Содержание

1 Теорема Римана об осцилляции

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S, если любая окресность x содержит хотя бы одну точку множества S.

Определение 1.2. Множество всех точек прикочновения S называется **замыканием** S.

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. ($\operatorname{supp} f$) Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G, если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ *– линейное нормированное пространство.*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. *Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменим $\mathbb{R}$ на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

  $$\exists \{h_n\} : \ h_n \uparrow f$$

  Теорема Леви гарантирует, что

  $$\int_a^n h_n(x) d\mu(x) \to \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

  Значит

  $$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

  То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

  $$h_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

  В силу того, что $\forall k : \ E_k$ – измеримое, то

  $$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \text{элементарное } M_\varepsilon : \ \mu(E_k \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

  Значит

  $$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \triangle M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

  Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

  $$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

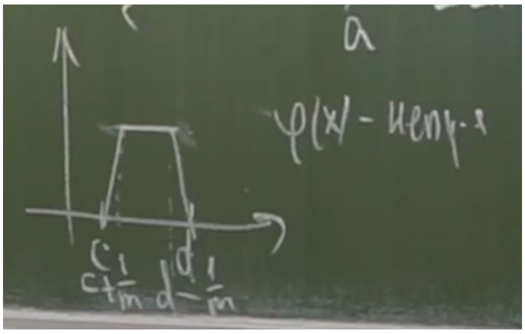

Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

- Докажем для любой неотрицательной: как обычно введём срезки, для которых рассуждения аналогичны предыдущему пункту.
- Для произвольных расписываем как сумму знакопостоянных.

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N,\,N]} :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C[-N, N]\ \|f|_{[-N,\,N]} - g\|_{L_1[-N,\,N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейных образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_{-N}^{N} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a, b]$:

$$\lim_{\delta\to+0} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists g \in C[a, b] :\ \int_a^b |f(x) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta :\ |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h\ 0 \leqslant h \leqslant \delta$:

$$\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) \leqslant \int_a^{b-h} |f(x+h) - g(x+h)| d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \\ + \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

Так как f суммируема на $\mathbb{R}$, то $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a, b] := [-N-1, N+1]$ и введём $g := f\mathbb{I}_{[-N,N]} \in L_1[a, b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists \delta \in (0, 1)\, \forall h, 0 \leqslant h \leqslant \delta :\ \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t, |t| < \delta$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = \int\limits_{\{x, x+t\} \subseteq [a,b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) + \int\limits_{\{x, x+y\} \not\subseteq [a,b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) \overset{x = t + \frac{\pi}{\lambda}}{=} -\int_{I - \frac{\pi}{\lambda}} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) =$$

$$-\frac{1}{2} \int_I \left(f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \triangle I} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t)$$

Заметим, что

$$\left| \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \setminus I} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leqslant \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \triangle I} \left| f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| d\mu(t) = \\ = \int_{I \triangle (I + \frac{\pi}{\lambda})} |f(x)| d\mu(t) \overset{\lambda \to \infty}{\to} 0$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu\left(I \triangle (I + \frac{\pi}{\lambda})\right) \overset{\lambda \to \infty}{\to} 0$

Также очевидно, что

$$\left| \int_I \left(f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leqslant \int_I \left| f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right| d\mu(t) \overset{\text{по пред. Лемме}}{\to} 0$$

□