Содержание

1 Теорема Римана об осцилляции

Определение 1.1. Точка x называется **точкой прикосновения** множества S, если любая окресность x содержит хотя бы одну точку множества S.

Определение 1.2. Множество всех точек прикочновения S называется **замыканием** S.

Определение 1.3. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. ($\operatorname{supp} f$) Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.4. Множество D называется всюду плотным в множестве G, если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ – *линейное нормированное пространство.*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. *Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Заменим $\mathbb{R}$ на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достатончо доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.

- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки $f_{[N]}(x)$ при достаточно больших N, то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммиремых функций.

- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

  $$\exists \{h_n\} : \; h_n \uparrow f$$

  Теорема Леви гарантирует, что

  $$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \to \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

  Значит

  $$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

  То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

  $$h_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что $\forall k: \ E_k$ – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0: \ \exists \text{элементарное } M_\varepsilon: \ \mu(E_k \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \triangle M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

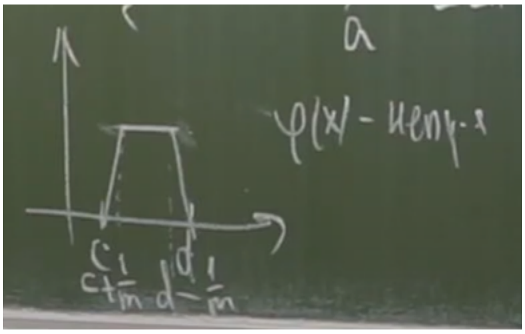

Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,\, d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N,\, N]}: \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists g \in C[-N, N] \ \|f|_{[-N,\, N]} - g\|_{L_1[-N,\, N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейных образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\, N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_{-N}^{N} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N,\, N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a,b]$:

$$\lim_{\delta\to+0} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \int_a^{b-h} |f(x+h)-f(x)|d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall\varepsilon>0\, \exists g\in C[a,b]:\ \int_a^b |f(x)-g(x)|d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a,b] \Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall\varepsilon>0\, \exists\delta>0\, \forall x,y\in[a,b], |x-y|<\delta:\ |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h\ 0\leqslant h\leqslant\delta$:

$$\int_a^{b-h} |f(x+h)-f(x)|d\mu(x) \leqslant \int_a^{b-h} |f(x+h)-g(x+h)|d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x)-g(x)|d\mu(x) + \\ + \int_a^{b-h} |g(x+h)-g(x)|d\mu(x) < \varepsilon$$

Так как f суммируема на $\mathbb{R}$, то $\exists N\in\mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,N]} |f(x)|d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a,b] := [-N-1, N+1]$ и введём $g := f\mathbb{I}_{[-N,N]} \in L_1[a,b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists\delta\in(0,1)\, \forall h, 0\leqslant h\leqslant\delta:\ \int_a^{b-h} |g(x+h)-g(x)|d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t, |t|<\delta$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-f(x)|d\mu(x) = \int\limits_{\{x,x+t\}\subseteq[a,b]} |f(x+t)-f(x)|d\mu(x) + \int\limits_{\{x,x+y\}\not\subseteq[a,b]} |f(x+t)-f(x)|d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f\in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\sin(\lambda x)d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\int_I f(x)\cos(\lambda x)d\mu(x) \overset{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} -\int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) =$$

$$-\frac{1}{2}\int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t) - \frac{1}{2}\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)$$

Заметим, что

$$\left|\int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda})\triangle I}\left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)\right|d\mu(t) = \\ = \int_{I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})}|f(x)|d\mu(t) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu\left(I\triangle(I+\frac{\pi}{\lambda})\right) \overset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

Также очевидно, что

$$\left|\int_I\left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right)\cos(\lambda t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_I\left|f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(t)\right|d\mu(t) \overset{\text{по пред. Лемме}}{\to} 0$$

□

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

Определение 2.1. $f\in L_{2\pi} \Leftrightarrow f\in L_1[-\pi,\pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$D_n(u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{iku}+e^{-iku})=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}e^{iku}=\frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)u-1}}{e^{iu}-1}= \\ =\frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}-e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}-e^{-i\frac{u}{2}}}\cdot\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f\in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)d\mu(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)D_n(u)d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(kt)+\sin(kx)\sin(kt))\right)d\mu(t) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)d\mu(t)$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x+u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T, T-периодичной функции одинаков. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $f \in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \to +\infty$ равномерно по x.*

Доказательство. g – ограниченная $\Rightarrow \exists M:\ \forall u\ |g(u)| \leqslant M$.

f – измеримая $\Rightarrow$ по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi,\pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi}|f_2(t)|d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 – непрерывная на компакте $[-\pi,\pi] \Rightarrow \exists B\ \forall u:\ |f_1(u)| \leqslant B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F:

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t+h)-F(t)|d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ:

$$a_n(\chi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi(t)\cos(nt)d\mu(t) \overset{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi\left(u+\frac{\pi}{n}\right)\cos(nu)d\mu(u) =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\chi\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\chi(t)\right]\cos(nt)d\mu(t) \Rightarrow$$
$$|a_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\chi\right)$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim_{n\to+\infty}\omega_1(\frac{\pi}{n},\chi) = 0$ равномерно по x:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\chi(t+h)-\chi(t)|d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t)|d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t+h)-f(x+t)|\cdot|g(t+h)|d\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t) \leqslant$$
$$\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+h)-f(u)|d\mu(u) + \int_{-\pi}^{\pi}|f_1(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$
$$\leqslant M\omega_1(\frac{\pi}{n}, f) + B\omega_1(\frac{\pi}{n}, g) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta \to 0$. Что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a,b) \subset [-\pi,\pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a',b'] \subset (a,b)$.

Доказательство. Так как $[a',b']$ содержится в (a,b), то

$$\exists \eta > 0\, \forall x \in [a',b']\, \forall t, 0 \leqslant |t| < \eta : \; x + t \in (a,b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\eta,\eta) \\ 1, t \in [-\pi,\pi] \setminus (-\eta,\eta) \end{cases}$$

Кроме того, λ – 2π-периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t)D_n(t)d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t \notin (-\eta,\eta)$, то $\lambda(\eta) = 1$, ничего не меняем. Если же $|t| < \eta$, то $x + t \in (a,b)$, где $f = 0$, поэтому получили, что подыинтегральные функции совпадают везде на $[-\pi,\pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})\sin(nt)d\mu(t) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t)\cos(nt)d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t)\operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме.

□

3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Теорема 3.1. *Признак Дини.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0,\delta), \delta > 0$, где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим разность $S_n(f,x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f,x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0))D_n(u)d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв $\sin((n+\frac{1}{2})t) = \sin(nt)\cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt)\sin(\frac{t}{2})$ в формуле ядра Дирихле:

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t}\sin(nt)d\mu(t)+$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(nt)}{2}d\mu(t)+$$
$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\sin(nt)\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}d\mu(t)+$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\sin(nt)\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right)d\mu(t)$$

По условию, φ_{x_0} суммируемая $\Rightarrow$ по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))$ также суммируемая $\Rightarrow$ вторoе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta, \pi]$ и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} = \frac{1-\frac{t^2}{8}+o(t^3)}{2\left(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}+o(t^4)\right)} - \frac{1}{t} = \frac{t-\frac{t^3}{8}-t+\frac{t^3}{24}+o(t^4)}{t^2+o(t^3)} \overset{t\to\infty}{\to} 0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right) \in L_1[0, \delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции. □

Утверждение 3.1. *Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

Определение 3.1. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha \in (0, 1]$ в точке x_0, если $\exists$ конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C, \delta > 0$ такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta, |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \leqslant Ct^\alpha, |f(x_0-t) - f(x_0-0)| \leqslant Ct^\alpha$$

Определение 3.2. Обобщённой односторонней производной функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{t\to+0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t\ to+0} \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$$

Теорема 3.2. *Признак Липшица.*

Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$

Доказательство. По условию теоремы

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Значит функций φ_{x_0} из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{(f(x_0+t)-f(x_0+0))+(f(x_0-t)-f(x_0-0))}{t}$$

То, что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left|\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)d\mu(t)\right| \leqslant \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}d\mu(t) \leqslant$$
$$2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}d\mu(t) = 2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}dt = 2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 3.3. *Признак Жордана.*

Если $f \in L_{2\pi}$ и является функцией ограниченной вариации на $[a,b]$, то тригонометрический ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in [a,b]$ непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва $x_0 \in [a,b]$.

Если, кроме того, $f \in C[a,b]$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a',b'] \subset (a,b)$.

Доказательство. Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\delta \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)d\mu(t) = 0$$

а для $-t$ аналогично.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta :\ 0 \leqslant f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists\delta_2, 0<\delta_2<\delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)dt = (f(x_0+\delta_1)-f(x_0+0))\int_{\delta_2}^{\delta_1}\frac{\sin(nt)}{t}dt$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ сходится, поэтому если обзначим за $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t}dt$, то $G(v)$ будет ограничена, т.е. $\exists C: \ |G(v)| \leqslant C$.

Но теперь рассмотрим $\forall A$:

$$\left|\int_0^A \frac{\sin(nt)}{t}dt\right| \overset{nt=u}{=} \left|\int_0^{nA}\frac{\sin(u)}{u}du\right| \leqslant C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left|\int_0^{\delta_1}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)dt\right| \leqslant 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ. Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f,x_0)-S(x_0)$ на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что $S(x_0) = f(x_0)$. Применим к каждому из трёх последих слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти δ_1 из текущего доказательство независимо от x_0. Также незавимо от x_0 мы ограничиваем интеграл $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утверждение этой теоремы доказано. □

4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

Теорема 4.1. *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если F – 2π-периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье F.

Доказательство. $f(x) := F'(x) \in L_1$. Значит $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)d\mu(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)\cos(nx)d\mu(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi}F(x)\cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin(nx)d\mu(x) = nB_n$$

Аналогично докажем, что $b_n = -nA_n$, а также заметим, что $a_0 = 0$.

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы. □

Следствие. *Если $f, \cdots, f^{(k-1)}$ – 2π-периодические, и $f^{(k-1)}$ – абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют:*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Пусть $k = 1$: f – абсолютно непрерывная, значит $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$. По теореме об осцилляции: $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции. □

Теорема 4.2. *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если f – функция ограниченной вариации на периоде 2π, то её коэффициенты фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right);\ n \to +\infty$$

Доказательство. Рассмотрим a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+\frac{\pi}{n}) - f(x)\right]\cos(nx)dx = \cdots =$$
$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]\cos(nx)dx, \quad \forall k = \overline{1,n}$$

Сложив все эти n равенств, получим:

$$|na_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right|dx \leqslant V(f)$$

□

Теорема 4.3. *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если $f \in L^1_{2\pi}, f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ – её тригонометрический ряд Фурье, $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)d\mu(t)$ – неопределённый интеграл Лебега для f, то $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos(nx)+a_n\sin(nx)}{n}$, где ряд равномерно сходится на $\mathbb{R}$.

Доказательство. $F(x)$ – абсолютно непрерывная, $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)d\mu(t) = \pi a_0$. $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$ – тоже абсолютно непрерывная на периоде и 2π-периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)'$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье для $F(x) - \frac{a_0}{2}x$. Но с другой стороны $\left(F(x) - \frac{a_0}{2}x\right)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$.

Равномерная сходимость проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. □