xi)\big|_{x=a}=0,\quad G(x;\xi)\big|_{x=b}=0\end{cases}$$

求解满足上述条件的 Green 函数。

解：一维均匀无限区域上 Helmholtz 方程的 Green 函数：

$$G(x)=\frac{i}{2k}e^{ik|x-\xi|},\quad \mathrm{Im}(k)>0$$

在区域 $a\le x\le b$ 区域内，场由源激发的入射波、$x=a$ 界面上的反射波和 $x=b$ 界面上的反射波组成

$$G^{in}=\frac{i}{2k}e^{ik|x-\xi|}$$

$G_a^{ref}=Be^{ik(\xi-a)}e^{ik(x-a)}$，右行波，其中 B 为波在 $x=a$ 界面上的反射系数

$G_b^{ref}=Ae^{ik(b-\xi)}e^{ik(b-x)}$，左行波，其中 A 为波在 $x=a$ 界面上的反射系数

$$\therefore G(x,\xi)=\frac{i}{2k}[e^{ik|x-\xi|}+Ae^{ik(b-\xi)}e^{ik(b-x)}+Be^{ik(\xi-a)}e^{ik(x-a)}]$$

由边界条件 $\begin{cases}G\big|_{x=a}=0\\ G\big|_{x=b}=0\end{cases}$，可得

$$\begin{cases}A=\dfrac{e^{i2k\xi}-e^{i2ka}}{e^{i2ka}-e^{i2kb}}\\ B=-e^{i2k(a-\xi)}\cdot\dfrac{e^{i2k\xi}-e^{i2kb}}{e^{i2ka}-e^{i2kb}}\end{cases}$$

3、求解满足如下半无界空间 Helmholtz 方程边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}+k^2G=-\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\\ G\big|_{z=0}=0\end{cases}$$

方法一：

由镜像法可知，上述方程的解可写为：

$$G=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr'}}{r'}$$

其中，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，$r'=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$

方法二、由 Sommerfeld 积分公式 $\dfrac{e^{ikr}}{r}=i\int_0^\infty\dfrac{e^{ik_z'|z|}}{k_z'}\mathrm{J}_0(k_\rho\rho)k_\rho\mathrm{d}k_\rho$，$\mathrm{Im}(k_z')>0$

因此无限空间内 Helmholtz 方程的解为

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r}=\frac{i}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{ik_z'|z-z_0|}}{k_z'}J_0(k_\rho\rho)k_\rho dk_\rho$$

上式积分中，$u(z)=e^{ik_z'|z-z_0|}$ 可以看作从 $z=z_0$ 处发射的平面波入射波 $u_i(z)=e^{ik_z'|z-z_0|}$，当入射波传播到 $z=0$ 界面时，将发生反射。

界面上的入射波：$u_i(0)=e^{ik_z'z_0}$

反射波：$u_r(z)=Re^{ik_z'z_0}e^{ik_z'z}=Re^{ik_z'(z+z_0)}$，$R$ 为反射系数。

因此，$z>0$ 介质中，总波场为

$u=u_i+u_r=e^{ik_z'|z-z_0|}+\mathrm{R}e^{ik_z'(z+z_0)}$

由边界条件 $u\big|_{z=0}=0\Rightarrow e^{ik_z'z_0}+\mathrm{R}e^{ik_z'z_0}=0\Rightarrow R=-1$

$\therefore u=u_i+u_r=e^{ik_z'|z-z_0|}-e^{ik_z'(z+z_0)}$

$$G=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}=\frac{i}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{ik_z'|z-z_0|}-e^{ik_z'(z+z_0)}}{k_z'}J_0(k_\rho\rho)k_\rho dk_\rho$$

4、 三维带状区域上 Helmholtz 方程的 Green 函数：

$$(\nabla^2+k^2)G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\delta(x-\xi,y-\eta,z-\varsigma),(x,y,z)\in\Omega,(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$$

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\big|_{z=0}=0,G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\big|_{z=H}=0$$

其中：$\Omega=\{(x,y,z)\big|\ -\infty<x,y<+\infty,0<z<H\}$

解：三维无限空间 Helmholtz 方程的 Green 函数：

$$G(\bar{r},\bar{r}_0)=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}=\frac{i}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{ik_z|z-z_0|}}{k_z}J_0(k_\rho\rho)k_\rho dk_\rho$$

在区域 $H_1<z<H_2$ 中的总场可以看做由 r_0 发射的入射波和上下界面的反射波组成。

入射波即为 $G(\bar{r},\bar{r}_0)=\dfrac{i}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{ik_z|z-z_0|}}{k_z}J_0(k_\rho\rho)k_\rho dk_\rho$，

只有平面波 $e^{ik_z|z-z_0|}$ 在上下界面发生反射，而柱面波 $J_0(k_\rho\rho)$ 传播方向与界面平行，不发生反射。因此，下面只需讨论平面波 $e^{ik_z|z|}$ 在上下界面发生反射

设入射平面波 $V(z)=e^{ik_z|z-z_0|}$，在 $H_1<z<H_2$ 区域的，总场满足

$V(z)=e^{ik_z|z-z_0|}+Ue^{ik_z(z-H_1)}+De^{ik_z(H_2-z)}$

由边界条件得

$$\begin{cases} V\big|_{z=H_1}=e^{ik_z|H_1-z_0|}+Ue^{ik_z(H_1-H_1)}+De^{ik_z(H_2-H_1)}=0 \\ V\big|_{z=H_2}=e^{ik_z|H_2-z_0|}+Ue^{ik_z(H_2-H_1)}+De^{ik_z(H_2-H_2)}=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} U=\dfrac{-e^{ik_z(z_0-H_1)}+e^{ik_z(2H_2-H_1-z_0)}}{1-e^{2ik_z(H_2-H_1)}} \\ D=\dfrac{-e^{ik_z(H_2-z_0)}+e^{ik_z(H_2-2H_1+z_0)}}{1-e^{2ik_z(H_2-H_1)}} \end{cases}$

$$V(z,z_0)=e^{ik_z|z-z_0|}+\frac{-e^{ik_z(z+z_0-2H_1)}+e^{ik_z(2H_2-2H_1+z-z_0)}}{1-e^{2ik_z(H_2-H_1)}}+\frac{-e^{ik_z(2H_2-z-z_0)}+e^{ik_z(2H_2-2H_1-z+z_0)}}{1-e^{2ik_z(H_2-H_1)}}$$

$$\therefore G(\bar{r},\bar{r}_0)=\frac{i}{4\pi}\int_0^\infty\frac{V(z,z_0)}{k_z}J_0(k_\rho\rho)k_\rho dk_\rho$$

试题：已知球心一个点源，无穷空间 Helmholtz 方程的解为$\dfrac{e^{ikr}}{4\pi r}$，如果球内波矢为k_1，球外波矢为k_2，求球内外波的表达式。

1、求如下有界区域热传导问题的 Green 函数

$$\begin{cases} G_t=a^2G_{xx}+\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) \quad (0<x<l) \\ G\big|_{x=0}=0,\ G\big|_{x=l}=0 \\ G\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

该问题可以转化为

$$\begin{cases} G_t=a^2G_{xx} \quad (0<x<l,t>\tau) \\ G\big|_{x=0}=0,\ G\big|_{x=l}=0 \\ G\big|_{t=\tau}=\delta(x-\xi) \end{cases}$$

令 $G(x,t)=X(x)T(t)$，带入上述方程，通过分离变量得

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X\big|_{x=0}=0,\ X\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$

$$T'+\lambda a^2T=0$$

本征值 $\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$，$(n=1,2,3)$

本征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$，$(n=1,2,3)$

$$T(t)=e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

所以，$G(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$

由初始条件 $G\Big|_{t=\tau}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\tau}=\delta(x-\xi)$

$$c_n=e^{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\tau}\frac{2}{l}\int_0^l\delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}e^{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\tau}$$

$$\therefore G(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)}，\ t\ge\tau$$

2、求如下有界区域波动方程的 Green 函数

$$\begin{cases}G_{tt}=a^2G_{xx}+\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) & (0<x<l)\\ G\big|_{x=0}=0,\ G\big|_{x=l}=0\\ G\big|_{t=0}=0,\ G_t\big|_{t=0}=0\end{cases}$$

该问题可以转化为

$$\begin{cases}G_{tt}=a^2G_{xx} \quad (0<x<l)\\ G\big|_{x=0}=0,\ G\big|_{x=l}=0\\ G\big|_{t=\tau}=0,\ G_t\big|_{t=\tau}=\delta(x-\xi)\end{cases}$$

利用分离变量法，可得

$$G(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

由初始条件

$$\begin{cases}G\Big|_{t=\tau}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0,\\ G_t\Big|_{t=\tau}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\delta(x-\xi)\end{cases}$$

$$\Rightarrow A_n=0,\ B_n=\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi\xi}{l},\ (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore G(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)$$