

Содержание

1	Теорема Римана об осцилляции
---	------------------------------

2

1 Теорема Римана об осцилляции

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S , если любая окрестность x содержит хотя бы одну точку множества S .

Определение 1.2. Множество всех точек прикосновения S называется **замыканием** S .

Определение 1.3. Носителем функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x , для которых $f(x) \neq 0$. $(\text{supp } f)$ Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G , если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – линейное нормированное пространство.

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменяем \mathbb{R} на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достаточно доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.
- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N , то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммируемых функций.
- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

$$\exists \{h_n\} : h_n \uparrow f$$

Теорема Леви гарантирует, что

$$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

Значит

$$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k : E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{элементарное } M_\varepsilon : \mu(E_k \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \Delta M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

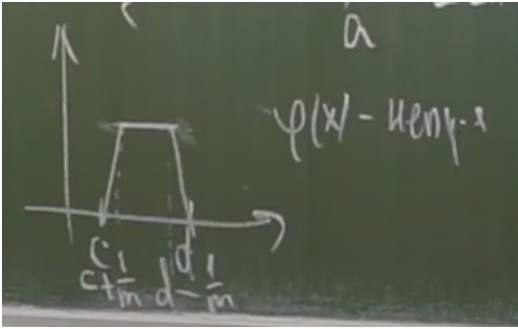


Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N, N]} : \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[-N, N] \|f|_{[-N, N]} - g\|_{L_1[-N, N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leq \int_{-N}^N |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Лемма 1.2. Каждая суммируемая на \mathbb{R} функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a, b]$:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[a, b] : \int_a^b |f(x) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h, 0 \leq h \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) &\leq \int_a^{b-h} |f(x+h) - g(x+h)| d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \\ &\quad + \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

Так как f суммируема на \mathbb{R} , то $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a, b] := [-N-1, N+1]$ и введём $g := f \mathbb{I}_{[-N, N]} \in L_1[a, b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists \delta \in (0, 1) \forall h, 0 \leq h \leq \delta : \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t, |t| < \delta$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = \int_{\{x, x+t\} \subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) + \int_{\{x, x+t\} \not\subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) &\stackrel{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{2} \int_I \left(f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \triangle I} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \setminus I} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| &\leq \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \Delta I} \left| f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| d\mu(t) = \\ &= \int_{I \Delta (I + \frac{\pi}{\lambda})} |f(x)| d\mu(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu(I \Delta (I + \frac{\pi}{\lambda})) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$

Также очевидно, что

$$\left| \int_I \left(f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leq \int_I \left| f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right| d\mu(t) \xrightarrow{\text{по пред. Лемме}} 0$$

□