Содержание

1 Теорема Римана об осцилляции **2**

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации. **5**

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке **8**

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. **10**

5 Теорема Жордана. **11**

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции **12**

7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами **15**

8 Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя. **16**

9 Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля **17**

10 Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом... **18**

11 Теорема Рисса-Фишера **19**

12 Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь **19**

13 Полнота пространств $C[a,b]$ и $L_p[a,b], p > 1$ **20**

1 Теорема Римана об осцилляции

> Порядок и беспорядок – это число; храбрость и трусость – это мощь; сила и слабость – это форма.
>
> Лукашов А.Л.

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S, если любая окресность x содержит хотя бы одну точку множества S.

Определение 1.2. Множество всех точек прикосновения S называется **замыканием** S.

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. (supp f) Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G, если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – *линейное нормированное пространство.*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. *Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменим $\mathbb{R}$ на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достатончо доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.

- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N, то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммиремых функций.

- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

  $$\exists \{h_n\} : \ h_n \uparrow f$$

  Теорема Леви гарантирует, что

  $$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \to \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

  Значит

  $$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k:\ E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0:\ \exists \text{элементарное } M_\varepsilon:\ \mu(E_k \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E\triangle M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

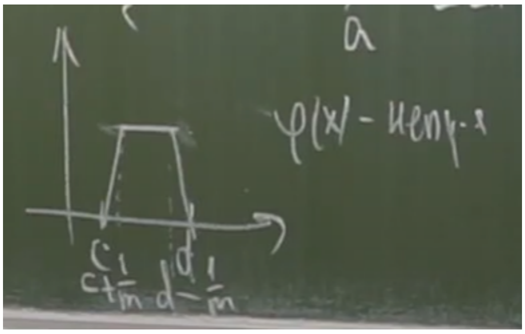


Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,\,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N,\,N]}:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C[-N,N]\ \|f|_{[-N,\,N]} - g\|_{L_1[-N,\,N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_{-N}^{N} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

$\square$

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)=0$$

Доказательство. Докажем, что для $f\in L_1[a,b]$:

$$\lim_{\delta\to +0}\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|d\mu(x)=0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists g\in C[a,b]:\ \int_a^b|f(x)-g(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a,b]\Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta:\ |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h\; 0\leqslant h\leqslant\delta$:

$$\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|d\mu(x)\leqslant\int_a^{b-h}|f(x+h)-g(x+h)|d\mu(x)+\int_a^{b-h}|f(x)-g(x)|d\mu(x)+$$
$$+\int_a^{b-h}|g(x+h)-g(x)|d\mu(x)<\varepsilon$$

Так как f суммируема на $\mathbb{R}$, то $\exists N\in\mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]}|f(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a,b]:=[-N-1,N+1]$ и введём $g:=f\mathbb{I}_{[-N,\,N]}\in L_1[a,b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists\delta\in(0,1)\,\forall h,0\leqslant h\leqslant\delta:\ \int_a^{b-h}|g(x+h)-g(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t,|t|<\delta$:

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)=\int\limits_{\{x,\,x+t\}\subseteq[a,\,b]}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)+\int\limits_{\{x,\,x+y\}\not\subseteq[a,\,b]}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)<\varepsilon$$

$\square$

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f\in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\sin(\lambda x)d\mu(x)=0$$

Доказательство.

$$\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x) \overset{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} -\int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) =$$

$$-\frac{1}{2}\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) - \frac{1}{2}\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)$$

Заметим, что

$$\left|\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I}\left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|d\mu(t) =$$

$$= \int_{I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})}|f(x)|d\mu(t) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu\left(I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})\right) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

Также очевидно, что

$$\left|\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_I \left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right|d\mu(t) \overset{\text{по пред. Лемме}}{\to} 0$$

□

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

О мастерстве полководца
судят по старательности его
подчиненных.

Лукашов А.Л.

Определение 2.1. $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi,\pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{iku}+e^{-iku}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}e^{iku} = \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)u}-1}{e^{iu}-1} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}-e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}-e^{-i\frac{u}{2}}}\cdot\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f \in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u)d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt))\right)d\mu(t) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)d\mu(t)$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x + u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T, T-периодичной функции одинаков. □

Лемма 2.2. *Пусть $f \in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \to +\infty$ равномерно по x.*

Доказательство. g – ограниченная $\Rightarrow \exists M :\ \forall u\ |g(u)| \leqslant M$.

f – измеримая $\Rightarrow$ по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi,\pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)|d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 – непрерывная на компакте $[-\pi,\pi] \Rightarrow \exists B\ \forall u :\ |f_1(u)| \leqslant B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F:

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+h) - F(t)|d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ:

$$a_n(\chi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi(t)\cos(nt)d\mu(t) \overset{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\cos(nu)d\mu(u) =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\chi\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \chi(t)\right]\cos(nt)d\mu(t) \Rightarrow$$
$$|a_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right)$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim_{n\to+\infty}\omega_1(\frac{\pi}{n},\chi)=0$ равномерно по x:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\chi(t+h)-\chi(t)|d\mu(t)=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t)|d\mu(t)\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)-f(x+t)|\cdot|g(t+h)|d\mu(t)+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t)\leqslant$$
$$\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+h)-f(u)|d\mu(u)+\int_{-\pi}^{\pi}|f_1(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant$$
$$\leqslant M\omega_1(\frac{\pi}{n},f)+B\omega_1(\frac{\pi}{n},g)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta\to 0$. Что и требовалось доказать. □

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f\in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a,b)\subset[-\pi,\pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a',b']\subset(a,b)$.

Доказательство. Так как $[a',b']$ содержится в (a,b), то

$$\exists\eta>0\,\forall x\in[a',b']\,\forall t,0\leqslant|t|<\eta:\ x+t\in(a,b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t)=\begin{cases}0,t\in(-\eta,\eta)\\1,t\in[-\pi,\pi]\setminus(-\eta,\eta)\end{cases}$$

Кроме того, λ – 2π-периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)d\mu(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)D_n(t)d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t\notin(-\eta,\eta)$, то $\lambda(\eta)=1$, ничего не меняем. Если же $|t|<\eta$, то $x+t\in(a,b)$, где $f=0$, поэтому получили, что подыинтегральные функции совпадают везде на $[-\pi,\pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})\sin(nt)d\mu(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)\cos(nt)d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме.

□

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Одержать сто побед в ста битвах — это не вершина воинского искусства. Повергнуть врага без сражения — вот вершина.

Лукашов А.Л.

Теорема 3.1. *Признак Дини.*

Если $f \in L_{2\pi}$ *и* $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta), \delta > 0$, *где*

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ *сходится к* $S(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0)) D_n(u) d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв $\sin((n + \frac{1}{2})t) = \sin(nt)\cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt)\sin(\frac{t}{2})$ в формуле ядра Дирихле:

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S(x_0) = \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(nt)}{2} d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\sin(nt)\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \sin(nt) \left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) d\mu(t) \end{aligned}$$

По условию, φ_{x_0} суммируемая $\Rightarrow$ по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))$ также суммируемая $\Rightarrow$ второе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}\in L_1[\delta,\pi]$ и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}-\frac{1}{t}=\frac{1-\frac{t^2}{8}+o(t^3)}{2\left(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}+o(t^4)\right)}-\frac{1}{t}=\frac{t-\frac{t^3}{8}-t+\frac{t^3}{24}+o(t^4)}{t^2+o(t^3)}\overset{t\to\infty}{\to}0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}-\frac{1}{t}\right)\in L_1[0,\delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции. □

Утверждение 3.1. *Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f\in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t)=0$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha\in(0,1]$ в точке x_0, если $\exists$ конечные односторонние пределы $f(x_0\pm 0)$ и константы $C,\delta>0$ такие, что

$$\forall t, 0<t<\delta, |f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqslant Ct^\alpha, |f(x_0-t)-f(x_0-0)|\leqslant Ct^\alpha$$

Определение 3.2. Обобщённой односторонней производной функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},\quad f'_-(x_0)=\lim_{t\ to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$$

Теорема 3.2. *Признак Липшица.*

Если $f\in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. По условию теоремы

$$S(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Значит функций φ_{x_0} из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t)=\frac{(f(x_0+t)-f(x_0+0))+(f(x_0-t)-f(x_0-0))}{t}$$

То, что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left|\int_0^\delta\varphi_{x_0}(t)d\mu(t)\right|\leqslant\int_0^\delta\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}d\mu(t)+\int_0^\delta\frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}d\mu(t)\leqslant$$
$$2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}d\mu(t)=2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}dt=2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Что и требовалось доказать. □

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

> Непобедимость заключена в себе самом, возможность победы заключена в противнике.
>
> Лукашов А.Л.

Теорема 4.1. *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если F – 2π-периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье F.

Доказательство. $f(x) := F'(x) \in L_1$. Значит $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)d\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\cos(nx)d\mu(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi}F(x)\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)d\mu(x) = nB_n$$

Аналогично докажем, что $b_n = -nA_n$, а также заметим, что $a_0 = 0$.

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы. □

Следствие. *Если $f, \cdots, f^{(k-1)}$ – 2π-периодические, и $f^{(k-1)}$ – абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют:*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Пусть $k = 1$: f – абсолютно непрерывная, значит $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$. По теореме об осцилляции: $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции. □

Теорема 4.2. *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если f – функция ограниченной вариации на периоде 2π, то её коэффициенты фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+\frac{\pi}{n}) - f(x)\right]\cos(nx)dx = \cdots =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]\cos(nx)dx, \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Сложив все эти n равенств, получим:

$$|na_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right|dx \leqslant V(f)$$

□

Теорема 4.3. *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если $f \in L^1_{2\pi}, f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ *– её тригонометрический ряд Фурье,* $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)d\mu(t)$ *– неопределённый интеграл Лебега для* f*, то* $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos(nx)+a_n\sin(nx)}{n}$*, где ряд равномерно сходится на* $\mathbb{R}$*.*

Доказательство. $F(x)$ – абсолютно непрерывная, $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\mu(t) = \pi a_0$. $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – тоже абсолютно непрерывная на периоде и 2π-периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)'$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье для $F(x) - \frac{a_0}{2}x$. Но с другой стороны $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Равномерная сходимость проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. □

5 Теорема Жордана.

Когда обороняются, значит,
есть в чем-то недостаток;
когда нападают, значит, есть
все в избытке.

Лукашов А.Л.

Возможно тут должна быть какая-то другая теорема Жордана, но пока здесь признак Жордана – на консультации уточню.

Теорема 5.1. *Признак Жордана.*

Если $f \in L_{2\pi}$ *и является функцией ограниченной вариации на* $[a, b]$*, то тригонометрический ряд Фурье* f *сходится к* $f(x_0)$ *в каждой точке* $x_0 \in [a, b]$ *непрерывности* $f(x)$ *и к* $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ *в каждой точке разрыва* $x_0 \in [a, b]$*.*

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$*, то тригонометрический ряд Фурье функции* f *сходится к ней равномерно на любом отрезке* $[a', b'] \subset (a, b)$*.*

Доказательство. Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}\varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

а для $-t$ аналогично.

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta :\ 0 \leqslant f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists\delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}\sin(nt)dt = (f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0))\int_{\delta_2}^{\delta_1}\frac{\sin(nt)}{t}dt$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ сходится, поэтому если обзначим за $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t}dt$, то $G(v)$ будет ограничена, т.е. $\exists C :\ |G(v)| \leqslant C$.

Но теперь рассмотрим $\forall A$:

$$\left|\int_0^A \frac{\sin(nt)}{t}dt\right| \overset{nt=u}{=} \left|\int_0^{nA}\frac{\sin(u)}{u}du\right| \leqslant C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left|\int_0^{\delta_1}\frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}\sin(nt)dt\right| \leqslant 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ. Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что $S(x_0) = f(x_0)$. Применим к каждому из трёх последих слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти δ_1 из текущего доказательство независимо от x_0. Также незавимо от x_0 мы ограничиваем интеграл $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утверждение этой теоремы доказано. □

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции

> Идти вперед туда, где не ждут; атаковать там, где не подготовились
>
> Лукашов А.Л.

Теорема 6.1. *Коровкина.*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ такова, что $L_n(e_i) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_i$ на $[a,b]$, $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2,$ то

$$\forall f \in C[a,b] :\ L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $[a,b]$.

Доказательство. $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ ограничена:

$$\exists M:\ -M \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b]$$

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t, x \in [a,b], |t-x| < \delta:\ -\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$$

Заметим, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow L_n(f_1) \leqslant L_n(f_2)\ \forall x \in [a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t, x \in [a,b]:\ -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}\psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t)$$

где $\psi_x(t) = (t-x)^2$.

Откуда это следует? Если $|t-x| < \delta$, то мы только ослабляем условие равномерной непрерывности, значит неравенство сохраняется. Если же $|t-x| \geqslant \delta \Rightarrow \frac{\psi(t)}{\delta^2} = \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geqslant 1 \Rightarrow$ неравенство сохраняется благодаря ограниченности f.

Зафиксировав произвольный x, применяем оператор L_n относительно переменной t. Все неравенства сохраняются:

$$-\varepsilon L_n(e_0, x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x) < L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x) < \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x)$$

Заметим, что

$$L_n(\psi_x, x) = L_n((t-x)^2, x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) = L_n(e_2, x) - 2x L_n(e_1, x) + x^2 L_n(e_0, x) \rightrightarrows \\ e_2(x) - 2x e_1(x) + x^2 e_0(x) = x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0$$

Значит

$$\exists N_1\, \forall n > N\, \forall x \in [a,b]:\ |L_n(\psi_x, x)| \leqslant \frac{\varepsilon \delta^2}{4M}$$

А из того, что $L_n(e_0) \rightrightarrows e_0$:

$$\exists N_2\, \forall n > N_2\, \forall x \in [a,b]:\ |L_n(e_0, x)| < \frac{3}{2}$$

Также не забываем, что:

$$|L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leqslant \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x, x)$$

Объединяя эти три условия, получим, что

$$\forall n > \max(N_1, N_2):\ |L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leqslant 2\varepsilon$$

Снова используем тот факт, что $L_n(e_0) \rightrightarrows e_0$:

$$\exists N_3\, \forall n > N_3\, \forall x \in [a,b]:\ |L_n(e_0, x) - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Значит

$$|f(x) L_n(e_0, x) - f(x)| \leqslant |f(x)| \cdot |L_n(e_0, x) - 1| \leqslant \varepsilon$$

Объединяя ВСЕ неравенства, получим:

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3)\, \forall x \in [a,b]:\ |L_n(f, x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$$

$\square$

Теорема 6.2. *Коровкина'*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ *такова, что* $L_n(e_i) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_i$ *на* $\mathbb{R}$, $e_0(x) = 1, e_1(x) = \cos(x), e_2(x) = \sin(x)$, *то*

$$\forall f \in C_{2\pi} : L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Аналогично немодифицированной теореме, только вместо функции ψ_x введём

$$\varphi_x(t) = \sin^2(\frac{t-x}{2}) = \frac{1-\cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t)\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(t)\sin(x) = \frac{1}{2}e_0(t) - \frac{1}{2}\cos(x)e_1(t) - \frac{1}{2}\sin(x)e_2(t)$$

Тогда

$$L_n(\varphi_x, x) = \frac{1}{2}L_n(e_0, x) - \frac{1}{2}\cos(x)L_n(e_1, x) - \frac{1}{2}\sin(x)L_n(e_2, x) \rightrightarrows \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2(x) - \frac{1}{2}\sin^2(x) = 0$$

□

Теорема 6.3. *Фейера.*

Для любой непрерывной 2π*-периодической функции последовательность средних арифеметических частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье равномерно на* $\mathbb{R}$ *сходится к ней.*

Доказательство. Распишем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\sigma_n(f,x) := \frac{S_0(f,x) + S_1(f,x) + \cdots + S_n(f,x)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=0}^{n} D_k(t)dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin^2(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)\sin(\frac{t}{2})dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}(\cos(kt) - \cos((k+1)t))dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})}(1 - \cos((n+1)t)) = \frac{1}{(n+1)2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}dt$$

Получается, $\sigma_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ образует последовательность линейных положительных операторов. Это значит, что нам нужно проверить сходимость лишь на трёх функциях: $e_0 := 1, e_1 := \sin(x), e_2 := \cos(x)$.

$$\sigma_n(e_0) = e_0, \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \quad \sigma_n(e_1) = e_1\cdot\frac{n}{n+1}, \sigma_n(e_2) = e_2\cdot\frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Коровкина, получаем, что $\forall f \in C_{2\pi} : \sigma_n(f) \rightrightarrows f$ □

7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами

> Война – это путь обмана, постоянной организации ложных выпадов, распространения дезинформации, использования уловок и хитростей.
>
> Лукашов А.Л.

Теорема 7.1. *Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.*

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ может быть с любой степенью точности равномерно приближена алгебраическими многочленами, то есть

$$\forall f \in C[a,b]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists P_n\, \forall x \in [a,b] : \ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$.

Введём многочлены Берштейна:

$$B_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Мы можем рассматривать их, как операторы $B_n : \ C[0,1] \to C[0,1]$. Очевидно, что они линейные и положительные, поэтому достаточно проверить сходимость трёх функций: $1, x, x^2$.

$$B_n(e_0, x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1 = e_0(x)$$

Рассмотрим $g(t) := (tx + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k x^k (1-x)^{n-k}$. Тогда

$$g'(t) = nx(tx + (1-x))^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k t^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g'(1)$ получим равенство:

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Rightarrow B_n(e_1, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x)$$

Взяв вторую производную от g, получим:

$$n(n-1)x^2(tx + (1-x))^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k t^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g''(1)$ получим равенство:

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - nx \Rightarrow$$

$$B_n(e_2, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_2(x)$$

Получили, что для оператора B_n справедлива теорема Коровкина и утверждение доказано.

Для завершения доказательства перейдём к произвольному отрезку $[a,b]$: для $f \in C[a,b]$ введём $F(x) = f(x(b-a)+a) \in C[0,1]$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in [0,1] :\ |B_n(F,x) - F(x)| < \varepsilon$$

Осталось заметить, что если в многочлен Бернштейна подставить какую-то линейную функцию, то получится какой-то многочлен:

$$\Rightarrow |B(F, \frac{t-a}{b-a}) - f(t)| < \varepsilon$$

$\square$

Следствие. *Из данной теоремы и теормы Коровкина' следует теорема Вейшерштрасса о приближении непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими многочленами:*

$$\forall f \in C_{2\pi}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists T_n := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) :\ |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

8 Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.

Избегание столкновения с большими силами свидетельствует не о трусости, а о мудрости, ибо принесение себя в жертву никогда и нигде не является преимуществом.

Лукашов А.Л.

Определение 8.1. Коэффициентами Фурье функции f в произвольном евклидовом пространстве называются скаляры вида

$$f_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

где $\{e_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов.

Теорема 8.1. *Минимальное свойство сумм Фурье.*

Если $\{e_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов евклидова пространства E, то

$$\forall f \in E\, \forall c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{R} :\ \|f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\| \geqslant \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|$$

, где $\{f_k\}$ – коэффициенты Фурье для f.

Причём равенство достигается $\Leftrightarrow \forall k = \overline{1, N} :\ c_k = f_k$.

Доказательство.

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\|^2 = \langle f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k, f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\rangle = \langle f, f\rangle - 2\sum_{k=1}^{N} c_k \langle f, e_k\rangle + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_k c_l \langle e_k, e_l\rangle =$$

$$\langle f, f\rangle - 2\sum_{k=1}^{N} f_k c_k \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{N} c_k^2 \|e_k\|^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{N} (f_k^2 - 2f_k c_k + c_k^2)\|e_k\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|^2$$

□

Следствие. *Тождество Бесселя.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов евклидова пространства E, то $\forall f \in E$:

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2$$

Доказательство. Очевидно следует из цепочки неравенств из доказательства предыдущей теоремы. □

Следствие. *Неравенство Бесселя.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов евклидова пространства E, то $\forall f \in E$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

Доказательство. Из тождества Бесселя следует, что

$$\forall N \in \mathbb{N} :\ \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0$$

Устремляя $M \to +\infty$ получим требуемое. □

9 Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля

Теорема 9.1. *Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов евклидова пространства E, то $\forall f \in E$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists T = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k : \; \|f - T\| < \varepsilon$
2. $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$
3. $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$ – *равенство Парсеваля для* f.

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ по предыдущей теме:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \; \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\| < \varepsilon$$

Тогда используя неравенство Бесселя:

$$\forall n > N : \; \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k e_k\|$$

Ну а $3 \Leftrightarrow 1$ так как при равенстве Парсеваля разность $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2$ будет бесконечно малая, а значит применяя равенство Бесселя получим требуемое. □

10 Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом...

Определение 10.1. $f \in L^2_{2\pi} \Leftrightarrow f$ – 2π-периодическая и $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Это пространство гильбертово.

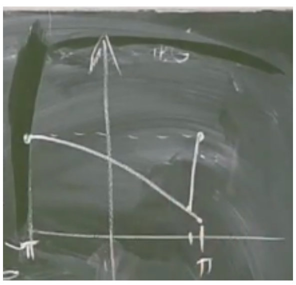
Утверждение 10.1. *Мы уже знаем, что ортогональной системой в этом пространстве будет система*

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cdots\}$$

Утверждение 10.2. *Благодаря теореме Фейера мы можем утверждать, что* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна в* $C_{2\pi}$.

Утверждение 10.3. *Мы уже знаем, что* $C[-\pi, \pi]$ *всюду плотно в* $L_p[-\pi, \pi], p \geqslant 1$.

Заметим, что $C_{2\pi}$ *всюду плотно в* $C[-\pi, \pi]$ *в смысле нормы* $L_p[-\pi, \pi]$. *Делается это с помощью такого трюка:*



Используя транзитивность свойства полноты, получим, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *полна в* $L_p[-\pi, \pi]$, *в частности в* $L^2_{2\pi}$.

Утверждение 10.4. *Посчитаем коэффициенты Фурье для нашей ортогональной системы в явном виде:*

Если $e_k = \cos(nx)$, *то* $f_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)d\mu(x)}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx} = a_n$. *Если* $e_k = \sin(nx)$, *то* $f_k = b_n$. *Ну и* $e_1 = a_0$.

Утверждение 10.5. *Равенство Парсеваля для тригонометрической системы в* $L^2_{2\pi}$ *будет иметь вид:*

$$\|f\|^2 = a_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\pi$$

Утверждение 10.6. *Теорема Рисса-Фишера даёт следующее следствие: если* $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ *сходится, то коэффициенты* $a_0, \{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции из* $L^2_{2\pi}$.

11 Теорема Рисса-Фишера

Теорема 11.1. *Рисса-Фишера.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства* H *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– последовательность действительных чисел, такая что* $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\|e_k\|^2$ *сходится, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ *сходится к некоторому* $f \in H$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\|e_k\|^2$ сходится $\overset{\text{к. Коши}}{\Rightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k^2\|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Тогда оценим норму некого элемента из H:

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k\|^2 = \langle\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k\rangle = \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k^2\|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Это означает, что последовательность частичных сумм нашего ряда является фундаментальной, а значит благодаря гильбертовости пространства H мы можем сказать, что ряд сходится.

Что и требовалось доказать. □

12 Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь

Определение 12.1. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется полной в $L_p(E)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall f \in L_p(E)\, \exists\{c_1, \cdots, c_n\} \subset \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\|_p < \varepsilon$$

Определение 12.2. В C и L_p плотные системы функций называются замкнутыми.

Следствие. $\{1, x, x^2, \cdots\}$ *– полна в* $L_p[a, b], 1 \leqslant p < +\infty$, *полная в* $C[a, b]$.

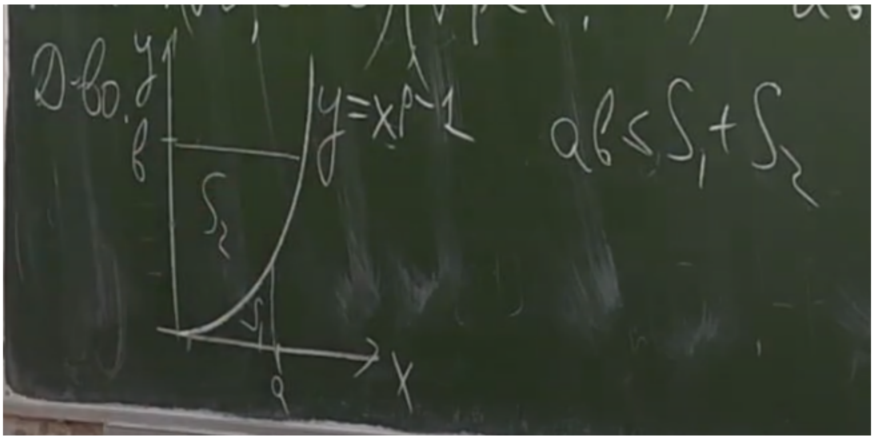
Следствие. $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cdots\}$ *– полная в* $C_{2\pi}$

13 Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$

Определение 13.1. Для $1 < p < +\infty$ обозначим через q такое число, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Лемма 13.1. $\forall a, b > 0\, \forall p \in (1, +\infty) :\ ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Доказательство. Геометрическое:



Причём S_1 и S_2 можно легко посчитать:

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1} = \frac{b^q}{q} dy$$

□

Теорема 13.1. *Неравенство Гёльдера.*
Если $f \in L_p(X), g \in L_q(X), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p < +\infty$, *то*

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Если правая часть равна нулю, то всё доказано.
Иначе введём обозначения:

$$A^p := \int_X |f(x)|^p d\mu(x), \quad B^q := \int_X |g(x)|^q d\mu(x)$$

Тогда, используя предыдущую лемму с параметрами:

$$a = \frac{|f(x)|}{A} \quad b = \frac{|g(x)|}{B}$$

Получим, что

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{AB} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}$$

Теперь проинтегрируем обе части по x и получим требуемое:

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)| d\mu(x)}{AB} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Теорема 13.2. *Для $p \in [1, +\infty)$ $L_p([a,b])$ – банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в $L_p[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n, m > N :\ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Отсюда получаем, что $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow\ \forall m \geqslant n_k :\ \|f_m - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$.

Тогда в силу неравенства Гёльдера:

$$\|f_m - f_{n_k}\|_1 \leqslant \|f_m - f_{n_k}\|_p \cdot \|1\|_q < \frac{C}{2^k}$$

Рассмотрим ряд

$$\Phi(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$$

И для него верно равенство (по теореме Леви):

$$\|\Phi\|_1 = \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_1 < +\infty$$

Значит $\Phi(x)$ конечная почти всюду $\Rightarrow$ ряд $|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$ – сходится почти всюду на $[a,b]$.

Тогда ряд $f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x))$ сходится абсолютно почти всюду на $[a,b]$, но его частичные суммы – это f_{n_k} $\Rightarrow$ мы получили, что эта последовательность сходится почти всюду к чему-то, что мы обозначим, как $f(x)$.

Докажем, что $f \in L_p[a,b]$: если есть сходимость почти всюду, то по теореме Фату мы можем оценить:

$$\int_{[a,\,b]} |f(x)|^p d\mu(x) \leqslant \varliminf_{k \to +\infty} \int_{[a,\,b]} |f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) = \|f_{n_k}\|_p^p < +\infty$$

Снова используем свойство последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, l > N :\ \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon$$

Но мы можем перейти к пределу $l \to +\infty$ благодаря теореме Лебега: $\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$. Тогда при достаточно больших m:

$$\|f_m - f\|_p \leqslant \|f_m - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < 2\varepsilon$$

□