Содержание

1 Теорема Римана об осцилляции 3

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации. 6

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке 9

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. 11

5 Теорема Жордана. 12

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции 13

7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами 16

8 Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя. 17

9 Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля 19

10 Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом... 19

11 Теорема Рисса-Фишера 20

12 Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь 21

13 Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$ 22

14 Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра 24

15 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле 25

16 Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра 27

17 Дифференцирование несобственных интегралов по параметру 28

18 Гамма- и бета-функции и связь между ними 28

19 Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции 29

20 Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения. 30

21 Формула дополнения для гамма-функции **31**

22 Равносходимость интеграла и ряда Фурье в точке **32**

23 Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье суммируемой функции. Формулы обращения. **33**

24 Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. Свёртка и её преобразование Фурье. **34**

25 Пространства основных и обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций. δ-функция **36**

26 Пространство Шварца быстро убывающих функций **38**

1 Теорема Римана об осцилляции

Порядок и беспорядок – это число; храбрость и трусость – это мощь; сила и слабость – это форма.

Лукашов А.Л.

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S, если любая окресность x содержит хотя бы одну точку множества S.

Определение 1.2. Множество всех точек прикосновения S называется **замыканием** S.

Определение 1.3. Носителем функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. (supp f) Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G, если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ *– линейное нормированное пространство.*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. *Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменим $\mathbb{R}$ на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достаточно доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.

- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N, то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммируемых функций.

- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

  $$\exists \{h_n\}_{n=1}^{\infty} : \ h_n \uparrow f$$

  Теорема Леви гарантирует, что

  $$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \to \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

  Значит

  $$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k : \ E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \text{элементарное } M_\varepsilon : \ \mu(E_k \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \triangle M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приближать индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так:

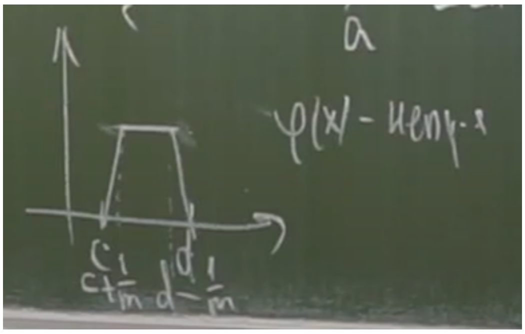


Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

Тогда

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,\,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\,N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N,\,N]} : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in C[-N, N] \ \|f|_{[-N,\,N]} - g\|_{L_1[-N,\,N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\,N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_{-N}^{N} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\,N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

$\square$

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)=0$$

Доказательство. Докажем, что для $f\in L_1[a,b]$:

$$\lim_{\delta\to+0}\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|d\mu(x)=0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists g\in C[a,b]:\ \int_a^b|f(x)-g(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a,b]\Rightarrow$ по теореме Кантора она равномерно непрерывная на $[a,b]$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in[a,b],|x-y|<\delta:\ |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h\ 0\leqslant h\leqslant\delta$:

$$\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|d\mu(x)\leqslant\int_a^{b-h}|f(x+h)-g(x+h)|d\mu(x)+\int_a^{b-h}|f(x)-g(x)|d\mu(x)+\\+\int_a^{b-h}|g(x+h)-g(x)|d\mu(x)<\varepsilon$$

Так как f суммируема на $\mathbb{R}$, то $\exists N\in\mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]}|f(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a,b]:=[-N-1,N+1]$ и введём $g:=f\mathbb{I}_{[-N,N]}\in L_1[a,b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists\delta\in(0,1)\,\forall h,0\leqslant h\leqslant\delta:\ \int_a^{b-h}|g(x+h)-g(x)|d\mu(x)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t,|t|<\delta$:

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)=\int\limits_{\{x,x+t\}\subseteq[a,b]}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)+\int\limits_{\{x,x+t\}\not\subseteq[a,b]}|f(x+t)-f(x)|d\mu(x)<\varepsilon$$

$\square$

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f\in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\sin(\lambda x)d\mu(x)=0$$

Доказательство.

$$\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x) \overset{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} -\int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) =$$
$$-\frac{1}{2}\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) - \frac{1}{2}\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)$$

Заметим, что

$$\left|\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I}\left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|d\mu(t) =$$
$$= \int_{I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})}|f(x)|d\mu(x) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu\left(I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})\right) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

Также очевидно, что

$$\left|\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_I \left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right|d\mu(t) \overset{\text{по пред. Лемме}}{\to} 0$$

□

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

> О мастерстве полководца судят по старательности его подчиненных.
>
> Лукашов А.Л.

Определение 2.1. $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi,\pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{iku}+e^{-iku}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}e^{iku} = \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)u}-1}{e^{iu}-1} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}-e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}-e^{-i\frac{u}{2}}}\cdot\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f \in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt))\right)d\mu(t) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)d\mu(t)$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x + u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T, T-периодичной функции одинаков. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $f \in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \to +\infty$ равномерно по x.*

Доказательство. g – ограниченная $\Rightarrow \exists M:\ \forall u\ |g(u)| \leqslant M$.

f – суммируемая $\Rightarrow$ по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi,\pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi}|f_2(t)|d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 – непрерывная на компакте $[-\pi,\pi] \Rightarrow \exists B\ \forall u:\ |f_1(u)| \leqslant B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F:

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t+h) - F(t)|d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ:

$$a_n(\chi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi(t)\cos(nt)d\mu(t) \overset{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi\left(u+\frac{\pi}{n}\right)\cos(nu)d\mu(u) =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\chi\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \chi(t)\right]\cos(nt)d\mu(t) \Rightarrow$$
$$|a_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\chi\right)$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\omega_1(\frac{\pi}{n},\chi)=0$ равномерно по x:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\chi(t+h)-\chi(t)|d\mu(t)=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t)|d\mu(t)\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)-f(x+t)|\cdot|g(t+h)|d\mu(t)+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t)\leqslant$$
$$\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+h)-f(u)|d\mu(u)+\int_{-\pi}^{\pi}|f_1(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant$$
$$\leqslant M\omega_1(\frac{\pi}{n},f)+B\omega_1(\frac{\pi}{n},g)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta\to 0$. Что и требовалось доказать. □

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f\in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a,b)\subset[-\pi,\pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a',b']\subset(a,b)$.

Доказательство. Так как $[a',b']$ содержится в (a,b), то

$$\exists\eta>0\,\forall x\in[a',b']\,\forall t,0\leqslant|t|<\eta:\ x+t\in(a,b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t)=\begin{cases}0,t\in(-\eta,\eta)\\1,t\in[-\pi,\pi]\setminus(-\eta,\eta)\end{cases}$$

Кроме того, λ – 2π-периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)d\mu(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)D_n(t)d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t\notin(-\eta,\eta)$, то $\lambda(\eta)=1$, ничего не меняем. Если же $|t|<\eta$, то $x+t\in(a,b)$, где $f=0$, поэтому получили, что подыинтегральные функции совпадают везде на $[-\pi,\pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)\sin(nt)d\mu(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)\cos(nt)d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме.

□

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Одержать сто побед в ста битвах — это не вершина воинского искусства. Повергнуть врага без сражения — вот вершина.

Лукашов А.Л.

Теорема 3.1. *Признак Дини.*
Если $f \in L_{2\pi}$ *и* $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta), \delta > 0$, *где*

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ *сходится к* $S(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0))D_n(u)d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв $\sin((n+\frac{1}{2})t) = \sin(nt)\cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt)\sin(\frac{t}{2})$ в формуле ядра Дирихле, а также добавим и вычтем интеграл $\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t} \sin(nt)d\mu(t)$:

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S(x_0) = \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)}{t}\sin(nt)d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))\frac{\cos(nt)}{2}d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))\frac{\sin(nt)\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))\sin(nt)\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right)d\mu(t) \end{aligned}$$

По условию, φ_{x_0} суммируемая $\Rightarrow$ по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))$ также суммируемая $\Rightarrow$ второе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta,\pi]$ и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} = \frac{1-\frac{t^2}{8}+o(t^3)}{2\left(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}+o(t^4)\right)} - \frac{1}{t} = \frac{t-\frac{t^3}{8}-t+\frac{t^3}{24}+o(t^4)}{t^2+o(t^3)} \overset{t\to 0}{\to} 0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}-\frac{1}{t}\right) \in L_1[0,\delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции. $\square$

Утверждение 3.1. *Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha \in (0,1]$ в точке x_0, если $\exists$ конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C, \delta > 0$ такие, что

$$\forall t, 0<t<\delta, |f(x_0+t)-f(x_0+0)| \leqslant Ct^\alpha, |f(x_0-t)-f(x_0-0)| \leqslant Ct^\alpha$$

Определение 3.2. Обобщённой односторонней производной функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$$

Теорема 3.2. *Признак Липшица.*

Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. По условию теоремы

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Значит функций φ_{x_0} из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{(f(x_0+t)-f(x_0+0))+(f(x_0-t)-f(x_0-0))}{t}$$

То, что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left|\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}d\mu(t) \leqslant$$
$$2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}d\mu(t) = 2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}dt = 2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Что и требовалось доказать. $\square$

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

> Непобедимость заключена в себе самом, возможность победы заключена в противнике.
>
> Лукашов А.Л.

Теорема 4.1. *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если F – 2π-периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье F.

Доказательство. $f(x) := F'(x) \in L_1$. Значит $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)d\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\cos(nx)d\mu(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi}F(x)\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)d\mu(x) = nB_n$$

Аналогично докажем, что $b_n = -nA_n$, а также заметим, что $a_0 = 0$.

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы. □

Следствие. *Если $f, \cdots, f^{(k-1)}$ – 2π-периодические, и $f^{(k-1)}$ – абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют:*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Пусть $k = 1$: f – абсолютно непрерывная, значит $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$. По теореме об осцилляции: $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right), n \to +\infty$.

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции. □

Теорема 4.2. *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если f – 2π-периодическая функция ограниченной вариации на периоде 2π, то её коэффициенты Фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+\frac{\pi}{n}) - f(x)\right]\cos(nx)dx = \cdots =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]\cos(nx)dx, \quad \forall k = \overline{1,n}$$

Сложив все эти n равенств и оценив косинус сверху единицей, получим:

$$|na_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right| dx \leqslant V(f)$$

□

Теорема 4.3. *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если $f \in L^1_{2\pi}, f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *– её тригонометрический ряд Фурье,* $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) d\mu(t)$ *– неопределённый интеграл Лебега для* f*, то* $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx)}{n}$*, где ряд равномерно сходится на* $\mathbb{R}$*.*

Доказательство. $F(x)$ – абсолютно непрерывная, $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu(t) = \pi a_0$. $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – тоже абсолютно непрерывная на периоде и 2π-периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)'$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье для $F(x) - \frac{a_0}{2}x$. Но с другой стороны $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Равномерная сходимость проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. □

5 Теорема Жордана.

> Когда обороняются, значит, есть в чем-то недостаток; когда нападают, значит, есть все в избытке.
>
> Лукашов А.Л.

Теорема 5.1. *Признак Жордана.*

Если $f \in L_{2\pi}$ *и является функцией ограниченной вариации на* $[a, b]$*, то тригонометрический ряд Фурье* f *сходится к* $f(x_0)$ *в каждой точке* $x_0 \in [a, b]$ *непрерывности* $f(x)$ *и к* $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ *в каждой точке разрыва* $x_0 \in [a, b]$*.*

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$*, то тригонометрический ряд Фурье функции* f *сходится к ней равномерно на любом отрезке* $[a', b'] \subset (a, b)$*.*

Доказательство. Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\delta} \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

а для $-t$ аналогично. По определению правостороннего предела:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta :\; 0 \leqslant f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists\delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}\sin(nt)dt = (f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0))\int_{\delta_2}^{\delta_1}\frac{\sin(nt)}{t}dt$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ сходится, поэтому если обзначим за $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t}dt$, то $G(v)$ будет ограничена, т.е. $\exists C:\; |G(v)| \leqslant C$.

Но теперь рассмотрим $\forall A$:

$$\left|\int_0^A \frac{\sin(nt)}{t}dt\right| \overset{nt=u}{=} \left|\int_0^{nA}\frac{\sin(u)}{u}du\right| \leqslant C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left|\int_0^{\delta_1}\frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t}\sin(nt)dt\right| \leqslant 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ. Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f,x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что $S(x_0) = f(x_0)$. Применим к каждому из трёх последих слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти δ_1 из текущего доказательство независимо от x_0. Также независимо от x_0 мы ограничиваем интеграл $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утверждение этой теоремы доказано. □

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции

> Идти вперед туда, где не ждут; атаковать там, где не подготовились
>
> Лукашов А.Л.

Теорема 6.1. *Коровкина.*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ такова, что $L_n(e_i) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_i$ на $[a,b]$, $e_i(x) = x^i, i = 0,1,2,$ то

$$\forall f \in C[a,b] :\; L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $[a,b]$.

Доказательство. $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ ограничена:

$$\exists M: -M \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b]$$

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t, x \in [a,b], |t-x| < \delta: -\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$$

Заметим, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)\, \forall x \in [a,b] \Rightarrow L_n(f_1) \leqslant L_n(f_2)\, \forall x \in [a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t, x \in [a,b]: -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}\psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t)$$

где $\psi_x(t) = (t-x)^2$.

Откуда это следует? Если $|t-x| < \delta$, то мы только ослабляем условие равномерной непрерывности, значит неравенство сохраняется. Если же $|t-x| \geqslant \delta \Rightarrow \frac{\psi(t)}{\delta^2} = \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geqslant 1 \Rightarrow$ неравенство сохраняется благодаря ограниченности f.

Зафиксировав произвольный x, применяем оператор L_n относительно переменной t. Все неравенства сохраняются:

$$-\varepsilon L_n(e_0, x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x) < L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x) < \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x)$$

Заметим, что

$$L_n(\psi_x, x) = L_n((t-x)^2, x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) = L_n(e_2, x) - 2x L_n(e_1, x) + x^2 L_n(e_0, x) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_2(x) - 2x e_1(x) + x^2 e_0(x) = x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0$$

Значит

$$\exists N_1\, \forall n > N_1\, \forall x \in [a,b]: |L_n(\psi_x, x)| \leqslant \frac{\varepsilon \delta^2}{4M}$$

А из того, что $L_n(e_0) \rightrightarrows e_0$:

$$\exists N_2\, \forall n > N_2\, \forall x \in [a,b]: |L_n(e_0, x)| < \frac{3}{2}$$

Также не забываем, что:

$$|L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leqslant \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x, x)$$

Объединяя эти три условия, получим, что

$$\forall n > \max(N_1, N_2): |L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leqslant 2\varepsilon$$

Снова используем тот факт, что $L_n(e_0) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_0$:

$$\exists N_3\, \forall n > N_3\, \forall x \in [a,b]: |L_n(e_0, x) - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Значит

$$|f(x) L_n(e_0, x) - f(x)| \leqslant |f(x)| \cdot |L_n(e_0, x) - 1| \leqslant \varepsilon$$

Объединяя ВСЕ неравенства, получим:

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3)\, \forall x \in [a,b]: |L_n(f, x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$$

$\square$

Теорема 6.2. *Коровкина'*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ *такова, что* $L_n(e_i) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_i$ *на* $\mathbb{R}$, $e_0(x) = 1, e_1(x) = \cos(x), e_2(x) = \sin(x)$, *то*

$$\forall f \in C_{2\pi} : L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Аналогично немодифицированной теореме, только вместо функции ψ_x введём

$$\varphi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) = \frac{1-\cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t)\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(t)\sin(x) = \frac{1}{2}e_0(t) - \frac{1}{2}\cos(x)e_1(t) - \frac{1}{2}\sin(x)e_2(t)$$

Тогда

$$L_n(\varphi_x, x) = \frac{1}{2}L_n(e_0, x) - \frac{1}{2}\cos(x)L_n(e_1, x) - \frac{1}{2}\sin(x)L_n(e_2, x) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2(x) - \frac{1}{2}\sin^2(x) = 0$$

□

Теорема 6.3. *Фейера.*

Для любой непрерывной 2π*-периодической функции последовательность средних арифеметических частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье равномерно на* $\mathbb{R}$ *сходится к ней.*

Доказательство. Распишем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\sigma_n(f,x) := \frac{S_0(f,x) + S_1(f,x) + \cdots + S_n(f,x)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=0}^{n} D_k(t)dt =$$

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin^2(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)\sin(\frac{t}{2})dt =$$

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}(\cos(kt) - \cos((k+1)t))dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})}(1-\cos((n+1)t)) =$$

$$\frac{1}{(n+1)2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}dt$$

Получается, $\sigma_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ образует последовательность линейных положительных операторов. Это значит, что нам нужно проверить сходимость лишь на трёх функциях: $e_0 := 1, e_1 := \sin(x), e_2 := \cos(x)$.

$$\sigma_n(e_0) = e_0, \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \quad \sigma_n(e_1) = e_1\cdot\frac{n}{n+1}, \sigma_n(e_2) = e_2\cdot\frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Коровкина, получаем, что $\forall f \in C_{2\pi} : \sigma_n(f) \rightrightarrows f$ □

7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами

> Война – это путь обмана, постоянной организации ложных выпадов, распространения дезинформации, использования уловок и хитростей.
>
> Лукашов А.Л.

Теорема 7.1. *Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.*

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ может быть с любой степенью точности равномерно приближена алгебраическими многочленами, то есть

$$\forall f \in C[a, b]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists P_n\, \forall x \in [a, b] : \ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$.

Введём многочлены Берштейна:

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Мы можем рассматривать их, как операторы $B_n : \ C[0, 1] \to C[0, 1]$. Очевидно, что они линейные и положительные, поэтому достаточно проверить сходимость трёх функций: $1, x, x^2$.

$$B_n(e_0, x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1 = e_0(x)$$

Рассмотрим $g(t) := (tx + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k x^k (1-x)^{n-k}$. Тогда

$$g'(t) = nx(tx + (1-x))^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k t^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g'(1)$ получим равенство:

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Rightarrow B_n(e_1, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x)$$

Взяв вторую производную от g, получим:

$$n(n-1)x^2(tx + (1-x))^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k t^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g''(1)$ получим равенство:

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - nx \Rightarrow$$

$$B_n(e_2, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_2(x)$$

Получили, что для оператора B_n справедлива теорема Коровкина и утверждение доказано.

Для завершения доказательства перейдём к произвольному отрезку $[a, b]$: для $f \in C[a, b]$ введём $F(x) = f(x(b-a)+a) \in C[0, 1]$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > N\, \forall x \in [0, 1] :\ |B_n(F, x) - F(x)| < \varepsilon$$

Осталось заметить, что если в многочлен Бернштейна подставить какую-то линейную функцию, то получится какой-то многочлен:

$$\Rightarrow |B\left(F, \frac{t-a}{b-a}\right) - f(t)| < \varepsilon$$

$\square$

Следствие. *Из данной теоремы и теормы Коровкина' следует теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими многочленами:*

$$\forall f \in C_{2\pi}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists T_n := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)) :\ |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

8 Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.

> Избегание столкновения с большими силами свидетельствует не о трусости, а о мудрости, ибо принесение себя в жертву никогда и нигде не является преимуществом.
>
> Лукашов А.Л.

Определение 8.1. Коэффициентами Фурье функции f в произвольном евклидовом (гильбертовом) пространстве называются скаляры вида

$$f_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

где $\{e_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов.

Определение 8.2. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **полной** в $L_p(E)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall f \in L_p(E) \, \exists \{c_1, \cdots, c_n\} \subset \mathbb{R}: \; \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|_p < \varepsilon$$

Определение 8.3. Система элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства E называется **базисом**, если

$$\forall f \in E \, \exists! \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}: \; f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

Определение 8.4. Ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H, явл-ся его базисом, называется **ортонормированным базисом**

Теорема 8.1. *Минимальное свойство сумм Фурье.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E, то

$$\forall f \in E \, \forall c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{R}: \; \|f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\| \geqslant \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|$$

, где $\{f_k\}$ – коэффициенты Фурье для f.

Причём равенство достигается $\Leftrightarrow \forall k = \overline{1, N}: \; c_k = f_k$.

Доказательство.

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\|^2 = \langle f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k, f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k \rangle = \langle f, f \rangle - 2\sum_{k=1}^{N} c_k \langle f, e_k \rangle + \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} c_k c_l \langle e_k, e_l \rangle =$$

$$\langle f, f \rangle - 2\sum_{k=1}^{N} f_k c_k \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{N} c_k^2 \|e_k\|^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{N} (f_k^2 - 2f_k c_k + c_k^2) \|e_k\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|^2$$

□

Следствие. *Тождество Бесселя.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E, то $\forall f \in E$:

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2$$

Доказательство. Очевидно следует из цепочки неравенств из доказательства предыдущей теоремы. □

Следствие. *Неравенство Бесселя.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E, то $\forall f \in E$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

Доказательство. Из тождества Бесселя следует, что

$$\forall N \in \mathbb{N}:\ \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0$$

Устремляя $N \to +\infty$ получим требуемое. □

9 Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля

Теорема 9.1. *Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E, то $\forall f \in E$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists T = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k:\ \|f - T\| < \varepsilon$
2. $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$
3. $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$ *– равенство Парсеваля для f.*

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ по предыдущей теме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\| < \varepsilon$$

Тогда используя неравенство Бесселя:

$$\forall n > N:\ \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|^2$$

Ну а $3 \Leftrightarrow 1$ так как при равенстве Парсеваля разность $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2$ будет бесконечно малая, а значит применяя равенство Бесселя получим требуемое. □

Следствие. *Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E, то следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– полная система в E.*
2. $\forall f \in E:\ f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$
3. $\forall f \in E:\ \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$

10 Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом...

Определение 10.1. $f \in L_{2\pi}^2 \Leftrightarrow f$ – 2π-периодическая и $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Это пространство гильбертово.

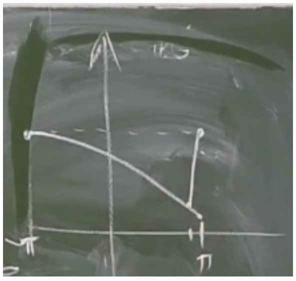
Утверждение 10.1. *Мы уже знаем, что ортогональной системой в этом пространстве будет система*

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cdots\}$$

Утверждение 10.2. *Благодаря теореме Фейера мы можем утверждать, что* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна в* $C_{2\pi}$.

Утверждение 10.3. *Мы уже знаем, что* $C[-\pi,\pi]$ *всюду плотно в* $L_p[-\pi,\pi], p \geqslant 1$.

Заметим, что $C_{2\pi}$ *всюду плотно в* $C[-\pi,\pi]$ *в смысле нормы* $L_p[-\pi,\pi]$. *Делается это с помощью такого трюка:*



Используя транзитивность свойства полноты, получим, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *полна в* $L_p[-\pi,\pi]$, *в частности в* $L_{2\pi}^2$.

Утверждение 10.4. *Посчитаем коэффициенты Фурье для нашей ортогональной системы в явном виде:*

Если $e_k = \cos(nx)$, *то* $f_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)d\mu(x)}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx} = a_n$. *Если* $e_k = \sin(nx)$, *то* $f_k = b_n$. *Ну и* $e_1 = a_0$.

Утверждение 10.5. *Равенство Парсеваля для тригонометрической системы в* $L_{2\pi}^2$ *будет иметь вид:*

$$\|f\|^2 = a_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\pi$$

Утверждение 10.6. *Теорема Рисса-Фишера даёт следующее следствие: если* $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ *сходится, то коэффициенты* $a_0, \{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции из* $L_{2\pi}^2$.

11 Теорема Рисса-Фишера

Теорема 11.1. *Рисса-Фишера.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства* H *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *последовательность действительных чисел, такая что* $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\|e_k\|^2$ *сходится, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ *сходится к некоторому* $f \in H$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\|e_k\|^2$ сходится $\overset{\text{к. Коши}}{\Rightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Тогда оценим норму некого элемента из H:

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k\|^2 = \langle \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k\rangle = \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k^2\|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Это означает, что последовательность частичных сумм нашего ряда является фундаментальной, а значит благодаря гильбертовости пространства H мы можем сказать, что ряд сходится.

Что и требовалось доказать. $\square$

Следствие. *Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства H, то $\forall f \in H$ р. Фурье сходится к $f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0$, то*

$$\langle f - f_0, e_j\rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\|e_k\|^2 < +\infty \overset{\text{т. Р-Ф}}{\Rightarrow} \exists f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0 \Rightarrow \langle f - f_0, e_j\rangle = \langle f, e_j\rangle - f_j\|e_j\|^2 = 0$$

$\square$

12 Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь

Определение 12.1. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется полной в $L_p(E)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall f \in L_p(E)\, \exists \{c_1, \cdots, c_n\} \subset \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\|_p < \varepsilon$$

Определение 12.2. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется замкнутой в евклидовом пространстве E (по Банаху, в банаховом пространстве тотальной, в C и L_p – полной), если

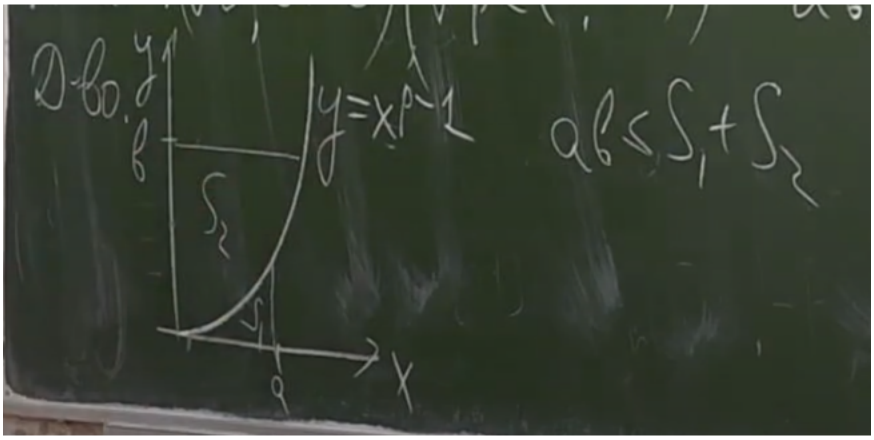
$$\forall k \in \mathbb{N} : \langle f, e_k\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$$

Теорема 12.1. *О связи.*

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкнутая система в гильбертовом пространстве $\Leftrightarrow$ она полная.

Доказательство. $\Rightarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкнутая $\overset{\text{сл-е т.Р-Ф}}{\Rightarrow} \forall f \in H : f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ Тогда, применяя следствие теоремы (9.1) получим полноту системы.

$\Leftarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная система, $\forall k \in \mathbb{N}\, \forall f \in H : \langle f, e_k\rangle = 0 \Rightarrow f_k = 0$. Теперь снова применим следствие теоремы (9.1) и свойства полноты системы, получим, что $f = \sum 0 e_k = 0$. $\square$



13 Полнота пространств $C[a,b]$ и $L_p[a,b], p > 1$

Определение 13.1. Для $1 < p < +\infty$ обозначим через q такое число, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Лемма 13.1. $\forall a, b > 0\, \forall p \in (1,\, +\infty) :\ ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Доказательство. Геометрическое:

Причём S_1 и S_2 можно легко посчитать:

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1} = \frac{b^q}{q} dy$$

□

Теорема 13.1. *Неравенство Гёльдера.*

Если $f \in L_p(X), g \in L_q(X), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p < +\infty$, *то*

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Если правая часть равна нулю, то всё доказано.

Иначе введём обозначения:

$$A^p := \int_X |f(x)|^p d\mu(x), \quad B^q := \int_X |g(x)|^q d\mu(x)$$

Тогда, используя предыдущую лемму с параметрами:

$$a = \frac{|f(x)|}{A} \quad b = \frac{|g(x)|}{B}$$

Получим, что

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{AB} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}$$

Теперь проинтегрируем обе части по x и получим требуемое:

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)| d\mu(x)}{AB} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Теорема 13.2. *Неравенство Минковского.*

Если $f, g \in L_p(E)$, то

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Очевидно, что $|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^p \max(|f(x)|^p, |g(x)|^p)$, поэтому $|f(x)+g(x)|^p$ будет суммируемая.

Если $p = 1$, то всё очевидно – неравенство треугольника, поэтому будем доказывать лишь для $1 < p < +\infty$.

Распишем $|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|$. Теперь дважды применим неравенство Гёльдера, в первый раз $F(x) = f(x), G(x) = |f(x)+g(x)|^{p-1}$. Во второй же – $F(x) = g(x), G(x) = |f(x)+g(x)|^{p-1}$. Получим, что:

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p d\mu(x) \leqslant$$
$$\left(\left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\int_E |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

Давайте более подробно распишем $(p-1)q = (p-1)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 0$, то есть второй множитель правой части неравенства под степенью имеет то же самое, что и левое часть, значит поделим обе части на неотрицательный $\left(\int_E |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$ и получим:

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Следствие. *Только теперь мы можем говорить, что $L_p(E)$ – ЛНП с корректно определённой нормой (заметим, что неравенство Минковского – это неравенство треугольника для этой нормы, остальные свойства очевидно следуют из свойств интеграла Лебега):*

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Теорема 13.3. *Для $p \in [1, +\infty)$ $L_p([a,b])$ – банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная последовательность в $L_p[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n, m > N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Отсюда получаем, что $\exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \uparrow \forall m \geqslant n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$.

Тогда в силу неравенства Гёльдера:

$$\|f_m - f_{n_k}\|_1 \leqslant \|f_m - f_{n_k}\|_p \cdot \|1\|_q < \frac{C}{2^k}$$

Рассмотрим ряд

$$\Phi(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^\infty |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$$

И для него верно равенство (по теореме Леви):

$$\|\Phi\|_1 = \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_1 < +\infty$$

Значит $\Phi(x)$ конечная почти всюду $\Rightarrow$ ряд $|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$ – сходится почти всюду на $[a, b]$.

Тогда ряд $f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x))$ сходится абсолютно почти всюду на $[a, b]$, но его частичные суммы – это $f_{n_k} \Rightarrow$ мы получили, что эта последовательность сходится почти всюду к чему-то, что мы обозначим, как $f(x)$.

Докажем, что $f \in L_p[a, b]$: если есть сходимость почти всюду, то по теореме Фату мы можем оценить:

$$\int_{[a,\,b]} |f(x)|^p d\mu(x) \leqslant \varliminf_{k \to +\infty} \int_{[a,\,b]} |f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) = \|f_{n_k}\|_p^p < +\infty$$

Снова используем свойство последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, l > N :\ \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon$$

Но мы можем перейти к пределу $l \to +\infty$ благодаря теореме Лебега: $\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$. Тогда при достаточно больших m:

$$\|f_m - f\|_p \leqslant \|f_m - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < 2\varepsilon$$

□

Теорема 13.4. $C[a, b]$ *– полно*

Доказательство. Рассмотрим для определённости $\rho(f, g) = \sup_{x \in [a,\,b]} |f(x) - g(x)|$.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Зафиксируем $x_0 \in [a, b]$.

Тогда $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная числовая последовательность $\Rightarrow$ она сходится. Обозначим этот предел как $f(x_0)$.

Очевидно, $f_n(x) \overset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ по введённой метрике, так как:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon\, \forall n, m \geqslant N_\varepsilon\, \forall x \in [a, b] :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Зафиксируем x и перейдём к пределу при $m \to +\infty \Rightarrow$ при всех тех же кванторах выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Значит $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, тогда по теореме о равномерном пределе непрерывных функций $f(x) \in C[a, b]$. Что и требовалось доказать. □

14 Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра

Определение 14.1. Пусть функция $f(x, \alpha)$ зависит от x, α. Тогда мы можем рассматривать функцию $f_{1,\,\alpha}(x)$ – изначальная функция, которую мы теперь считаем зависящей только от первого параметра, а второй параметр считаем фиксированным. Аналогично вводится $f_{2,\,x}(\alpha)$.

Теорема 14.1. *Непрерывность интеграла, зависящего от параметра*

Пусть $\forall \alpha \in A \subset \mathbb{R}^n$ *функция* $f_{1,\alpha}(x) = f(x,\alpha)$ *суммируема на* $E \subset \mathbb{R}^m$, $f_{2,x}(\alpha) = f(x,\alpha)$ *при почти всех* $x \in E$ *непрерывна в* $\alpha_0 \in E$, *и при почти всех* $x \in E, \forall \alpha \in A$: $|f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$, *где* $\varphi(x)$ *суммируема на* E. *Тогда*

$$F(\alpha) = \int_E f(x,\alpha) d\mu(x)$$

непрерывна в α_0.

Доказательство. Рассмотрим $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha_0$.

Тогда, по условию, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x,\alpha_n) = f(x,\alpha_0)$ при почти всех $x \in E$. Кроме того, для почти всех x из E, выполняется неравенство $\forall n \in \mathbb{N} :\ |f(x,\alpha_n)| \leqslant \varphi(x)$. Тогда, используя теорему Лебега, мы сможем перейти к пределу интегралов:

$$F(\alpha_n) = \int_E f_{1,\alpha_n}(x) d\mu(x) \overset{n\to+\infty}{\to} \int_E f(x,\alpha_0) d\mu(x) = F(\alpha_0)$$

$\square$

Теорема 14.2. *Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра*

Пусть $f_{1,\alpha}(x) = f(x,\alpha)$ *при всех* $\alpha \in U(\alpha_0) \subset \mathbb{R}^n$ *суммируема на* $E \subset \mathbb{R}^m$ *вместе с* $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$, *и при почти всех* $x \in E, \forall \alpha \in U(\alpha_0)$: $\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| \leqslant \varphi(x)$, *где* $\varphi(x)$ *суммируема на* E. *Тогда*

$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f(x,\alpha_0)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

Доказательство. Рассмотрим $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \dot{U}(\alpha_0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha_0$.

Тогда частная производная в точке α_0 – это

$$\left|\frac{f(x,\alpha_n) - f(x,\alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0}\right| = \left|\frac{\partial f(x,\xi_n(x))}{\partial \alpha}\right| \leqslant \varphi(x)$$

Теперь, используя теорему Лебега, получим равенство пределов интегралов:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E \frac{f(x,\alpha_n) - f(x,\alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f(x,\alpha_0)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

$\square$

15 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле

Определение 15.1. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{R}[a,\tilde{b}]\ \forall \tilde{b} < b\ \forall y \in A \subset \mathbb{R}$. Тогда несобственным интегралом Римана, зависящим от параметра y называется

$$\int_a^b f(x,y)dx = \lim_{\tilde{b}\to b-0} \int_a^{\tilde{b}} f(x,y)dx \tag{1}$$

Определение 15.2. Мы говорим, что несобственный интеграл (1) сходится поточечно, если:

$$\forall y \in A\, \forall \varepsilon > 0\, \exists B \in (a,b)\, \forall B' \in (B,b) : \left| \int_{B'}^{b} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Определение 15.3. Несобственный интеграл (1) сходится равномерно на A, если:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists B \in (a,b)\, \forall B' \in (B,b)\, \forall y \in A : \left| \int_{B'}^{b} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Теорема 15.1. *Критерий Коши равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра*

(1) сходится равномерно на A $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists B \in (a,b)\, \forall a < B' < B'' < b\, \forall y \in A : \left| \int_{B'}^{B''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Rightarrow$ При всех требуемых кванторах можем сделать оценку:

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x,y)dx \right| = \left| \int_{B''}^{b} f(x,y)dx - \int_{B'}^{b} f(x,y)dx \right| < 2\varepsilon$$

$\Leftarrow$ Фиксируем $\forall y \in A$, тогда используем критерий Коши сходимости несобственных интегралов (без параметра), то есть

$$\int_{a}^{b} f(x,y)dx < +\infty \overset{B'' \to b-0}{\Rightarrow} \left| \int_{B'}^{b} f(x,y)dx \right| \leqslant \varepsilon$$

$\square$

Следствие. *Признак сравнения.*

Если $|f(x,y)| < g(x,y)$, f, g удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана, $\int_a^b g(x,y)dx$ равномерно сходится на A, то $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на A.

Следствие. *Признак Вейерштрасса.*

Если $|f(x,y)| \leqslant g(x)$, f, g удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана, $\int_a^b g(x)dx$ сходится на A, то $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на A.

Теорема 15.2. *Признак Дирихле равномерной сходимости НИРЗП.*

1. *$f \in \mathcal{R}[a,\tilde{b}]\, \forall \tilde{b} \in (a,b)\, \forall y \in A$ и $\forall y \in A$:*

$$\left| \int_{a}^{x} f(t,y)dt \right| \leqslant C$$

2. *$g(x,y) \downarrow 0$ при $x \to b-0$ равномерно по $y \in A$.*

Тогда $\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ равномерно сходится на A.

Доказательство.

$$\int_{B'}^{B''} f(x,y)g(x,y)dx = g(B',y)\int_{B'}^{\xi(y)} f(x,y)dx + g(B'',y)\int_{\xi(y)}^{B''} f(x,y)dx$$

$g \rightrightarrows 0$, значит

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists B \in (a,b)\, \forall x \in (B,b)\, \forall y \in A:\ |g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{4C}$$

А все интегралы в полученной формуле можно оценить сверху, как $2C$, поэтому получим, что

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x,y)g(x,y)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4C}\cdot 2C + \frac{\varepsilon}{4C}\cdot 2C = \varepsilon$$

□

16 Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 16.1. *Непрерывность НИРЗП*

Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$ $(b \leqslant +\infty)$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, то он является непрерывной функцией на $[c,d]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, а также введём

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x,y)dx$$

Равномерная сходимость $\int_a^b f(x,y)dx$ влечёт равномерную сходимость $I_n(y)$. Используя теорему о пределе равномерно сходящейся функциональной последовательности получим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(y)$ – непрерывная. □

Теорема 16.2. *Собственная интегрируемость НИРЗП.*

Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$ $(b \leqslant +\infty)$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, то

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Положим

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x,y)dx$$

Тогда равномерная сходимость $\int_a^b f(x,y)dx$ влечёт равномерную сходимость $I_n(y)$.

Используя прыдыдущую теорему и теорему об интегрируемости функциональных последовательностей и тот факт, что $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b_n]\times[c,d]$, поэтому мы можем переставить пределы интегрирования и получим:

$$\int_a^{b_n}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d I_n(y)dy \overset{n\to+\infty}{\to} \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

□

17 Дифференцирование несобственных интегралов по параметру

Теорема 17.1. *Дифференцируемость НИРЗП.*

Если $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывны на $[a, b) \times [c, d]$, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ сходится равномерно на $[c, d]$, $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится для некоторого $y_0 \in [c, d]$, то $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ сходится и является дифференцируемой функцией на $[c, d]$, причём

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Доказательство. $\forall t \in [c, d]$ и фиксированного $x \in [a, b]$ справедлива формула

$$f(x, t) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

Тогда, если мы проинтегрируем обе части по $[a, b]$ по x, то получим что

1. Первое слагаемое сходится по условию
2. Второе слагаемое удовлетворяет условию теоремы о собственной интегрируемости несобственного интеграла, а это значит что он сходится по x.

Значит и интеграл от левой части также сходится $\forall t$, причём он равен

$$I(t) := \int_a^b f(x, y_0)dx + \int_a^b \left(\int_{y_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \right) dx = \int_a^b f(x, y_0)dx + \int_{y_0}^t \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx \right) dy$$

Тогда при взятии производной $I'(t)$, первое слагаемое обнулится, а второе, являясь переменным верхним пределом, превратится в $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)dx$. □

18 Гамма- и бета-функции и связь между ними

Определение 18.1. Гамма-функцией называется

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \, \alpha > 0$$

Утверждение 18.1. *Гамма-функция сходится*

Доказательство.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx =: I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$$

I_1 сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leqslant x^{\alpha-1}, \quad \int_0^1 x^{\alpha-1}dx < +\infty, \alpha > 0$$

I_2 также сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leqslant Ce^{-\frac{x}{2}}, x \geqslant 1; \quad \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx < +\infty$$

□

Теорема 18.1. *Основные свойства гамма-функции.*

1. $\Gamma(\alpha)$ *бесконечно дифференцируема* $\forall \alpha > 0$.

2. *Формула понижения.* $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0$

3. $\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Доказательство. 1. $(x^{\alpha-1}e^{-x})'_\alpha = x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x$, заметим, что все оценки, сделанные в предыдущем пункте сохранятся (с немного изменённым коэффициентом α), так как

$$\ln x \leqslant \frac{1}{x^\varepsilon}, x \in (0,1]; \quad \ln x \leqslant x^\varepsilon, x \geqslant 1$$

Значит мы можем дифференцировать сколько угодно раз с сохранением сходимости.

2. Проинтегрировав по частям, получим:

$$\Gamma(\alpha+1) = -x^\alpha e^{-x}|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$

3. Заметим, что $\Gamma(1) = \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1$. Используя предыдущее свойство, доказываемое утверждение становится очевидным.

□

Определение 18.2. Бета-функцией называется $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx;\ a,b \geqslant 0$

Теорема 18.2. *Связь бета- и гамма-функций.*
$\forall a,b > 0: \ B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Доказательство.

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}dy \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty}\xi^{a-1}e^{-\xi}d\xi\int_0^{+\infty}\eta^{b-1}e^{-\eta}d\eta$$

Будем рассматривать оба интеграла, как двойные. Рассмотрим замену координат вида

$$\begin{cases} xy = \xi \\ (1-x)y = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \xi + \eta \\ x = \frac{\xi}{\xi+\eta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y & 1-x \end{vmatrix} = y(1-x+x) = y \neq 0$$

Проведите данную замену и у вас всё обязательно получится! □

19 Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции

Теорема 19.1. *Формула Гаусса-Эйлера.*
Для любых $\alpha > 0$*:*

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$

Доказательство. Напоминаем, что

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \overset{e^{-x}=:u}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\frac{1}{u}du$$

Докажем, что $f_n(u) = n(1-u^{\frac{1}{n}})$ монотонно стремится к $\ln\frac{1}{u}, u \in (0,1]$. Для этого рассмотрим функцию $g(t,u) = t(1-u^{\frac{1}{t}})$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 - u^{\frac{1}{t}} - t\cdot u^{\frac{1}{t}}\ln u\cdot(-\frac{1}{t^2}) = 1 - u^{\frac{1}{t}} + u^{\frac{1}{t}}\ln u^{\frac{1}{t}}, u \in (0,1], t > 0$$

Обозначив $y := u^{\frac{1}{t}} \Rightarrow y \in (0,1]$ получим новую функцию $\varphi(y) = 1 - y + y\ln y$. Тогда

$$\varphi'(y) = -1 + \ln y + 1 = \ln y < 0, y \in (0,1]; \quad \varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(y) \geqslant 0 \Rightarrow g \geqslant 0 \Rightarrow f_n(u)\uparrow$$

Тогда рассмотрим предел

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{n}\ln u}}{\frac{1}{n}} \overset{\text{2й зам-й пр-л}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{n}\ln u}{\frac{1}{n}} = -\ln u = \ln\frac{1}{u}$$

Значит мы можем применить теорему Леви для последовательности $f_n(u)$:

$$\int_0^1 (n(1-u^{\frac{1}{n}}))^{\alpha-1}du \overset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\frac{1}{u}du$$

То есть мы получили, что

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}\int_0^1 (1-u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1}du \overset{u=t^n}{=} \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\alpha-1}dt = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}B(n,\alpha) =$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{(n-1)!\Gamma(\alpha)}{(\alpha+n-1)\cdots\alpha\Gamma(\alpha)} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$

□

20 Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения.

Теорема 20.1. *Формула Валлиса.*
Для любого $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$:

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\cos\alpha x$ на $[-\pi,\pi]$, разложим её в тригонометрический ряд Фурье:

$$b_n = 0, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x)dx =$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}\right)|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) =$$
$$\frac{2(-1)^n\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}, n = 0, 1, \cdots$$

Значит
$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx, \alpha x \in [-\pi, \pi]$$

Возьмём $x := \pi$, тогда
$$\cos \alpha\pi = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right) \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + 2\frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

В итоге получим, что
$$\operatorname{ctg} \alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi} = 2\frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

Где слева – устранимая точка разрыва, а справа ряд равномерно сходится при $\alpha \leqslant \alpha_0 < 1$ (Можем оценить $\left|\frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$). Значит мы можем проинтегрировать обе части по α:
$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg} \alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi} \right) d\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2 - n^2}, |x| < 1 \Rightarrow$$
$$\left[\frac{1}{\pi} \ln|\sin \alpha\pi| - \frac{1}{\pi} \ln|\alpha| \right] |_0^x = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \ln|\alpha^2 - n^2||_0^x \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha}|_{\alpha=0} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln|x^2 - n^2| - \ln n^2 \right) \Rightarrow$$
$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$$

□

21 Формула дополнения для гамма-функции

Теорема 21.1. *Формула дополнения.*

Для любых $\alpha \in (0, 1)$:
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

Доказательство. Используем формулу Гаусса-Эйлера:
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \cdot n^{1-\alpha} \frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n((n-1)!)^2(\alpha+n)}{\alpha(1-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\cdots(n^2-\alpha^2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha+n}{\alpha} \cdot \frac{1}{n(1-\frac{\alpha^2}{1})(1-\frac{\alpha^2}{2^2})\cdots(1-\frac{\alpha^2}{n^2})} =$$
$$\frac{1}{\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)} \overset{\text{ф. Валлиса}}{=} \frac{1}{\alpha \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

□

22 Равносходимость интеграла и ряда Фурье в точке

Определение 22.1. Пусть f суммируема на $\mathbb{R}$. Интегралом Фурье функции f называется

$$I_f(x) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)\sin(\lambda x))d\lambda$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(\lambda t)d\mu(t); \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(\lambda t)d\mu(t)$$

Теорема 22.1. *Признак Дини сходимости интегралов Фурье.*

Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, и для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0$ и $S(x_0)$, такие что

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t} \in L_1(0,\delta)$$

Тогда $I_f(x_0) = S(x_0)$

Доказательство. Давайте распишем разность

$$I_f(x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(\lambda(x_0-t))d\mu(t)\right]d\lambda - S(x_0) \overset{u:=x_0-t}{=}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x_0-u)\cos(\lambda u)d\mu(u)\right]d\lambda - S(x_0) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{[0,+\infty)} f(x_0+u)\cos(\lambda u)d\mu(u) + \int_{[0,+\infty)} f(x_0-u)\cos(\lambda u)d\mu(u)\right]d\lambda - S(x_0) =$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\Lambda\to+\infty}\int_0^{\Lambda}\int_{[0,+\infty)}(f(x_0+u) + f(x_0-u))\cos(\lambda u)d\mu(u)d\lambda - S(x_0)$$

Мы можем сделать оценку

$$|(f(x_0+u) + f(x_0-u))\cos(\lambda u)| \leqslant |f(x_0+u) + f(x_0-u)| \in L_1(\mathbb{R}\times[0,\Lambda])$$

Значит мы можем применить теорему Фубини и переставить интегралы:

$$I_f(x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi}\lim_{\Lambda\to+\infty}\int_{[0,+\infty)}(f(x_0+u) + f(x_0-u))\int_0^{\Lambda}\cos(\lambda u)d\lambda d\mu(u) - S(x_0) =$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\Lambda\to+\infty}\int_{[0,+\infty)}(f(x_0+u) + f(x_0-u))\frac{\sin(\Lambda u)}{u}d\mu(u) - S(x_0) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\lim_{\Lambda\to+\infty}\int_{[0,+\infty)}(f(x_0+u) + f(x_0-u))\frac{\sin(\Lambda u)}{u}d\mu(u) - 2S(x_0)\int_{[0,+\infty)}\frac{\sin(\Lambda u)}{u}du\right]$$

Последний переход получился из того факта (интеграл Дирихле), что

$$\int_{[0,+\infty)}\frac{\sin(\Lambda u)}{u}du = \frac{\pi}{2}, \Lambda > 0$$

Продолжим расписывать...

$$I_f(x_0) - S(x_0) =$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\Lambda\to+\infty}\Big[\frac{f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S(x_0)}{u}\sin(\Lambda u)d\mu(u) +$$

$$\int_{\delta}^{+\infty}\frac{f(x_0+u) + f(x_0-u)}{u}\sin(\Lambda u)d\mu(u) - 2S(x_0)\int_{\delta}^{+\infty}\frac{\sin(\Lambda u)}{u}du\Big]$$

Рассмотрим каждое из этих слагаемых поотдельности:

1. По теореме Римана об осцилляции:

$$\int_{[0,\,\delta]} \varphi_{x_0}(u)\sin(\Lambda u)d\mu(u) \overset{\Lambda\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$$

2. На $[\delta,\,+\infty)$ мы можем использовать следующую оценку:

$$\left|\frac{f(x_0+u)}{u}\right| \leqslant \frac{1}{\delta}|f(x_0+u)|$$

Значит по теореме Римана об осцилляции (предыдущим неравенством мы доказали, что $\frac{f(x_0+u)}{u}sin(\Lambda u)$ суммируемая, аналогично для второго подслагаемого):

$$\int_{[\delta,\,+\infty)} \frac{f(x_0+u)}{u}sin(\Lambda u)d\mu(u) \overset{\Lambda\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$$

3. Совершим замену и получим хвост сходящегося интеграла Римана (интеграла Дирихле):

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin(\Lambda u)}{u}du = \int_{\Lambda\delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt \overset{\Lambda\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$$

Таким образом, теорема доказана. □

Следствие. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Гёльдера (3.1) порядка $\alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$ в точке x_0, то $I_f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.*

Если $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, то $I_f(x) = f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

23 Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье суммируемой функции. Формулы обращения.

Определение 23.1. Преобразованием Фурье функции f, суммируемой на $\mathbb{R}$ называется

$$F[f] := \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}d\mu(t)$$

Определение 23.2. Обратным преобразованием Фурье функции $F \in C(\mathbb{R})$ называется

$$F^{-1}[f] := \tilde{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}F(\lambda)d\lambda$$

Теорема 23.1. *Свойства преобразования Фурье суммируемых на всей числовой оси функций.*

1. *(Линейность)*

   Если $f, g \in L_1(\mathbb{R}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(\lambda) = \alpha\hat{f}(\lambda) + \beta\hat{g}(\lambda)$$

2. *Если* $f \in L_1(\mathbb{R})$, *то* $\hat{f}(\lambda)$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$.

3. *Если* $f \in L_1(\mathbb{R}), \varphi(x) = f(\alpha x), \alpha > 0$, *то* $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\hat{f}(\frac{\lambda}{\alpha})$

4. *Если* $f \in L_1(\mathbb{R}), \psi(\lambda) = f(\lambda + a), a \in \mathbb{R}$, *то* $\hat{\psi}(\lambda) = e^{ia\lambda}\hat{f}(\lambda)$

Доказательство. 1. Очевидна из свойств интеграла

2. Снова распишем преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t)$$

Справедливо неравенство:

$$|f(t)e^{-i\lambda t}| \leqslant |f(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

После этого распишем комплексную экспоненту в сумму тригонометрических функций и сведём к теореме об осцилляции ($\lambda \to \infty$). Почему мы имеем право так делать? Работает теорема о непрерывности несобственного интеграла Лебега, зависящего от параметра.

3. Распишем более подробно преобразование функции $\varphi(\lambda)$:

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha t) e^{-i\lambda t} d\mu(t) \overset{x:=t\alpha}{=} \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\frac{\lambda}{\alpha}x} d\mu(x) = \frac{1}{\alpha}\hat{f}(\frac{\lambda}{\alpha})$$

4. Распишем более подробно преобразование функции $\psi(\lambda)$:

$$\hat{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t+a) e^{-i\lambda t} d\mu(t) \overset{x:=t+a}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x + i\lambda a} d\mu(x) = e^{i\lambda a}\hat{f}(\lambda)$$

□

Лемма 23.1. *Формула обращения.*
Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ *и удовлетворяет условию Гёльдера в точке* x, *то*

$$\tilde{\hat{f}}(x) = f(x)$$

Доказательство. Заметим, что $\tilde{\hat{f}}$ – это интеграл Фурье, тогда утверждение становится очевидным, благодаря одному из следствий признака Дини (22). □

24 Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. Свёртка и её преобразование Фурье.

Теорема 24.1. *Преобразование Фурье производной.*
Если f *абсолютно непрерывная на любом отрезке* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *и* $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, *то*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ \hat{f'}(\lambda) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

Доказательство. Перепишем $f(x)$ благодаря формуле Ньютона-Лейбница для суммируемых функций:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)d\mu(t), x > 0$$

Устремляя $x \to +\infty$ увидим, что правая часть имеет предел, а значит и левая тоже:

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x), f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(+\infty) = 0$$

Аналогично получим, что $f(-\infty) = 0$.

Тогда рассмотрим следующее преобразование Фурье:

$$\hat{f'}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\lambda t}d\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-i\lambda t}|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)(e^{-i\lambda t})'_t d\mu(t) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

□

Теорема 24.2. *Производная преобразования Фурье.*

Если $f(t), tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ дифференцируемо, причём

$$(\hat{f})'(\lambda) = (\widehat{-itf(t)})(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Зададимся вопросом, имеем ли мы право продифференцировать интеграл, зависящий от параметра λ:

$$(\hat{f})'(\lambda) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)(e^{-i\lambda t})'_\lambda d\mu(t) = (\widehat{-itf(t)})(\lambda)$$

Для разрешения этого вопроса оценим следующее выражение:

$$\left|f(t)(e^{-i\lambda t})'_\lambda\right| = \left|-itf(t)e^{-i\lambda t}\right| \leqslant |tf(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

Значит мы имеем право (так как производная по параметру оценивается суммируемой функцией), согласно теореме о дифференцировании интеграла с параметром. □

Определение 24.1. Свёрткой функций $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ называется

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)d\mu(x)$$

Утверждение 24.1. *Свёртка определена почти всюду.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x)g(t-x))d\mu(x)d\mu(t) \stackrel{\text{т.Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(t-x)d\mu(t)d\mu(x) \stackrel{u:=t-x}{=}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(u)d\mu(u)d\mu(x)$$

Последний интеграл расписывается, как произведение двух интегралов, а так как каждая из функций суммируемая, значит их произведение тоже получится суммируемой, значит свёртка является суммируемой функцией, а значит по той же теореме Фубини свёртка определена почти всюду. □

Теорема 24.3. *Преобразование Фурье свёртки.*
Если $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, то $\widehat{(f*g)}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$

Доказательство.

$$\widehat{(f*g)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)d\mu(x)e^{-i\lambda t}d\mu(t) \overset{\text{т. Фубини}}{=}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}\int_{\mathbb{R}} g(t-x)de^{-i\lambda(t-x)}\mu(t)d\mu(x) \overset{u:=t-x}{=}$$
$$\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}d\mu(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(u)e^{-i\lambda u}d\mu(u) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$$

□

25 Пространства основных и обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций. δ-функция

Определение 25.1. Носителем функции $f(\operatorname{supp} f)$ называется замыкание множества, где она не равна нулю:
$$\operatorname{supp} f := \operatorname{cl}\{x:\ f(x) \neq 0\}$$

Определение 25.2. Функция $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется финитной, если её носитель компактен.

Определение 25.3. Пространство D основных функций – это множество финитных бесконечно дифференцируемых функций с топологией, определяемой позже. ($D = C_0^\infty$)

Определение 25.4. Пусть D_K – множество финитных бесконечно дифференцируемых функций f, таких, что $\operatorname{supp} f \subset K$.

Определение 25.5. Полунормой на линейном пространстве E называется функция $p:\ E \to \mathbb{R}_+$ такая, что

1. $p(cx) = |c|p(x) \quad \forall x \in E\, \forall c \in \mathbb{R}$
2. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$

Утверждение 25.1. *Если на E задана совокупность нетривиальных полунорм $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$, то E является топологическим пространством, открытые множества в котором – всевозможные объединения множеств*

$$U_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\varepsilon}(a) := \{x \in E:\ p_{\alpha_i}(x-a) < \varepsilon, i = \overline{1,n}\}$$

Замечание. В $D_{[-N,N]}$ рассмотрим счётную совокупность полунорм:

$$p_m(f) = \sup_{x\in\mathbb{R},\, k=\overline{0,m}} |f^{(k)}(x)|$$

А в D рассмотрим совокупность полунорм $\{p_\alpha\}, \alpha = \{N_m\} \subset \mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$p_\alpha(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{x\in[-m,m]\setminus[-m+1,m-1],\, k=\overline{0,N_m}} |f^{(k)}(x)|$$

Это было для **общего развития**, главное знать, что D – топологическое пространство, причём сходимость в нём даётся определением:

Определение 25.6. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ сходится к $\varphi_0 \in D$, если:

1. $\exists [a,b]\, \forall n \in \mathbb{N} :\ \mathrm{supp}\ \varphi_n \subset [a,b]$
2. $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} :\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n^{(m)}(x) - \varphi_0^{(m)}(x)| = 0$

Определение 25.7. Линейный функционал на D – линейное отображение $f :\ D \to \mathbb{R}$.

Действие функционала будем обозначать так:

$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2)$$

Определение 25.8. Пусть D' – линейное топологическое пространство **непрерывных** функционалов на D.

Определение 25.9. Функционалы из D' непрерывны в смысле:

$$\forall f \in D'\, \forall \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D :\ (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$$

Определение 25.10. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D'$ сходится к $f \in D'$, если $\forall \varphi \in D$:

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$$

Утверждение 25.2. *Если $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$, то f соответствует линейный функционал из D', определённый, как*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)d\mu(x)$$

Доказательство. Линейность очевидна. Докажем непрерывность:

Пусть $\varphi_n \overset{n\to+\infty}{\to} \varphi$ в $D \Rightarrow \mathrm{supp}\ \varphi_n, \mathrm{supp}\ \varphi \subset [a,b], \varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $[a,b]$. Значит $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, тогда

$$|f(x)\varphi_n(x)| \leqslant C|f(x)| \overset{\text{т.Лебега}}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)d\mu(x) \overset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)d\mu(x)$$

$\square$

Следствие. ***УСЛОВНО*** *можем считать, что $L_{loc}(\mathbb{R}) \subset D'$*

Определение 25.11. Элементы пространства D' называются также обобщёнными функциями.

Определение 25.12. Линейные функционалы из D', соответствующие функциям из $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ называются регулярными функционалами.

Определение 25.13. Нерегулярный функционал называется сингулярным.

Определение 25.14. Пусть $\lambda \in C^{\infty}$. Тогда $\forall f \in D' :\ \lambda f$ определяется как:

$$(\lambda f, \varphi) := (f, \lambda\varphi)$$

Определение 25.15. Обобщённой производной обобщённой функции $f \in D'$ называется $f' \in D$, определяемая формулой:

$$\forall \varphi \in D: \ (f', \varphi) := -(f, \varphi')$$

Теорема 25.1. *Свойства обобщённого дифференцирования.*
Операция дифференцирования на D' обладает следующими свойствами:

1. *(Линейность)*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, \forall f, g \in D': \ (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

2. *(Непрерывность)*
   Если $f_n \to f$ в D', то $f_n' \to f'$ в D'

3. *(Правило Лейбница)*
   Если $\lambda \in C^\infty, f \in D'$, то $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$

Доказательство. Все свойства доказываются очевидно расписыванием действия рассматриваемых функционалов на произвольную функцию φ. □

Определение 25.16. δ-функцией называется функционал $\delta \in D'$:

$$\forall \varphi \in D: \ (\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

26 Пространство Шварца быстро убывающих функций

Определение 26.1. $f \in S$, если f – бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$, и

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\, \exists C(k,l)\, \forall x \in \mathbb{R}: \ (1+|x|)^k |f^{(l)}(x)| \leqslant C(k,l)$$

То есть любая производная функций из пространства Шварца стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени.

Теорема 26.1. *Преобразование Фурье является биекцией на S.*

Доказательство. Сделаем оценку:

$$|x^k f^{(l)}(x)| \leqslant \frac{C(k+2,l)}{(1+|x|)^2} \Rightarrow x^k f^{(l)} \in L_1(\mathbb{R})$$

Теперь мы можем утверждать, что преобразование Фурье является бесконечно дифференцируемой функцией на S. Также вспомним формулу преобразования Фурье производной:

$$\hat{f'}(\lambda) = i\lambda \hat{f}(\lambda) \Rightarrow |\hat{f}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \to \infty$$

Но мы можем вместо первой производной ставить любую производную, значит

$$|\hat{f}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right), n \in \mathbb{N}, \lambda \to +\infty$$

Таким образом, мы показали, что $f \in S \Rightarrow \hat{f} \in S$. Осталось установить, что $\forall g \in S : \tilde{g} \in S$:

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \hat{g}(-x)$$

Значит $g = \hat{\tilde{g}}, \tilde{g} \in S$. $\square$

Теорема 26.2. *Равенство Парсеваля в S.*
$\forall f_1, f_2 \in S$:

1. $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) f_2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) \hat{f}_2(x) dx$

2. $\int_{\mathbb{R}} f_1(x) \overline{f_2}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1 \overline{\hat{f}_2}(x) dx$

в частности, $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})}$

Доказательство. 1. Распишем интеграл произведения:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) f_2(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_2(x) \int_{\mathbb{R}} f_1(t) e^{-itx} dt dx$$

Оценим подыинтегральную функцию:

$$|f_1(t) f_2(x) e^{-itx}| \leqslant |f_1(t)| \cdot |f_2(x)| \in L_1(\mathbb{R}^2)$$

Значит мы можем применить теорему Фубини:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \int_{\mathbb{R}} f_2(x) e^{-itx} dx dt = \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \hat{f}_2(t) dt$$

2. Введём $h(x) := \overline{\hat{f}_2}(x)$. Распишем интеграл произведения:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \hat{h}(t) dt$$

Тогда

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_2}(x) e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_2(x) e^{itx} dx} = \overline{\tilde{\hat{f}}_2}(t) = \overline{f_2}(t)$$

Заметим, что мы доказали второй пункт.

$\square$