Содержание

1 **Теорема Римана об осцилляции** **2**

2 **Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.** **5**

3 **Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке** **7**

4 **Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.** **9**

5 **Теорема Жордана.** **10**

6 **Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции** **12**

7 **Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами** **14**

1 Теорема Римана об осцилляции

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S, если любая окресность x содержит хотя бы одну точку множества S.

Определение 1.2. Множество всех точек прикосновения S называется **замыканием** S.

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. ($\operatorname{supp} f$) Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G, если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – *линейное нормированное пространство.*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. *Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменим $\mathbb{R}$ на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достатончо доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.

- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N, то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммиремых функций.

- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

  $$\exists \{h_n\} : \ h_n \uparrow f$$

  Теорема Леви гарантирует, что

  $$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \to \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

  Значит

  $$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

  То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

  $$h_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k:\ E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0:\ \exists\text{элементарное } M_\varepsilon:\ \mu(E_k \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E\triangle M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E\triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

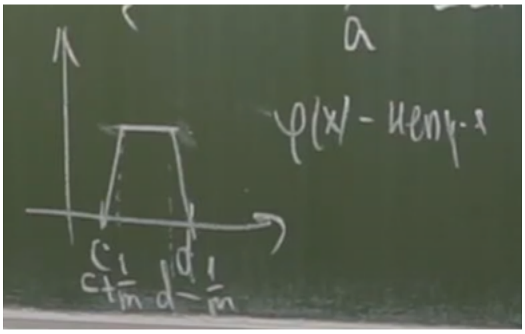

Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,\,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N,\,N]}:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C[-N, N]\ \|f|_{[-N,\,N]} - g\|_{L_1[-N,\,N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_{-N}^{N} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a,b]$:

$$\lim_{\delta\to+0}\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|d\mu(x)=0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists g\in C[a,b]:\ \int_a^b|f(x)-g(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a,b]\Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta:\ |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h\ 0\leqslant h\leqslant\delta$:

$$\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|d\mu(x)\leqslant\int_a^{b-h}|f(x+h)-g(x+h)|d\mu(x)+\int_a^{b-h}|f(x)-g(x)|d\mu(x)+$$
$$+\int_a^{b-h}|g(x+h)-g(x)|d\mu(x)<\varepsilon$$

Так как f суммируема на $\mathbb{R}$, то $\exists N\in\mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]}|f(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a,b]:=[-N-1,N+1]$ и введём $g:=f\mathbb{I}_{[-N,\,N]}\in L_1[a,b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists\delta\in(0,1)\,\forall h,0\leqslant h\leqslant\delta:\ \int_a^{b-h}|g(x+h)-g(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t,|t|<\delta$:

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)=\int\limits_{\{x,\,x+t\}\subseteq[a,\,b]}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)+\int\limits_{\{x,\,x+y\}\nsubseteq[a,\,b]}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)<\varepsilon$$

$\square$

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f\in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\sin(\lambda x)d\mu(x)=0$$

Доказательство.

$$\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x)\overset{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=}-\int_{I-\frac{\pi}{\lambda}}f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)=$$
$$-\frac{1}{2}\int_I\left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)-\frac{1}{2}\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I}f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)$$

Заметим, что

$$\left|\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I} \left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right| d\mu(t) = $$
$$= \int_{I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})} |f(x)| d\mu(t) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu\left(I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})\right) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

Также очевидно, что

$$\left|\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_I \left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right| d\mu(t) \overset{\text{по пред. Лемме}}{\to} 0$$

□

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

Определение 2.1. $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi,\pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{iku}+e^{-iku}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)u}-1}{e^{iu}-1} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}-e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}-e^{-i\frac{u}{2}}}\cdot\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f \in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt))\right)d\mu(t) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)d\mu(t)$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x + u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T, T-периодичной функции одинаков. □

Лемма 2.2. *Пусть $f \in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \to +\infty$ равномерно по x.*

Доказательство. g – ограниченная $\Rightarrow \exists M : \forall u\, |g(u)| \leqslant M$.

f – измеримая $\Rightarrow$ по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi,\pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi}|f_2(t)|d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 – непрерывная на компакте $[-\pi,\pi] \Rightarrow \exists B\, \forall u :\ |f_1(u)| \leqslant B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F:

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t+h) - F(t)|d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ:

$$a_n(\chi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi(t)\cos(nt)d\mu(t) \overset{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\cos(nu)d\mu(u) =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\chi\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \chi(t)\right]\cos(nt)d\mu(t) \Rightarrow$$
$$|a_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\chi\right)$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim_{n\to+\infty}\omega_1(\frac{\pi}{n},\chi) = 0$ равномерно по x:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\chi(t+h) - \chi(t)|d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t)|d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h) - f(x+t)|\cdot|g(t+h)|d\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\cdot|g(t+h) - g(t)|d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+h) - f(u)|d\mu(u) + \int_{-\pi}^{\pi}|f_1(x+t)|\cdot|g(t+h) - g(t)|d\mu(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$
$$\leqslant M\omega_1(\frac{\pi}{n}, f) + B\omega_1(\frac{\pi}{n}, g) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta \to 0$. Что и требовалось доказать. □

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a,b) \subset [-\pi,\pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a',b'] \subset (a,b)$.

Доказательство. Так как $[a',b']$ содержится в (a,b), то

$$\exists \eta > 0\, \forall x \in [a',b']\, \forall t, 0 \leqslant |t| < \eta :\ x+t \in (a,b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\eta,\eta) \\ 1, t \in [-\pi,\pi] \setminus (-\eta,\eta) \end{cases}$$

Кроме того, λ – 2π-периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t)D_n(t)d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t \notin (-\eta,\eta)$, то $\lambda(\eta) = 1$, ничего не меняем. Если же $|t| < \eta$, то $x+t \in (a,b)$, где $f = 0$, поэтому получили, что подыинтегральные функции совпадают везде на $[-\pi,\pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})\sin(nt)d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t)\cos(nt)d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме.

□

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Теорема 3.1. *Признак Дини.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0,\delta), \delta > 0$, где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $S_n(f,x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f,x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0))D_n(u)d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв $\sin((n+\frac{1}{2})t) = \sin(nt)\cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt)\sin(\frac{t}{2})$ в формуле ядра Дирихле:

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S(x_0) = \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t}\sin(nt)d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(nt)}{2}d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\sin(nt)\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\sin(nt)\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right)d\mu(t) \end{aligned}$$

По условию, φ_{x_0} суммируемая $\Rightarrow$ по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))$ также суммируемая $\Rightarrow$ второе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta, \pi]$ и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} = \frac{1 - \frac{t^2}{8} + o(t^3)}{2\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + o(t^4)\right)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{8} - t + \frac{t^3}{24} + o(t^4)}{t^2 + o(t^3)} \overset{t\to\infty}{\to} 0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right) \in L_1[0, \delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции. □

Утверждение 3.1. *Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha \in (0, 1]$ в точке x_0, если $\exists$ конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C, \delta > 0$ такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta, |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \leqslant Ct^\alpha, |f(x_0-t) - f(x_0-0)| \leqslant Ct^\alpha$$

Определение 3.2. Обобщённой односторонней производной функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t\ to+0} \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{-t}$$

Теорема 3.2. *Признак Липшица.*

Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. По условию теоремы

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

Значит функций φ_{x_0} из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{(f(x_0+t) - f(x_0+0)) + (f(x_0-t) - f(x_0-0))}{t}$$

То, что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left|\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t} d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-0)|}{t} d\mu(t) \leqslant$$
$$2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}d\mu(t) = 2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}dt = 2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Что и требовалось доказать. □

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

Теорема 4.1. *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если F – 2π-периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье F.

Доказательство. $f(x) := F'(x) \in L_1$. Значит $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)d\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\cos(nx)d\mu(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi}F(x)\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)d\mu(x) = nB_n$$

Аналогично докажем, что $b_n = -nA_n$, а также заметим, что $a_0 = 0$.

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы. □

Следствие. *Если $f, \cdots, f^{(k-1)}$ – 2π-периодические, и $f^{(k-1)}$ – абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют:*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Пусть $k = 1$: f – абсолютно непрерывная, значит $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$. По теореме об осцилляции: $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции. □

Теорема 4.2. *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если f – функция ограниченной вариации на периоде 2π, то её коэффициенты фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+\frac{\pi}{n}) - f(x)\right]\cos(nx)dx = \dots =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]\cos(nx)dx, \quad \forall k = \overline{1,n}$$

Сложив все эти n равенств, получим:

$$|na_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right|dx \leqslant V(f)$$

□

Теорема 4.3. *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если $f \in L^1_{2\pi}, f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ – её тригонометрический ряд Фурье, $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)d\mu(t)$ – неопределённый интеграл Лебега для f, то $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos(nx)+a_n\sin(nx)}{n}$, где ряд равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

Доказательство. $F(x)$ – абсолютно непрерывная, $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\mu(t) = \pi a_0$. $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – тоже абсолютно непрерывная на периоде и 2π-периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)'$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье для $F(x) - \frac{a_0}{2}x$. Но с другой стороны $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Равномерная сходимость проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. □

5 Теорема Жордана.

Возможно тут должна быть какая-то другая теорема Жордана, но пока здесь признак Жордана – на консультации уточню.

Теорема 5.1. *Признак Жордана.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in [a, b]$ непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва $x_0 \in [a, b]$.

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

а для $-t$ аналогично.

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta :\ 0 \leqslant f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists\delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)dt = (f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0))\int_{\delta_2}^{\delta_1}\frac{\sin(nt)}{t}dt$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ сходится, поэтому если обзначим за $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t}dt$, то $G(v)$ будет ограничена, т.е. $\exists C :\ |G(v)| \leqslant C$.

Но теперь рассмотрим $\forall A$:

$$\left|\int_0^A \frac{\sin(nt)}{t}dt\right| \overset{nt=u}{=} \left|\int_0^{nA}\frac{\sin(u)}{u}du\right| \leqslant C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left|\int_0^{\delta_1}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)dt\right| \leqslant 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ. Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что $S(x_0) = f(x_0)$. Применим к каждому из трёх последих слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти δ_1 из текущего доказательство независимо от x_0. Также независимо от x_0 мы ограничиваем интеграл $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утверждение этой теоремы доказано. $\square$

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции

Теорема 6.1. *Коровкина.*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ *такова, что* $L_n(e_i) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_i$ *на* $[a,b]$, $e_i(x) = x^i, i = 0,1,2$, *то*

$$\forall f \in C[a,b] : L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $[a,b]$.

Доказательство. $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ ограничена:

$$\exists M : -M \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b]$$

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t, x \in [a,b], |t-x| < \delta : -\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$$

Заметим, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)\, \forall x \in [a,b] \Rightarrow L_n(f_1) \leqslant L_n(f_2)\, \forall x \in [a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t, x \in [a,b] : -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}\psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t)$$

где $\psi_x(t) = (t-x)^2$.

Откуда это следует? Если $|t-x| < \delta$, то мы только ослабляем условие равномерной непрерывности, значит неравенство сохраняется. Если же $|t-x| \geqslant \delta \Rightarrow \frac{\psi(t)}{\delta^2} = \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geqslant 1 \Rightarrow$ неравенство сохраняется благодаря ограниченности f.

Зафиксировав произвольный x, применяем оператор L_n относительно переменной t. Все неравенства сохраняются:

$$-\varepsilon L_n(e_0, x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x) < L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x) < \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x)$$

Заметим, что

$$L_n(\psi_x, x) = L_n((t-x)^2, x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) = L_n(e_2, x) - 2x L_n(e_1, x) + x^2 L_n(e_0, x) \rightrightarrows \\ e_2(x) - 2x e_1(x) + x^2 e_0(x) = x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0$$

Значит

$$\exists N_1\, \forall n > N\, \forall x \in [a,b] : |L_n(\psi_x, x)| \leqslant \frac{\varepsilon \delta^2}{4M}$$

А из того, что $L_n(e_0) \rightrightarrows e_0$:

$$\exists N_2\, \forall n > N_2\, \forall x \in [a,b] : |L_n(e_0, x)| < \frac{3}{2}$$

Также не забываем, что:

$$|L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leqslant \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x, x)$$

Объединяя эти три условия, получим, что

$$\forall n > \max(N_1, N_2) : \ |L_n(f,x) - f(x)L_n(e_0,x)| \leqslant 2\varepsilon$$

Снова используем тот факт, что $L_n(e_0) \rightrightarrows e_0$:

$$\exists N_3 \, \forall n > N_3 \, \forall x \in [a,b] : \ |L_n(e_0,x) - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Значит

$$|f(x)L_n(e_0,x) - f(x)| \leqslant |f(x)| \cdot |L_n(e_0,x) - 1| \leqslant \varepsilon$$

Объединяя ВСЕ неравенства, получим:

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3) \, \forall x \in [a,b] : \ |L_n(f,x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$$

□

Теорема 6.2. *Коровкина'*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ такова, что $L_n(e_i) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_i$ на $\mathbb{R}$, $e_0(x) = 1, e_1(x) = \cos(x), e_2(x) = \sin(x)$, то

$$\forall f \in C_{2\pi} : \ L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Аналогично немодифицированной теореме, только вместо функции ψ_x введём

$$\varphi_x(t) = \sin^2(\frac{t-x}{2}) = \frac{1-\cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t)\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(t)\sin(x) = \\ \frac{1}{2}e_0(t) - \frac{1}{2}\cos(x)e_1(t) - \frac{1}{2}\sin(x)e_2(t)$$

Тогда

$$L_n(\varphi_x, x) = \frac{1}{2}L_n(e_0,x) - \frac{1}{2}\cos(x)L_n(e_1,x) - \frac{1}{2}\sin(x)L_n(e_2,x) \rightrightarrows \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2(x) - \frac{1}{2}\sin^2(x) = 0$$

□

Теорема 6.3. *Фейера.*

Для любой непрерывной 2π-периодической функции последовательность средних арифеметических частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье равномерно на $\mathbb{R}$ сходится к ней.

Доказательство. Распишем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\sigma_n(f,x) := \frac{S_0(f,x) + S_1(f,x) + \cdots + S_n(f,x)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=0}^{n} D_k(t)dt = \\ \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin^2(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)\sin(\frac{t}{2})dt = \\ \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}(\cos(kt) - \cos((k+1)t))dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})}(1 - \cos((n+1)t)) = \\ \frac{1}{(n+1)2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot \frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}dt$$

Получается, $\sigma_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ образует последовательность линейных положительных операторов. Это значит, что нам нужно проверить сходимость лишь на трёх функциях: $e_0 := 1, e_1 := \sin(x), e_2 := \cos(x)$.

$$\sigma_n(e_0) = e_0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \sigma_n(e_1) = e_1 \cdot \frac{n}{n+1}, \sigma_n(e_2) = e_2 \cdot \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Коровкина, получаем, что $\forall f \in C_{2\pi} :\ \sigma_n(f) \rightrightarrows f$ □

7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами

Теорема 7.1. *Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.*

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ может быть с любой степенью точности равномерно приближена алгебраическими многочленами, то есть

$$\forall f \in C[a, b]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists P_n\, \forall x \in [a, b] :\ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$.

Введём многочлены Берштейна:

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Мы можем рассматривать их, как операторы $B_n :\ C[0, 1] \to C[0, 1]$. Очевидно, что они линейные и положительные, поэтому достаточно проверить сходимость трёх функций: $1, x, x^2$.

$$B_n(e_0, x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1 = e_0(x)$$

Рассмотрим $g(t) := (tx + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k x^k (1-x)^{n-k}$. Тогда

$$g'(t) = nx(tx + (1-x))^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k t^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g'(1)$ получим равенство:

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Rightarrow B_n(e_1, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x)$$

Взяв вторую производную от g, получим:

$$n(n-1)x^2(tx + (1-x))^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k t^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g''(1)$ получим равенство:

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - nx \Rightarrow$$

$$B_n(e_2, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_2(x)$$

Получили, что для оператора B_n справедлива теорема Коровкина и утверждение доказано.

Для завершения доказательства перейдём к произвольному отрезку $[a,b]$: для $f \in C[a,b]$ введём $F(x) = f(x(b-a)+a) \in C[0,1]$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N\, \forall x \in [0,1] :\ |B_n(F,x) - F(x)| < \varepsilon$$

Осталось заметить, что если в многочлен Бернштейна подставить какую-то линейную функцию, то получится какой-то многочлен:

$$\Rightarrow |B(F, \frac{t-a}{b-a}) - f(t)| < \varepsilon$$

$\square$

Следствие. *Из данной теоремы и теормы Коровкина' следует теорема Вейшерштраса о приближении непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими многочленами:*

$$\forall f \in C_{2\pi}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists T_n := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) :\ |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$