

Содержание

1	Теорема Римана об осцилляции	2
2	Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.	5
3	Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке	7
4	Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.	9
5	Теорема Жордана.	10
6	Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции	12

1 Теорема Римана об осцилляции

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S , если любая окрестность x содержит хотя бы одну точку множества S .

Определение 1.2. Множество всех точек прикосновения S называется **замыканием** S .

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x , для которых $f(x) \neq 0$. $(\text{supp } f)$ Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G , если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – линейное нормированное пространство.

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменяем \mathbb{R} на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достаточно доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.
- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N , то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммируемых функций.
- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

$$\exists \{h_n\} : h_n \uparrow f$$

Теорема Леви гарантирует, что

$$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

Значит

$$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k : E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{элементарное } M_\varepsilon : \mu(E_k \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \Delta M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

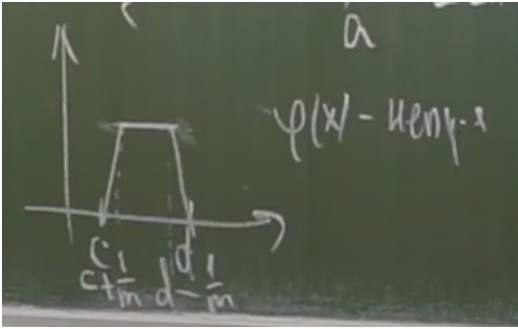


Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N, N]} : \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[-N, N] \|f|_{[-N, N]} - g\|_{L_1[-N, N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leq \int_{-N}^N |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Лемма 1.2. Каждая суммируемая на \mathbb{R} функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a, b]$:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[a, b] : \int_a^b |f(x) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h, 0 \leq h \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) &\leq \int_a^{b-h} |f(x+h) - g(x+h)| d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \\ &\quad + \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

Так как f суммируема на \mathbb{R} , то $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a, b] := [-N-1, N+1]$ и введём $g := f \mathbb{I}_{[-N, N]} \in L_1[a, b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists \delta \in (0, 1) \forall h, 0 \leq h \leq \delta : \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t, |t| < \delta$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = \int_{\{x, x+t\} \subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) + \int_{\{x, x+t\} \not\subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) &\stackrel{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \triangle I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \setminus I} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| &\leq \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \Delta I} \left| f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| d\mu(t) = \\ &= \int_{I \Delta (I + \frac{\pi}{\lambda})} |f(x)| d\mu(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu(I \Delta (I + \frac{\pi}{\lambda})) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$

Также очевидно, что

$$\left| \int_I \left(f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leq \int_I \left| f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right| d\mu(t) \xrightarrow{\text{по пред. Лемме}} 0$$

□

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

Определение 2.1. $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi, \pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D_n(u) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (e^{iku} + e^{-iku}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{1}{2} e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}} - e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}} \cdot \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \end{aligned}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f \in L_{2\pi}$, то n -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + u) D_n(u) d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k :

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt)) \right) d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x + u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T , T -периодичной функции одинаков. \square

Лемма 2.2. Пусть $f \in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π -периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow +\infty$ равномерно по x .

Доказательство. g – ограниченная $\Rightarrow \exists M : \forall u |g(u)| \leq M$.

f – измеримая \Rightarrow по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi, \pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)| d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 – непрерывная на компакте $[-\pi, \pi] \Rightarrow \exists B \forall u : |f_1(u)| \leq B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F :

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+h) - F(t)| d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ :

$$\begin{aligned} a_n(\chi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \cos(nt) d\mu(t) \stackrel{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \cos(nu) d\mu(u) = \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\chi\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \chi(t) \right] \cos(nt) d\mu(t) \Rightarrow \\ &|a_n(\chi)| \leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right) \end{aligned}$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right) = 0$ равномерно по x :

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(t+h) - \chi(t)| d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| \cdot |g(t+h)| d\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(u+h) - f(u)| d\mu(u) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)| d\mu(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq M\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right) + B\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, g\right) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Так как $[a', b']$ содержится в (a, b) , то

$$\exists \eta > 0 \forall x \in [a', b'] \forall t, 0 \leq |t| < \eta : x + t \in (a, b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\eta, \eta) \\ 1, & t \in [-\pi, \pi] \setminus (-\eta, \eta) \end{cases}$$

Кроме того, λ — 2π -периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) D_n(t) d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t \notin (-\eta, \eta)$, то $\lambda(t) = 1$, ничего не меняем. Если же $|t| < \eta$, то $x+t \in (a, b)$, где $f = 0$, поэтому получили, что подынтегральные функции совпадают везде на $[-\pi, \pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) \cos(nt) d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t) \operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме. □

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Теорема 3.1. *Признак Дини.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta)$, $\delta > 0$, где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S(x_0)) D_n(u) d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв $\sin((n + \frac{1}{2})t) = \sin(nt) \cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt) \sin(\frac{t}{2})$ в формуле ядра Дирихле:

$$\begin{aligned}
S_n(f, x_0) - S(x_0) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(nt)}{2} d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\sin(nt) \cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \sin(nt) \left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) d\mu(t)
\end{aligned}$$

По условию, φ_{x_0} суммируемая \Rightarrow по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))$ также суммируемая \Rightarrow второе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta, \pi]$ и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} = \frac{1 - \frac{t^2}{8} + o(t^3)}{2(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + o(t^4))} - \frac{1}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{8} - t + \frac{t^3}{24} + o(t^4)}{t^2 + o(t^3)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) \in L_1[0, \delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции. □

Утверждение 3.1. Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha \in (0, 1]$ в точке x_0 , если \exists конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C, \delta > 0$ такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta, |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq Ct^\alpha, |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| \leq Ct^\alpha$$

Определение 3.2. Обобщённой односторонней производной функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}$$

Теорема 3.2. *Признак Липшица.*

Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0 , то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. По условию теоремы

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Значит функций φ_{x_0} из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))}{t}$$

То, что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) d\mu(t) \right| &\leq \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)|}{t} d\mu(t) \leq \\ &2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} d\mu(t) = 2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. □

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

Теорема 4.1. *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если F – 2π -периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье F .

Доказательство. $f(x) := F'(x) \in L_1$. Значит $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \cos(nx) d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} F(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) d\mu(x) = nB_n \end{aligned}$$

Аналогично докажем, что $b_n = -nA_n$, а также заметим, что $a_0 = 0$.

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы. □

Следствие. Если $f, \dots, f^{(k-1)}$ – 2π -периодические, и $f^{(k-1)}$ – абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right); \quad n \rightarrow +\infty$$

Доказательство. Пусть $k = 1$: f – абсолютно непрерывная, значит $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}$, $b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$. По теореме об осцилляции: $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции. \square

Теорема 4.2. *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если f – функция ограниченной вариации на периоде 2π , то её коэффициенты Фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad n \rightarrow +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right] \cos(nx) dx = \dots = \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right] \cos(nx) dx, \quad \forall k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Сложив все эти n равенств, получим:

$$|na_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \left| f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right| dx \leq V(f)$$

\square

Теорема 4.3. *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если $f \in L_{2\pi}^1$, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ – её тригонометрический ряд Фурье, $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) d\mu(t)$ – неопределённый интеграл Лебега для f , то $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx)}{n}$, где ряд равномерно сходится на \mathbb{R} .

Доказательство. $F(x)$ – абсолютно непрерывная, $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu(t) = \pi a_0$. $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – тоже абсолютно непрерывная на периоде и 2π -периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье $(F(x) - \frac{a_0}{2}x)'$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье для $F(x) - \frac{a_0}{2}x$. Но с другой стороны $(F(x) - \frac{a_0}{2}x)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Равномерная сходимость проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. \square

5 Теорема Жордана.

Возможно тут должна быть какая-то другая теорема Жордана, но пока здесь признак Жордана – на консультации уточню.

Теорема 5.1. *Признак Жордана.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in [a, b]$ непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва $x_0 \in [a, b]$.

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

а для $-t$ аналогично.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : 0 \leq f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) dt = (f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0)) \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\sin(nt)}{t} dt$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ сходится, поэтому если обозначим за $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t} dt$, то $G(v)$ будет ограничена, т.е. $\exists C : |G(v)| \leq C$.

Но теперь рассмотрим $\forall A$:

$$\left| \int_0^A \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| \stackrel{nt=u}{=} \left| \int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u} du \right| \leq C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left| \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) dt \right| \leq 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ . Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что $S(x_0) = f(x_0)$. Применим к каждому из трёх последних слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти δ_1 из текущего доказательства независимо от x_0 . Также независимо от x_0 мы ограничиваем интеграл $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утверждение этой теоремы доказано. \square

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции

Теорема 6.1. *Коровкина.*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ такова, что $L_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_i$ на $[a, b]$, $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$, то

$$\forall f \in C[a, b] : L_n(f) \Rightarrow f$$

на $[a, b]$.

Доказательство. $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ ограничена:

$$\exists M : -M \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, x \in [a, b], |t - x| < \delta : -\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$$

Заметим, что $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow L_n(f_1) \leq L_n(f_2) \forall x \in [a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, x \in [a, b] : -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2} \psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \psi(t)$$

где $\psi_x(t) = (t - x)^2$.

Откуда это следует? Если $|t - x| < \delta$, то мы только ослабляем условие равномерной непрерывности, значит неравенство сохраняется. Если же $|t - x| \geq \delta \Rightarrow \frac{\psi(t)}{\delta^2} = \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \Rightarrow$ неравенство сохраняется благодаря ограниченности f .

Зафиксировав произвольный x , применяем оператор L_n относительно переменной t . Все неравенства сохраняются:

$$-\varepsilon L_n(e_0, x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x) < L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x) < \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x)$$

Заметим, что

$$L_n(\psi_x, x) = L_n((t - x)^2, x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) = L_n(e_2, x) - 2x L_n(e_1, x) + x^2 L_n(e_0, x) \Rightarrow \\ e_2(x) - 2x e_1(x) + x^2 e_0(x) = x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0$$

Значит

$$\exists N_1 \forall n > N \forall x \in [a, b] : |L_n(\psi_x, x)| \leq \frac{\varepsilon \delta^2}{4M}$$

А из того, что $L_n(e_0) \Rightarrow e_0$:

$$\exists N_2 \forall n > N_2 \forall x \in [a, b] : |L_n(e_0, x)| < \frac{3}{2}$$

Также не забываем, что:

$$|L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leq \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x, x)$$

Объединяя эти три условия, получим, что

$$\forall n > \max(N_1, N_2) : |L_n(f, x) - f(x)L_n(e_0, x)| \leq 2\varepsilon$$

Снова используем тот факт, что $L_n(e_0) \rightrightarrows e_0$:

$$\exists N_3 \forall n > N_3 \forall x \in [a, b] : |L_n(e_0, x) - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Значит

$$|f(x)L_n(e_0, x) - f(x)| \leq |f(x)| \cdot |L_n(e_0, x) - 1| \leq \varepsilon$$

Объединяя ВСЕ неравенства, получим:

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3) \forall x \in [a, b] : |L_n(f, x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$$

□

Теорема 6.2. Коровкина'

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ такова, что $L_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_i$ на \mathbb{R} , $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = \cos(x)$, $e_2(x) = \sin(x)$, то

$$\forall f \in C_{2\pi} : L_n(f) \rightrightarrows f$$

на \mathbb{R} .

Доказательство. Аналогично немодифицированной теореме, только вместо функции ψ_x введём

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(t) \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(t) \sin(x) = \\ &= \frac{1}{2} e_0(t) - \frac{1}{2} \cos(x) e_1(t) - \frac{1}{2} \sin(x) e_2(t) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_n(\varphi_x, x) &= \frac{1}{2} L_n(e_0, x) - \frac{1}{2} \cos(x) L_n(e_1, x) - \frac{1}{2} \sin(x) L_n(e_2, x) \rightrightarrows \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(x) - \frac{1}{2} \sin^2(x) = 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 6.3. Фейера.

Для любой непрерывной 2π -периодической функции последовательность средних арифметических частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье равномерно на \mathbb{R} сходится к ней.

Доказательство. Распишем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &:= \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \dots + S_n(f, x)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=0}^n D_k(t) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n \sin((k+\frac{1}{2})t) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n \sin((k+\frac{1}{2})t) \sin(\frac{t}{2}) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4 \sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n (\cos(kt) - \cos((k+1)t)) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4 \sin^2(\frac{t}{2})} (1 - \cos((n+1)t)) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot \frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} dt \end{aligned}$$

Получается, $\sigma_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ образует последовательность линейных положительных операторов. Это значит, что нам нужно проверить сходимость лишь на трёх функциях: $e_0 := 1, e_1 := \sin(x), e_2 := \cos(x)$.

$$\sigma_n(e_0) = e_0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \sigma_n(e_1) = e_1 \cdot \frac{n}{n+1}, \sigma_n(e_2) = e_2 \cdot \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Коровкина, получаем, что $\forall f \in C_{2\pi} : \sigma_n(f) \rightrightarrows f$

□