Содержание

1 Теорема Римана об осцилляции **2**

1 Теорема Римана об осцилляции

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S, если любая окресность x содержит хотя бы одну точку множества S.

Определение 1.2. Множество всех точек прикочновения S называется **замыканием** S.

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. (supp f) Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G, если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – *линейное нормированное пространство.*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. *Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменим $\mathbb{R}$ на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достатончо доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.

- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N, то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммиремых функций.

- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

  $$\exists \{h_n\} : \ h_n \uparrow f$$

  Теорема Леви гарантирует, что

  $$\int_a^n h_n(x) d\mu(x) \to \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

  Значит

  $$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

  То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

  $$h_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k:\ E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0 :\ \exists \text{элементарное } M_\varepsilon :\ \mu(E_k \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \triangle M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

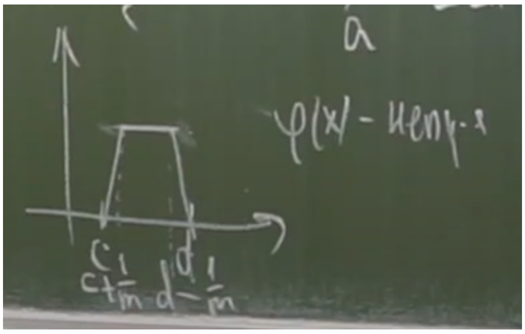

Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,\, d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

- Докажем для любой неотрицательной: как обычно введём срезки, для которых рассуждения аналогичны предыдущему пункту.
- Для произвольных расписываем как сумму знакопостоянных.

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N,\, N]} :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C[-N, N]\ \|f|_{[-N,\, N]} - g\|_{L_1[-N,\, N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейных образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\, N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_{-N}^{N} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\, N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

$\square$

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)=0$$

Доказательство. Докажем, что для $f\in L_1[a,b]$:

$$\lim_{\delta\to+0}\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|d\mu(x)=0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists g\in C[a,b]:\ \int_a^b|f(x)-g(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a,b]\Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta:\ |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h\ 0\leqslant h\leqslant\delta$:

$$\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|d\mu(x)\leqslant\int_a^{b-h}|f(x+h)-g(x+h)|d\mu(x)+\int_a^{b-h}|f(x)-g(x)|d\mu(x)+$$
$$+\int_a^{b-h}|g(x+h)-g(x)|d\mu(x)<\varepsilon$$

Так как f суммируема на $\mathbb{R}$, то $\exists N\in\mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]}|f(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a,b]:=[-N-1,N+1]$ и введём $g:=f\mathbb{I}_{[-N,N]}\in L_1[a,b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists\delta\in(0,1)\,\forall h,0\leqslant h\leqslant\delta:\ \int_a^{b-h}|g(x+h)-g(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t,|t|<\delta$:

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)=\int\limits_{\{x,x+t\}\subseteq[a,b]}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)+\int\limits_{\{x,x+y\}\not\subseteq[a,b]}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)<\varepsilon$$

□

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f\in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\sin(\lambda x)d\mu(x)=0$$

Доказательство.

$$\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x) \overset{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} -\int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) =$$

$$-\frac{1}{2}\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) - \frac{1}{2}\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)$$

Заметим, что

$$\left|\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I}\left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|d\mu(t) =$$

$$= \int_{I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})} |f(x)|d\mu(t) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu\left(I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})\right) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

Также очевидно, что

$$\left|\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_I \left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right|d\mu(t) \overset{\text{по пред. Лемме}}{\to} 0$$

$\square$