Содержание

1 Теорема Римана об осцилляции

Порядок и беспорядок – это число; храбрость и трусость – это мощь; сила и слабость – это форма.

Лукашов А.Л.

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S, если любая окресность x содержит хотя бы одну точку множества S.

Определение 1.2. Множество всех точек прикосновения S называется **замыканием** S.

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. (supp f) Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G, если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – *линейное нормированное пространство.*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. *Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменим $\mathbb{R}$ на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достатончо доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.

- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N, то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммиремых функций.

- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

  $$\exists \{h_n\} : \ h_n \uparrow f$$

  Теорема Леви гарантирует, что

  $$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \to \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

  Значит

  $$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k: \ E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0: \ \exists \text{элементарное } M_\varepsilon: \ \mu(E_k \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \triangle M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

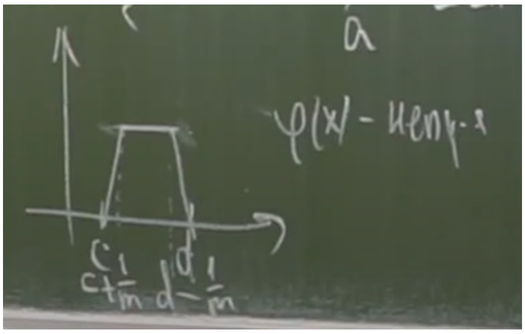


Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,\,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\,N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N,\,N]}: \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in C[-N, N] \ \|f|_{[-N,\,N]} - g\|_{L_1[-N,\,N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\,N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_{-N}^{N} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\,N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

$\square$

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a,b]$:

$$\lim_{\delta\to +0}\sup_{0\leqslant h\leqslant \delta}\int_a^{b-h} |f(x+h)-f(x)|d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists g \in C[a,b]: \int_a^b |f(x)-g(x)|d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a,b] \Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x,y \in [a,b], |x-y| < \delta: \ |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h\; 0 \leqslant h \leqslant \delta$:

$$\int_a^{b-h} |f(x+h)-f(x)|d\mu(x) \leqslant \int_a^{b-h} |f(x+h)-g(x+h)|d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x)-g(x)|d\mu(x) + \\ + \int_a^{b-h} |g(x+h)-g(x)|d\mu(x) < \varepsilon$$

Так как f суммируема на $\mathbb{R}$, то $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]} |f(x)|d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a,b] := [-N-1, N+1]$ и введём $g := f\mathbb{I}_{[-N,N]} \in L_1[a,b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists\delta \in (0,1)\, \forall h, 0 \leqslant h \leqslant \delta: \int_a^{b-h} |g(x+h)-g(x)|d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t, |t| < \delta$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|d\mu(x) = \int\limits_{\{x,x+t\}\subseteq[a,b]} |f(x+t)-f(x)|d\mu(x) + \int\limits_{\{x,x+y\}\not\subseteq[a,b]} |f(x+t)-f(x)|d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\sin(\lambda x)d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x) \overset{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} -\int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) =$$

$$-\frac{1}{2}\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) - \frac{1}{2}\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)$$

Заметим, что

$$\left|\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I} \left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right| d\mu(t) =$$

$$= \int_{I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})} |f(x)|d\mu(t) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu\left(I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})\right) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

Также очевидно, что

$$\left|\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_I \left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right| d\mu(t) \overset{\text{по пред. Лемме}}{\to} 0$$

□

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

> О мастерстве полководца судят по старательности его подчиненных.
>
> Лукашов А.Л.

Определение 2.1. $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi,\pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{iku}+e^{-iku}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)u}-1}{e^{iu}-1} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}-e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}-e^{-i\frac{u}{2}}}\cdot\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f \in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt))\right)d\mu(t) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t)$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x + u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T, T-периодичной функции одинаков. □

Лемма 2.2. *Пусть $f \in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \to +\infty$ равномерно по x.*

Доказательство. g – ограниченная $\Rightarrow \exists M: \forall u\ |g(u)| \leqslant M$.

f – измеримая $\Rightarrow$ по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi,\pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)| d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 – непрерывная на компакте $[-\pi,\pi] \Rightarrow \exists B\ \forall u: |f_1(u)| \leqslant B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F:

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+h) - F(t)| d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ:

$$a_n(\chi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi(t)\cos(nt)d\mu(t) \overset{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\cos(nu)d\mu(u) =$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\chi\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - \chi(t)\right]\cos(nt)d\mu(t) \Rightarrow$$

$$|a_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right)$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim_{n\to+\infty}\omega_1(\frac{\pi}{n},\chi)=0$ равномерно по x:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\chi(t+h)-\chi(t)|d\mu(t)=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t)|d\mu(t)\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)-f(x+t)|\cdot|g(t+h)|d\mu(t)+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t)\leqslant$$
$$\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+h)-f(u)|d\mu(u)+\int_{-\pi}^{\pi}|f_1(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant$$
$$\leqslant M\omega_1(\frac{\pi}{n},f)+B\omega_1(\frac{\pi}{n},g)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta\to 0$. Что и требовалось доказать. □

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f\in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a,b)\subset[-\pi,\pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a',b']\subset(a,b)$.

Доказательство. Так как $[a',b']$ содержится в (a,b), то

$$\exists\eta>0\,\forall x\in[a',b']\,\forall t,0\leqslant|t|<\eta:\ x+t\in(a,b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t)=\begin{cases}0,t\in(-\eta,\eta)\\1,t\in[-\pi,\pi]\setminus(-\eta,\eta)\end{cases}$$

Кроме того, λ – 2π-периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)d\mu(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)D_n(t)d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t\notin(-\eta,\eta)$, то $\lambda(\eta)=1$, ничего не меняем. Если же $|t|<\eta$, то $x+t\in(a,b)$, где $f=0$, поэтому получили, что подыинтегральные функции совпадают везде на $[-\pi,\pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})\sin(nt)d\mu(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\lambda(t)\cos(nt)d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме.

□

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

> Одержать сто побед в ста битвах — это не вершина воинского искусства. Повергнуть врага без сражения — вот вершина.
>
> Лукашов А.Л.

Теорема 3.1. *Признак Дини.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0,\delta), \delta > 0$, где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $S_n(f,x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f,x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+u)+f(x-u)-2S(x_0))D_n(u)d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi,\pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв $\sin((n+\frac{1}{2})t) = \sin(nt)\cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt)\sin(\frac{t}{2})$ в формуле ядра Дирихле:

$$\begin{aligned} S_n(f,x_0) - S(x_0) = \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t}\sin(nt)d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(nt)}{2}d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\sin(nt)\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}d\mu(t) + \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\sin(nt)\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right)d\mu(t) \end{aligned}$$

По условию, φ_{x_0} суммируемая $\Rightarrow$ по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))$ также суммируемая $\Rightarrow$ второе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta,\pi]$ и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} = \frac{1-\frac{t^2}{8}+o(t^3)}{2\left(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}+o(t^4)\right)} - \frac{1}{t} = \frac{t-\frac{t^3}{8}-t+\frac{t^3}{24}+o(t^4)}{t^2+o(t^3)} \overset{t\to\infty}{\to} 0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right) \in L_1[0,\delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции. □

Утверждение 3.1. *Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha \in (0,1]$ в точке x_0, если $\exists$ конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C,\delta > 0$ такие, что

$$\forall t, 0<t<\delta, |f(x_0+t)-f(x_0+0)| \leqslant Ct^\alpha, |f(x_0-t)-f(x_0-0)| \leqslant Ct^\alpha$$

Определение 3.2. Обобщённой односторонней производной функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t\ to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$$

Теорема 3.2. *Признак Липшица.*

Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. По условию теоремы

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Значит функций φ_{x_0} из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{(f(x_0+t)-f(x_0+0))+(f(x_0-t)-f(x_0-0))}{t}$$

То, что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left|\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}d\mu(t) \leqslant$$
$$2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}d\mu(t) = 2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}dt = 2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Что и требовалось доказать. □

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

Непобедимость заключена в
себе самом, возможность
победы заключена в
противнике.

Лукашов А.Л.

Теорема 4.1. *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если F – 2π-периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье F.

Доказательство. $f(x) := F'(x) \in L_1$. Значит $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)d\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\cos(nx)d\mu(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi}F(x)\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)d\mu(x) = nB_n$$

Аналогично докажем, что $b_n = -nA_n$, а также заметим, что $a_0 = 0$.

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы. □

Следствие. *Если $f, \cdots, f^{(k-1)}$ – 2π-периодические, и $f^{(k-1)}$ – абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют:*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Пусть $k = 1$: f – абсолютно непрерывная, значит $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$. По теореме об осцилляции: $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции. □

Теорема 4.2. *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если f – функция ограниченной вариации на периоде 2π, то её коэффициенты фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+\frac{\pi}{n}) - f(x)\right]\cos(nx)dx = \cdots =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]\cos(nx)dx, \quad \forall k = \overline{1,n}$$

Сложив все эти n равенств, получим:

$$|na_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right|dx \leqslant V(f)$$

□

Теорема 4.3. *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если $f \in L^1_{2\pi}, f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ *– её тригонометрический ряд Фурье,* $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)d\mu(t)$ *– неопределённый интеграл Лебега для* f*, то* $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos(nx)+a_n\sin(nx)}{n}$*, где ряд равномерно сходится на* $\mathbb{R}$*.*

Доказательство. $F(x)$ – абсолютно непрерывная, $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\mu(t) = \pi a_0$. $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – тоже абсолютно непрерывная на периоде и 2π-периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)'$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье для $F(x) - \frac{a_0}{2}x$. Но с другой стороны $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Равномерная сходимость проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. □

5 Теорема Жордана.

> Когда обороняются, значит, есть в чем-то недостаток; когда нападают, значит, есть все в избытке.
>
> Лукашов А.Л.

Возможно тут должна быть какая-то другая теорема Жордана, но пока здесь признак Жордана – на консультации уточню.

Теорема 5.1. *Признак Жордана.*

Если $f \in L_{2\pi}$ *и является функцией ограниченной вариации на* $[a, b]$*, то тригонометрический ряд Фурье* f *сходится к* $f(x_0)$ *в каждой точке* $x_0 \in [a, b]$ *непрерывности* $f(x)$ *и к* $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ *в каждой точке разрыва* $x_0 \in [a, b]$*.*

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$*, то тригонометрический ряд Фурье функции* f *сходится к ней равномерно на любом отрезке* $[a', b'] \subset (a, b)$*.*

Доказательство. Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}\varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

а для $-t$ аналогично.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : \; 0 \leqslant f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} \sin(nt) dt = (f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0)) \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\sin(nt)}{t} dt$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ сходится, поэтому если обзначим за $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t} dt$, то $G(v)$ будет ограничена, т.е. $\exists C : \; |G(v)| \leqslant C$.

Но теперь рассмотрим $\forall A$:

$$\left| \int_0^A \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| \overset{nt=u}{=} \left| \int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u} du \right| \leqslant C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left| \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} \sin(nt) dt \right| \leqslant 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ. Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что $S(x_0) = f(x_0)$. Применим к каждому из трёх последих слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти δ_1 из текущего доказательство независимо от x_0. Также назавимо от x_0 мы ограничиваем интеграл $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утверждение этой теоремы доказано. $\square$

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции

Идти вперед туда, где не ждут; атаковать там, где не подготовились

Лукашов А.Л.

Теорема 6.1. *Коровкина.*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ *такова, что* $L_n(e_i) \overset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} e_i$ *на* $[a,b]$, $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2,$ *то*

$$\forall f \in C[a,b] : \; L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $[a,b]$.

Доказательство. $f \in C[a,b] \Rightarrow f$ ограничена:

$$\exists M:\ -M \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b]$$

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t, x \in [a,b], |t-x| < \delta:\ -\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$$

Заметим, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow L_n(f_1) \leqslant L_n(f_2)\ \forall x \in [a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t, x \in [a,b]:\ -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}\psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t)$$

где $\psi_x(t) = (t-x)^2$.

Откуда это следует? Если $|t-x| < \delta$, то мы только ослабляем условие равномерной непрерывности, значит неравенство сохраняется. Если же $|t-x| \geqslant \delta \Rightarrow \frac{\psi(t)}{\delta^2} = \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geqslant 1 \Rightarrow$ неравенство сохраняется благодаря ограниченности f.

Зафиксировав произвольный x, применяем оператор L_n относительно переменной t. Все неравенства сохраняются:

$$-\varepsilon L_n(e_0, x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x) < L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x) < \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x)$$

Заметим, что

$$L_n(\psi_x, x) = L_n((t-x)^2, x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) = L_n(e_2, x) - 2x L_n(e_1, x) + x^2 L_n(e_0, x) \rightrightarrows \\ e_2(x) - 2x e_1(x) + x^2 e_0(x) = x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0$$

Значит

$$\exists N_1\, \forall n > N\, \forall x \in [a,b]:\ |L_n(\psi_x, x)| \leqslant \frac{\varepsilon \delta^2}{4M}$$

А из того, что $L_n(e_0) \rightrightarrows e_0$:

$$\exists N_2\, \forall n > N_2\, \forall x \in [a,b]:\ |L_n(e_0, x)| < \frac{3}{2}$$

Также не забываем, что:

$$|L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leqslant \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x, x)$$

Объединяя эти три условия, получим, что

$$\forall n > \max(N_1, N_2):\ |L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leqslant 2\varepsilon$$

Снова используем тот факт, что $L_n(e_0) \rightrightarrows e_0$:

$$\exists N_3\, \forall n > N_3\, \forall x \in [a,b]:\ |L_n(e_0, x) - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Значит

$$|f(x) L_n(e_0, x) - f(x)| \leqslant |f(x)| \cdot |L_n(e_0, x) - 1| \leqslant \varepsilon$$

Объединяя ВСЕ неравенства, получим:

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3)\, \forall x \in [a,b]:\ |L_n(f, x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$$

□

Теорема 6.2. *Коровкина'*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ *такова, что* $L_n(e_i) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_i$ *на* $\mathbb{R}$, $e_0(x) = 1, e_1(x) = \cos(x), e_2(x) = \sin(x)$, *то*

$$\forall f \in C_{2\pi} : L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Аналогично немодифицированной теореме, только вместо функции ψ_x введём

$$\varphi_x(t) = \sin^2(\frac{t-x}{2}) = \frac{1-\cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t)\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(t)\sin(x) = \frac{1}{2}e_0(t) - \frac{1}{2}\cos(x)e_1(t) - \frac{1}{2}\sin(x)e_2(t)$$

Тогда

$$L_n(\varphi_x, x) = \frac{1}{2}L_n(e_0, x) - \frac{1}{2}\cos(x)L_n(e_1, x) - \frac{1}{2}\sin(x)L_n(e_2, x) \rightrightarrows \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2(x) - \frac{1}{2}\sin^2(x) = 0$$

□

Теорема 6.3. *Фейера.*

Для любой непрерывной 2π*-периодической функции последовательность средних арифеметических частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье равномерно на* $\mathbb{R}$ *сходится к ней.*

Доказательство. Распишем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\sigma_n(f, x) := \frac{S_0(f,x) + S_1(f,x) + \dots + S_n(f,x)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=0}^{n} D_k(t)dt =$$

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\sin(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\sin^2(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)\sin(\frac{t}{2})dt =$$

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})}\sum_{k=0}^{n}(\cos(kt) - \cos((k+1)t))dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{4\sin^2(\frac{t}{2})}(1-\cos((n+1)t)) =$$

$$\frac{1}{(n+1)2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}dt$$

Получается, $\sigma_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ образует последовательность линейных положительных операторов. Это значит, что нам нужно проверить сходимость лишь на трёх функциях: $e_0 := 1, e_1 := \sin(x), e_2 := \cos(x)$.

$$\sigma_n(e_0) = e_0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \sigma_n(e_1) = e_1 \cdot \frac{n}{n+1}, \sigma_n(e_2) = e_2 \cdot \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Коровкина, получаем, что $\forall f \in C_{2\pi} : \sigma_n(f) \rightrightarrows f$ □

7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами

Война – это путь обмана,
постоянной организации
ложных выпадов,
распространения
дезинформации,
использования уловок и
хитростей.

Лукашов А.Л.

Теорема 7.1. *Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.*

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *может быть с любой степенью точности равномерно приближена алгебраическими многочленами, то есть*

$$\forall f \in C[a, b]\, \forall \varepsilon > 0\, \exists P_n\, \forall x \in [a, b] : \ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$.

Введём многочлены Берштейна:

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Мы можем рассматривать их, как операторы $B_n : \ C[0, 1] \to C[0, 1]$. Очевидно, что они линейные и положительные, поэтому достаточно проверить сходимость трёх функций: $1, x, x^2$.

$$B_n(e_0, x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1 = e_0(x)$$

Рассмотрим $g(t) := (tx + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k x^k (1-x)^{n-k}$. Тогда

$$g'(t) = nx(tx + (1-x))^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k t^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g'(1)$ получим равенство:

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Rightarrow B_n(e_1, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x)$$

Взяв вторую производную от g, получим:

$$n(n-1)x^2(tx + (1-x))^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k t^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g''(1)$ получим равенство:

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - nx \Rightarrow$$

$$B_n(e_2,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} e_2(x)$$

Получили, что для оператора B_n справедлива теорема Коровкина и утверждение доказано.

Для завершения доказательства перейдём к произвольному отрезку $[a,b]$: для $f \in C[a,b]$ введём $F(x) = f(x(b-a)+a) \in C[0,1]$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in [0,1]:\ |B_n(F,x) - F(x)| < \varepsilon$$

Осталось заметить, что если в многочлен Бернштейна подставить какую-то линейную функцию, то получится какой-то многочлен:

$$\Rightarrow |B(F, \frac{t-a}{b-a}) - f(t)| < \varepsilon$$

$\square$

Следствие. *Из данной теоремы и теормы Коровкина' следует теорема Вейшерштрасса о приближении непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими многочленами:*

$$\forall f \in C_{2\pi}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists T_n := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx):\ |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

8 Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.

> Избегание столкновения с большими силами свидетельствует не о трусости, а о мудрости, ибо принесение себя в жертву никогда и нигде не является преимуществом.
>
> Лукашов А.Л.

Определение 8.1. Коэффициентами Фурье функции f в произвольном евклидовом(гильбертовом) пространстве называются скаляры вида

$$f_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

где $\{e_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов.

Теорема 8.1. *Минимальное свойство сумм Фурье.*

Если $\{e_k\}$ *– ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства* E*, то*

$$\forall f \in E\, \forall c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{R}:\ \|f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\| \geqslant \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|$$

, где $\{f_k\}$ *– коэффициенты Фурье для* f*.*

Причём равенство достигается $\Leftrightarrow \forall k = \overline{1, N}:\ c_k = f_k$*.*

Доказательство.

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\|^2 = \langle f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k, f - \sum_{k=1}^{N} c_k e_k\rangle = \langle f, f\rangle - 2\sum_{k=1}^{N} c_k \langle f, e_k\rangle + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} c_k c_l \langle e_k, e_l\rangle =$$

$$\langle f, f\rangle - 2\sum_{k=1}^{N} f_k c_k \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{N} c_k^2 \|e_k\|^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{N} (f_k^2 - 2 f_k c_k + c_k^2)\|e_k\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|^2$$

□

Следствие. *Тождество Бесселя.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства* E*, то* $\forall f \in E$*:*

$$\|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2$$

Доказательство. Очевидно следует из цепочки неравенств из доказательства предыдущей теоремы. □

Следствие. *Неравенство Бесселя.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства* E*, то* $\forall f \in E$*:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

Доказательство. Из тождества Бесселя следует, что

$$\forall N \in \mathbb{N}:\ \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 \geqslant 0$$

Устремляя $N \to +\infty$ получим требуемое. □

9 Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля

Теорема 9.1. *Если* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства* E*, то* $\forall f \in E$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\forall \varepsilon > 0\, \exists T = \sum_{k=1}^{N} c_k e_k :\ \|f - T\| < \varepsilon$

2. $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$

3. $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$ *– равенство Парсеваля для* f*.*

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$ по предыдущей теме:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N :\ \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\| < \varepsilon$$

Тогда используя неравенство Бесселя:

$$\forall n > N :\ \|f - \sum_{k=1}^{n} f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{N} f_k e_k\|^2$$

Ну а $3 \Leftrightarrow 1$ так как при равенстве Парсеваля разность $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} f_k^2 \|e_k\|^2$ будет бесконечно малая, а значит применяя равенство Бесселя получим требуемое. □

Следствие. *Если* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства* E*, то следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– полная система в* E*.*

2. $\forall f \in E :\ f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$

3. $\forall f \in E :\ \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$

10 Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом...

Определение 10.1. $f \in L^2_{2\pi} \Leftrightarrow f$ – 2π-периодическая и $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Это пространство гильбертово.

Утверждение 10.1. *Мы уже знаем, что ортогональной системой в этом пространстве будет система*

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cdots\}$$

Утверждение 10.2. *Благодаря теореме Фейера мы можем утверждать, что* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *полна в* $C_{2\pi}$*.*

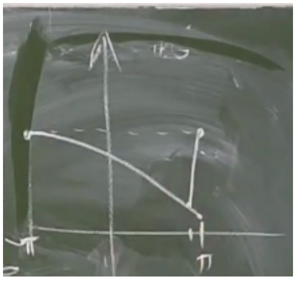
Утверждение 10.3. *Мы уже знаем, что* $C[-\pi, \pi]$ *всюду плотно в* $L_p[-\pi, \pi], p \geqslant 1$*.*

Заметим, что $C_{2\pi}$ *всюду плотно в* $C[-\pi, \pi]$ *в смысле нормы* $L_p[-\pi, \pi]$*. Делается это с помощью такого трюка:*

Используя транзитивность свойства полноты, получим, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– полна в* $L_p[-\pi, \pi]$*, в частности в* $L^2_{2\pi}$*.*

Утверждение 10.4. *Посчитаем коэффициенты Фурье для нашей ортогональной системы в явном виде:*

Если $e_k = \cos(nx)$*, то* $f_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) d\mu(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx} = a_n$*. Если* $e_k = \sin(nx)$*, то* $f_k = b_n$*. Ну и* $e_1 = a_0$*.*



Утверждение 10.5. *Равенство Парсеваля для тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$ будет иметь вид:*

$$\|f\|^2 = a_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\pi$$

Утверждение 10.6. *Теорема Рисса-Фишера даёт следующее следствие: если $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ сходится, то коэффициенты $a_0, \{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции из $L^2_{2\pi}$.*

11 Теорема Рисса-Фишера

Теорема 11.1. *Рисса-Фишера.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства H и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность действительных чисел, такая что $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\|e_k\|^2$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ сходится к некоторому $f \in H$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\|e_k\|^2$ сходится $\overset{\text{к. Коши}}{\Rightarrow}$

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k^2\|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Тогда оценим норму некого элемента из H:

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k\|^2 = \langle\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k e_k\rangle = \sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k^2\|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Это означает, что последовательность частичных сумм нашего ряда является фундаментальной, а значит благодаря гильбертовости пространства H мы можем сказать, что ряд сходится.

Что и требовалось доказать. □

Следствие. *Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства H, то $\forall f \in H$ р. Фурье сходится к $f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0$, то*

$$\langle f - f_0, e_j\rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\|e_k\|^2 < +\infty \overset{\text{т. Р-Ф}}{\Rightarrow} \exists f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0 \Rightarrow \langle f - f_0, e_j\rangle = \langle f, e_j\rangle - f_j\|e_j\|^2 = 0$$

□

12 Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь

Определение 12.1. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется полной в $L_p(E)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall f \in L_p(E) \, \exists \{c_1, \cdots, c_n\} \subset \mathbb{R} : \, \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|_p < \varepsilon$$

Определение 12.2. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется замкнутой в евклидовом пространстве E (по Банаху, в баноховом пространстве тотальной, в C и L_p – полной), если $\forall k \in \mathbb{N}$: $\langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Теорема 12.1. *О связи.*

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– замкнутая система в гильбертовом пространстве* $\Leftrightarrow$ *она полная.*

Доказательство. $\Rightarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкнутая $\overset{\text{сл-е т.Р-Ф}}{\Rightarrow} \forall f \in H : f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ Тогда, применяя следствие теоремы (9.1) получим полноты системы.

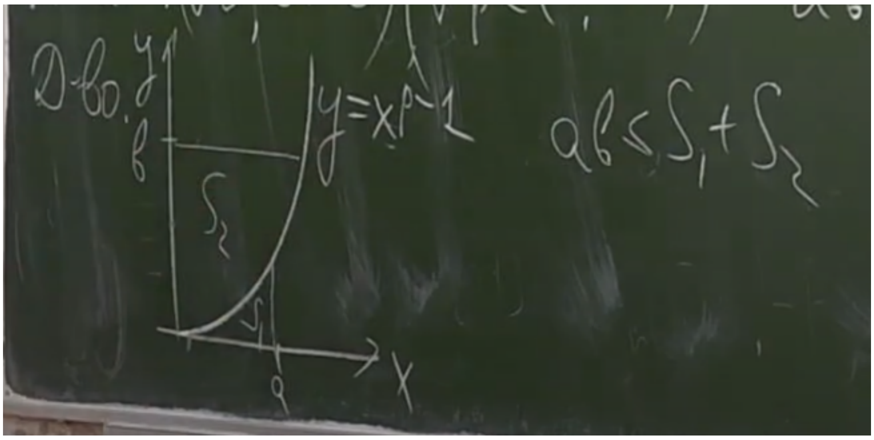
$\Leftarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная система, $\forall k \in \mathbb{N} \, \forall f \in H : \langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f_k = 0$. Теперь снова применим следствие теоремы (9.1) и свойства полноты системы, получим, что $f = \sum 0 e_k = 0$. □

13 Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$

Определение 13.1. Для $1 < p < +\infty$ обозначим через q такое число, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Лемма 13.1. $\forall a, b > 0 \, \forall p \in (1, +\infty) : \, ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Доказательство. Геометрическое:



Причём S_1 и S_2 можно легко посчитать:

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1} = \frac{b^q}{q} dy$$

□

Теорема 13.1. *Неравенство Гёльдера.*

Если $f \in L_p(X), g \in L_q(X), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p < +\infty$, *то*

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Если правая часть равна нулю, то всё доказано.

Иначе введём обозначения:

$$A^p := \int_X |f(x)|^p d\mu(x), \quad B^q := \int_X |g(x)|^q d\mu(x)$$

Тогда, используя предыдущую лемму с параметрами:

$$a = \frac{|f(x)|}{A} \quad b = \frac{|g(x)|}{B}$$

Получим, что

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{AB} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}$$

Теперь проинтегрируем обе части по x и получим требуемое:

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)| d\mu(x)}{AB} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Теорема 13.2. *Для* $p \in [1, +\infty)$ $L_p([a,b])$ – *банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в $L_p[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n, m > N : \, \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Отсюда получаем, что $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow \, \forall m \geqslant n_k : \, \|f_m - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$.

Тогда в силу неравенства Гёльдера:

$$\|f_m - f_{n_k}\|_1 \leqslant \|f_m - f_{n_k}\|_p \cdot \|1\|_q < \frac{C}{2^k}$$

Рассмотрим ряд

$$\Phi(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$$

И для него верно равенство (по теореме Леви):

$$\|\Phi\|_1 = \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_1 < +\infty$$

Значит $\Phi(x)$ конечная почти всюду $\Rightarrow$ ряд $|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$ – сходится почти всюду на $[a,b]$.

Тогда ряд $f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x))$ сходится абсолютно почти всюду на $[a,b]$, но его частичные суммы – это f_{n_k} $\Rightarrow$ мы получили, что эта последовательность сходится почти всюду к чему-то, что мы обозначим, как $f(x)$.

Докажем, что $f \in L_p[a,b]$: если есть сходимость почти всюду, то по теореме Фату мы можем оценить:

$$\int_{[a,\,b]} |f(x)|^p d\mu(x) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \int_{[a,\,b]} |f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) = \|f_{n_k}\|_p^p < +\infty$$

Снова используем свойство последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, l > N:\ \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon$$

Но мы можем перейти к пределу $l \to +\infty$ благодаря теореме Лебега: $\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$. Тогда при достаточно больших m:

$$\|f_m - f\|_p \leqslant \|f_m - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < 2\varepsilon$$

□

14 Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра

Определение 14.1. Пусть функция $f(x,\alpha)$ зависит от x, α. Тогда мы можем рассматривать функцию $f_{1,\,\alpha}(x)$ – изначальная функция, которую мы теперь считаем зависящей только от первого параметра, а второй параметр считаем фиксированным. Аналогично вводится $f_{2,\,x}(\alpha)$.

Теорема 14.1. *Непрерывность интеграла, зависящего от параметра*

Пусть $\forall\alpha \in A \subset \mathbb{R}^n$ функция $f_{1,\alpha}(x) = f(x,\alpha)$ суммируема на $E \subset \mathbb{R}^m$, $f_{2,x}(\alpha) = f(x,\alpha)$ при почти всех $x \in E$ непрерывна в $\alpha_0 \in E$, и при почти всех $x \in E, \forall\alpha \in A$: $|f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ суммируема на E. Тогда

$$F(\alpha) = \int_E f(x,\alpha) d\mu(x)$$

непрерывна в α_0.

Доказательство. Рассмотрим $\forall\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha_0$.

Тогда, по условию, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x,\alpha_n) = f(x,\alpha_0)$ при почти всех $x \in E$. Кроме того, для почти всех x из E, выполняется неравенство $\forall n \in \mathbb{N}:\ |f(x,\alpha_n)| \leqslant \varphi(x)$. Тогда, используя теорему Лебега, мы сможем перейти к пределу интегралов:

$$F(\alpha_n) = \int_E f_{1,\,\alpha_n}(x) d\mu(x) \overset{n\to+\infty}{\to} \int_E f(x,\alpha_0) d\mu(x) = F(\alpha_0)$$

□

Теорема 14.2. *Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра*

Пусть $f_{1,\,\alpha}(x) = f(x,\alpha)$ при всех $\alpha \in U(\alpha_0) \subset \mathbb{R}^n$ суммируема на $E \subset \mathbb{R}^m$ вместе с $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$, и при почти всех $x \in E, \forall\alpha \in U(\alpha_0)$: $\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right| \leqslant \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ суммируема на E. Тогда

$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f(x,\alpha_0)}{\partial\alpha} d\mu(x)$$

Доказательство. Рассмотрим $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \dot{U}(\alpha_0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha_0$.

Тогда частная производная в точке α_0 – это

$$\left|\frac{f(x,\alpha_n) - F(x,\alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0}\right| = \left|\frac{\partial f(x,\xi_n(x))}{\partial\alpha}\right| \leqslant \varphi(x)$$

Теперь, используя теорему Лебега, получим равенство пределов интегралов:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E \frac{f(x,\alpha_n) - f(x,\alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f(x,\alpha_0)}{\partial\alpha} d\mu(x)$$

□

15 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле

Определение 15.1. Пусть $f(x,y) \in \mathcal{R}[a,\tilde{b}]\ \forall \tilde{b} < b\ \forall y \in A \subset \mathbb{R}$. Тогда несобственным интегралом Римана, зависящим от параметра y называется

$$\int_a^b f(x,y)dx = \lim_{\tilde{b}\to b-0} \int_a^{\tilde{b}} f(x,y)dx \tag{1}$$

Определение 15.2. Мы говорим, что несобственный интеграл (1) сходится поточечно, если:

$$\forall y \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a,b)\ \forall B' \in (B,b) : \left|\int_{B'}^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Определение 15.3. Несобственный интеграл (1) сходится равномерно на A, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a,b)\ \forall B' \in (B,b)\ \forall y \in A : \left|\int_{B'}^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Теорема 15.1. *Критерий Коши равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра*

(1) сходится равномерно на $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a,b)\ \forall a < B' < B'' < b\ \forall y \in A : \left|\int_{B'}^{B''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Rightarrow$ При всех требуемых кванторах можем сделать оценку:

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x,y)dx\right| = \left|\int_{B''}^b f(x,y)dx - \int_{B'}^b f(x,y)dx\right| < 2\varepsilon$$

$\Leftarrow$ Фиксируем $\forall y \in A$, тогда используем критерий Коши сходимости несобственных интегралов (без параметра), то есть

$$\int_a^b f(x,y)dx < +\infty \overset{B''\to b-0}{\Rightarrow} \left|\int_{B'}^{B''} f(x,y)dx\right| \leqslant \varepsilon$$

□

Следствие. *Признак сравнения.*

Если $|f(x,y)| < g(x,y)$, f, g удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана, $\int_a^b g(x,y)dx$ равномерно сходится на A, то $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на A.

Следствие. *Признак Вейерштрасса.*

Если $|f(x,y)| \leqslant g(x)$, f, g удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана, $\int_a^b g(x,y)dx$ сходится на A, то $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на A.

Теорема 15.2. *Признак Дирихле равномерной сходимости НИРЗП.*

1. *$f \in \mathcal{R}[a,\tilde{b}]\ \forall \tilde{b} \in (a,b)\ \forall y \in A$ и $\forall y \in A$:*

$$\left|\int_a^x f(t,y)dt\right| \leqslant C$$

2. *$g(x,y) \downarrow 0$ при $x \to b-0$ равномерно по $y \in A$.*

Тогда $\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ равномерно сходится на A.

Доказательство.

$$\int_{B'}^{B''} f(x,y)g(x,y)dx = g(B',y)\int_{B'}^{\xi(y)} f(x,y)dx + g(B'',y)\int_{\xi(y)}^{B''} f(x,y)dx$$

$g \rightrightarrows 0$, значит

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a,b)\ \forall x \in (B,b)\ \forall y \in A:\ |g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{4C}$$

А все интегралы в полученной формуле можно оценить сверху, как $2C$, поэтому получим, что

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x,y)g(x,y)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4C}\cdot 2C + \frac{\varepsilon}{4C}\cdot 2C = \varepsilon$$

□

16 Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 16.1. *Непрерывность НИРЗП*

Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$ $(b \leqslant +\infty)$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, то он является непрерывной функцией на $[c,d]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, а также введём

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x,y)dx$$

Равномерная сходимость $\int_a^b f(x,y)dx$ влечёт равномерную сходимость $I_n(y)$. Используя теорему о пределе равномерно сходящейся функциональной последовательности получим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(y)$ – непрерывная. □

Теорема 16.2. *Собственная интегрируемость НИРЗП.*

Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$ $(b\leqslant+\infty)$ и $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, то

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,b)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$. Положим

$$I_n(y):=\int_a^{b_n}f(x,y)dx$$

Тогда равномерная сходимость $\int_a^b f(x,y)dx$ влечёт равномерную сходимость $I_n(y)$.

Используя прыдыдущую теорему и теорему об интегрируемости функциональных последовательностей и тот факт, что $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b_n]\times[c,d]$, поэтому мы можем переставить пределы интегрирования и получим:

$$\int_a^{b_n}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d I_n(y)dy\overset{n\to+\infty}{\rightarrow}\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

□

17 Дифференцирование несобственных интегралов по параметру

Теорема 17.1. *Дифференцируемость НИРЗП.*

Если $f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны на $[a,b)\times[c,d]$, $\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится для некоторого $y_0\in[c,d]$, то $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ сходится и является дифференцируемой функцией на $[c,d]$, причём

$$I'(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Доказательство. $\forall t\in[c,d]$ и фиксированного $x\in[a,b]$ справедлива формула

$$f(x,t)=f(x,y_0)+\int_{y_0}^t\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

Тогда, если мы проинтегрируем обе части по $[a,b]$ по x, то получим что

1. Первое слагаемое сходится по условию
2. Второе слагаемое удовлетворяет условию теоремы о собственной интегрируемости несобственного интеграла, а это значит что он сходится по x.

Значит и интеграл от левой части также сходится $\forall t$, причём он равен

$$I(t):=\int_a^b f(x,y_0)dx+\int_a^b\left(\int_{y_0}^t\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy\right)dx=\int_a^b f(x,y_0)dx+\int_{y_0}^t\left(\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\right)dy$$

Тогда при взятии производной $I'(t)$, первое слагаемое обнулится, а второе, являясь переменным верхним пределом, превратится в $\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dx$. □

18 Гамма- и бета-функции и связь между ними

Определение 18.1. Гамма-функцией называется

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\, \alpha > 0$$

Утверждение 18.1. *Гамма-функция сходится*

Доказательство.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx =: I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$$

I_1 сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leqslant x^{\alpha-1}, \quad \int_0^1 x^{\alpha-1}dx < +\infty, \alpha > 0$$

I_2 также сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1}e^{-x} \leqslant Ce^{-\frac{x}{2}}, x \geqslant 1; \quad \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx < +\infty$$

□

Теорема 18.1. *Основные свойства гамма-функции.*

1. $\Gamma(\alpha)$ *бесконечно дифференцируема* $\forall\alpha > 0$.

2. *Формула понижения.* $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0$

3. $\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Доказательство. 1. $(x^{\alpha-1}e^{-x})'_\alpha = x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x$, заметим, что все оценки, сделанные в предыдущем пункте сохранятся (с немного изменённым коэффициентом α), так как

$$\ln x \leqslant \frac{1}{x^\varepsilon}, x \in (0,1]; \quad \ln x \leqslant x^\varepsilon, x \geqslant 1$$

Значит мы можем дифференцировать сколько угодно раз с сохранением сходимости.

2. Проинтегрировав по частям, получим:

$$\Gamma(\alpha) = -x^\alpha e^{-x}|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$

3. Заметим, что $\Gamma(1) = \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1$. Используя предыдущее свойство, доказываемое утверждение становится очевидным.

□

Определение 18.2. Бета-функцией называется $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx;\ a, b \geqslant 0$

Теорема 18.2. *Связь бета- и гамма-функций.*
$\forall a, b > 0: \ B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Доказательство.

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}dy \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \xi^{a-1}e^{-\xi}d\xi \int_0^{+\infty} \eta^{b-1}e^{-\eta}d\eta$$

Будем рассматривать оба интеграла, как двойные. Рассмотрим замену координат вида

$$\begin{cases} xy = \xi \\ (1-x)y = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \xi + \eta \\ x = \frac{\xi}{\xi+\eta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y & 1-x \end{vmatrix} = y(1-x+x) = y \neq 0$$

Проведите данную замену и у вас всё обязательно получится! □

19 Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции

Теорема 19.1. *Формула Гаусса-Эйлера.*
Для любых $\alpha > 0$:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$

Доказательство. Напоминаем, что

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \stackrel{e^{-x}=:u}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\frac{1}{u}du$$

Докажем, что $f_n(u) = n(1-u^{\frac{1}{n}})$ монотонно стремится к $\ln\frac{1}{u}, u \in (0,1]$. Для этого рассмотрим функцию $g(t,u) = t(1-u^{\frac{1}{t}})$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 - u^{\frac{1}{t}} - t\cdot u^{\frac{1}{t}}\ln u\cdot(-\frac{1}{t^2}) = 1 - u^{\frac{1}{t}} + u^{\frac{1}{t}}\ln u^{\frac{1}{t}}, u\in(0,1], t>0$$

Обозначив $y := u^{\frac{1}{t}} \Rightarrow y \in (0,1]$ получим новую функцию $\varphi(y) = 1 - y + y\ln y$. Тогда

$$\varphi'(y) = -1 + \ln y + 1 = \ln y < 0, y\in(0,1]; \quad \varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(y) \geqslant 0 \Rightarrow g \geqslant 0 \Rightarrow f_n(u)\uparrow$$

Тогда рассмотрим предел

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{\frac{1}{n}\ln u}}{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{2й зам-й пр-л}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{n}\ln u}{\frac{1}{n}} = -\ln u = \ln\frac{1}{u}$$

Значит мы можем применить теорему Леви для последовательности $f_n(u)$:

$$\int_0^1 (n(1-u^{\frac{1}{n}}))^{\alpha-1}du \stackrel{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\frac{1}{u}du$$

То есть мы получили, что

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}\int_0^1(1-u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1}du \stackrel{u=t^n}{=} \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\alpha-1}dt = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha B(n,\alpha) =$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)} = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!\Gamma(\alpha)}{(\alpha+n-1)\cdots\alpha\Gamma(\alpha)} = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$$

□

20 Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения.

Теорема 20.1. *Формула Валлиса.*

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$:

$$\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\cos \alpha x$ на $[-\pi, \pi]$, разложим её в тригонометрический ряд Фурье:

$$b_n = 0, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x)dx =$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}\right)|_0^\pi = \frac{(-1)^n \sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) =$$
$$\frac{2(-1)^n \alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}, n = 0, 1, \cdots$$

Значит

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\cos nx, x \in [-\pi, \pi]$$

Возьмём $x := \pi$, тогда

$$\cos \alpha\pi = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}\left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}\right) \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + 2\frac{\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

В итоге получим, что

$$\operatorname{ctg} \alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi} = 2\frac{\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

Где слева – устранимая точка разрыва, а справа ряд равномерно сходится при $\alpha \leqslant \alpha_0 < 1$ (Можем оценить $\left|\frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$). Значит мы можем проинтегрировать обе части по α:

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg} \alpha\pi - \frac{1}{\alpha\pi}\right) d\alpha = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2 - n^2}, |x| < 1 \Rightarrow$$
$$\left[\frac{1}{\pi}\ln|\sin \alpha\pi| - \frac{1}{\pi}\ln|\alpha|\right]|_0^x = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln|\alpha^2 - n^2||_0^x \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\pi}\ln\frac{\sin \pi x}{x} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha}|_{\alpha=0} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln|x^2 - n^2| - \ln n^2\right) \Rightarrow$$
$$\ln\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

□

21 Формула дополнения для гамма-функции

Теорема 21.1. *Формула дополнения.*

Для любых $\alpha \in (0,1)$:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

Доказательство. Используем формулу Гаусса-Эйлера:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)} \cdot n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n((n-1)!)^2(\alpha+n)}{\alpha(1-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\cdots(n^2-\alpha^2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha+n}{\alpha}\cdot\frac{1}{n(1-\frac{\alpha^2}{1})(1-\frac{\alpha^2}{2^2})\cdots(1-\frac{\alpha^2}{n^2})} =$$

$$\frac{1}{\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right)} \overset{\text{ф. Валлиса}}{=} \frac{1}{\alpha\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

□