

Содержание

1	Теорема Римана об осцилляции	3
2	Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.	6
3	Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке	9
4	Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.	11
5	Теорема Жордана.	12
6	Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции	13
7	Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами	16
8	Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.	17
9	Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля	19
10	Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом. . .	19
11	Теорема Рисса-Фишера	20
12	Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь	21
13	Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$	21
14	Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра	24
15	Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле	25
16	Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра	27
17	Дифференцирование несобственных интегралов по параметру	27
18	Гамма- и бета-функции и связь между ними	28
19	Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции	29
20	Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения.	30

21	Формула дополнения для гамма-функции	31
22	Равносходимость интеграла и ряда Фурье в точке	31
23	Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье суммируемой функции. Формулы обращения.	33
24	Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. Свёртка и её преобразование Фурье.	34
25	Пространства основных и обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций. δ -функция	36
26	Пространство Шварца быстро убывающих функций	38

1 Теорема Римана об осцилляции

Порядок и беспорядок – это число; храбрость и трусость – это мощь; сила и слабость – это форма.

Лукашов А.Л.

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S , если любая окрестность x содержит хотя бы одну точку множества S .

Определение 1.2. Множество всех точек прикосновения S называется **замыканием** S .

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x , для которых $f(x) \neq 0$. $(\text{supp } f)$ Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G , если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – линейное нормированное пространство.

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменяем \mathbb{R} на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достаточно доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.
- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N , то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммируемых функций.
- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

$$\exists \{h_n\}_{n=1}^{\infty} : h_n \uparrow f$$

Теорема Леви гарантирует, что

$$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

Значит

$$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k : E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ элементарное } M_\varepsilon : \mu(E_k \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \Delta M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приближать индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так:

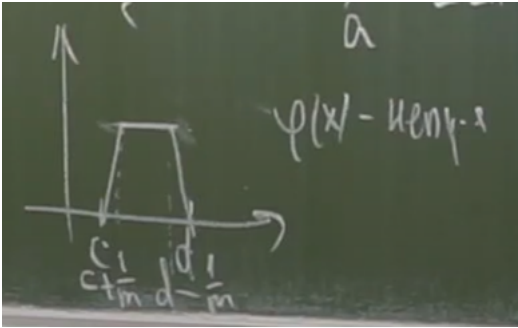


Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

Тогда

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N, N]} : \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[-N, N] \|f|_{[-N, N]} - g\|_{L_1[-N, N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leq \int_{-N}^N |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на \mathbb{R} функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a, b]$:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[a, b] : \int_a^b |f(x) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме Кантора она равномерно непрерывная на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h, 0 \leq h \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) &\leq \int_a^{b-h} |f(x+h) - g(x+h)| d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \\ &\quad + \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

Так как f суммируема на \mathbb{R} , то $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a, b] := [-N-1, N+1]$ и введём $g := f \mathbb{I}_{[-N, N]} \in L_1[a, b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists \delta \in (0, 1) \forall h, 0 \leq h \leq \delta : \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t, |t| < \delta$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = \int_{\{x, x+t\} \subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) + \int_{\{x, x+t\} \not\subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) &\stackrel{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \Delta I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| &\leq \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \Delta I} \left| f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \right| d\mu(t) = \\ &= \int_{I \Delta (I+\frac{\pi}{\lambda})} |f(x)| d\mu(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu(I \Delta (I + \frac{\pi}{\lambda})) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$

Также очевидно, что

$$\left| \int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leq \int_I \left| f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right| d\mu(t) \xrightarrow{\text{по пред. Лемме}} 0$$

□

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

О мастерстве полководца
судят по старательности его
подчиненных.

Лукашов А.Л.

Определение 2.1. $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi, \pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D_n(u) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (e^{iku} + e^{-iku}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{1}{2} e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}} - e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}} \cdot \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \end{aligned}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f \in L_{2\pi}$, то n -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k :

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt)) \right) d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x + u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T , T -периодичной функции одинаков. \square

Лемма 2.2. Пусть $f \in L_{2\pi}$, g — измеримая, 2π -периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow +\infty$ равномерно по x .

Доказательство. g — ограниченная $\Rightarrow \exists M : \forall u |g(u)| \leq M$.

f — суммируемая \Rightarrow по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi, \pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)| d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 — непрерывная на компакте $[-\pi, \pi] \Rightarrow \exists B \forall u : |f_1(u)| \leq B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F :

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+h) - F(t)| d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ :

$$\begin{aligned} a_n(\chi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \cos(nt) d\mu(t) \stackrel{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \cos(nu) d\mu(u) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\chi\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \chi(t) \right] \cos(nt) d\mu(t) \Rightarrow \\ &|a_n(\chi)| \leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right) \end{aligned}$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_1(\frac{\pi}{n}, \chi) = 0$ равномерно по x :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\chi(t+h) - \chi(t)| d\mu(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| \cdot |g(t+h)| d\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(u+h) - f(u)| d\mu(u) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)| d\mu(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq M\omega_1(\frac{\pi}{n}, f) + B\omega_1(\frac{\pi}{n}, g) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Так как $[a', b']$ содержится в (a, b) , то

$$\exists \eta > 0 \forall x \in [a', b'] \forall t, 0 \leq |t| < \eta : x+t \in (a, b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\eta, \eta) \\ 1, & t \in [-\pi, \pi] \setminus (-\eta, \eta) \end{cases}$$

Кроме того, $\lambda - 2\pi$ -периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) D_n(t) d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t \notin (-\eta, \eta)$, то $\lambda(t) = 1$, ничего не меняем. Если же $|t| < \eta$, то $x+t \in (a, b)$, где $f = 0$, поэтому получили, что подынтегральные функции совпадают везде на $[-\pi, \pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) \cos(nt) d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t) \operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме. \square

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Одержать сто побед в ста
битвах — это не вершина
воинского искусства.
Повергнуть врага без
сражения — вот вершина.

Лукашов А.Л.

Теорема 3.1. *Признак Дини.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta)$, $\delta > 0$, где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0)) D_n(u) d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв $\sin((n+\frac{1}{2})t) = \sin(nt) \cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt) \sin(\frac{t}{2})$ в формуле ядра Дирихле, а также добавим и вычтем интеграл $\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t)$:

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S(x_0) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(nt)}{2} d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\sin(nt) \cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \sin(nt) \left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) d\mu(t) \end{aligned}$$

По условию, φ_{x_0} суммируемая \Rightarrow по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))$ также суммируемая \Rightarrow второе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta, \pi]$ и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} = \frac{1 - \frac{t^2}{8} + o(t^3)}{2(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + o(t^4))} - \frac{1}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{8} - t + \frac{t^3}{24} + o(t^4)}{t^2 + o(t^3)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) \in L_1[0, \delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции. \square

Утверждение 3.1. Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha \in (0, 1]$ в точке x_0 , если \exists конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C, \delta > 0$ такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta, |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq Ct^\alpha, |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| \leq Ct^\alpha$$

Определение 3.2. Обобщённой односторонней производной функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}$$

Теорема 3.2. Признак Липшица.

Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0 , то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. По условию теоремы

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Значит функций φ_{x_0} из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))}{t}$$

То, что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left| \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) d\mu(t) \right| \leq \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)|}{t} d\mu(t) \leq 2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} d\mu(t) = 2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Что и требовалось доказать. \square

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

Непобедимость заключена в
себе самом, возможность
победы заключена в
противнике.

Лукашов А.Л.

Теорема 4.1. *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если F – 2π -периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье F .

Доказательство. $f(x) := F'(x) \in L_1$. Значит $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \cos(nx) d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} F(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) d\mu(x) = nB_n \end{aligned}$$

Аналогично докажем, что $b_n = -nA_n$, а также заметим, что $a_0 = 0$.

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы. \square

Следствие. *Если $f, \dots, f^{(k-1)}$ – 2π -периодические, и $f^{(k-1)}$ – абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют:*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right); \quad n \rightarrow +\infty$$

Доказательство. Пусть $k = 1$: f – абсолютно непрерывная, значит $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}$, $b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$. По теореме об осцилляции: $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow +\infty$.

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции. \square

Теорема 4.2. *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если f – 2π -периодическая функция ограниченной вариации на периоде 2π , то её коэффициенты Фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad n \rightarrow +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right] \cos(nx) dx = \dots = \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right] \cos(nx) dx, \quad \forall k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Сложив все эти n равенств и оценив косинус сверху единицей, получим:

$$|na_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \left| f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right| dx \leq V(f)$$

□

Теорема 4.3. *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если $f \in L_{2\pi}^1$, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ – её тригонометрический ряд Фурье, $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) d\mu(t)$ – неопределённый интеграл Лебега для f , то $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx)}{n}$, где ряд равномерно сходится на \mathbb{R} .

Доказательство. $F(x)$ – абсолютно непрерывная, $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu(t) = \pi a_0$.
 $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – тоже абсолютно непрерывная на периоде и 2π -периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье $(F(x) - \frac{a_0}{2}x)'$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье для $F(x) - \frac{a_0}{2}x$. Но с другой стороны $(F(x) - \frac{a_0}{2}x)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Равномерная сходимость проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. □

5 Теорема Жордана.

Когда обороняются, значит,
 есть в чем-то недостаток;
 когда нападают, значит, есть
 все в избытке.

Лукашов А.Л.

Теорема 5.1. *Признак Жордана.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in [a, b]$ непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва $x_0 \in [a, b]$.

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\delta} \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

а для $-t$ аналогично.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : 0 \leq f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) dt = (f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0)) \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\sin(nt)}{t} dt$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ сходится, поэтому если обозначим за $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t} dt$, то $G(v)$ будет ограничена, т.е. $\exists C : |G(v)| \leq C$.

Но теперь рассмотрим $\forall A$:

$$\left| \int_0^A \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| \stackrel{nt=u}{=} \left| \int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u} du \right| \leq C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left| \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) dt \right| \leq 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ . Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что $S(x_0) = f(x_0)$. Применим к каждому из трёх последних слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти δ_1 из текущего доказательства независимо от x_0 . Также независимо от x_0 мы ограничиваем интеграл $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утверждение этой теоремы доказано. \square

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции

Идти вперед туда, где не
ждут; атаковать там, где не
подготовились

Лукашов А.Л.

Теорема 6.1. *Коровкина.*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ такова, что $L_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_i$ на $[a, b]$, $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$, то

$$\forall f \in C[a, b] : L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $[a, b]$.

Доказательство. $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ ограничена:

$$\exists M : -M \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, x \in [a, b], |t - x| < \delta : -\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$$

Заметим, что $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow L_n(f_1) \leq L_n(f_2) \forall x \in [a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, x \in [a, b] : -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2} \psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \psi(t)$$

где $\psi_x(t) = (t - x)^2$.

Откуда это следует? Если $|t - x| < \delta$, то мы только ослабляем условие равномерной непрерывности, значит неравенство сохраняется. Если же $|t - x| \geq \delta \Rightarrow \frac{\psi(t)}{\delta^2} = \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \Rightarrow$ неравенство сохраняется благодаря ограниченности f .

Зафиксировав произвольный x , применяем оператор L_n относительно переменной t . Все неравенства сохраняются:

$$-\varepsilon L_n(e_0, x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x) < L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x) < \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x)$$

Заметим, что

$$L_n(\psi_x, x) = L_n((t - x)^2, x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) = L_n(e_2, x) - 2x L_n(e_1, x) + x^2 L_n(e_0, x) \Rightarrow \\ e_2(x) - 2x e_1(x) + x^2 e_0(x) = x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0$$

Значит

$$\exists N_1 \forall n > N_1 \forall x \in [a, b] : |L_n(\psi_x, x)| \leq \frac{\varepsilon \delta^2}{4M}$$

А из того, что $L_n(e_0) \Rightarrow e_0$:

$$\exists N_2 \forall n > N_2 \forall x \in [a, b] : |L_n(e_0, x)| < \frac{3}{2}$$

Также не забываем, что:

$$|L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leq \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x, x)$$

Объединяя эти три условия, получим, что

$$\forall n > \max(N_1, N_2) : |L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leq 2\varepsilon$$

Снова используем тот факт, что $L_n(e_0) \Rightarrow e_0$:

$$\exists N_3 \forall n > N_3 \forall x \in [a, b] : |L_n(e_0, x) - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Значит

$$|f(x) L_n(e_0, x) - f(x)| \leq |f(x)| \cdot |L_n(e_0, x) - 1| \leq \varepsilon$$

Объединяя ВСЕ неравенства, получим:

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3) \forall x \in [a, b] : |L_n(f, x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$$

□

Теорема 6.2. *Коровкина'*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ такова, что $L_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_i$ на \mathbb{R} , $e_0(x) = 1, e_1(x) = \cos(x), e_2(x) = \sin(x)$, то

$$\forall f \in C_{2\pi} : L_n(f) \Rightarrow f$$

на \mathbb{R} .

Доказательство. Аналогично немодифицированной теореме, только вместо функции ψ_x введём

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(t) \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(t) \sin(x) = \\ &= \frac{1}{2} e_0(t) - \frac{1}{2} \cos(x) e_1(t) - \frac{1}{2} \sin(x) e_2(t) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_n(\varphi_x, x) &= \frac{1}{2} L_n(e_0, x) - \frac{1}{2} \cos(x) L_n(e_1, x) - \frac{1}{2} \sin(x) L_n(e_2, x) \Rightarrow \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(x) - \frac{1}{2} \sin^2(x) = 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 6.3. *Фейера.*

Для любой непрерывной 2π -периодической функции последовательность средних арифметических частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье равномерно на \mathbb{R} сходится к ней.

Доказательство. Распишем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &:= \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \dots + S_n(f, x)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=0}^n D_k(t) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n \sin((k + \frac{1}{2})t) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n \sin((k + \frac{1}{2})t) \sin(\frac{t}{2}) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4 \sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n (\cos(kt) - \cos((k+1)t)) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4 \sin^2(\frac{t}{2})} (1 - \cos((n+1)t)) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot \frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} dt \end{aligned}$$

Получается, $\sigma_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ образует последовательность линейных положительных операторов. Это значит, что нам нужно проверить сходимость лишь на трёх функциях: $e_0 := 1, e_1 := \sin(x), e_2 := \cos(x)$.

$$\sigma_n(e_0) = e_0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \sigma_n(e_1) = e_1 \cdot \frac{n}{n+1}, \sigma_n(e_2) = e_2 \cdot \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Коровкина, получаем, что $\forall f \in C_{2\pi} : \sigma_n(f) \Rightarrow f$

□

7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами

Война – это путь обмана,
постоянной организации
ложных выпадов,
распространения
дезинформации,
использования уловок и
хитростей.

Лукашов А.Л.

Теорема 7.1. *Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.*

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ может быть с любой степенью точности равномерно приближена алгебраическими многочленами, то есть

$$\forall f \in C[a, b] \forall \varepsilon > 0 \exists P_n \forall x \in [a, b] : |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$.

Введём многочлены Берштейна:

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Мы можем рассматривать их, как операторы $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$. Очевидно, что они линейные и положительные, поэтому достаточно проверить сходимость трёх функций: $1, x, x^2$.

$$B_n(e_0, x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1 = e_0(x)$$

Рассмотрим $g(t) := (tx + (1-x))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k x^k (1-x)^{n-k}$. Тогда

$$g'(t) = nx(tx + (1-x))^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k t^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g'(1)$ получим равенство:

$$nx = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Rightarrow B_n(e_1, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x)$$

Взяв вторую производную от g , получим:

$$n(n-1)x^2(tx + (1-x))^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k t^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g''(1)$ получим равенство:

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^n (k^2 - k)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - nx \Rightarrow$$

$$B_n(e_2, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_2(x)$$

Получили, что для оператора B_n справедлива теорема Коровкина и утверждение доказано.

Для завершения доказательства перейдём к произвольному отрезку $[a, b]$: для $f \in C[a, b]$ введём $F(x) = f(x(b-a) + a) \in C[0, 1]$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] : |B_n(F, x) - F(x)| < \varepsilon$$

Осталось заметить, что если в многочлен Бернштейна подставить какую-то линейную функцию, то получится какой-то многочлен:

$$\Rightarrow |B(F, \frac{t-a}{b-a}) - f(t)| < \varepsilon$$

□

Следствие. Из данной теоремы и теоремы Коровкина' следует теорема Вейштрасса о приближении непрерывной 2π -периодической функции тригонометрическими многочленами:

$$\forall f \in C_{2\pi} \forall \varepsilon > 0 \exists T_n := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) : |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

8 Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.

Избегание столкновения с
большими силами
свидетельствует не о трусости,
а о мудрости, ибо принесение
себя в жертву никогда и нигде
не является преимуществом.

Лукашов А.Л.

Определение 8.1. Коэффициентами Фурье функции f в произвольном евклидовом (гильбертовом) пространстве называются скаляры вида

$$f_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

где $\{e_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов.

Определение 8.2. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **полной** в $L_p(E)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L_p(E) \exists \{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|_p < \varepsilon$$

Определение 8.3. Система элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства E называется **базисом**, если

$$\forall f \in E \exists \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

Определение 8.4. Ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H , являясь его базисом, называется **ортонормированным базисом**

Теорема 8.1. Минимальное свойство сумм Фурье.

Если $\{e_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то

$$\forall f \in E \forall c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^N c_k e_k\| \geq \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|$$

, где $\{f_k\}$ – коэффициенты Фурье для f .

Причём равенство достигается $\Leftrightarrow \forall k = \overline{1, N} : c_k = f_k$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{k=1}^N c_k e_k\|^2 &= \langle f - \sum_{k=1}^N c_k e_k, f - \sum_{k=1}^N c_k e_k \rangle = \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=1}^N c_k \langle f, e_k \rangle + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c_k c_l \langle e_k, e_l \rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=1}^N f_k c_k \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^N c_k^2 \|e_k\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^N (f_k^2 - 2f_k c_k + c_k^2) \|e_k\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2 \end{aligned}$$

□

Следствие. Тождество Бесселя.

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то $\forall f \in E$:

$$\|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2$$

Доказательство. Очевидно следует из цепочки неравенств из доказательства предыдущей теоремы. □

Следствие. Неравенство Бесселя.

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то $\forall f \in E$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2$$

Доказательство. Из тождества Бесселя следует, что

$$\forall N \in \mathbb{N} : \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 \geq 0$$

Устремляя $N \rightarrow +\infty$ получим требуемое. \square

9 Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля

Теорема 9.1. Если $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то $\forall f \in E$ следующие утверждения эквивалентны:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists T = \sum_{k=1}^N c_k e_k : \|f - T\| < \varepsilon$
2. $f = \sum_{k=1}^\infty f_k e_k$
3. $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^\infty f_k^2 \|e_k\|^2$ – равенство Парсеваля для f .

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ по предыдущей теме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\| < \varepsilon$$

Тогда используя неравенство Бесселя:

$$\forall n > N : \|f - \sum_{k=1}^n f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2$$

Ну а $3 \Leftrightarrow 1$ так как при равенстве Парсеваля разность $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2$ будет бесконечно малая, а значит применяя равенство Бесселя получим требуемое. \square

Следствие. Если $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то следующие утверждения эквивалентны:

1. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – полная система в E .
2. $\forall f \in E : f = \sum_{k=1}^\infty f_k e_k$
3. $\forall f \in E : \|f\|^2 = \sum_{k=1}^\infty f_k^2 \|e_k\|^2$

10 Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом...

Определение 10.1. $f \in L_{2\pi}^2 \Leftrightarrow f$ – 2π -периодическая и $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Это пространство гильбертово.

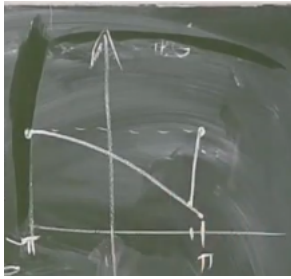
Утверждение 10.1. Мы уже знаем, что ортогональной системой в этом пространстве будет система

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots \right\}$$

Утверждение 10.2. Благодаря теореме Фейера мы можем утверждать, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $C_{2\pi}$.

Утверждение 10.3. Мы уже знаем, что $C[-\pi, \pi]$ всюду плотно в $L_p[-\pi, \pi]$, $p \geq 1$.

Заметим, что $C_{2\pi}$ всюду плотно в $C[-\pi, \pi]$ в смысле нормы $L_p[-\pi, \pi]$. Делается это с помощью такого трюка:



Используя транзитивность свойства полноты, получим, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полна в $L_p[-\pi, \pi]$, в частности в $L_{2\pi}^2$.

Утверждение 10.4. Посчитаем коэффициенты Фурье для нашей ортогональной системы в явном виде:

Если $e_k = \cos(nx)$, то $f_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) d\mu(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx} = a_n$. Если $e_k = \sin(nx)$, то $f_k = b_n$. Ну и $e_1 = a_0$.

Утверждение 10.5. Равенство Парсеваля для тригонометрической системы в $L_{2\pi}^2$ будет иметь вид:

$$\|f\|^2 = a_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \pi$$

Утверждение 10.6. Теорема Рисса-Фишера даёт следующее следствие: если $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится, то коэффициенты $a_0, \{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции из $L_{2\pi}^2$.

11 Теорема Рисса-Фишера

Теорема 11.1. Рисса-Фишера.

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства H и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел, такая что $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится к некоторому $f \in H$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$ сходится $\stackrel{\text{к. Коши}}{\Rightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}: \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Тогда оценим норму некого элемента из H :

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\rangle = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Это означает, что последовательность частичных сумм нашего ряда является фундаментальной, а значит благодаря гильбертовости пространства H мы можем сказать, что ряд сходится.

Что и требовалось доказать. \square

Следствие. Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства H , то $\forall f \in H$ р. Фурье сходится к $f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0$, то

$$\langle f - f_0, e_j \rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2 < +\infty \stackrel{\text{т.Р-Ф}}{\Rightarrow} \exists f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0 \Rightarrow \langle f - f_0, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - f_j \|e_j\|^2 = 0$$

\square

12 Полнота и замкнутость ортогональной системы, их СВЯЗЬ

Определение 12.1. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется полной в $L_p(E)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L_p(E) \exists \{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|_p < \varepsilon$$

Определение 12.2. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется замкнутой в евклидовом пространстве E (по Банаху, в банаховом пространстве тотальной, в C и L_p – полной), если $\forall k \in \mathbb{N} : \langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Теорема 12.1. О связи.

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкнутая система в гильбертовом пространстве \Leftrightarrow она полная.

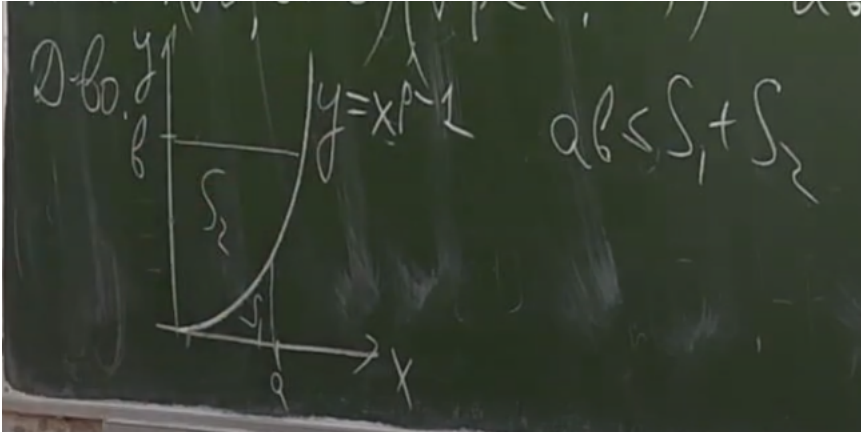
Доказательство. $\Rightarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкнутая $\stackrel{\text{сл-е т.Р-Ф}}{\Rightarrow} \forall f \in H : f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ Тогда, применяя следствие теоремы (9.1) получим полноты системы.

$\Leftarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная система, $\forall k \in \mathbb{N} \forall f \in H : \langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f_k = 0$. Теперь снова применим следствие теоремы (9.1) и свойства полноты системы, получим, что $f = \sum 0 e_k = 0$. \square

13 Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$

Определение 13.1. Для $1 < p < +\infty$ обозначим через q такое число, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Лемма 13.1. $\forall a, b > 0 \forall p \in (1, +\infty) : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$



Доказательство. Геометрическое:

Причём S_1 и S_2 можно легко посчитать:

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

□

Теорема 13.1. *Неравенство Гёльдера.*

Если $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < +\infty$, то

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Если правая часть равна нулю, то всё доказано.

Иначе введём обозначения:

$$A^p := \int_X |f(x)|^p d\mu(x), \quad B^q := \int_X |g(x)|^q d\mu(x)$$

Тогда, используя предыдущую лемму с параметрами:

$$a = \frac{|f(x)|}{A} \quad b = \frac{|g(x)|}{B}$$

Получим, что

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{AB} \leq \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}$$

Теперь проинтегрируем обе части по x и получим требуемое:

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)| d\mu(x)}{AB} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Теорема 13.2. *Неравенство Минковского.*

Если $f, g \in L_p(E)$, то

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Очевидно, что $|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p \max(|f(x)|^p, |g(x)|^p)$, поэтому $|f(x) + g(x)|^p$ будет суммируемая.

Если $p = 1$, то всё очевидно – неравенство треугольника, поэтому будем доказывать лишь для $1 < p < +\infty$.

Распишем $|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)|$. Теперь дважды применим неравенство Гёльдера, в первый раз $F(x) = |f(x) + g(x)|^{p-1}, G(x) = |f(x) + g(x)|$. Во второй же – $F(x) = |f(x)|^{p-1}, G(x) = |f(x) + g(x)|$. Получим, что:

$$\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \leq \left(\left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \left(\int_E |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Давайте более подробно распишем $(p-1)q = (p-1) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = p$, то есть второй множитель правой части неравенства под степенью имеет то же самое, что и левая часть, значит поделим обе части на неотрицательный $\left(\int_E |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$ и получим:

$$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu(x) \right)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Следствие. Только теперь мы можем говорить, что $L_p(E)$ – ЛНП с корректно определённой нормой (заметим, что неравенство Минковского – это неравенство треугольника для этой нормы, остальные свойства очевидно следуют из свойств интеграла Лебега):

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Теорема 13.3. Для $p \in [1, +\infty)$ $L_p([a, b])$ – банахово пространство.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная последовательность в $L_p[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Отсюда получаем, что $\exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \uparrow \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$.

Тогда в силу неравенства Гёльдера:

$$\|f_m - f_{n_k}\|_1 \leq \|f_m - f_{n_k}\|_p \cdot \|1\|_q < \frac{C}{2^k}$$

Рассмотрим ряд

$$\Phi(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^\infty |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$$

И для него верно равенство (по теореме Леви):

$$\|\Phi\|_1 = \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{k=2}^\infty \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_1 < +\infty$$

Значит $\Phi(x)$ конечная почти всюду \Rightarrow ряд $|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$ – сходится почти всюду на $[a, b]$.

Тогда ряд $f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x))$ сходится абсолютно почти всюду на $[a, b]$, но его частичные суммы – это $f_{n_k} \Rightarrow$ мы получили, что эта последовательность сходится почти всюду к чему-то, что мы обозначим, как $f(x)$.

Докажем, что $f \in L_p[a, b]$: если есть сходимость почти всюду, то по теореме Фату мы можем оценить:

$$\int_{[a, b]} |f(x)|^p d\mu(x) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} |f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) = \|f_{n_k}\|_p^p < +\infty$$

Снова используем свойство последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l > N : \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon$$

Но мы можем перейти к пределу $l \rightarrow +\infty$ благодаря теореме Лебега: $\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$. Тогда при достаточно больших m :

$$\|f_m - f\|_p \leq \|f_m - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < 2\varepsilon$$

□

Теорема 13.4. $C[a, b]$ – полно

Доказательство. Рассмотрим для определённости $\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Зафиксируем $x_0 \in [a, b]$.

Тогда $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная числовая последовательность \Rightarrow она сходится. Обозначим этот предел как $f(x_0)$.

Очевидно, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ по введённой метрике, так как:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \forall n, m \geq N_{\varepsilon} \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Зафиксируем x и перейдём к пределу при $m \rightarrow +\infty \Rightarrow$ при всех тех же кванторах выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Значит $f_n(x) \rightarrow f(x)$, тогда по теореме о равномерном пределе непрерывных функций $f(x) \in C[a, b]$. Что и требовалось доказать. □

14 Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра

Определение 14.1. Пусть функция $f(x, \alpha)$ зависит от x, α . Тогда мы можем рассматривать функцию $f_{1, \alpha}(x)$ – изначальная функция, которую мы теперь считаем зависящей только от первого параметра, а второй параметр считаем фиксированным. Аналогично вводится $f_{2, x}(\alpha)$.

Теорема 14.1. Непрерывность интеграла, зависящего от параметра

Пусть $\forall \alpha \in A \subset \mathbb{R}^n$ функция $f_{1, \alpha}(x) = f(x, \alpha)$ суммируема на $E \subset \mathbb{R}^m$, $f_{2, x}(\alpha) = f(x, \alpha)$ при почти всех $x \in E$ непрерывна в $\alpha_0 \in E$, и при почти всех $x \in E, \forall \alpha \in A : |f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ суммируема на E . Тогда

$$F(\alpha) = \int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$$

непрерывна в α_0 .

Доказательство. Рассмотрим $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset A$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha_0$.

Тогда, по условию, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x, \alpha_n) = f(x, \alpha_0)$ при почти всех $x \in E$. Кроме того, для почти всех x из E , выполняется неравенство $\forall n \in \mathbb{N} : |f(x, \alpha_n)| \leq \varphi(x)$. Тогда, используя теорему Лебега, мы сможем перейти к пределу интегралов:

$$F(\alpha_n) = \int_E f_{1, \alpha_n}(x) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E f(x, \alpha_0) d\mu(x) = F(\alpha_0)$$

□

Теорема 14.2. Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра

Пусть $f_{1, \alpha}(x) = f(x, \alpha)$ при всех $\alpha \in U(\alpha_0) \subset \mathbb{R}^n$ суммируема на $E \subset \mathbb{R}^m$ вместе с $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$, и при почти всех $x \in E, \forall \alpha \in U(\alpha_0) : \left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ суммируема на E . Тогда

$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha_0)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

Доказательство. Рассмотрим $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset U(\alpha_0)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha_0$.

Тогда частная производная в точке α_0 — это

$$\left| \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} \right| = \left| \frac{\partial f(x, \xi_n(x))}{\partial \alpha} \right| \leq \varphi(x)$$

Теперь, используя теорему Лебега, получим равенство пределов интегралов:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha_0)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

□

15 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле

Определение 15.1. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{R}[a, \tilde{b}] \forall \tilde{b} < b \forall y \in A \subset \mathbb{R}$. Тогда несобственным интегралом Римана, зависящим от параметра y называется

$$\int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\tilde{b} \rightarrow b-0} \int_a^{\tilde{b}} f(x, y) dx \quad (1)$$

Определение 15.2. Мы говорим, что несобственный интеграл (1) сходится поточечно, если:

$$\forall y \in A \forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall B' \in (B, b) : \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Определение 15.3. Несобственный интеграл (1) сходится равномерно на A , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall B' \in (B, b) \forall y \in A : \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Теорема 15.1. Критерий Коши равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра

(1) сходится равномерно на $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall a < B' < B'' < b \forall y \in A : \left| \int_{B'}^{B''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство. \Rightarrow При всех требуемых кванторах можем сделать оценку:

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{B''}^b f(x, y) dx - \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < 2\varepsilon$$

\Leftarrow Фиксируем $\forall y \in A$, тогда используем критерий Коши сходимости несобственных интегралов (без параметра), то есть

$$\int_a^b f(x, y) dx < +\infty \stackrel{B'' \rightarrow b-0}{\Rightarrow} \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon$$

□

Следствие. Признак сравнения.

Если $|f(x, y)| < g(x, y)$, f, g удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана, $\int_a^b g(x, y) dx$ равномерно сходится на A , то $\int_a^b f(x, y) dx$ равномерно сходится на A .

Следствие. Признак Вейерштрасса.

Если $|f(x, y)| \leq g(x)$, f, g удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана, $\int_a^b g(x) dx$ сходится на A , то $\int_a^b f(x, y) dx$ равномерно сходится на A .

Теорема 15.2. Признак Дирихле равномерной сходимости НИРЗП.

1. $f \in \mathcal{R}[a, \tilde{b}] \forall \tilde{b} \in (a, b) \forall y \in A$ и $\forall y \in A$:

$$\left| \int_a^x f(t, y) dt \right| \leq C$$

2. $g(x, y) \downarrow 0$ при $x \rightarrow b - 0$ равномерно по $y \in A$.

Тогда $\int_a^b f(x, y) g(x, y) dx$ равномерно сходится на A .

Доказательство.

$$\int_{B'}^{B''} f(x, y) g(x, y) dx = g(B', y) \int_{B'}^{\xi(y)} f(x, y) dx + g(B'', y) \int_{\xi(y)}^{B''} f(x, y) dx$$

$g \Rightarrow 0$, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall x \in (B, b) \forall y \in A : |g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4C}$$

А все интегралы в полученной формуле можно оценить сверху, как $2C$, поэтому получим, что

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x, y) g(x, y) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4C} \cdot 2C + \frac{\varepsilon}{4C} \cdot 2C = \varepsilon$$

□

16 Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 16.1. Непрерывность НИРЗП

Если $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b) \times [c, d]$ ($b \leq +\infty$) и $\int_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходится на $[c, d]$, то он является непрерывной функцией на $[c, d]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, а также введём

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x, y)dx$$

Равномерная сходимость $\int_a^b f(x, y)dx$ влечёт равномерную сходимость $I_n(y)$. Используя теорему о пределе равномерно сходящейся функциональной последовательности получим, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(y)$ – непрерывная. \square

Теорема 16.2. Собственная интегрируемость НИРЗП.

Если $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b) \times [c, d]$ ($b \leq +\infty$) и $\int_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходится на $[c, d]$, то

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Положим

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x, y)dx$$

Тогда равномерная сходимость $\int_a^b f(x, y)dx$ влечёт равномерную сходимость $I_n(y)$.

Используя предыдущую теорему и теорему об интегрируемости функциональных последовательностей и тот факт, что $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a, b_n] \times [c, d]$, поэтому мы можем переставить пределы интегрирования и получим:

$$\int_a^{b_n} \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d I_n(y)dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

\square

17 Дифференцирование несобственных интегралов по параметру

Теорема 17.1. Дифференцируемость НИРЗП.

Если $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывны на $[a, b) \times [c, d]$, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ сходится равномерно на $[c, d]$, $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится для некоторого $y_0 \in [c, d]$, то $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ сходится и является дифференцируемой функцией на $[c, d]$, причём

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Доказательство. $\forall t \in [c, d]$ и фиксированного $x \in [a, b]$ справедлива формула

$$f(x, t) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$$

Тогда, если мы проинтегрируем обе части по $[a, b]$ по x , то получим что

1. Первое слагаемое сходится по условию
2. Второе слагаемое удовлетворяет условию теоремы о собственной интегрируемости несобственного интеграла, а это значит что он сходится по x .

Значит и интеграл от левой части также сходится $\forall t$, причём он равен

$$I(t) := \int_a^b f(x, y_0) dx + \int_a^b \left(\int_{y_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx + \int_{y_0}^t \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right) dy$$

Тогда при взятии производной $I'(t)$, первое слагаемое обнулится, а второе, являясь переменным верхним пределом, превратится в $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dx$. \square

18 Гамма- и бета-функции и связь между ними

Определение 18.1. Гамма-функцией называется

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

Утверждение 18.1. Гамма-функция сходится

Доказательство.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx =: I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$$

I_1 сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq x^{\alpha-1}, \quad \int_0^1 x^{\alpha-1} dx < +\infty, \alpha > 0$$

I_2 также сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq C e^{-\frac{x}{2}}, x \geq 1; \quad \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx < +\infty$$

\square

Теорема 18.1. Основные свойства гамма-функции.

1. $\Gamma(\alpha)$ бесконечно дифференцируема $\forall \alpha > 0$.
2. Формула понижения. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \alpha > 0$
3. $\Gamma(n + 1) = n! \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Доказательство. 1. $(x^{\alpha-1}e^{-x})'_\alpha = x^{\alpha-1}e^{-x} \ln x$, заметим, что все оценки, сделанные в предыдущем пункте сохраняются (с немного изменённым коэффициентом α), так как

$$\ln x \leq \frac{1}{x^\varepsilon}, x \in (0, 1]; \quad \ln x \leq x^\varepsilon, x \geq 1$$

Значит мы можем дифференцировать сколько угодно раз с сохранением сходимости.

2. Проинтегрировав по частям, получим:

$$\Gamma(\alpha + 1) = -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \Gamma(\alpha)$$

3. Заметим, что $\Gamma(1) = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = 1$. Используя предыдущее свойство, доказываемое утверждение становится очевидным. □

Определение 18.2. Бета-функцией называется $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$; $a, b \geq 0$

Теорема 18.2. Связь бета- и гамма-функций.

$$\forall a, b > 0 : B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Доказательство.

$$B(a, b)\Gamma(a+b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} dy \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \xi^{a-1} e^{-\xi} d\xi \int_0^{+\infty} \eta^{b-1} e^{-\eta} d\eta$$

Будем рассматривать оба интеграла, как двойные. Рассмотрим замену координат вида

$$\begin{cases} xy = \xi \\ (1-x)y = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \xi + \eta \\ x = \frac{\xi}{\xi + \eta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y & 1-x \end{vmatrix} = y(1-x+x) = y \neq 0$$

Проведите данную замену и у вас всё обязательно получится! □

19 Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции

Теорема 19.1. Формула Гаусса-Эйлера.

Для любых $\alpha > 0$:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}$$

Доказательство. Напоминаем, что

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \stackrel{e^{-x} =: u}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{u} du$$

Докажем, что $f_n(u) = n(1 - u^{\frac{1}{n}})$ монотонно стремится к $\ln \frac{1}{u}$, $u \in (0, 1]$. Для этого рассмотрим функцию $g(t, u) = t(1 - u^{\frac{1}{t}})$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 - u^{\frac{1}{t}} - t \cdot u^{\frac{1}{t}} \ln u \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = 1 - u^{\frac{1}{t}} + u^{\frac{1}{t}} \ln u \frac{1}{t}, u \in (0, 1], t > 0$$

Обозначив $y := u^{\frac{1}{n}} \Rightarrow y \in (0, 1]$ получим новую функцию $\varphi(y) = 1 - y + y \ln y$. Тогда

$$\varphi'(y) = -1 + \ln y + 1 = \ln y < 0, y \in (0, 1]; \quad \varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(y) \geq 0 \Rightarrow g \geq 0 \Rightarrow f_n(u) \uparrow$$

Тогда рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{n} \ln u}}{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{2й зам-й пр-л}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{n} \ln u}{\frac{1}{n}} = -\ln u = \ln \frac{1}{u}$$

Значит мы можем применить теорему Леви для последовательности $f_n(u)$:

$$\int_0^1 (n(1 - u^{\frac{1}{n}}))^{\alpha-1} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{u} du$$

То есть мы получили, что

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-1} \int_0^1 (1 - u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1} du \stackrel{u=t^n}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} B(n, \alpha) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} \frac{\Gamma(n) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)! \Gamma(\alpha)}{(\alpha+n-1) \cdots \alpha \Gamma(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} \end{aligned}$$

□

20 Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения.

Теорема 20.1. *Формула Валлиса.*

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$:

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \right)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\cos \alpha x$ на $[-\pi, \pi]$, разложим её в тригонометрический ряд Фурье:

$$\begin{aligned} b_n &= 0, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n} \right) = \\ &= \frac{2(-1)^n \alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}, n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Значит

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx, \alpha x \in [-\pi, \pi]$$

Возьмём $x := \pi$, тогда

$$\cos \alpha \pi = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} \left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right) \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha \pi = \frac{1}{\alpha \pi} + 2\frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

В итоге получим, что

$$\operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} = 2 \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

Где слева – устранимая точка разрыва, а справа ряд равномерно сходится при $\alpha \leq \alpha_0 < 1$ (Можем оценить $|\frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2}| \leq \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$). Значит мы можем проинтегрировать обе части по α :

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} \right) d\alpha &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2 - n^2}, |x| < 1 \Rightarrow \\ \left[\frac{1}{\pi} \ln |\sin \alpha \pi| - \frac{1}{\pi} \ln |\alpha| \right] \Big|_0^x &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \ln |\alpha^2 - n^2| \Big|_0^x \Rightarrow \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |x^2 - n^2| - \ln n^2) \Rightarrow \\ \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \end{aligned}$$

□

21 Формула дополнения для гамма-функции

Теорема 21.1. *Формула дополнения.*

Для любых $\alpha \in (0, 1)$:

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}$$

Доказательство. Используем формулу Гаусса-Эйлера:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} \cdot n^{1-\alpha} \frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha) \cdots (n-\alpha)} = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n((n-1)!)^2(\alpha+n)}{\alpha(1-\alpha^2)(2^2-\alpha^2) \cdots (n^2-\alpha^2)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha+n}{\alpha} \cdot \frac{1}{n(1-\frac{\alpha^2}{1})(1-\frac{\alpha^2}{2^2}) \cdots (1-\frac{\alpha^2}{n^2})} = \\ \frac{1}{\alpha \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{\alpha^2}{n^2})} &\stackrel{\text{ф. Валлиса}}{=} \frac{1}{\alpha \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi}} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \end{aligned}$$

□

22 Равносходимость интеграла и ряда Фурье в точке

Определение 22.1. Пусть f суммируема на \mathbb{R} . Интегралом Фурье функции f называется

$$I_f(x) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\lambda t) d\mu(t); \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\lambda t) d\mu(t)$$

Теорема 22.1. *Признак Дини сходимости интегралов Фурье.*

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, и для некоторого $x_0 \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ и $S(x_0)$, такие что

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S(x_0)}{t} \in L_1(0, \delta)$$

Тогда $I_f(x_0) = S(x_0)$

Доказательство. Давайте распишем разность

$$\begin{aligned} I_f(x_0) - S(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\lambda(x_0 - t)) d\mu(t) \right] d\lambda - S(x_0) \stackrel{u:=x_0-t}{=} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_0 - u) \cos(\lambda u) d\mu(u) \right] d\lambda - S(x_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{[0, +\infty)} f(x_0 + u) \cos(\lambda u) d\mu(u) + \int_{[0, +\infty)} f(x_0 - u) \cos(\lambda u) d\mu(u) \right] d\lambda - S(x_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\Lambda} \int_{[0, +\infty)} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \cos(\lambda u) d\mu(u) d\lambda - S(x_0) \end{aligned}$$

Мы можем сделать оценку

$$|(f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \cos(\lambda u)| \leq |f(x_0 + u) + f(x_0 - u)| \in L_1(\mathbb{R} \times [0, \Lambda])$$

Значит мы можем применить теорему Фубини и переставить интегралы:

$$\begin{aligned} I_f(x_0) - S(x_0) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty)} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \int_0^{\Lambda} \cos(\lambda u) d\lambda d\mu(u) - S(x_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty)} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \frac{\sin(\Lambda u)}{u} d\mu(u) - S(x_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty)} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \frac{\sin(\Lambda u)}{u} d\mu(u) - 2S(x_0) \int_{[0, +\infty)} \frac{\sin(\Lambda u)}{u} du \right] \end{aligned}$$

Последний переход получился из того факта (интеграл Дирихле), что

$$\int_{[0, +\infty)} \frac{\sin(\Lambda u)}{u} du = \frac{\pi}{2}, \Lambda > 0$$

Продолжим расписывать...

$$\begin{aligned} I_f(x_0) - S(x_0) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2S(x_0)}{u} \sin(\Lambda u) d\mu(u) + \right. \\ &\quad \left. \int_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{u} \sin(\Lambda u) d\mu(u) - 2S(x_0) \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(\Lambda u)}{u} du \right] \end{aligned}$$

Рассмотрим каждое из этих слагаемых поотдельности:

1. По теореме Римана об осцилляции:

$$\int_{[0, \delta]} \varphi_{x_0}(u) \sin(\Lambda u) d\mu(u) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0$$

2. На $[\delta, +\infty)$ мы можем использовать следующую оценку:

$$\left| \frac{f(x_0 + u)}{u} \right| \leq \frac{1}{\delta} |f(x_0 + u)|$$

Значит по теореме Римана об осцилляции (предыдущим неравенством мы доказали, что $\frac{f(x_0+u)}{u} \sin(\Lambda u)$ суммируемая, аналогично для второго подлагаемого):

$$\int_{[\delta, +\infty)} \frac{f(x_0 + u)}{u} \sin(\Lambda u) d\mu(u) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0$$

3. Совершим замену и получим хвост сходящегося интеграла Римана (интеграла Дирихле):

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(\Lambda u)}{u} du = \int_{\Lambda \delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Таким образом, теорема доказана. \square

Следствие. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Гёльдера (3.1) порядка α , $0 < \alpha \leq 1$ в точке x_0 , то $I_f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$.

Если $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, то $I_f(x) = f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

23 Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье суммируемой функции. Формулы обращения.

Определение 23.1. Преобразованием Фурье функции f , суммируемой на \mathbb{R} называется

$$F[f] := \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t)$$

Определение 23.2. Обратным преобразованием Фурье функции $F \in C(\mathbb{R})$ называется

$$F^{-1}[f] := \tilde{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda) d\lambda$$

Теорема 23.1. Свойства преобразования Фурье суммируемых на всей числовой оси функций.

1. (Линейность)

Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(\lambda) = \alpha \hat{f}(\lambda) + \beta \hat{g}(\lambda)$$

2. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}(\lambda)$ непрерывна на \mathbb{R} и $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$.

3. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = f(\alpha x)$, $\alpha > 0$, то $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \hat{f}(\frac{\lambda}{\alpha})$

4. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\psi(\lambda) = f(\lambda + a)$, $a \in \mathbb{R}$, то $\hat{\psi}(\lambda) = e^{ia\lambda} \hat{f}(\lambda)$

Доказательство. 1. Очевидна из свойств интеграла

2. Снова распишем преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t)$$

Справедливо неравенство:

$$|f(t)e^{-i\lambda t}| \leq |f(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

После этого распишем комплексную экспоненту в сумму тригонометрических функций и сведём к теореме об осцилляции ($\lambda \rightarrow \infty$). Почему мы имеем право так делать? Работает теорема о непрерывности несобственного интеграла Лебега, зависящего от параметра.

3. Распишем более подробно преобразование функции $\varphi(\lambda)$:

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha t) e^{-i\lambda t} d\mu(t) \stackrel{x:=t\alpha}{=} \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\frac{\lambda}{\alpha}x} d\mu(x) = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$

4. Распишем более подробно преобразование функции $\psi(\lambda)$:

$$\hat{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t+a) e^{-i\lambda t} d\mu(t) \stackrel{x:=t+a}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x + i\lambda a} d\mu(x) = e^{i\lambda a} \hat{f}(\lambda)$$

□

Лемма 23.1. *Формула обращения.*

Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Гёльдера в точке x , то

$$\tilde{\hat{f}}(x) = f(x)$$

Доказательство. Заметим, что $\tilde{\hat{f}}$ – это интеграл Фурье, тогда утверждение становится очевидным, благодаря одному из следствий признака Дини (22). □

24 Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. Свёртка и её преобразование Фурье.

Теорема 24.1. *Преобразование Фурье производной.*

Если f абсолютно непрерывная на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, и $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \hat{f}'(\lambda) = (i\lambda) \hat{f}(\lambda)$$

Доказательство. Перепишем $f(x)$ благодаря формуле Ньютона-Лейбница для суммируемых функций:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) d\mu(t), x > 0$$

Устремляя $x \rightarrow +\infty$ увидим, что правая часть имеет предел, а значит и левая тоже:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(+\infty) = 0$$

Аналогично получим, что $f(-\infty) = 0$.

Тогда рассмотрим следующее преобразование Фурье:

$$\hat{f}'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (e^{-i\lambda t})'_t d\mu(t) = (i\lambda) \hat{f}(\lambda)$$

□

Теорема 24.2. *Производная преобразования Фурье.*

Если $f(t), tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ дифференцируемо, причём

$$(\hat{f})'(\lambda) = (\widehat{-itf(t)})(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Зададимся вопросом, имеем ли мы право продифференцировать интеграл, зависящий от параметра λ :

$$(\hat{f})'(\lambda) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (e^{-i\lambda t})'_\lambda d\mu(t) = (\widehat{-itf(t)})(\lambda)$$

Для разрешения этого вопроса оценим следующее выражение:

$$|f(t)(e^{-i\lambda t})'_\lambda| = |-itf(t)e^{-i\lambda t}| \leq |tf(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

Значит мы имеем право (так как производная по параметру оценивается суммируемой функцией), согласно теореме о дифференцировании интеграла с параметром. □

Определение 24.1. Свёрткой функций $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ называется

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t - x) d\mu(x)$$

Утверждение 24.1. *Свёртка определена почти всюду.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x) g(t - x)) d\mu(x) d\mu(t) &\stackrel{\text{т.Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(t - x) d\mu(t) d\mu(x) \stackrel{u:=t-x}{=} \\ &\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(u) d\mu(u) d\mu(x) \end{aligned}$$

Последний интеграл расписывается, как произведение двух интегралов, а так как каждая из функций суммируемая, значит их произведение тоже получится суммируемой, значит свёртка является суммируемой функцией, а значит по той же теореме Фубини свёртка определена почти всюду. □

Теорема 24.3. Преобразование Фурье свёртки.

Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то $\widehat{(f * g)}(\lambda) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t-x) d\mu(x) e^{-i\lambda t} d\mu(t) \stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} \int_{\mathbb{R}} g(t-x) d\mu(t) e^{-i\lambda(t-x)} d\mu(x) \stackrel{u:=t-x}{=} \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} d\mu(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-i\lambda u} d\mu(u) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda) \end{aligned}$$

□

25 Пространства основных и обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций. δ -функция

Определение 25.1. Носителем функции $f(\text{supp } f)$ называется замыкание множества, где она не равна нулю:

$$\text{supp } f := \text{cl } \{x : f(x) \neq 0\}$$

Определение 25.2. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется финитной, если её носитель компактен.

Определение 25.3. Пространство D основных функций – это множество финитных бесконечно дифференцируемых функций с топологией, определяемой позже. ($D = C_0^\infty$)

Определение 25.4. Пусть D_K – множество финитных бесконечно дифференцируемых функций f , таких, что $\text{supp } f \subset K$.

Определение 25.5. Полунормой на линейном пространстве E называется функция $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

1. $p(cx) = |c|p(x) \quad \forall x \in E \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$

Утверждение 25.1. Если на E задана совокупность нетривиальных полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$, то E является топологическим пространством, открытые множества в котором – всевозможные объединения множеств

$$U_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \varepsilon}(a) := \{x \in E : p_{\alpha_i}(x - a) < \varepsilon, i = \overline{1, n}\}$$

Замечание. В $D_{[-N, N]}$ рассмотрим счётную совокупность полунорм:

$$p_m(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}, k = \overline{0, m}} |f^{(k)}(x)|$$

А в D рассмотрим совокупность полунорм $\{p_\alpha\}, \alpha = \{N_m\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$p_\alpha(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{x \in [-m, m] \setminus [-m+1, m-1], k = \overline{0, N_m}} |f^{(k)}(x)|$$

Это было для **общего развития**, главное знать, что D – топологическое пространство, причём сходимость в нём даётся определением:

Определение 25.6. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ сходится к $\varphi_0 \in D$, если:

1. $\exists [a, b] \forall n \in \mathbb{N} : \text{supp } \varphi_n \subset [a, b]$
2. $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(m)}(x) - \varphi_0^{(m)}(x)| = 0$

Определение 25.7. Линейный функционал на D – линейное отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Действие функционала будем обозначать так:

$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2)$$

Определение 25.8. Пусть D' – линейное топологическое пространство **непрерывных** функционалов на D .

Определение 25.9. Функционалы из D' непрерывны в смысле:

$$\forall f \in D' \forall \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$$

Определение 25.10. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D'$ сходится к $f \in D'$, если $\forall \varphi \in D$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$$

Утверждение 25.2. Если $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$, то f соответствует линейный функционал из D' , определённый, как

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)d\mu(x)$$

Доказательство. Линейность очевидна. Докажем непрерывность:

Пусть $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi$ в $D \Rightarrow \text{supp } \varphi_n, \text{supp } \varphi \subset [a, b], \varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $[a, b]$. Значит $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, тогда

$$|f(x)\varphi_n(x)| \leq C|f(x)| \xrightarrow{\text{т.Лебега}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)d\mu(x)$$

□

Следствие. *УСЛОВНО* можем считать, что $L_{loc}(\mathbb{R}) \subset D'$

Определение 25.11. Элементы пространства D' называются также обобщёнными функциями.

Определение 25.12. Линейные функционалы из D' , соответствующие функциям из $L_{loc}(\mathbb{R})$ называются регулярными функционалами.

Определение 25.13. Нерегулярный функционал называется сингулярным.

Определение 25.14. Пусть $\lambda \in C^{\infty}$. Тогда $\forall f \in D' : \lambda f$ определяется как:

$$(\lambda f, \varphi) := (f, \lambda\varphi)$$

Определение 25.15. Обобщённой производной обобщённой функции $f \in D'$ называется $f' \in D$, определяемая формулой:

$$\forall \varphi \in D : (f', \varphi) := -(f, \varphi')$$

Теорема 25.1. Свойства обобщённого дифференцирования.

Операция дифференцирования на D' обладает следующими свойствами:

1. (Линейность)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall f, g \in D' : (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

2. (Непрерывность)

Если $f_n \rightarrow f$ в D' , то $f'_n \rightarrow f'$ в D'

3. (Правило Лейбница)

Если $\lambda \in C^\infty, f \in D'$, то $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$

Доказательство. Все свойства доказываются очевидно расписыванием действия рассматриваемых функционалов на произвольную функцию φ . \square

Определение 25.16. δ -функцией называется функционал $\delta \in D'$:

$$\forall \varphi \in D : (\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

26 Пространство Шварца быстро убывающих функций

Определение 26.1. $f \in S$, если f – бесконечно дифференцируемая на \mathbb{R} , и

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \exists C(k, l) \forall x \in \mathbb{R} : (1 + |x|)^k |f^{(l)}(x)| \leq C(k, l)$$

То есть любая производная функций из пространства Шварца стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени.

Теорема 26.1. Преобразование Фурье является биекцией на S .

Доказательство. Сделаем оценку:

$$|x^k f^{(l)}(x)| \leq \frac{C(k+2, l)}{(1+|x|)^2} \Rightarrow x^k f^{(l)} \in L_1(\mathbb{R})$$

Теперь мы можем утверждать, что преобразование Фурье является бесконечно дифференцируемой функцией на S . Также вспомним формулу преобразования Фурье производной:

$$\hat{f}'(\lambda) = i\lambda \hat{f}(\lambda) \Rightarrow |\hat{f}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \rightarrow \infty$$

Но мы можем вместо первой производной ставить любую производную, значит

$$|\hat{f}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right), n \in \mathbb{N}, \lambda \rightarrow +\infty$$

Таким образом, мы показали, что $f \in S \Rightarrow \hat{f} \in S$. Осталось установить, что $\forall g \in S : \tilde{g} \in S$:

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \hat{g}(-x)$$

Значит $g = \hat{\tilde{g}}, \tilde{g} \in S$. □

Теорема 26.2. *Равенство Парсеваля в S .*

$\forall f_1, f_2 \in S$:

$$1. \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) f_2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) \hat{f}_2(x) dx$$

$$2. \int_{\mathbb{R}} f_1(x) \overline{\hat{f}_2(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) \overline{f_2(x)} dx$$

в частности, $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})}$

Доказательство. 1. Распишем интеграл произведения:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) f_2(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_2(x) \int_{\mathbb{R}} f_1(t) e^{-itx} dt dx$$

Оценим подынтегральную функцию:

$$|f_1(t) f_2(x) e^{-itx}| \leq |f_1(t)| \cdot |f_2(x)| \in L_1(\mathbb{R}^2)$$

Значит мы можем применить теорему Фубини:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \int_{\mathbb{R}} f_2(x) e^{-itx} dx dt = \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \hat{f}_2(t) dt$$

2. Введём $h(x) := \overline{\hat{f}_2(x)}$. Распишем интеграл произведения:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \hat{h}(t) dt$$

Тогда

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_2(x)} e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_2(x) e^{itx} dx} = \overline{\hat{\hat{f}_2}}(t) = \overline{f_2}(t)$$

Заметим, что мы доказали второй пункт. □