

Содержание

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Теорема Римана об осцилляции | 2 |
| 2 | Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации. | 5 |
| 3 | Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке | 8 |
| 4 | Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. | 10 |
| 5 | Теорема Жордана. | 11 |
| 6 | Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции | 12 |
| 7 | Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами | 15 |
| 8 | Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя. | 16 |
| 9 | Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля | 17 |
| 10 | Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом. . . | 18 |
| 11 | Теорема Рисса-Фишера | 19 |
| 12 | Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь | 20 |
| 13 | Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$ | 20 |
| 14 | Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра | 22 |
| 15 | Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле | 23 |
| 16 | Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра | 24 |
| 17 | Дифференцирование несобственных интегралов по параметру | 25 |
| 18 | Гамма- и бета-функции и связь между ними | 26 |
| 19 | Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции | 27 |
| 20 | Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения. | 28 |

1 Теорема Римана об осцилляции

Порядок и беспорядок – это число; храбрость и трусость – это мощь; сила и слабость – это форма.

Лукашов А.Л.

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S , если любая окрестность x содержит хотя бы одну точку множества S .

Определение 1.2. Множество всех точек прикосновения S называется **замыканием** S .

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x , для которых $f(x) \neq 0$. $(\text{supp } f)$ Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G , если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – линейное нормированное пространство.

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменяем \mathbb{R} на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достаточно доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.
- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N , то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммируемых функций.
- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

$$\exists \{h_n\} : h_n \uparrow f$$

Теорема Леви гарантирует, что

$$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

Значит

$$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k : E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ элементарное } M_\varepsilon : \mu(E_k \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \Delta M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

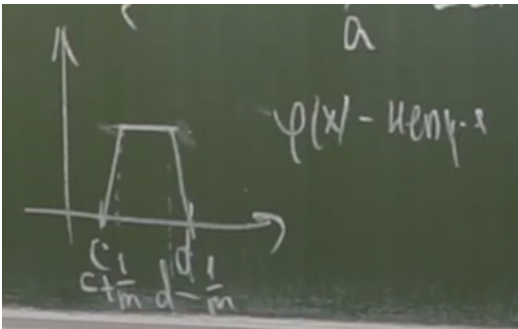


Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N, N]} : \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[-N, N] \|f|_{[-N, N]} - g\|_{L_1[-N, N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leq \int_{-N}^N |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на \mathbb{R} функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a, b]$:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[a, b] : \int_a^b |f(x) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h \ 0 \leq h \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) &\leq \int_a^{b-h} |f(x+h) - g(x+h)| d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \\ &\quad + \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

Так как f суммируема на \mathbb{R} , то $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a, b] := [-N-1, N+1]$ и введём $g := f \mathbb{I}_{[-N, N]} \in L_1[a, b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists \delta \in (0, 1) \forall h, 0 \leq h \leq \delta : \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t, |t| < \delta$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = \int_{\{x, x+t\} \subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) + \int_{\{x, x+t\} \not\subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) &\stackrel{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \Delta I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| &\leq \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \Delta I} \left| f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \right| d\mu(t) = \\ &= \int_{I \Delta (I+\frac{\pi}{\lambda})} |f(x)| d\mu(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu(I \Delta (I + \frac{\pi}{\lambda})) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$

Также очевидно, что

$$\left| \int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leq \int_I \left| f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right| d\mu(t) \xrightarrow{\text{по пред. Лемме}} 0$$

□

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

О мастерстве полководца
судят по старательности его
подчиненных.

Лукашов А.Л.

Определение 2.1. $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi, \pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D_n(u) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (e^{iku} + e^{-iku}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{1}{2} e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}} - e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}} \cdot \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \end{aligned}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f \in L_{2\pi}$, то n -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k :

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt)) \right) d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x + u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T , T -периодичной функции одинаков. \square

Лемма 2.2. Пусть $f \in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π -периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \rightarrow +\infty$ равномерно по x .

Доказательство. g – ограниченная $\Rightarrow \exists M : \forall u |g(u)| \leq M$.

f – измеримая \Rightarrow по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi, \pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)| d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 – непрерывная на компакте $[-\pi, \pi] \Rightarrow \exists B \forall u : |f_1(u)| \leq B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F :

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+h) - F(t)| d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ :

$$\begin{aligned} a_n(\chi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \cos(nt) d\mu(t) \stackrel{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \cos(nu) d\mu(u) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\chi\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \chi(t) \right] \cos(nt) d\mu(t) \Rightarrow \\ |a_n(\chi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right) \end{aligned}$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_1(\frac{\pi}{n}, \chi) = 0$ равномерно по x :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\chi(t+h) - \chi(t)| d\mu(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| \cdot |g(t+h)| d\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(u+h) - f(u)| d\mu(u) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)| d\mu(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq M\omega_1(\frac{\pi}{n}, f) + B\omega_1(\frac{\pi}{n}, g) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Так как $[a', b']$ содержится в (a, b) , то

$$\exists \eta > 0 \forall x \in [a', b'] \forall t, 0 \leq |t| < \eta : x+t \in (a, b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\eta, \eta) \\ 1, & t \in [-\pi, \pi] \setminus (-\eta, \eta) \end{cases}$$

Кроме того, $\lambda - 2\pi$ -периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) D_n(t) d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t \notin (-\eta, \eta)$, то $\lambda(t) = 1$, ничего не меняем. Если же $|t| < \eta$, то $x+t \in (a, b)$, где $f = 0$, поэтому получили, что подынтегральные функции совпадают везде на $[-\pi, \pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) \cos(nt) d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t) \operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме. \square

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Одержать сто побед в ста
битвах — это не вершина
воинского искусства.
Повергнуть врага без
сражения — вот вершина.

Лукашов А.Л.

Теорема 3.1. *Признак Дини.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta)$, $\delta > 0$, где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0)) D_n(u) d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв $\sin((n + \frac{1}{2})t) = \sin(nt) \cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt) \sin(\frac{t}{2})$ в формуле ядра Дирихле:

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S(x_0) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(nt)}{2} d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\sin(nt) \cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \sin(nt) \left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) d\mu(t) \end{aligned}$$

По условию, φ_{x_0} суммируемая \Rightarrow по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))$ также суммируемая \Rightarrow второе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta, \pi]$ и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} = \frac{1 - \frac{t^2}{8} + o(t^3)}{2(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + o(t^4))} - \frac{1}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{8} - t + \frac{t^3}{24} + o(t^4)}{t^2 + o(t^3)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) \in L_1[0, \delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции. \square

Утверждение 3.1. Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha \in (0, 1]$ в точке x_0 , если \exists конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C, \delta > 0$ такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta, |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq Ct^\alpha, |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| \leq Ct^\alpha$$

Определение 3.2. Обобщённой односторонней производной функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}$$

Теорема 3.2. Признак Липшица.

Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0 , то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. По условию теоремы

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Значит функций φ_{x_0} из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))}{t}$$

То, что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left| \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) d\mu(t) \right| \leq \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)|}{t} d\mu(t) \leq 2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} d\mu(t) = 2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Что и требовалось доказать. \square

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

Непобедимость заключена в
себе самом, возможность
победы заключена в
противнике.

Лукашов А.Л.

Теорема 4.1. *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если F — 2π -периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье F .

Доказательство. $f(x) := F'(x) \in L_1$. Значит $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \cos(nx) d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} F(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) d\mu(x) = nB_n \end{aligned}$$

Аналогично докажем, что $b_n = -nA_n$, а также заметим, что $a_0 = 0$.

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы. \square

Следствие. *Если $f, \dots, f^{(k-1)}$ — 2π -периодические, и $f^{(k-1)}$ — абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют:*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right); \quad n \rightarrow +\infty$$

Доказательство. Пусть $k = 1$: f — абсолютно непрерывная, значит $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}$, $b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$. По теореме об осцилляции: $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции. \square

Теорема 4.2. *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если f — функция ограниченной вариации на периоде 2π , то её коэффициенты Фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad n \rightarrow +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right] \cos(nx) dx = \dots = \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right] \cos(nx) dx, \quad \forall k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Сложив все эти n равенств, получим:

$$|na_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \left| f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right| dx \leq V(f)$$

□

Теорема 4.3. *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если $f \in L_{2\pi}^1$, $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ – её тригонометрический ряд Фурье, $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) d\mu(t)$ – неопределённый интеграл Лебега для f , то $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx)}{n}$, где ряд равномерно сходится на \mathbb{R} .

Доказательство. $F(x)$ – абсолютно непрерывная, $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu(t) = \pi a_0$.
 $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – тоже абсолютно непрерывная на периоде и 2π -периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье $(F(x) - \frac{a_0}{2}x)'$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье для $F(x) - \frac{a_0}{2}x$. Но с другой стороны $(F(x) - \frac{a_0}{2}x)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Равномерная сходимостъ проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. □

5 Теорема Жордана.

Когда обороняются, значит,
 есть в чем-то недостаток;
 когда нападают, значит, есть
 все в избытке.

Лукашов А.Л.

Возможно тут должна быть какая-то другая теорема Жордана, но пока здесь признак Жордана – на консультации уточню.

Теорема 5.1. *Признак Жордана.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in [a, b]$ непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва $x_0 \in [a, b]$.

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\delta} \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

а для $-t$ аналогично.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : 0 \leq f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) dt = (f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0)) \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\sin(nt)}{t} dt$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ сходится, поэтому если обозначим за $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t} dt$, то $G(v)$ будет ограничена, т.е. $\exists C : |G(v)| \leq C$.

Но теперь рассмотрим $\forall A$:

$$\left| \int_0^A \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| \stackrel{nt=u}{=} \left| \int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u} du \right| \leq C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left| \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) dt \right| \leq 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ . Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что $S(x_0) = f(x_0)$. Применим к каждому из трёх последних слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти δ_1 из текущего доказательства независимо от x_0 . Также независимо от x_0 мы ограничиваем интеграл $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утверждение этой теоремы доказано. \square

6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции

Идти вперед туда, где не
ждут; атаковать там, где не
подготовились

Лукашов А.Л.

Теорема 6.1. *Коровкина.*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ такова, что $L_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_i$ на $[a, b]$, $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$, то

$$\forall f \in C[a, b] : L_n(f) \rightrightarrows f$$

на $[a, b]$.

Доказательство. $f \in C[a, b] \Rightarrow f$ ограничена:

$$\exists M : -M \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, x \in [a, b], |t - x| < \delta : -\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$$

Заметим, что $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow L_n(f_1) \leq L_n(f_2) \forall x \in [a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, x \in [a, b] : -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2}\psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\psi(t)$$

где $\psi_x(t) = (t - x)^2$.

Откуда это следует? Если $|t - x| < \delta$, то мы только ослабляем условие равномерной непрерывности, значит неравенство сохраняется. Если же $|t - x| \geq \delta \Rightarrow \frac{\psi(t)}{\delta^2} = \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \Rightarrow$ неравенство сохраняется благодаря ограниченности f .

Зафиксировав произвольный x , применяем оператор L_n относительно переменной t . Все неравенства сохраняются:

$$-\varepsilon L_n(e_0, x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x) < L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x) < \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} L_n(\psi_x, x) &= L_n((t - x)^2, x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) = L_n(e_2, x) - 2x L_n(e_1, x) + x^2 L_n(e_0, x) \Rightarrow \\ e_2(x) - 2xe_1(x) + x^2 e_0(x) &= x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Значит

$$\exists N_1 \forall n > N_1 \forall x \in [a, b] : |L_n(\psi_x, x)| \leq \frac{\varepsilon \delta^2}{4M}$$

А из того, что $L_n(e_0) \Rightarrow e_0$:

$$\exists N_2 \forall n > N_2 \forall x \in [a, b] : |L_n(e_0, x)| < \frac{3}{2}$$

Также не забываем, что:

$$|L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leq \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x, x)$$

Объединяя эти три условия, получим, что

$$\forall n > \max(N_1, N_2) : |L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leq 2\varepsilon$$

Снова используем тот факт, что $L_n(e_0) \Rightarrow e_0$:

$$\exists N_3 \forall n > N_3 \forall x \in [a, b] : |L_n(e_0, x) - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Значит

$$|f(x) L_n(e_0, x) - f(x)| \leq |f(x)| \cdot |L_n(e_0, x) - 1| \leq \varepsilon$$

Объединяя ВСЕ неравенства, получим:

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3) \forall x \in [a, b] : |L_n(f, x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$$

□

Теорема 6.2. *Коровкина'*

Если последовательность линейных положительных операторов $L_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ такова, что $L_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_i$ на \mathbb{R} , $e_0(x) = 1, e_1(x) = \cos(x), e_2(x) = \sin(x)$, то

$$\forall f \in C_{2\pi} : L_n(f) \Rightarrow f$$

на \mathbb{R} .

Доказательство. Аналогично немодифицированной теореме, только вместо функции ψ_x введём

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(t) \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(t) \sin(x) = \\ &= \frac{1}{2} e_0(t) - \frac{1}{2} \cos(x) e_1(t) - \frac{1}{2} \sin(x) e_2(t) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_n(\varphi_x, x) &= \frac{1}{2} L_n(e_0, x) - \frac{1}{2} \cos(x) L_n(e_1, x) - \frac{1}{2} \sin(x) L_n(e_2, x) \Rightarrow \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(x) - \frac{1}{2} \sin^2(x) = 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 6.3. *Фейера.*

Для любой непрерывной 2π -периодической функции последовательность средних арифметических частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье равномерно на \mathbb{R} сходится к ней.

Доказательство. Распишем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &:= \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \dots + S_n(f, x)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=0}^n D_k(t) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n \sin((k + \frac{1}{2})t) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n \sin((k + \frac{1}{2})t) \sin(\frac{t}{2}) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4 \sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n (\cos(kt) - \cos((k+1)t)) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4 \sin^2(\frac{t}{2})} (1 - \cos((n+1)t)) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot \frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} dt \end{aligned}$$

Получается, $\sigma_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ образует последовательность линейных положительных операторов. Это значит, что нам нужно проверить сходимость лишь на трёх функциях: $e_0 := 1, e_1 := \sin(x), e_2 := \cos(x)$.

$$\sigma_n(e_0) = e_0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \sigma_n(e_1) = e_1 \cdot \frac{n}{n+1}, \sigma_n(e_2) = e_2 \cdot \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Коровкина, получаем, что $\forall f \in C_{2\pi} : \sigma_n(f) \Rightarrow f$

□

7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами

Война – это путь обмана,
постоянной организации
ложных выпадов,
распространения
дезинформации,
использования уловок и
хитростей.

Лукашов А.Л.

Теорема 7.1. *Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.*

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ может быть с любой степенью точности равномерно приближена алгебраическими многочленами, то есть

$$\forall f \in C[a, b] \forall \varepsilon > 0 \exists P_n \forall x \in [a, b] : |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$.

Введём многочлены Берштейна:

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Мы можем рассматривать их, как операторы $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$. Очевидно, что они линейные и положительные, поэтому достаточно проверить сходимость трёх функций: $1, x, x^2$.

$$B_n(e_0, x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1 = e_0(x)$$

Рассмотрим $g(t) := (tx + (1-x))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k x^k (1-x)^{n-k}$. Тогда

$$g'(t) = nx(tx + (1-x))^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k t^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g'(1)$ получим равенство:

$$nx = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Rightarrow B_n(e_1, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x)$$

Взяв вторую производную от g , получим:

$$n(n-1)x^2(tx + (1-x))^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k t^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя $g''(1)$ получим равенство:

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^n (k^2 - k)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - nx \Rightarrow$$

$$B_n(e_2, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_2(x)$$

Получили, что для оператора B_n справедлива теорема Коровкина и утверждение доказано.

Для завершения доказательства перейдём к произвольному отрезку $[a, b]$: для $f \in C[a, b]$ введём $F(x) = f(x(b-a) + a) \in C[0, 1]$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] : |B_n(F, x) - F(x)| < \varepsilon$$

Осталось заметить, что если в многочлен Бернштейна подставить какую-то линейную функцию, то получится какой-то многочлен:

$$\Rightarrow |B(F, \frac{t-a}{b-a}) - f(t)| < \varepsilon$$

□

Следствие. Из данной теоремы и теоремы Коровкина' следует теорема Вейштрасса о приближении непрерывной 2π -периодической функции тригонометрическими многочленами:

$$\forall f \in C_{2\pi} \forall \varepsilon > 0 \exists T_n := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) : |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

8 Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.

Избегание столкновения с
большими силами
свидетельствует не о трусости,
а о мудрости, ибо принесение
себя в жертву никогда и нигде
не является преимуществом.

Лукашов А.Л.

Определение 8.1. Коэффициентами Фурье функции f в произвольном евклидовом(гильбертовом) пространстве называются скаляры вида

$$f_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

где $\{e_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов.

Теорема 8.1. *Минимальное свойство сумм Фурье.*

Если $\{e_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то

$$\forall f \in E \forall c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^N c_k e_k\| \geq \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|$$

, где $\{f_k\}$ – коэффициенты Фурье для f .

Причём равенство достигается $\Leftrightarrow \forall k = \overline{1, N} : c_k = f_k$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{k=1}^N c_k e_k\|^2 &= \langle f - \sum_{k=1}^N c_k e_k, f - \sum_{k=1}^N c_k e_k \rangle = \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=1}^N c_k \langle f, e_k \rangle + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c_k c_l \langle e_k, e_l \rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=1}^N f_k c_k \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^N c_k^2 \|e_k\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^N (f_k^2 - 2f_k c_k + c_k^2) \|e_k\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2 \end{aligned}$$

□

Следствие. *Тождество Бесселя.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то $\forall f \in E$:

$$\|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2$$

Доказательство. Очевидно следует из цепочки неравенств из доказательства предыдущей теоремы. □

Следствие. *Неравенство Бесселя.*

Если $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то $\forall f \in E$:

$$\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2$$

Доказательство. Из тождества Бесселя следует, что

$$\forall N \in \mathbb{N} : \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 \geq 0$$

Устремляя $N \rightarrow +\infty$ получим требуемое. □

9 Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля

Теорема 9.1. *Если $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то $\forall f \in E$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists T = \sum_{k=1}^N c_k e_k : \|f - T\| < \varepsilon$
2. $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$
3. $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$ – равенство Парсеваля для f .

Доказательство. 1 \Leftrightarrow 2 по предыдущей теме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\| < \varepsilon$$

Тогда используя неравенство Бесселя:

$$\forall n > N : \|f - \sum_{k=1}^n f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2$$

Ну а 3 \Leftrightarrow 1 так как при равенстве Парсеваля разность $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2$ будет бесконечно малая, а значит применяя равенство Бесселя получим требуемое. \square

Следствие. Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства E , то следующие утверждения эквивалентны:

1. $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная система в E .
2. $\forall f \in E : f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$
3. $\forall f \in E : \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$

10 Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом...

Определение 10.1. $f \in L_{2\pi}^2 \Leftrightarrow f$ – 2π -периодическая и $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Это пространство гильбертово.

Утверждение 10.1. Мы уже знаем, что ортогональной системой в этом пространстве будет система

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots \right\}$$

Утверждение 10.2. Благодаря теореме Фейера мы можем утверждать, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $C_{2\pi}$.

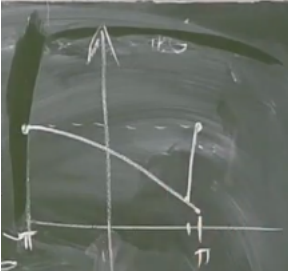
Утверждение 10.3. Мы уже знаем, что $C[-\pi, \pi]$ всюду плотно в $L_p[-\pi, \pi], p \geq 1$.

Заметим, что $C_{2\pi}$ всюду плотно в $C[-\pi, \pi]$ в смысле нормы $L_p[-\pi, \pi]$. Делается это с помощью такого трюка:

Используя транзитивность свойства полноты, получим, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полна в $L_p[-\pi, \pi]$, в частности в $L_{2\pi}^2$.

Утверждение 10.4. Посчитаем коэффициенты Фурье для нашей ортогональной системы в явном виде:

Если $e_k = \cos(nx)$, то $f_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) d\mu(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx} = a_n$. Если $e_k = \sin(nx)$, то $f_k = b_n$. Ну и $e_1 = a_0$.



Утверждение 10.5. Равенство Парсеваля для тригонометрической системы в $L^2_{2\pi}$ будет иметь вид:

$$\|f\|^2 = a_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \pi$$

Утверждение 10.6. Теорема Рисса-Фишера даёт следующее следствие: если $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится, то коэффициенты $a_0, \{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции из $L^2_{2\pi}$.

11 Теорема Рисса-Фишера

Теорема 11.1. Рисса-Фишера.

Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства H и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность действительных чисел, такая что $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится к некоторому $f \in H$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$ сходится $\stackrel{\text{к. Коши}}{\Rightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Тогда оценим норму некоего элемента из H :

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\rangle = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Это означает, что последовательность частичных сумм нашего ряда является фундаментальной, а значит благодаря гильбертовости пространства H мы можем сказать, что ряд сходится.

Что и требовалось доказать. □

Следствие. Если $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства H , то $\forall f \in H$ р. Фурье сходится к $f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0$, то

$$\langle f - f_0, e_j \rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2 < +\infty \stackrel{\text{т. Р.Ф}}{\Rightarrow} \exists f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0 \Rightarrow \langle f - f_0, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - f_j \|e_j\|^2 = 0$$

□

12 Полнота и замкнутость ортогональной системы, их СВЯЗЬ

Определение 12.1. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется полной в $L_p(E)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L_p(E) \exists \{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|_p < \varepsilon$$

Определение 12.2. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется замкнутой в евклидовом пространстве E (по Банаху, в банаховом пространстве тотальной, в C и L_p – полной), если $\forall k \in \mathbb{N} : \langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Теорема 12.1. О связи.

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкнутая система в гильбертовом пространстве \Leftrightarrow она полная.

Доказательство. $\Rightarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – замкнутая $\xRightarrow{\text{сл-е Т.Р-Ф}} \forall f \in H : f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ Тогда, применяя следствие теоремы (9.1) получим полноты системы.

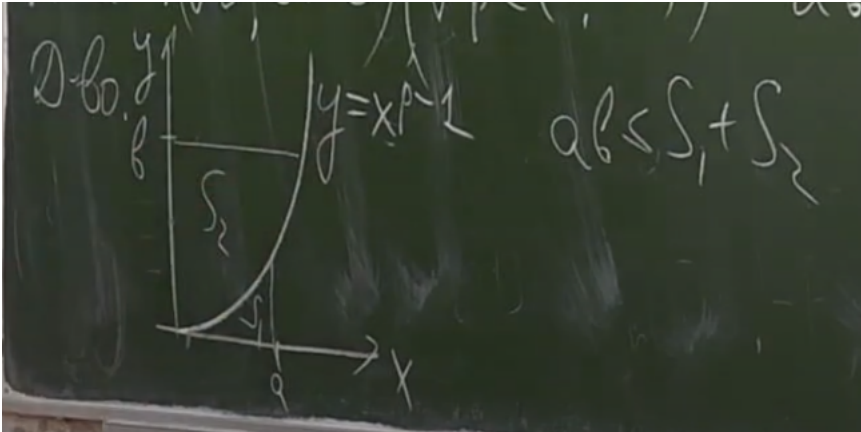
$\Leftarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная система, $\forall k \in \mathbb{N} \forall f \in H : \langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f_k = 0$. Теперь снова применим следствие теоремы (9.1) и свойства полноты системы, получим, что $f = \sum 0 e_k = 0$. \square

13 Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$

Определение 13.1. Для $1 < p < +\infty$ обозначим через q такое число, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Лемма 13.1. $\forall a, b > 0 \forall p \in (1, +\infty) : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Доказательство. Геометрическое:



Причём S_1 и S_2 можно легко посчитать:

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

\square

Теорема 13.1. *Неравенство Гёльдера.*

Если $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < +\infty$, то

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Если правая часть равна нулю, то всё доказано.

Иначе введём обозначения:

$$A^p := \int_X |f(x)|^p d\mu(x), \quad B^q := \int_X |g(x)|^q d\mu(x)$$

Тогда, используя предыдущую лемму с параметрами:

$$a = \frac{|f(x)|}{A} \quad b = \frac{|g(x)|}{B}$$

Получим, что

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{AB} \leq \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}$$

Теперь проинтегрируем обе части по x и получим требуемое:

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)|d\mu(x)}{AB} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Теорема 13.2. *Для $p \in [1, +\infty)$ $L_p([a, b])$ – банахово пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная последовательность в $L_p[a, b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Отсюда получаем, что $\exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \uparrow \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$.

Тогда в силу неравенства Гёльдера:

$$\|f_m - f_{n_k}\|_1 \leq \|f_m - f_{n_k}\|_p \cdot \|1\|_q < \frac{C}{2^k}$$

Рассмотрим ряд

$$\Phi(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^\infty |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$$

И для него верно равенство (по теореме Леви):

$$\|\Phi\|_1 = \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{k=2}^\infty \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_1 < +\infty$$

Значит $\Phi(x)$ конечная почти всюду \Rightarrow ряд $|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^\infty |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$ – сходится почти всюду на $[a, b]$.

Тогда ряд $f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^\infty (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x))$ сходится абсолютно почти всюду на $[a, b]$, но его частичные суммы – это $f_{n_k} \Rightarrow$ мы получили, что эта последовательность сходится почти всюду к чему-то, что мы обозначим, как $f(x)$.

Докажем, что $f \in L_p[a, b]$: если есть сходимость почти всюду, то по теореме Фату мы можем оценить:

$$\int_{[a, b]} |f(x)|^p d\mu(x) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} |f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) = \|f_{n_k}\|_p^p < +\infty$$

Снова используем свойство последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l > N : \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon$$

Но мы можем перейти к пределу $l \rightarrow +\infty$ благодаря теореме Лебега: $\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$. Тогда при достаточно больших m :

$$\|f_m - f\|_p \leq \|f_m - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < 2\varepsilon$$

□

14 Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра

Определение 14.1. Пусть функция $f(x, \alpha)$ зависит от x, α . Тогда мы можем рассматривать функцию $f_{1, \alpha}(x)$ – изначальная функция, которую мы теперь считаем зависящей только от первого параметра, а второй параметр считаем фиксированным. Аналогично вводится $f_{2, x}(\alpha)$.

Теорема 14.1. *Непрерывность интеграла, зависящего от параметра*

Пусть $\forall \alpha \in A \subset \mathbb{R}^n$ функция $f_{1, \alpha}(x) = f(x, \alpha)$ суммируема на $E \subset \mathbb{R}^m$, $f_{2, x}(\alpha) = f(x, \alpha)$ при почти всех $x \in E$ непрерывна в $\alpha_0 \in E$, и при почти всех $x \in E, \forall \alpha \in A : |f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ суммируема на E . Тогда

$$F(\alpha) = \int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$$

непрерывна в α_0 .

Доказательство. Рассмотрим $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset A, \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha_0$.

Тогда, по условию, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x, \alpha_n) = f(x, \alpha_0)$ при почти всех $x \in E$. Кроме того, для почти всех x из E , выполняется неравенство $\forall n \in \mathbb{N} : |f(x, \alpha_n)| \leq \varphi(x)$. Тогда, используя теорему Лебега, мы сможем перейти к пределу интегралов:

$$F(\alpha_n) = \int_E f_{1, \alpha_n}(x) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E f(x, \alpha_0) d\mu(x) = F(\alpha_0)$$

□

Теорема 14.2. *Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра*

Пусть $f_{1, \alpha}(x) = f(x, \alpha)$ при всех $\alpha \in U(\alpha_0) \subset \mathbb{R}^n$ суммируема на $E \subset \mathbb{R}^m$ вместе с $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$, и при почти всех $x \in E, \forall \alpha \in U(\alpha_0) : \left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ суммируема на E . Тогда

$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha_0)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

Доказательство. Рассмотрим $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset \dot{U}(\alpha_0)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha_0$.

Тогда частная производная в точке α_0 – это

$$\left| \frac{f(x, \alpha_n) - F(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} \right| = \left| \frac{\partial f(x, \xi_n(x))}{\partial \alpha} \right| \leq \varphi(x)$$

Теперь, используя теорему Лебега, получим равенство пределов интегралов:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha_0)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

□

15 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле

Определение 15.1. Пусть $f(x, y) \in \mathcal{R}[a, \tilde{b}] \forall \tilde{b} < b \forall y \in A \subset \mathbb{R}$. Тогда несобственным интегралом Римана, зависящим от параметра y называется

$$\int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\tilde{b} \rightarrow b-0} \int_a^{\tilde{b}} f(x, y) dx \quad (1)$$

Определение 15.2. Мы говорим, что несобственный интеграл (1) сходится поточечно, если:

$$\forall y \in A \forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall B' \in (B, b) : \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Определение 15.3. Несобственный интеграл (1) сходится равномерно на A , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall B' \in (B, b) \forall y \in A : \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Теорема 15.1. Критерий Коши равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра

(1) сходится равномерно на $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall a < B' < B'' < b \forall y \in A : \left| \int_{B'}^{B''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Доказательство. \Rightarrow При всех требуемых кванторах можем сделать оценку:

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx - \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < 2\varepsilon$$

\Leftarrow Фиксируем $\forall y \in A$, тогда используем критерий Коши сходимости несобственных интегралов (без параметра), то есть

$$\int_a^b f(x, y) dx < +\infty \xrightarrow{B'' \rightarrow b-0} \left| \int_{B'}^{B''} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon$$

□

Следствие. Признак сравнения.

Если $|f(x, y)| < g(x, y)$, f, g удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана, $\int_a^b g(x, y)dx$ равномерно сходится на A , то $\int_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходится на A .

Следствие. Признак Вейерштрасса.

Если $|f(x, y)| \leq g(x)$, f, g удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана, $\int_a^b g(x, y)dx$ сходится на A , то $\int_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходится на A .

Теорема 15.2. Признак Дирихле равномерной сходимости НИРЗП.

1. $f \in \mathcal{R}[a, \tilde{b}] \forall \tilde{b} \in (a, b) \forall y \in A$ и $\forall y \in A$:

$$\left| \int_a^x f(t, y)dt \right| \leq C$$

2. $g(x, y) \downarrow 0$ при $x \rightarrow b - 0$ равномерно по $y \in A$.

Тогда $\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx$ равномерно сходится на A .

Доказательство.

$$\int_{B'}^{B''} f(x, y)g(x, y)dx = g(B', y) \int_{B'}^{\xi(y)} f(x, y)dx + g(B'', y) \int_{\xi(y)}^{B''} f(x, y)dx$$

$g \Rightarrow 0$, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall x \in (B, b) \forall y \in A : |g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4C}$$

А все интегралы в полученной формуле можно оценить сверху, как $2C$, поэтому получим, что

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4C} \cdot 2C + \frac{\varepsilon}{4C} \cdot 2C = \varepsilon$$

□

16 Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 16.1. Непрерывность НИРЗП

Если $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$ ($b \leq +\infty$) и $\int_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходится на $[c, d]$, то он является непрерывной функцией на $[c, d]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, а также введём

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x, y)dx$$

Равномерная сходимость $\int_a^b f(x, y)dx$ влечёт равномерную сходимость $I_n(y)$. Используя теорему о пределе равномерно сходящейся функциональной последовательности получим, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(y)$ – непрерывная. □

Теорема 16.2. Собственная интегрируемость НИРЗП.

Если $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b) \times [c, d]$ ($b \leq +\infty$) и $\int_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходится на $[c, d]$, то

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Положим

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x, y)dx$$

Тогда равномерная сходимость $\int_a^b f(x, y)dx$ влечёт равномерную сходимость $I_n(y)$.

Используя предыдущую теорему и теорему об интегрируемости функциональных последовательностей и тот факт, что $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a, b_n] \times [c, d]$, поэтому мы можем переставить пределы интегрирования и получим:

$$\int_a^{b_n} \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d I_n(y)dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

□

17 Дифференцирование несобственных интегралов по параметру

Теорема 17.1. Дифференцируемость НИРЗП.

Если $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ непрерывны на $[a, b) \times [c, d]$, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ сходится равномерно на $[c, d]$, $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится для некоторого $y_0 \in [c, d]$, то $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ сходится и является дифференцируемой функцией на $[c, d]$, причём

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Доказательство. $\forall t \in [c, d]$ и фиксированного $x \in [a, b]$ справедлива формула

$$f(x, t) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

Тогда, если мы проинтегрируем обе части по x , то получим что

1. Первое слагаемое сходится по условию
2. Второе слагаемое удовлетворяет условию теоремы о собственной интегрируемости несобственного интеграла, а это значит что он сходится по x .

Значит и интеграл от левой части также сходится $\forall t$, причём он равен

$$I(t) := \int_a^b f(x, y_0)dx + \int_a^b \left(\int_{y_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \right) dx = \int_a^b f(x, y_0)dx + \int_{y_0}^t \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx \right) dy$$

Тогда при взятии производной $I'(t)$, первое слагаемое обнулится, а второе, являясь переменным верхним пределом, превратится в $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)dx$. □

18 Гамма- и бета-функции и связь между ними

Определение 18.1. Гамма-функцией называется

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

Утверждение 18.1. Гамма-функция сходится

Доказательство.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx =: I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$$

I_1 сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq x^{\alpha-1}, \quad \int_0^1 x^{\alpha-1} dx < +\infty, \alpha > 0$$

I_2 также сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq C e^{-\frac{x}{2}}, x \geq 1; \quad \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx < +\infty$$

□

Теорема 18.1. Основные свойства гамма-функции.

1. $\Gamma(\alpha)$ бесконечно дифференцируема $\forall \alpha > 0$.
2. Формула понижения. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \alpha > 0$
3. $\Gamma(n + 1) = n! \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Доказательство. 1. $(x^{\alpha-1} e^{-x})'_\alpha = x^{\alpha-1} e^{-x} \ln x$, заметим, что все оценки, сделанные в предыдущем пункте сохраняются (с немного изменённым коэффициентом α), так как

$$\ln x \leq \frac{1}{x^\varepsilon}, x \in (0, 1]; \quad \ln x \leq x^\varepsilon, x \geq 1$$

Значит мы можем дифференцировать сколько угодно раз с сохранением сходимости.

2. Проинтегрировав по частям, получим:

$$\Gamma(\alpha) = -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \Gamma(\alpha)$$

3. Заметим, что $\Gamma(1) = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$. Используя предыдущее свойство, доказываемое утверждение становится очевидным.

□

Определение 18.2. Бета-функцией называется $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx; \quad a, b \geq 0$

Теорема 18.2. Связь бета- и гамма-функций.

$$\forall a, b > 0 : B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Доказательство.

$$B(a, b)\Gamma(a+b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}dy \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \xi^{a-1}e^{-\xi}d\xi \int_0^{+\infty} \eta^{b-1}e^{-\eta}d\eta$$

Будем рассматривать оба интеграла, как двойные. Рассмотрим замену координат вида

$$\begin{cases} xy = \xi \\ (1-x)y = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \xi + \eta \\ x = \frac{\xi}{\xi + \eta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y & 1-x \end{vmatrix} = y(1-x+x) = y \neq 0$$

Проведите данную замену и у вас всё обязательно получится! □

19 Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции

Теорема 19.1. Формула Гаусса-Эйлера.

Для любых $\alpha > 0$:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}$$

Доказательство. Напоминаем, что

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \stackrel{e^{-x} =: u}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{u} du$$

Докажем, что $f_n(u) = n(1 - u^{\frac{1}{n}})$ монотонно стремится к $\ln \frac{1}{u}$, $u \in (0, 1]$. Для этого рассмотрим функцию $g(t, u) = t(1 - u^{\frac{1}{t}})$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 - u^{\frac{1}{t}} - t \cdot u^{\frac{1}{t}} \ln u \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = 1 - u^{\frac{1}{t}} + u^{\frac{1}{t}} \ln u \frac{1}{t}, u \in (0, 1], t > 0$$

Обозначив $y := u^{\frac{1}{t}} \Rightarrow y \in (0, 1]$ получим новую функцию $\varphi(y) = 1 - y + y \ln y$. Тогда

$$\varphi'(y) = -1 + \ln y + 1 = \ln y < 0, y \in (0, 1]; \quad \varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(y) \geq 0 \Rightarrow g \geq 0 \Rightarrow f_n(u) \uparrow$$

Тогда рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{n} \ln u}}{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{2й зам-й пр-л}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{n} \ln u}{\frac{1}{n}} = -\ln u = \ln \frac{1}{u}$$

Значит мы можем применить теорему Леви для последовательности $f_n(u)$:

$$\int_0^1 (n(1 - u^{\frac{1}{n}}))^{\alpha-1} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{u} du$$

То есть мы получили, что

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-1} \int_0^1 (1 - u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1} du \stackrel{u = \frac{1}{t^n}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha B(n, \alpha) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!\Gamma(\alpha)}{(\alpha+n-1) \cdots \alpha \Gamma(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} \end{aligned}$$

□

20 Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения.

Теорема 20.1. *Формула Валлиса.*

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$:

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\cos \alpha x$ на $[-\pi, \pi]$, разложим её в тригонометрический ряд Фурье:

$$\begin{aligned} b_n = 0, a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(\alpha + n)x + \cos(\alpha - n)x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\alpha + n)x}{\alpha + n} + \frac{\sin(\alpha - n)x}{\alpha - n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha + n} + \frac{1}{\alpha - n} \right) = \\ &= \frac{2(-1)^n \alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}, n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Значит

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx, x \in [-\pi, \pi]$$

Возьмём $x := \pi$, тогда

$$\cos \alpha \pi = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} \left(1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right) \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha \pi = \frac{1}{\alpha \pi} + 2\frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

В итоге получим, что

$$\operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} = 2\frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

Где слева – устранимая точка разрыва, а справа ряд равномерно сходится при $\alpha \leq \alpha_0 < 1$ (Можем оценить $\left| \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$). Значит мы можем проинтегрировать обе части по α :

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} \right) d\alpha &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2 - n^2}, |x| < 1 \Rightarrow \\ \left[\frac{1}{\pi} \ln |\sin \alpha \pi| - \frac{1}{\pi} \ln |\alpha| \right] \Big|_0^x &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \ln |\alpha^2 - n^2| \Big|_0^x \Rightarrow \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |x^2 - n^2| - \ln n^2) \Rightarrow \\ \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \end{aligned}$$

□