Содержание

1 Автоматы и регулярные выражение

1.1 Про НКА

Недетерминированные конечные автоматы.

Определение 1.1.1. Алфавит - непустое конечное множество, элементы которого называются символами. Обозначение: Σ.

Замечание. Дополнительные обозначения.

- Σ^* – множество слов, состоящее из всех символов алфавита Σ.
- **Формальный язык** $L \subset \Sigma^*$.
- Пустое слово $\varepsilon \subset \Sigma^*$.

Определение 1.1.2. Конкатенацией языков L_1 и L_2 называется язык:

$$L_1 L_2 := L_1 \cdot L_2 := \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

Определение 1.1.3. Недетерминированный конечный автомат – кортеж $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$, где:

- Q – множество состояний, $|Q| < +\infty$.
- Σ – алфавит.
- $\Delta \subset Q \times \Sigma^* \times Q$ – множество переходов.
- $q_0 \in Q$ – стартовое состояние.
- $F \subset Q$ – множество завершающих состояний.

Определение 1.1.4. Конфигурация в автомате $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$ – элемент $\langle q, w\rangle \in Q \times \Sigma^*$.

Определение 1.1.5. $\vdash$ – наименьшее рефлексивное транзитивное отношение над $Q \times \Sigma^*$, такое, что:

$$\forall w \in \Sigma^* : \ (\langle q_1, w\rangle \to q_2) \in \Delta \Rightarrow \forall u \in \Sigma^* : \ \langle q_1, wu\rangle \vdash \langle q_2, u\rangle$$

Автоматные языки: примеры автоматных языков

Определение 1.1.6. Для автомата $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$ языком, задаваемым автоматом, называется:

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : \ \langle q_0, w\rangle \vdash \langle q, \varepsilon\rangle\}$$

Определение 1.1.7. Язык L называется **автоматным**, если существует такой НКА M, что $L = L(M)$

Пример. Постройте какой-нибудь простой автомат и докажите включение в обе стороны.

Различные варианты определений (упрощения НКА)

Утверждение 1.1.1. *В определении автомата можно считать:* $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$, *где* $|F| = 1$.

Доказательство. Пусть $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$ – исходный НКА.

Построим $M' = \langle Q \cup \{q_f\}, \Sigma, \Delta', q_0, \{q_f\}\rangle$, где:

$$\Delta' = \Delta \cup \{\langle q, \varepsilon\rangle \to q_f \mid q \in F\}$$

Покажем, что $L(M) = L(M')$.

В начале покажем, что $L(M) \subset L(M')$:

- $w \in L(M) \Rightarrow \exists q \in F : \langle q_0, w\rangle \vdash \langle q, \varepsilon\rangle$
- $(\langle q, \varepsilon\rangle \to q_f) \in \Delta' \Rightarrow \langle q, \varepsilon\rangle \vdash_{M'} \langle q_f, \varepsilon\rangle$
- Значит $\langle q_0, w\rangle \vdash_{M'} \langle q, \varepsilon\rangle \vdash_{M'} \langle q_f, \varepsilon\rangle \Rightarrow w \in L(M')$

Теперь докажем обратное включение $L(M') \subset L(M)$:

- $w \in L(M') \Rightarrow \langle q_0, w\rangle \vdash_{M'} \langle q_f, \varepsilon\rangle$
- Рассмотрим цепь $\langle q_0, w\rangle \vdash_{M'} \langle q, u\rangle \vdash_{M',1} \langle q_f, \varepsilon\rangle$
- Тогда $u = \varepsilon$, а $q \in F$ из того, как мы определили Δ' (других переходов в q_f не существует).
- Получили $\langle q_0, w\rangle \to q \Rightarrow w \in L(M)$.

□

Утверждение 1.1.2. *Для любого автоматного языка* L *существует НКА* $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$, *такой что* $L = L(M)$ *и:*

$$\forall(\langle q_1, w\rangle \to q_2) \in \Delta : |w| \leqslant 1$$

Доказательство. Разобьём все n-буквенные переходы на n однобуквенных переходов. □

Утверждение 1.1.3. *Для любого НКА* $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$ *существует НКА* $M' = \langle Q, \Sigma, \Delta', q_0, F'\rangle$, *такой, что* $L(M) = L(M')$ *и:*

$$\forall(\langle q_1, w\rangle \to q_2) \in \Delta' : |w| = 1$$

Доказательство. Обозначим $\Delta(q, w) = \{q' \,|\, \langle q, w\rangle \vdash \langle q', \varepsilon\rangle\}$, то есть вершины, достижимые по слову w.

Тогда новое множество переходов определим, как:

$$\Delta' = \{\langle q_1, a\rangle \to q_2 \mid \exists q_3 \in \Delta(q_1, \varepsilon) : (\langle q_3, a\rangle \to q_2) \in \Delta\}$$

Новым же множеством завершающих состояний будет:

$$F' = \{q' \mid \Delta(q', \varepsilon) \cap F \neq \varnothing\}$$

Покажем же теперь, что $L(M) = L(M')$.

В начале докажем $L(M) \subset L(M')$. Тогда $\exists q \in F : \langle q_0, w\rangle \vdash \langle q, \varepsilon\rangle$. Б.О.О. будем считать, что $w = w_1 w_2, w_i \in \Sigma$. Тогда существует цепь:

- $\langle q_0, w_1w_2\rangle \vdash_M \langle q_1', w_1w_2\rangle$ – перешли по цепочке эпсилонов, где q_1' альтер-эго q_3 из определения Δ'.
- $\langle q_1', w_1w_2\rangle \vdash_{M,1} \langle q_1, w_2\rangle$ – читаем символ w_1.
- $\langle q_1, w_2\rangle \vdash_M \langle q_2', w_2\rangle$ – аналогично проходимся по цепочке ε.
- $\langle q_2', w_2\rangle \vdash_{M,1} \langle q_2, \varepsilon\rangle$ – читаем символ w_2.
- $\langle q_2, \varepsilon\rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon\rangle$

Теперь соберём из этих переходов из Δ переходы из Δ':

$$\begin{aligned}\Delta(q_0,\varepsilon) = q_1', \langle q_1', w_1\rangle \to q_1 &\Rightarrow (\langle q_0, w_1\rangle \to q_1) \in \Delta' \\ \Delta(q_1,\varepsilon) = q_2', \langle q_2', w_2\rangle \to q_2 &\Rightarrow (\langle q_1, w_2\rangle \to q_2) \in \Delta' \\ F \ni q \in \Delta(q_2,\varepsilon) &\Rightarrow q_2 \in F'\end{aligned}$$

В итоге получим, что

$$\langle q_0, w_1w_2\rangle \vdash_{M'} \langle q_1, w_2\rangle \vdash_{M'} \langle q_2, \varepsilon\rangle \Rightarrow w = w_1w_2 \in L(M')$$

Покажем включение в обратную сторону $L(M') \subset L(M)$:

Пусть $w \in L(M') \Rightarrow \exists q' \in F' :\ \langle q_0, w\rangle \vdash_{M'} \langle q', \varepsilon\rangle$. Из определения F' получим:

$$\exists q \in F :\ \Delta(q',\varepsilon) \ni q \Rightarrow \langle q', \varepsilon\rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon\rangle$$

Рассмотрим $w = w_1 \cdots w_k$. Тогда

$$\forall m \in \overline{1,k}\, \exists q_m :\ (\langle q_{m-1}, w_m\rangle \to q_m) \in \Delta' \quad (q_k := q')$$

Значит

$$\exists q_{m-1}' \in \Delta_M(q_{m-1},\varepsilon), \langle q_{m-1}', w_m\rangle \to q_m \Rightarrow \langle q_{m-1}, w_m\rangle \vdash_M \langle q_m, \varepsilon\rangle$$

Также найдём финальное состояние:

$$\exists q \in F :\ \langle q', \varepsilon\rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon\rangle \Rightarrow \langle q_{k-1}, w_k\rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon\rangle$$

Итоговая цепочка отношений имеет вид:

$$\langle q_0, w_1\cdots w_k\rangle \vdash_M \langle q_1, w_2\cdots w_k\rangle \vdash_M \langle q_2, w_3\cdots w_k\rangle \cdots \langle q_k, \varepsilon\rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon\rangle$$

Что даёт нам требуемое: $w \in L(M)$. □

1.2 Про ДКА.

Детерминированные конечные автоматы (ДКА)

Определение 1.2.1. НКА $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$ – детерминированный, если выполнено:

- $\forall (\langle q_1, w\rangle \to q_2) \in \Delta :\ |w| = 1$
- $\forall a \in \Sigma, q \in Q :\ |\Delta(q,a)| \leqslant 1$

Эквивалентность ДКА и НКА

Теорема 1.2.1. *Для любого НКА* $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F\rangle$ *существует ДКА* $M' : L(M) = L(M')$.

Доказательство. Обозначим $\Delta(S, w) = \cup_{q \in S}\Delta(q, w), w \in \Sigma^*, S \subset Q$.

Построим ДКА $M' = \langle 2^Q, \Sigma, \Delta', \{q_0\}, F'\rangle$, где:

- $F' = \{S \subset Q \mid S \cap F \neq \varnothing\}$
- $\Delta' = \{\langle S, a\rangle \to \Delta(S, a) \mid S \subset Q\}$

Лемма 1.2.1.

$$\Delta'(\{q_0\}, w) = \Delta(\{q_0\}, w)$$

Доказательство. Докажем индукцией по $|w|$ с базой $w = \varepsilon$

- База:
  - $w = \varepsilon$
  - $\Delta(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\}$
  - $\Delta'(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\}$
- Переход:
  - $w := w'a, a \in \Sigma$
  - Рассмотрим тривиальную цепочку равенств:

    $$\Delta(q_0, w'a) = \{q' \mid \langle q_0, w'a\rangle \vdash_M \langle q', \varepsilon\rangle\} = \{q' \mid \exists q'' : \langle q_0, w'a\rangle \vdash_M \langle q'', a\rangle \vdash_{M,1} \langle q', \varepsilon\rangle\} = \\ = \{q' \mid \exists q'' \in \Delta(q_0, w') : \langle q'', a\rangle \vdash_{M,1} \langle q', \varepsilon\rangle\} = \Delta(\Delta(q_0, w'), a)$$
  - Воспользовавшись предположением индукции для слов длины 1 и $n-1$, а также свойством аддитивности множеств Δ, получим:

    $$\Delta(\Delta(\{q_0\}, w'), a) = \Delta(\Delta'(\{q_0\}, w'), a) = \Delta'(\Delta'(\{q_0\}, w'), a) = \Delta'(\{q_0\}, w'a)$$

□

Теперь напомним, что $F' = \{S \subset Q \mid S \cap F \neq \varnothing\}$. Тогда, используя результат предыдущей леммы, очевидно, что следующие утверждения эквивалентны:

- $w \in L(M)$
- $\exists q \in F : \langle q_0, w\rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon\rangle$
- $\Delta(q_0, w) \cap F \neq \varnothing$
- $\Delta'(\{q_0\}, w) \cap F \neq \varnothing$
- $\Delta'(\{q_0\}, w) \in F'$
- $w \in L(M')$

□

1.3 Про автоматные языки

Свойства класса автоматных языков. Замкнутость относительно булевых операций.

Определение 1.3.1. Итерацией Клини для языка L называется операция:

$$L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$$

Определение 1.3.2. Полный ДКА – ДКА, для которого выполнено:

$$\forall a \in \Sigma, q \in Q : \ |\Delta(q, a)| = 1$$

Теорема 1.3.1. *Автоматные языки замкнуты относительно:*

- *Конкатенации*
- *Объединения*
- *Пересечения*
- *Итерации Клини*
- *Дополнения*

Доказательство. В доказательстве используем определение автоматов с ровно одним завершающим состоянием.

Доказывается рукомаханиям с рисуночками автоматов:

- Конкатенация последовательным соединением
- Объединение параллельным соединением
- Строим декартово произведение автоматов с 1-буквенными переходами, объявляя завершающими состояниями те, которые являются завершающими по обеим координатам.
- Для итерации Клини замыкаем вход автомата с выходом, а также пробрасываем переход по ε из входа в выход.
- Для дополнения строим ПДКА и меняем завершающие состояние и незавершающие между собой!

□

1.4 Про регулярные выражения

Регулярные выражения

Определение 1.4.1. Определение рекурсивное:

RegExp (R)	Язык $L_i = L(R_i)$
0	$\varnothing$
1	ε
$a, a \in \Sigma$	$\{a\}$
$R_1 + R_2$	$L_1 \cup L_2$
$R_1 R_2$	$L_1 L_2$
R^*	L^*

Приоритет операций: $* \to \cdot \to +$

Регулярный автомат, выводимость в регулярном автомате

Определение 1.4.2. Регулярный автомат – НКА, в котором на рёбрах записаны регулярные выражения. Докажем утверждение для регулярных автоматов.

Замечание. Всякий НКА задаётся регулярным автоматом с 1 завершающим состоянием.

Теорема Клини о совпадении классов регулярных и автоматных языков.

Теорема 1.4.1. *Множество регулярных языков совпадает с множеством автоматных языков.*

Доказательство. Регулярные $\subseteq$ Автоматные.

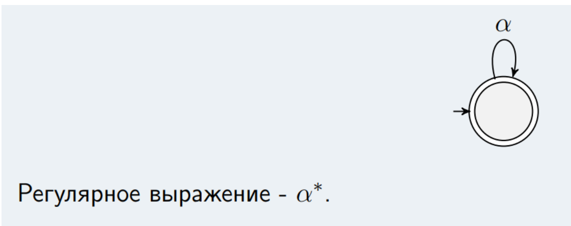
Доказываем индукцией по построению выражения. База очевидна, переход также очевидно следует из замкнутости автоматных языков относительно операций, доказанной ранее.

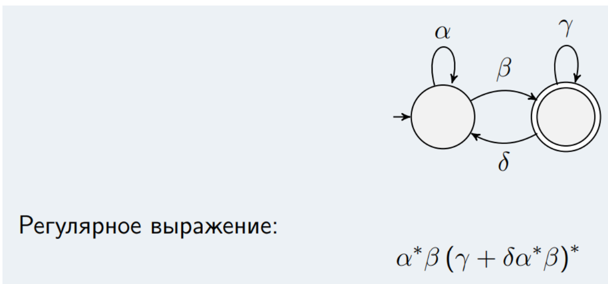
Автоматные $\subseteq$ Регулярные.

Доказываем индукцией по $|Q|$ в регулярном автомате. □

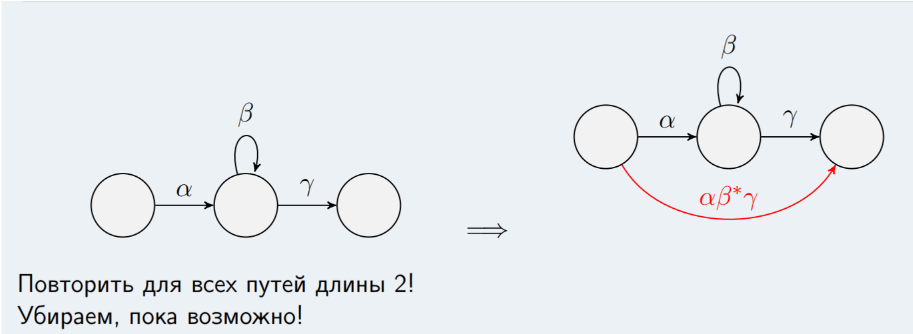
Алгоритм построения регулярного выражения по регулярному автомату.

- База:





- Для перехода будем удалять нестартовые и незавешающие состояния:



1.5 Про эквивалентные состояния ПДКА

Эквивалентность состояний в ПДКА

Определение 1.5.1. Пусть $L \subset \Sigma^*$ – автоматный язык, M – ПДКА для L. Тогда определим отношение $\sim_L$ на Σ^*:

$$u \sim_L v \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \ uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$$

Доказательство. Проверим, что $\sim_L$ – отношение эквивалентности:

- Рефлексивность: $uw \in L \Leftrightarrow uw \in L$
- Симметричность: $v \sim_L u : \ uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$
- Транзитивность:
  - $u \sim_L v : \ uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$
  - $v \sim_L s : \ vw \in L \Leftrightarrow sw \in L$
  - $uw \in L \Leftrightarrow sw \in L \Rightarrow u \sim_L s$

$\square$

Определение 1.5.2. Определим $\sim_M$ над ПДКА:

$$q_1 \sim_M q_2 \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \ \Delta(q_1, w) \in F \Leftrightarrow \Delta(q_2, w) \in F$$

Эквивалентность слов по языку

Определение 1.5.3. Мы можем разбить язык Σ^* на классы эквивалентности по отношению $\sim_L$:

$$\Sigma^* / \sim_L := \{\{u \mid u \sim_L v\} \mid v \in \Sigma^*\}$$

Оценка на минимальное количество состояний в ПДКА.

Лемма 1.5.1. *Пусть* $L_q := \{w \mid \Delta(q_0, w) = q\}$. *Тогда каждый класс эквивалентности в* $\Sigma^* / \sim_L$ *– объединение классов в* L_q.

Доказательство. Пусть $u, v \in L_q \Rightarrow \Delta(q_0, u) = \Delta(q_0, v) = q$. Попробуем преобразовать множество достижимых вершин по произвольному слову w, используя это свойство:

$$\Delta(q_0, uw) = \Delta(\Delta(q_0, u), w) = \Delta(q, w) = \Delta(q_0, vw)$$

Рассмотрим цепочку эквивалентностей:

$$uw \in L \Leftrightarrow \Delta(q_0, uw) \in F \Leftrightarrow \Delta(q_0, vw) \in F \Leftrightarrow vw \in L$$

Что по определению даёт нам $u \sim_L v$. □

Следствие. *Получаем оценку снизу на количество вершин в автомате:*

$$|\Sigma^* / \sim_L| \leqslant |Q|$$

1.6 Критерий минимальности количества состояний в ПДКА

Лемма 1.6.1. *Для любого автоматного языка L существует ПДКА M', такой, что все состояния в M' попарно неэквивалентны*

Доказательство. Построим автомат над классами $[q] \in Q / \sim_M$:

$$M' = \langle Q / \sim_M, \Sigma, \Delta', [q_0], F' \rangle$$

где:

- $\Delta' = \{\langle [q], a \rangle \to [\Delta(q, a)]\}$
- $F' = \{[q] \mid q \in F\}$

Необходимо доказать:

- Переходы согласованы
- Завершающие состояния согласованы
- Распознаваемые языки согласованы
- Состояния попарно неэквивалентны

Итак, приступим к доказательству каждого из пунктов:

Переходы согласованы, т.е. $q_1 \in [q] \Rightarrow \Delta(q_1, a) \in [\Delta(q, a)]$:

$$\begin{aligned} q_1 \in [q] \Rightarrow \forall w : \ \Delta(q_1, w) \in F \Leftrightarrow \Delta(q, w) \in F \text{ в том числе:} \\ \forall w = au : \ \Delta(q_1, au) \in F \Leftrightarrow \Delta(q, au) \in F \Rightarrow \\ \forall u : \ \Delta(\Delta(q_1, a), u) \in F \Leftrightarrow \Delta(\Delta(q, a), u) \in F \Rightarrow \\ \Delta(q_1, a) \sim_M \Delta(q, a) \end{aligned}$$

Завершающие состояния согласованы, т.е. $q_1 \in [q], q \in F \Rightarrow q_1 \in F$:

$$\begin{aligned} q_1 \in [q] \Rightarrow \forall w : \ \Delta(q_1, w) \in F \Leftrightarrow \Delta(q, w) \in F \text{ в том числе:} \\ (\Delta(q_1, \varepsilon) = q_1) \in F \Leftrightarrow (\Delta(q, \varepsilon) = q) \in F \end{aligned}$$

Совпадение языков, т.е. $\forall w : \ \Delta([q_0], w) = [\Delta(q_0, w)]$ индукцией по $|w|$:

- База уже доказана в предыдущих пунктах
- Пусть $w = ua$:

$$\Delta([q_0], ua) = \Delta(\Delta([q_0], u), a) = \Delta([\Delta(q_0, u)], a) = [\Delta(\Delta(q_0, u), a)] = [\Delta(q_0, ua)]$$

Тогда:

$$w \in L(M) \Leftrightarrow \Delta(q_0, w) \in F \Leftrightarrow \Delta([q_0], w) \in F' \Leftrightarrow w \in L(M')$$

Осталось показать, что все все состояния в получившемся автомате попарно неэквивалентны: пусть $[q_1] \sim_{M'} [q_2]$, тогда

$$\begin{aligned}\forall w: \ \Delta([q_1], w) \in F' \Leftrightarrow \Delta([q_2], w) \in F' \Rightarrow \forall w: \ [\Delta(q_1, w)] \in F' \Leftrightarrow [\Delta(q_2, w)] \in F' \Rightarrow \\ \forall w: \ \Delta(q_1, w) \in F \Leftrightarrow \Delta(q_2, w) \in F \Rightarrow \\ q_1 \sim_M q_2 \Rightarrow [q_1] = [q_2]\end{aligned}$$

□

Теорема 1.6.1. *M – минимальный ПДКА: $L(M) = L \Leftrightarrow$ Любые два состояния попарно неэквивалентны и все состояния достижимы из стартового*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть M – минимальный ПДКА. Строим автомат $Q/\sim_M$: уменьшаем число состояний. Если в M есть недостижимое состояние, то удаляем его.

($\Leftarrow$) Из того, что в M нет эквивалентных состояний:

$$\begin{aligned}\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*: \ \Delta(q_0, w_1) \not\sim \Delta(q_0, w_2) \Rightarrow \exists u: \ \Delta(\Delta(q_0, w_1), u) \notin F, \Delta(\Delta(q_0, w_2), u) \in F \Rightarrow \\ \exists u: \ \Delta(q_0, w_1 u) \notin F, \Delta(q_0, w_2 u) \in F \Rightarrow \exists u: \ w_1 u \notin L, w_2 u \in L \Rightarrow \\ w_1 \not\sim_L w_2\end{aligned}$$

Тогда $|\Sigma^*/\sim_L| \geqslant |Q|$, но $\forall$ ПДКА M' : $|\Sigma^*/\sim_L| \leqslant |Q'| \Rightarrow |Q| \leqslant |Q'| \Rightarrow M$ – минимальный.

□

1.7 Про канонический ПДКА

Определение 1.7.1. M_1 и M_2 **изоморфны**, если существует биекция $\psi: \ Q_1 \to Q_2$:

- $\psi(q_0^1) = q_0^2$
- $\psi(F_1) = F_2$
- Если $\Delta(q_1, a) = q_2$, то $\Delta(\psi(q_1), a) = \psi(q_2)$

Канонический ПДКА - корректность построения

Канонический ПДКА для языка L определим, как $\Sigma^*/\sim_L$:

$$M_0 = \langle \Sigma^*/\sim_L, \Sigma, \Delta, [\varepsilon], \{[w] \mid w \in L\} \rangle; \quad \Delta([u], a) = [ua], u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$$

Для корректности необходимо показать:

- $u \sim_L v, u \in L \Rightarrow v \in L$
- $u \sim_L v \Rightarrow va \in [ua]$

Единственность минимального ПДКА

Лемма 1.7.1. *Пусть M – минимальный ПДКА, тогда отображение ψ:*

- $\psi : Q_M \to \Sigma^*/\sim_L$
- $\psi(q) = \{w \mid \Delta_M(q_0, w) = q\}$

является изоморфизмом.

Доказательство. Необходимо доказать:

- $\psi(q_0) = [\varepsilon]$
- $\psi(F) = \{[w] \mid w \in L\}$
- Если $\Delta(q_1, a) = q_2$, то $\Delta(\psi(q_1), a) = \psi(q_2)$

Докажем биективность ψ: $|\Sigma^*/\sim_L| = |Q_M| \Rightarrow$ достаточно доказать инъективность:

$$\psi(q_1) = \psi(q_2) \Rightarrow \exists w :\ \Delta(q_0, w) = q_1, \Delta(q_0, w) = q_2 \Rightarrow q_1 = q_2$$

Докажем согласованность стартовых состояний:

$$w \in \psi(q_0) \Rightarrow \Delta_M(q_0, w) = q_0 \text{ но мы знаем, что: } \Delta_M(q_0, \varepsilon) = q_0 \Rightarrow w \sim_L \varepsilon$$

Согласованность завершающих состояний:

$$w \in \psi(q), q \in F \Rightarrow \Delta_M(q_0, w) = q \Rightarrow w \in L \Rightarrow [w] \in F'$$

Осталось доказать согласованность переходов:

$$w \in \psi(q_1), \Delta(q_1, a) = q_2 \Rightarrow \Delta(q_0, w) = q_1 \Rightarrow \psi(q_1) = [w], \Delta([w], a) = [wa] \Rightarrow \Delta(q_0, wa) = \Delta(q_1, a) = q_2 \Rightarrow \psi(q_2) = [wa]$$

□

Теорема 1.7.1. *МПДКА единственен с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть M_1, M_2 – ПДКА. Построим канонические изоморфизмы ψ_1, ψ_2. Тогда $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ – изоморфизм M_1 в M_2. □

1.8 Алгоритмы проверок

Алгоритм проверки МПДКА на эквивалентность

Необходимо получить неэквивалентные состояния, но у нас есть только слова. Как по ним понять, какие состояния попарно неэвивалентны? Ввести эквивалентность по словам малой длины.

Определение 1.8.1. $q_1 \underset{n}{\sim} q_2$, если для любого слова $|w| \leqslant n$:

$$\Delta(q_1, w) \in F \Leftrightarrow \Delta(q_2, w) \in F$$

Лемма 1.8.1.

$$q_1 \sim q_2 \Leftrightarrow q_1 \underset{|Q|-2}{\sim} q_2$$

Доказательство. Покажем, если $|Q/\underset{i}{\sim}| = |Q/\underset{i+1}{\sim}|$, то $|Q/\underset{i+1}{\sim}| = |Q/\underset{i+2}{\sim}|$.

Очевидно, что $|Q/\underset{i+1}{\sim}| \leqslant |Q/\underset{i+2}{\sim}|$. По определению эквивалентности $q_1 \underset{i+2}{\sim} q_2$:

$$\forall w = au, |w| \leqslant i+2: \ \Delta(q_1, au) \in F \Leftrightarrow \Delta(q_2, au) \in F \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Sigma: \ \Delta(q_1, a) \underset{i+1}{\sim} \Delta(q_2, a) \overset{|Q/\underset{i}{\sim}|=|Q/\underset{i+1}{\sim}|}{\Rightarrow}$$

$$\forall a \in \Sigma: \ \Delta(q_1, a) \underset{i}{\sim} \Delta(q_2, a) \Rightarrow q_1 \underset{i+1}{\sim} q_2$$

Теперь понятно, что, если $|Q/\underset{i}{\sim}| = |Q/\underset{i+1}{\sim}|$, то $|Q/\underset{i}{\sim}| = |Q/\sim|$

Заметим, что $|Q/\sim_0| = |\{F, Q \setminus F\}| = 2$, но $|Q/\sim_i|$ неубывает и стабилизируется $\Rightarrow$

$$|Q/\sim_i| \leqslant |Q/\sim| \leqslant |Q|$$

□

Теорема Майхилла-Нероуда

Теорема 1.8.1. *L – автоматный $\Leftrightarrow$ L содержит конечное количество классов эквивалентности $\Sigma^*/\sim_L$*

Доказательство.

- $\Rightarrow$ L – автоматный, тогда $|\Sigma^*/\sim_L| \leqslant |Q| < +\infty$
- $\Leftarrow$ построим канонический МПДКА.

□

1.9 Лемма о разрастании

Лемма о разрастании для автоматных языков

Лемма 1.9.1. *Пусть L – автоматный язык. Тогда*

$$\exists P\, \forall w \in L: \ |w| \geqslant P\ \exists x, y, z: \ w = xyz, |xy| \leqslant P, |y| \neq 0: \ \forall k \geqslant 0: \ xy^k z \in L$$

Доказательство. Построим M – НКА с 1-буквенными переходами: $L(M) = L$. Тогда $P := |Q|$. Если $|w| \geqslant P \Rightarrow$ посетили $\geqslant P+1$ состояние.

Значит $\exists q \in Q$, которую посетили дважды, значит мы можем ходить по этому циклу любое k число раз. □

Пример неавтоматных языков

Пример.

$$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Доказательство. Неавтоматность доказывается отрицанием леммы о разрастании. □

2 КС-грамматики и МП-автоматы

2.1 Про порождающие грамматики

Порождающие грамматики

Определение 2.1.1. Порождающая грамматика $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, где:

- N – множество вспомогательных символов, $|N| < +\infty$
- Σ – алфавит – множество терминальных символов, $|\Sigma| < +\infty, N \cap \Sigma = \varnothing$
- $S \in N$ – стартовый нетерминал
- $P \subset ((N \cup \Sigma)^+ \setminus \Sigma^*) \times (N \cup \Sigma)^*$

Язык, задаваемый грамматикой

Определение 2.1.2. Отношением выводимости $\vdash_G$ называется наименьшее рефлексивное транзитивное отношение:

$$\forall (\alpha \to \beta) \in P, \forall \varphi, \psi \in (N \cup \Sigma)^* : \; \varphi\alpha\psi \vdash_G \varphi\beta\psi$$

Определение 2.1.3. w **выводимо в грамматике** $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, если $S \vdash_G w$

Определение 2.1.4. Языком L, порождённым грамматикой G называется:

$$L(G) = L = \{w \mid S \vdash_G w\}$$

Иерархия Хомского порождающих грамматик

Разграничим грамматики по виду правил:

1. Порождающие грамматики: любые правила
2. Контекстно-зависимые грамматики: $\varphi A \psi \to \varphi \alpha \psi, \alpha \neq \varepsilon$
3. Контекстно-свободные грамматики: $A \to \alpha$
4. Праволинейные грамматики: $A \to wB, A \to w$

При этом:

- $A \in N, B \in N$ – нетерминальные символы
- $\alpha, \varphi, \psi \in (N \cup \Sigma)^*$

2.2 Про праволинейные грамматики

Праволинейные языки

Теорема 2.2.1. *Множество автоматных языков равно множеству языков, задаваемых праволинейными грамматиками.*

Доказательство. Состояние в автомате – нетерминалы в грамматике + сток □

Построение праволинейной грамматики по конечному автомату

Пусть $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, q_0, F \rangle$. Построим $G = \langle Q, \Sigma, P, q_0 \rangle$, где:

$$P = \{q_1 \to wq_2 \mid (\langle q_1, w \rangle \to q_2) \in \Delta\} \bigcup \{q \to \varepsilon \mid q \in F\}$$

Доказательство. Надо доказать два утверждения:

1. $\langle q_1, w \rangle \vdash_M \langle q_2, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow q_1 \vdash_G wq_2$

2. $\langle q_1, w \rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon \rangle, q \in F \Leftrightarrow q_1 \vdash_G w$

В начале докажем $\Rightarrow$ для обоих пунктов.

Первый пункт доказывается индукцией по длине вывода в M.

- База индукции – 0 шагов:

$$\langle q_1, w \rangle \vdash_M \langle q_2, \varepsilon \rangle \Rightarrow q_1 = q_2, w = \varepsilon \Rightarrow q_1 \vdash_G \varepsilon q_2$$

- Для перехода представим произвольное слово $w = vu, u \in \Sigma$:

$$\langle q_1, w \rangle \vdash_M \langle q_3, v \rangle \vdash_{M,1} \langle q_2, \varepsilon \rangle \Rightarrow q_1 \vdash_G uq_3, q_3 \vdash_G vq_2 \Rightarrow q_1 \vdash_G uvq_2 = wq_2$$

Теперь второй пункт:

$$\langle q_1, w \rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon \rangle, q \in F \Rightarrow q_1 \vdash_G wq, (q \to \varepsilon) \in P \Rightarrow q_1 \vdash_G w$$

Теперь $\Leftarrow$ для обоих пунктов:

Первый тоже докажем индукцией по длине вывода в GЖ

- База индукции 0 шагов:

$$q_1 \vdash_{G,0} wq_2 \Rightarrow q_1 = q_2, w = \varepsilon \Rightarrow \langle q_1, \varepsilon \rangle \vdash_M \langle q_2, \varepsilon \rangle$$

- Для перехода опять разложим $w = vu, u \in \Sigma$:

$$q_1 \vdash_G vq_3 \vdash_G wq_2 \Rightarrow \langle q_1, v \rangle \vdash_M \langle q_3, \varepsilon \rangle, \langle q_3, u \rangle \vdash_M \langle q_2, \varepsilon \rangle \Rightarrow \langle q_1, vu \rangle \vdash_M \langle q_3, u \rangle \vdash_{M,1} \langle q_2, \varepsilon \rangle$$

Второй пункт:

$$q_1 \vdash_G wq \vdash_{G,1} w \Rightarrow \langle q_1, w \rangle \vdash_M \langle q, \varepsilon \rangle, q \vdash_{G,1} \varepsilon \Rightarrow q \in F$$

После доказательства двух пунктов нам становится очевидно, что следующие утверждения эквивалентны:

- $w \in L(M)$
- $\exists q \in F : \langle q_0, w \rangle \vdash \langle q, \varepsilon \rangle$
- $q_0 \vdash_G w$
- $w \in L_G$

$\square$

2.3 Построение конечного автомата по праволинейной грамматике

Строим автомат:

$$M = \langle S \cup \{q_f\}, \Sigma, \Delta, S, \{q_f\} \rangle$$

Переходы:

1. $\langle A, w \rangle \to B$, если $(A \to wB) \in P$
2. $\langle A, w \rangle \to q_f$, если $(A \to w) \in P$

Доказательство. Надо доказать два утверждения:

1. $\langle A, w \rangle \vdash_M \langle M, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow A \vdash_G wB; \quad A, B \in N$
2. $\langle A, w \rangle \vdash_M \langle q_f, \varepsilon \rangle \Leftrightarrow A \vdash_G w$

В начале докажем $\Rightarrow$ для обоих пунктов:
Первый будем доказывать по индукции:

- База индукции – 0 шагов:

$$\langle A, w \rangle \vdash_{M,0} \langle B, \varepsilon \rangle \Rightarrow A = B, w = \varepsilon \Rightarrow A \vdash_G \varepsilon B$$

- Для перехода представим произвольное слово $w = vu, u \in \Sigma$:

$$\langle A, w \rangle \vdash_M \langle C, u \rangle \vdash_{M,0} \langle B, \varepsilon \rangle \Rightarrow A \vdash_G vC, C \vdash_G uB \Rightarrow A \vdash_G vuB = wB$$

Теперь второй пункт для произвольного $w = vu$:

$$\langle A, v \rangle \vdash_M \langle C, u \rangle \vdash_{M,1} \langle q_f, \varepsilon \rangle \Rightarrow A \vdash_G vC, C \vdash_G u \Rightarrow A \vdash_G vu = w$$

Перейдём к доказательству $\Leftarrow$ для обоих пунктов:
Первый пункт также будет доказан по индукции:

- База – 0 шагов:

$$A \vdash_{G,0} wB \Rightarrow w = \varepsilon, A = B \Rightarrow \langle A, \varepsilon \rangle \vdash_M \langle B, \varepsilon \rangle$$

- Переход для произвольного $w = uv$:

$$A \vdash_G uC \vdash_{G,1} uvB \Rightarrow \langle A, u \rangle \vdash_M \langle C, \varepsilon \rangle, \langle C, v \rangle \vdash_M \langle B, \varepsilon \rangle \Rightarrow \langle A, uv \rangle \vdash_M \langle B, \varepsilon \rangle$$

Второй пункт для $w = uv$:

$$A \vdash_G uC \vdash_{G,1} uv \Rightarrow \langle A, u \rangle \vdash_M \langle C, \varepsilon \rangle, \langle C, v \rangle \vdash \langle q_f, \varepsilon \rangle \Rightarrow \langle A, uv \rangle \vdash_M \langle q_f, \varepsilon \rangle$$

После доказанных двух пунктов становится очевидным эквивалентность данных утверждений:

- $w \in L(M)$
- $\langle S, w \rangle \vdash_M \langle q_f, \varepsilon \rangle$
- $S \vdash_G w$
- $w \in L(G)$

$\square$

2.4 Про КС-грамматики

Примеры контекстно-свободных языков

Пример.

$$S \to aSb$$
$$S \to \varepsilon$$

Задаёт неавтоматный язык $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Замкнутость КС-языков относительно простейших операций

Утверждение 2.4.1. *$L_1 \cup L_2$ является КС-языком*

Доказательство. Построим КС-грамматику для языка $L_1 \cup L_2$. Для этого рассмотрим соответствующие грамматики для L_1, L_2. Пусть стартовые символы в них имеют имена S и T. Тогда стартовый символ для $L_1 \cup L_2$ обозначим за S' и добавим правило $S' \to S \mid T$. Покажем, что $S' \vdash_G w \Leftrightarrow S \vdash_G w \vee T \vdash_G w$.

$\Leftarrow$: Поскольку $S \vdash_G$ и есть правило $S' \vdash_G S$, то по транзитивности выводимости получаем, что $S' \vdash_G w$. Аналогично и для T.

$\Rightarrow$: Пусть $S' \vdash_G w$. Поскольку $S' \vdash S|T$ – единственные правила, в которых нетерминал S' присутствует в левой части, то это означает, что либо $S' \vdash_G S \vdash_G w$, либо $S' \vdash_G T \vdash_G w$. □

Утверждение 2.4.2. *$L_1 L_2$ – КС-язык*

Доказательство. Аналогично предыдущему случаю построим КС-грамматику для языка $L_1 L_2$. Для этого добавим правило $S' \vdash_G ST$, где S и T – стартовые символы языков L_1 и L_2 соответственно. □

Утверждение 2.4.3. *$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$ – КС-язык.*

Доказательство. Если S – стартовый символ КС-грамматики для языка L, то добавим в КС-грамматику для языка L^* новый стартовый символ S' и правила $S' \vdash_G SS' \mid \varepsilon$ □

2.5 Удаление непорождающих и недостижимых символов в алгоритме примедения к нормальной форме Хомского. Асимптотика приведённых шагов.

Удаление непорождающих символов

Определение 2.5.1. Символ $Y \in N$ называется **порождающим**, если:

$$\exists w \in \Sigma^* : \; Y \vdash w$$

Удаляем непорождающие символы Z и все правила, содержащие символы Z – получаем G_1.

Утверждение 2.5.1.

$$L(G) = L(G_1)$$

Доказательство. Включение $L(G_1) \subset L(G)$ очевидно, так как мы удалили нетерминалы, которые никак не влияли на вывод слов, поэтому язык не уменьшился.

Докажем $L(G) \subset L(G_1)$. Пусть $w \in L(G) \setminus L(G_1)$.

Тогда существует непорождающий Z: $S \vdash \alpha Z \beta \vdash w$. Тогда если $w = w_1 u w_2 : \ \alpha \vdash w_1, Z \vdash u, \beta \vdash w_2 \Rightarrow Z$ – порождающий, противоречие. □

Удаление недостижимых символов

Определение 2.5.2. Символ $D \in N$ называется **достижимым**, если существуют некоторые $\varphi, \psi \in (N \cup \Sigma)^*$, такие, что:

$$S \vdash \varphi D \psi$$

Удаляем все недостижимые символы и все содержащие их правила – получаем G_2.

Утверждение 2.5.2.

$$L(G_1) = L(G_2)$$

Доказательство. Включение $L(G_2) \subset L(G_1)$ очевидно, так как удалили все нетерминалы, которые не участвовали в выводе, поэтому язык не уменьшился.

Теперь докажем $L(G_1) \subset L(G_2) \Rightarrow \exists w \in L(G_1) \setminus L(G_2) \Rightarrow$ существует недостижимый $U : \ S \vdash \alpha U \beta \vdash w \Rightarrow U$ – достижимый. Противоречие. □

Утверждение 2.5.3. *В G_2 не появилось непорождающих символов.*

Доказательство. Пусть B стал новым непорождающим в G_2. Тогда:

- B был достижимым в G_1.
- B был порождающим в $G : \ B \vdash_G u$

На пути вывода $B \vdash u$ был недостижимый символ C. Но, тогда строим пусть $S \to B \to C$ – противоречие! □

Асимптотика приведённых шагов (в терминах изначальной грамматики)

1. Для поиска непорождающих нетерминалов требуется запустить $|N|$ BFS-ов. Сложность $O(|N|(|N| + |E|))$
2. Для поиска недостижимых нетерминалов требуется запустить один BFS из S. Сложность $O(|N| + |E|)$

2.6 Удаление длинных, смешанных правил и eps-порождающих символов. Асимптотика приведённых шагов.

Удаление длинных правил

Сделаем замену:

$$B \to A_1 A_2 \cdots A_n$$

на:

$$\begin{aligned} B &\to A_1B_1 \\ B_1 &\to A_2B_2 \\ &\cdots \\ B_{n-2} &\to A_{n-1}A_n \end{aligned}$$

Получим грамматику G_3.

Замечание. Если в дереве вывода G_3 появился B_k, то в нём появятся все правила, в левых и правых частях которых есть $B_1, \cdots, B_{n-2}$.

Удаление смешанных правил

Сделаем замену:

$$A \to A_1bA_2d$$

на

$$\begin{aligned} A &\to A_1BA_2D \\ B &\to b \\ D &\to d \end{aligned}$$

Получим грамматику G_4.

Удаление eps-порождающих

Определение 2.6.1. Символ E называется ε-порождающим, если $E \vdash \varepsilon$.

Сделаем замену:

- Добавим правило $A \to B$, если $A \to BC, C \vdash \varepsilon$.
- Добавим правило $A \to C$, если $A \to BC, B \vdash \varepsilon$.
- Удалим правила $A \to \varepsilon$.

Получим грамматику G_5.

Утверждение 2.6.1.

$$L(G_4) = L(G_5)$$

Доказательство. $L(G_4) \subset L(G_5)$ докажем индукцией по длине вывода:

- База – 1 шаг: $w = a, (A \to a) \in P_{G_5}$
- Переход $A \vdash_{G_4, 1} \alpha \vdash_{G_4} w$
  - $\alpha = B \Rightarrow (A \to B) \in P_{G_5}$.
  - $\alpha = BC \Rightarrow B \vdash_{G_4} w_1, C \vdash_{G_4} w_2$.
  - Если $w_1 \neq \varepsilon, w_2 \neq \varepsilon$ – применяем переход для B, C.

- Если $w_1 = \varepsilon:\ A \vdash_{G_5,1} C \vdash_{G_5} w_2 = w$

$L(G_5) \subset L(G_4)$ также докажем индукцией по длине вывода:

- База – 1 шаг: $w = a, (A \to a) \in P_{G_4}$
- Переход $A \vdash_{G_5,1} B \vdash_{G_5} w$:
  - $(A \to B) \in P_{G_4} \Rightarrow A \vdash_{G_4,1} B \vdash_{G_4} w$
  - $(A \to BC) \in P_{G_4}, C \vdash_{G_4} \varepsilon \Rightarrow A \vdash_{G_4,1} BC \vdash w\varepsilon = w$

$\square$

Асимптотика приведённых шагов (в терминах изначальной грамматики)

1. Сложность удаления длинных правил $O(|P| \max_{p \in P} |p|)$.
2. Сложность удаления смешанных правил можно оценить также.
3. Сложность удаления ε-порождающих нетерминалов можно оценить, как $O(|P|h)$, где h – максимальная глубина вывода ε для изначальной грамматики.

2.7 Обработка стартового состояния и удаление цепных правил. Асимптотика приведённых шагов.

Обработка стартового состояния

Мы доказали $L(G_5) = L(G_4) \setminus \{\varepsilon\}$:

- Заводим новый нетерминал S', делаем его стартовым
- Добавляем правило $S' \to S$
- Если $S \vdash \varepsilon$, то добавляем $S' \to \varepsilon$

Получили грамматику $L(G_6)$.

Удаление цепных правил

Сделаем транзитивное замыкание:

$$B \to B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to CD \mid a$$

заменим на:

$$B \to CD \mid a$$

Дополнительно удалим правила вида $A \to B$.
Получили грамматику $L(G_7)$.

Утверждение 2.7.1.

$$L(G_6) = L(G_7)$$

Доказательство. Полностью аналогично доказательству после удаления ε-порождающих.

$\square$

Асимптотики

1. Для обработки стартового состояния нужно понять, было ли оно ε-порождающим, то есть достаточно запустить BFS и проверить, дошли ли мы до правила, содержащего ε в правой части – $O(|N| + |P|)$

2. Для удаления цепных правил требуется транзитивное замыкание, которое можно построить, используя алгоритм Флойда-Фалкерсона: $O(h^3)$, где h – максимальная глубина вывода.

2.8 Алгоритм Кока-Янгера-Касами синтаксического разбора для КС-грамматик

Алгоритм построен на динамике по подотрезкам: заведём массив $d[A][i, j] = \mathbb{I}(A \vdash w[i : j])$, очевидно, что $w \in L(G) \Leftrightarrow d[S][0, |w|] = \text{True}$

Индукция по длине слова:

- $A \vdash w[i : j]$. Тогда существуют $B, C : A \vdash_1 BC, B \vdash w[i : k], C \vdash w[k : j] \Rightarrow d[B][i : k] = \text{True}, d[C][k : j] = \text{True}$

- $d[A][i : j] = \text{True}$. Тогда для некоторого midPosition сработал переключатель (см. код алгоритма). Делаем индукционный переход.

Асимптотика алгоритма – $O(|N|^3 \cdot |P|)$

2.9 Лемма о разрастании для КС-языков

Лемма о разрастании для КС-языков

Лемма 2.9.1. *Пусть L – КС-язык. Тогда*

$$\exists p : \forall w \in L : |w| \geqslant p : \exists x, u, y, v, z \in \Sigma^* : w = xuyvz :$$
$$|uv| > 0, |uyv| \leqslant p : \forall k \geqslant 0 : xu^k yv^k z \in L$$

Доказательство. Рассмотрим грамматику G в нормальном форме Хомского: $L = L(G)$. Каждый уровень дерева вывода увеличивает длину слова не более, чем вдвое. Если $p = 2^{|N|}$, то $|w| \geqslant p \geqslant 2^{|N|}$. Тогда глубина дерева разбора более $|N|$ – воспользуемся принципом Дирихле.

Найдётся такой нетерминал A:

$$S \vdash xAz \vdash xuAvz \vdash xuyvz; \quad A \vdash uAv$$

Среди таких A рассмотрим такое, что его глубина относительно корня наибольшая. Тогда $|uyv| \leqslant 2^{|N|} = p$ (иначе были бы повторения) □

Пример не КС-языка

Пример. Язык

$$\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

не является КС-языком.

Доказательство. Воспользуемся отрицанием леммы о разрастании. □

2.10 МП-автомат

Определение 2.10.1. Автомат с магазинной памятью – МП-автомат:

- Q – множество состояний, $|Q| < +\infty$
- Σ – алфавит, $|\Sigma| < +\infty$
- Γ – стековый алфавит, $|\Gamma| < +\infty, \Gamma \cap \Sigma = \varnothing$
- $\Delta \subset (Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Q \times \Gamma^*), |\Delta| < +\infty$
- $q_0 \in Q$ – стартовое состояние.
- $F \subset Q$ – множество завершающих состояний.

Определение 2.10.2. Конфигурацией в МП-автомате называется тройка $\langle q, u, \gamma\rangle \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.

Определение 2.10.3. $\vdash$ – наименьшее рефлексивное транзитивное отношение, что

$$\forall\langle q_1, u, \theta\rangle \to \langle q_2, \beta\rangle \in \Delta : \ \forall v \in \Sigma^*, \eta \in \Gamma^* \ \langle q_1, uv, \eta\alpha\rangle \vdash \langle q_2, v, \eta\beta\rangle$$

Определение 2.10.4. Языком, распознаваемым МП-автоматом, называется

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F : \ \langle q_0, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle\}$$

Утверждение 2.10.1. *Для любого МП-автомата существует эквивалентный МП-автомат, для которого выполнено соотношение:*

$$\forall\langle q_1, u, \alpha\rangle \to \langle q_2, \beta\rangle \in \Delta : \ |u| \leqslant 1, |\alpha| + |\beta| \leqslant 1$$

Доказательство. Действие "считать n букв со входа"растягиваем в "считать n раз 1 букву со входа".

Действие "снять со стека n букв и положить на него m букв"растягиваем в "снять n раз со стека 1 букву, положить m раз на стек 1 букву". □

Утверждение 2.10.2. *Для любого МП-автомата существует эквивалентный МП-автомат, для которого выполнено соотношение:*

$$\forall\langle q_1, u, \alpha\rangle \to \langle q_2, \beta\rangle \in \Delta : \ |u| \leqslant 1, |\alpha| + |\beta| = 1$$

Доказательство. Аналогично предыдущему утверждению, однако останутся переходы

$$\langle q_1, w, \varepsilon\rangle \to \langle q_2, \varepsilon\rangle \in \Delta$$

Вводим dummy стековый элемент T и превращаем переход выше в два последовательных перехода

$$\langle q_1, w, \varepsilon\rangle \to \langle q', T\rangle, \langle q', \varepsilon, T\rangle \to \langle q_2, \varepsilon\rangle$$

□

2.11 Построение МП-автомата по КС-грамматике

Теорема 2.11.1. *Для любой КС-грамматики G существует МП-автомат M:*

$$L(M) = L(G)$$

Доказательство. Пусть $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$, определим автомат

$$M = \langle \{q_0, q_1\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \Delta, q_0, \{q_1\}\rangle$$

причём Δ состоит из правил:

- $\langle q_0, \varepsilon, S\rangle \to \langle q_1, \varepsilon\rangle$
- $\langle q_0, \varepsilon, \alpha\rangle \to \langle q_0, A\rangle$, если $A \to \alpha \in P$
- $\langle q_0, a, \varepsilon\rangle \to \langle q_1, a\rangle, a \in \Sigma$

Хотим доказать, что

$$\alpha \vdash w \Leftrightarrow \langle q_0, w, \varepsilon\rangle \vdash_M \langle q_0, \varepsilon, \alpha\rangle$$

Вначале для $\Rightarrow$:

Индукция по длине вывода:

- База $\alpha \vdash_0 w$. Тогда $\alpha = a = w \Rightarrow \langle q_0, a, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon, a\rangle$ по третьему типу правил.
- Для перехода рассмотрим $A \vdash_1 \alpha_1 \cdots \alpha_k \vdash w_1 \cdots w_k = w$, где α_i – нетерминалы, а w_i – ерминалы
- По предположению, $\langle q_0, w_j, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon, \alpha_j\rangle$
- Тогда

$$\langle q_0, w_1 \cdots w_k, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, w_2 \cdots w_k, \alpha_1\rangle \vdash \cdots \vdash \langle q_0, \varepsilon, \alpha_1 \cdots \alpha_k\rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon, A\rangle$$

Теперь $\Leftarrow$:

Индукция по длине вывода:

- База: 1 шаг
  - $\langle q_0, a, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon, a\rangle \Rightarrow a \vdash a$
  - $\langle q_0, \varepsilon, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon, A\rangle \Rightarrow A \to \varepsilon \in P$
- Переход: $\langle q_0, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon, \alpha_1 \cdots \alpha_k\rangle \vdash_1 \langle q_0, \varepsilon, A\rangle$
  - При этом $A \to \alpha_1 \cdots \alpha_k \in P$
  - Найдём момент, когда на стеке появится α_1: $\langle q_0, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, w', \alpha_1\rangle$
  - Тогда $w = u_1 w'$, причём $\langle q_0, u_1, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon, \alpha_1\rangle$. Тогда $\alpha_1 \vdash u_1$.
  - Аналогично, $\alpha_j \vdash u_j$ и $A \vdash \alpha_1 \cdots \alpha_k \vdash w$

Для доказательства совпадения языков остаётся заметить эквивалентность следующих фактов:

- $w \in L(M)$
- $\langle q_0, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_1, \varepsilon, \varepsilon\rangle$
- $\langle q_0, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_0, \varepsilon, S\rangle \vdash \langle q_1, \varepsilon, \varepsilon\rangle$
- $S \vdash w$
- $w \in L(G)$

$\square$

3 Построение КС-грамматики по МП-автомату

Теорема 3.0.1. *Каждому МП-автомату M соответствует КС-грамматика G:*

$$L(M) = L(G)$$

Доказательство. Определим множество нетерминалов N, как

$$N = \{A_{ij} \mid q_i, q_j \in Q\} \cup S$$

Правила будем строить так:

- $A_{ij} \to uA_{st}vA_{rj}$, если
  - $\langle q_i, u, \varepsilon\rangle \to \langle q_s, A\rangle$
  - $\langle q_t, v, A\rangle \to \langle q_r, \varepsilon\rangle$
- $A_{ij} \to \varepsilon$
- $S \to A_{0j}$, если $q_j \in F$

Хотим показать, что

$$A_{ij} \vdash w \Leftrightarrow \langle q_i, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$$

В начале $\Rightarrow$:

- База: $A_{ij} \vdash_1 w$. Тогда $w = \varepsilon, i = j$. Значит, $\langle q_i, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$
- Переход: $A_{ij} \vdash_1 uA_{st}vA_{rj} \vdash uzvy$
  - По построению $\langle q_i, u, \varepsilon\rangle \to \langle q_s, A\rangle$, $\langle q_t, v, A\rangle \to \langle q_r, \varepsilon\rangle$
  - По предположению: $A_{st} \vdash z \Rightarrow \langle q_s, z, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_t, \varepsilon, \varepsilon\rangle$ и $A_{rj} \vdash y \Rightarrow \langle q_r, y, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$
  - Тогда в итоге

$$\langle q_i, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_i, uzvy, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_s, zvy, A\rangle \vdash \langle q_t, vy, A\rangle \vdash \langle q_r, y, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$$

Теперь для $\Leftarrow$:

- База: $\langle q_i, w, \varepsilon\rangle \vdash_0 \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$. Тогда $i = j, w = \varepsilon, A_{ii} \to \varepsilon$
- Переход: $\langle q_i, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$

– Идя по цепочке вывода, $\exists w = uzvy$, причём

$$\langle q_i, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_i, uzvy, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_s, zvy, A\rangle \vdash \langle q_t, vy, A\rangle \vdash \langle q_r, y, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$$

– По предположению: $A_{st} \vdash z \Leftarrow \langle q_s, z, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_t, \varepsilon, \varepsilon\rangle$ и $A_{rj} \vdash y \Leftarrow \langle q_r, y, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$

– Тогда

$$A_{ij} \vdash uA_{st}vA_{rj} \vdash uzvy = w$$

Для доказательства теоремы заметим эквивалентность следующих утверждений:

- $w \in L(G)$
- $S \vdash w$
- $\exists q_j \in F:\ S \vdash A_{0j} \vdash w$
- $\exists q_j \in F:\ \langle q_0, w, \varepsilon\rangle \vdash \langle q_j, \varepsilon, \varepsilon\rangle$
- $w \in L(M)$

□

3.1 Нормальная форма ГРейбах для КС-грамматик

Определение 3.1.1. КС-грамматика находится в нормальной форме Грейбах, если все правила имеют такой и только такой вид:

- $A \to a, a \in \Sigma$
- $A \to aB, A \in \Sigma;\ B \in N;\ B \neq S$
- $A \to aBC, A \in \Sigma;\ B, C \in N;\ B, C \neq S$
- $S \to \varepsilon$

Теорема 3.1.1. *Любая КС-грамматика может быть представима в НФ Грейбах*

Доказательство. Определим оператор левого деления

$$B \setminus A := \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in B:\ xw \in A\}$$

По исходной грамматике $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ построим

$$G_g = \langle \{S\} \cup \{B \setminus A \mid A, B \in N\}, \Sigma, P_g, S\rangle$$

Как будут выглядеть правила новой грамматики?

- $S \to a(A \setminus S)$, если $A \to a$
- $A \setminus A \to \varepsilon, A \in N$
- $B \setminus A \to e(E \setminus D)(C \setminus A)$, если $C \to BD$ и $E \to e$

По сути, должны доказать

$$B \setminus A \vdash w \Leftrightarrow A \vdash Bw$$

В начале $\Rightarrow$:

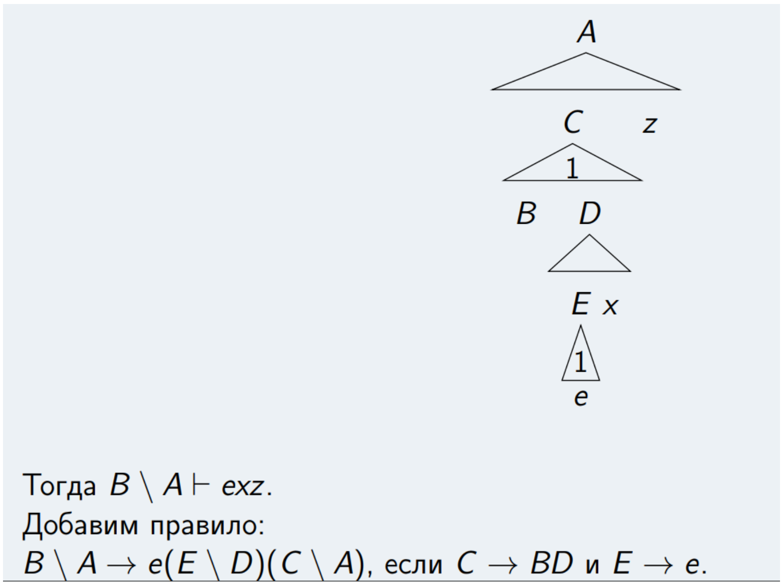
Индукция по длине вывода

- База: $B \setminus A \vdash_1 w$. Тогда $A = B, w = \varepsilon$. Значит, $A \vdash A\varepsilon$.
- Переход: $B \setminus A \vdash_1 e(E \setminus D)(C \setminus A) \vdash euv$.
  - По предположению: $E \setminus D \vdash u \Rightarrow D \vdash Eu$, $C \setminus A \vdash v \Rightarrow A \vdash Cv$
  - По условию $C \vdash BD$
  - $A \vdash Cv \vdash BDv \vdash BEuv \vdash Beuv \vdash Bw$

Теперь $\Leftarrow$:

Индукция по длине вывода:

- База: $A \vdash_0 Bw$. Тогда $A = B, w = \varepsilon$. Значит, $A \setminus A \vdash \varepsilon$.
- Переход: смотри картинку



Осталось доказать равенство языков, для этого приведём изначальную грамматику к нормальной форме Хомского G_h.

Если $\varepsilon \in L(G_h)$, то $\varepsilon \in L(G_g)$ по правилу $S \to \varepsilon$.

Пусть $w = au, a \in \Sigma$. Следующие утверждения эквивалентны:

- $au \in L(G_h)$
- $\exists A \to a: \ S \vdash Au \vdash_1 au$
- $\exists A \to a: \ S \vdash a(A \setminus S) \vdash au$
- $au \in L(G_g)$

Осталось убрать правила $A \setminus A \to \varepsilon$: аналогично удалению ε-порождающих. $\square$

Замечание. Аналогично можем определить обратную нормальную форму Грейбах с правилами вида:

- $A \to a$
- $A \to Ba$
- $A \to CBa$
- $S \to \varepsilon$

4 Парсеры

4.1 Корректность алгоритма Эрли

Определение 4.1.1. Для каждого правила $A \to \alpha\beta$ определим ситуацию:

$$(A \to \alpha \cdot \beta, i) \in D_j, i \in [0 : |w|], j \in [0 : |w|]$$

где i отвечает за то, сколько букв было прочитано до "захода"в это правила, а j за то, сколько букв прочитано на момент символа $\cdot$.

На протяжении всего алгоритма используем 3 операции:

- Scan – читаем букву
- Predict – спускаемся вниз
- Complete – поднимаемся вверх

Добавим правило $S' \to S$, тогда стартовой ситуацией определим

$$(S' \to \cdot S, 0) \in D_0$$

а финальной будет

$$(S' \to S \cdot , 0) \in D_{|w|}$$

Корректность вывода при наличии ситуации гарантируется леммой:

Лемма 4.1.1. *Каждой ситуации соответствует вывод:*

$$\begin{aligned}(A \to \alpha \cdot \beta, i) \in D_j \Leftrightarrow \exists \psi \in (N \cup \Sigma)^* :\ & \alpha \vdash w[i : j] \\ & S' \vdash w[0 : i]A\psi \vdash_1 w[0 : i]\alpha\beta\psi\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем индукцией по количеству эффективных шагов в алгоритме:

- База
  - Появилась ситуация $(S' \to \cdot S, 0) \in D_0$
  - $S' \vdash \varepsilon w[0 : 0]S'\varepsilon = w[0 : 0]S\varepsilon, \alpha = \varepsilon = w[0 : 0]$
- Переход при Scan

- $(A \to \alpha \cdot a\beta, i) \in D_j, w[j] = a \Rightarrow (A \to \alpha a \cdot \beta, i) \in D_{j+1}$
- Предположение: $S' \vdash w[0:i]A\psi \vdash_1 w[0:i]\alpha a\beta\psi$
- $\alpha \vdash w[i:j], \alpha a \vdash w[i:j+1]$

- Переход при Predict
  - $(B \to \cdot\gamma, j) \in D_j$ появилась при Predict после ситуации $(A \to \alpha \cdot B\beta, i) \in D_j$
  - Предположение $S' \vdash w[0:i]A\psi \vdash_1 w[0:i]\alpha B\beta\psi$
  - $\alpha \vdash w[i:j] \Rightarrow w[0:i]\alpha \vdash w[0:j]$
  - $S' \vdash w[0:i]\alpha B\beta\psi \vdash w[0:j]B\beta\psi \vdash_1 w[0:j]\gamma\beta\psi$
- Переход при Complete
  - $(A \to \alpha B \cdot \beta, i) \in D_j$ появилась после ситуаций: $\exists k: \ (A \to \alpha \cdot B\beta, i) \in D_k; \ \ \exists (B \to \gamma \cdot, k) \in D_j$
  - Предположение $S' \vdash w[0:i]A\psi \vdash_1 w[0:i]\alpha B\beta\psi, \alpha \vdash w[i:k]$
  - Предположение 2: $B \vdash_1 \gamma \vdash w[k:j]$
  - Итого $\alpha B \vdash w[i:k]w[k:j] = w[i:j]$

$\square$

4.2 Полнота алгоритма Эрли

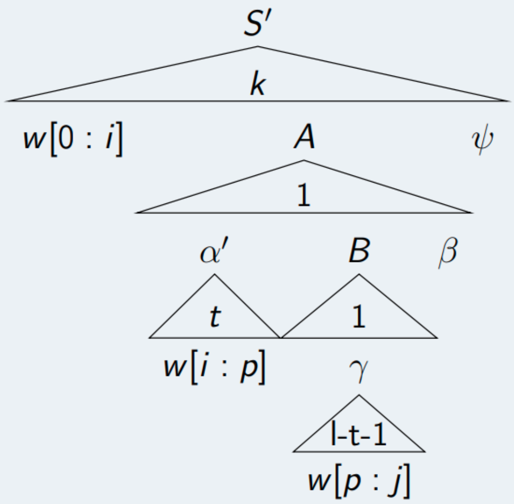
Каждому выводу соответствует ситуация:

$$S' \vdash_k w[0:i]A\psi \vdash_1 w[0:i]\alpha\beta\psi, \alpha \vdash_l w[i:j]$$

идукцией по $(j, l+k, l)$

- База $j = 0, k + l = 0$
  - $l = 0 \Rightarrow \alpha = \varepsilon$
  - $k = 0 \Rightarrow w[0:i] = \varepsilon, A = S'$
  - $S' \to S \Rightarrow (S' \to \cdot S, 0) \in D_0$
- Переход: рассмотрим последний символ α. Возможны 3 случая:
  1. $\alpha = \alpha' b$:
     - $\alpha' \vdash_l w[i:j-1], w[j] = b$
     - $S' \vdash w[0:i]\alpha' b\beta\psi$
     - Предположение $(j-1, k+l, k): \ (A \to \alpha' \cdot bB, i) \in D_{j-1}$
     - $(A \to \alpha' b \cdot B, i) \in D_j$ по Scan

2. $\alpha = \alpha' B$



$$\left.\begin{array}{l} S' \vdash_{k+t+1} w[0:p]B\beta\psi \\ B \vdash_{l-t-1} w[p:j] \end{array}\right\}$$

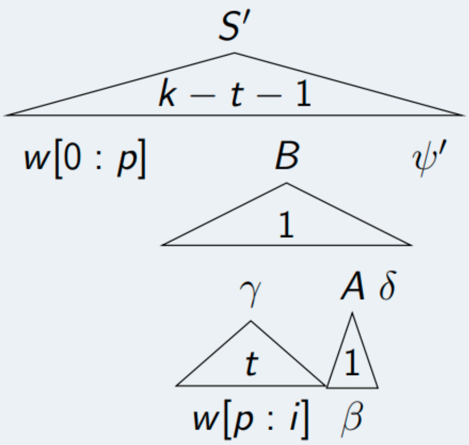
Для $(j, k+l, l-t-1)$: $(B \to \gamma\cdot, p, j)$

$$\left.\begin{array}{l} S' \vdash_{k} w[0:i]A\psi \\ \alpha' \vdash_{t} w[i:p] \end{array}\right\}$$

Для $(p, k+t, t)$: $(A \to \alpha' \cdot B\beta, i, p)$

$(A \to \alpha' B \cdot \beta, i, j)$ - Complete!

3. $\alpha = \varepsilon$



$$\left.\begin{array}{l} S' \vdash_{k-t-1} w[0:p]B\psi' \\ \gamma \vdash_{t} w[p:i] \end{array}\right\}$$

Для $(j, k-1, t)$: $(B \to \gamma \cdot A\delta, p, i)$

$A \to \beta \in P$

$(A \to \cdot\beta, i, i)$ - Predict!

4.3 Оптимальный алгоритм и обоснование сложности

Оптимальный алгоритм

- В D_j надо быстро обращаться к правилам с $\cdot B$
- Храним в виде $D_j[B]$
- Правая часть – в виде связного списка
- Быстрее – вычислить id для каждой ситуации
- Меньше памяти – вычислить hash для каждой ситуации

Обоснование сложности

Пусть $|G|$ – суммарное количество символов в правых частях правил.

- Сложность Scan

  Правила из $D_k[w[j]] \Rightarrow O(|D_j[w[j]]|) = O(|D_j|) = O(|w||G|)$

- Сложность Predict

  Перебираем правила $B \to \gamma$ – $O(|P|)$. Рассматриваем $D_j[B]$ и помечаем, рассмотрена ли была ситуация с этим B.

  Сложность для $D_j:\ O(|D_j||P|) = O(|w||G|^2)$

- Сложность Complete

  Рассматриваем правила $(B \to \gamma\ \cdot, k) \in D_j$. Делаем перебор по $D_k[B] \Rightarrow$ количество обращений к $D_k:\ O(|D_0| + |D_1| + \dots + |D_j|) = O(|w|^2|G|)$.

  Количество правил $B \to \gamma:\ O(|G|) \Rightarrow$ асимптотика шага – $O(|w|^2|G|^2)$

Количество шагов: $O(|w|)$
Итого на Scan: $O(|w|^2|G|)$
Итого на Predict: $O(|w|^2|G|^2)$
Итого на Complete: $O(|w|^3|G|^2)$