

# Содержание

1	Теорема Римана об осцилляции	3
2	Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.	6
3	Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке	9
4	Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.	11
5	Теорема Жордана.	12
6	Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции	13
7	Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами	16
8	Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.	17
9	Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля	18
10	Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом. . .	19
11	Теорема Рисса-Фишера	20
12	Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь	21
13	Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$	21
14	Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра	23
15	Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле	24
16	Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра	25
17	Дифференцирование несобственных интегралов по параметру	26
18	Гамма- и бета-функции и связь между ними	27
19	Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции	28
20	Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения.	29

21	Формула дополнения для гамма-функции	30
22	Равносходимость интеграла и ряда Фурье в точке	30
23	Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье суммируемой функции. Формулы обращения.	32
24	Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. Свёртка и её преобразование Фурье.	33
25	Пространства основных и обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций. $\delta$ -функция	34
26	Пространство Шварца быстро убывающих функций	37

# 1 Теорема Римана об осцилляции

Порядок и беспорядок – это число; храбрость и трусость – это мощь; сила и слабость – это форма.

---

Лукашов А.Л.

**Определение 1.1.** Точка  $x$  называется **точкой прикосновения** множества  $S$ , если любая окрестность  $x$  содержит хотя бы одну точку множества  $S$ .

**Определение 1.2.** Множество всех точек прикосновения  $S$  называется **замыканием**  $S$ .

**Определение 1.3.** **Носителем** функции  $f(x)$  называется замыкание множества тех  $x$ , для которых  $f(x) \neq 0$ .  $(\text{supp } f)$  Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

**Определение 1.4.** Множество  $D$  называется всюду плотным в множестве  $G$ , если

$$\overline{D} = G$$

**Утверждение 1.1.**  $L_1(\mathbb{R})$  – линейное нормированное пространство.

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

**Лемма 1.1.** Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в  $L_1(\mathbb{R})$ .

*Доказательство.* Заменяем  $\mathbb{R}$  на  $[a, b]$ . То есть докажем, что множество непрерывных на  $[a, b]$  функций всюду плотно в  $L_1[a, b]$ .

- Любая суммируемая функция представима в виде разности двух неотрицательных суммируемых функций, поэтому достаточно доказать утверждение для неотрицательных суммируемых функций.
- Так как интеграл неотрицательной суммируемой функции слабо отличается от интеграла её срезки  $f_{[N]}(x)$  при достаточно больших  $N$ , то достаточно доказать утверждение для ограниченных неотрицательных суммируемых функций.
- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

$$\exists \{h_n\} : h_n \uparrow f$$

Теорема Леви гарантирует, что

$$\int_a^b h_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

Значит

$$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^N c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

В силу того, что  $\forall k : E_k$  – измеримое, то

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ элементарное } M_\varepsilon : \mu(E_k \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Значит

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \Delta M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \Delta M_\varepsilon) < \varepsilon$$

Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию  $\varphi(x)$ , которая выглядит вот так:

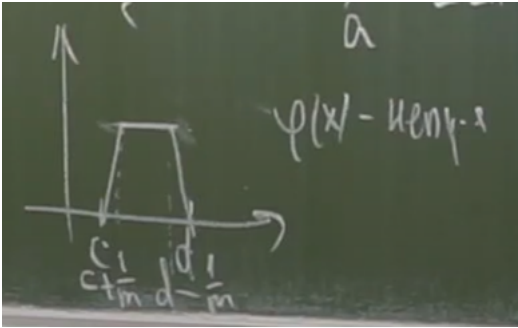


Рис. 1: Один из способов ввода функции  $\varphi$

Тогда

$$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

Возвращаемся к общему случаю: пусть  $f \in L_1(\mathbb{R})$ .

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N, N]} : \forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[-N, N] \|f|_{[-N, N]} - g\|_{L_1[-N, N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить  $g$  на всю прямую линейным образом (аналогично введению функции  $\varphi$  из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leq \int_{-N}^N |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

**Лемма 1.2.** *Каждая суммируемая на  $\mathbb{R}$  функция  $f(x)$  непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

*Доказательство.* Докажем, что для  $f \in L_1[a, b]$ :

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g \in C[a, b] : \int_a^b |f(x) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$g$  – непрерывная на  $[a, b] \Rightarrow$  по теореме Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда  $\forall h \ 0 \leq h \leq \delta$ :

$$\begin{aligned} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) &\leq \int_a^{b-h} |f(x+h) - g(x+h)| d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \\ &+ \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

Так как  $f$  суммируема на  $\mathbb{R}$ , то  $\exists N \in \mathbb{N}$ :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем  $[a, b] := [-N-1, N+1]$  и введём  $g := f \mathbb{I}_{[-N, N]} \in L_1[a, b]$ . Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists \delta \in (0, 1) \forall h, 0 \leq h \leq \delta : \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём  $\forall t, |t| < \delta$ :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = \int_{\{x, x+t\} \subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) + \int_{\{x, x+t\} \not\subseteq [a, b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

□

**Теорема 1.1.** *Римана об осцилляции.*

*Если  $f \in L_1(I)$ , где  $I$  – конечный или бесконечный промежуток, то*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) &\stackrel{x=t+\frac{\pi}{\lambda}}{=} \int_{I-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \Delta I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \setminus I} f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| &\leq \int_{(I-\frac{\pi}{\lambda}) \Delta I} \left| f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) \right| d\mu(t) = \\ &= \int_{I \Delta (I+\frac{\pi}{\lambda})} |f(x)| d\mu(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Последнее заключение следует из того, что  $\mu(I \Delta (I + \frac{\pi}{\lambda})) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$

Также очевидно, что

$$\left| \int_I \left(f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t)\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leq \int_I \left| f\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right| d\mu(t) \xrightarrow{\text{по пред. Лемме}} 0$$

□

## 2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

О мастерстве полководца  
судят по старательности его  
подчиненных.

---

Лукашов А.Л.

**Определение 2.1.**  $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi, \pi]$  и  $2\pi$  периодическая.

**Определение 2.2.** Ядром Дирихле  $D_n(u)$  называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D_n(u) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (e^{iku} + e^{-iku}) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{1}{2} e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} = \\ &= \frac{1}{2} e^{-inu} \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}} - e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}} \cdot \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})} \end{aligned}$$

□

**Лемма 2.1.** *О представлении частичной суммы.*

Если  $f \in L_{2\pi}$ , то  $n$ -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) d\mu(u)$$

*Доказательство.* Подставим в  $S_n$  формулы для  $a_k, b_k$ :

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt)) \right) d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) \end{aligned}$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой  $t = x + u$ , а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины  $T$ ,  $T$ -периодичной функции одинаков.  $\square$

**Лемма 2.2.** Пусть  $f \in L_{2\pi}$ ,  $g$  – измеримая,  $2\pi$ -периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции  $\chi(t) = f(x+t)g(t)$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x$ .

*Доказательство.*  $g$  – ограниченная  $\Rightarrow \exists M : \forall u |g(u)| \leq M$ .

$f$  – измеримая  $\Rightarrow$  по (1.1) мы можем её представить, как  $f = f_1 + f_2$ , причём  $f_1 \in C[-\pi, \pi]$ , а  $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)| d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$ .

$f_1$  – непрерывная на компакте  $[-\pi, \pi] \Rightarrow \exists B \forall u : |f_1(u)| \leq B$ .

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции  $F$ :

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+h) - F(t)| d\mu(t)$$

Рассмотрим  $a_n$  для функции  $\chi$ :

$$\begin{aligned} a_n(\chi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \cos(nt) d\mu(t) \stackrel{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \cos(nu) d\mu(u) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \chi\left(t + \frac{\pi}{n}\right) - \chi(t) \right] \cos(nt) d\mu(t) \Rightarrow \\ |a_n(\chi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right) \end{aligned}$$

Аналогично получим неравенство для  $b_n(\chi)$ :

$$|b_n(\chi)| \leq \frac{1}{2\pi} \omega_1\left(\frac{\pi}{n}, \chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_1(\frac{\pi}{n}, \chi) = 0$  равномерно по  $x$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\chi(t+h) - \chi(t)| d\mu(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)g(t+h) - f(x+t)g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| \cdot |g(t+h)| d\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)| d\mu(t) \leq \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(u+h) - f(u)| d\mu(u) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)| d\mu(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq M\omega_1(\frac{\pi}{n}, f) + B\omega_1(\frac{\pi}{n}, g) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.1.** *Принцип локализации.*

Если  $f \in L_{2\pi}$  и тождественно равна нулю в некотором интервале  $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$ , то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке  $[a', b'] \subset (a, b)$ .

*Доказательство.* Так как  $[a', b']$  содержится в  $(a, b)$ , то

$$\exists \eta > 0 \forall x \in [a', b'] \forall t, 0 \leq |t| < \eta : x+t \in (a, b)$$

Построим функцию  $\lambda(t)$ :

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\eta, \eta) \\ 1, & t \in [-\pi, \pi] \setminus (-\eta, \eta) \end{cases}$$

Кроме того,  $\lambda - 2\pi$ -периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) D_n(t) d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда  $t \notin (-\eta, \eta)$ , то  $\lambda(t) = 1$ , ничего не меняем. Если же  $|t| < \eta$ , то  $x+t \in (a, b)$ , где  $f = 0$ , поэтому получили, что подынтегральные функции совпадают везде на  $[-\pi, \pi]$ .

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \lambda(t) \cos(nt) d\mu(t)$$

Взяв в качестве  $g$  из предыдущей леммы для первого слагаемого  $\lambda(t) \operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$  и  $\lambda(t)$  для второго, то получим требуемое по этой же лемме.  $\square$



### 3 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Одержать сто побед в ста битвах — это не вершина воинского искусства. Повергнуть врага без сражения — вот вершина.

---

Лукашов А.Л.

**Теорема 3.1.** *Признак Дини.*

Если  $f \in L_{2\pi}$  и  $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к  $S(x_0)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим разность  $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ , пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0)) D_n(u) d\mu(u)$$

В данном представлении мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно  $u$
- Интеграл по  $[-\pi, \pi]$  от ядра Дирихле равен  $\pi$
- Если заменить в представлении частичной суммы  $t$  на  $-t$ , то ничего не изменится

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв  $\sin((n + \frac{1}{2})t) = \sin(nt) \cos(\frac{t}{2}) + \cos(nt) \sin(\frac{t}{2})$  в формуле ядра Дирихле:

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - S(x_0) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(nt)}{2} d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\sin(nt) \cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} d\mu(t) + \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \sin(nt) \left( \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) d\mu(t) \end{aligned}$$

По условию,  $\varphi_{x_0}$  суммируемая  $\Rightarrow$  по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))$  также суммируемая  $\Rightarrow$  второе слагаемое тоже стремится к нулю.

В третьем слагаемом  $(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta, \pi]$  и по той же причине стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} = \frac{1 - \frac{t^2}{8} + o(t^3)}{2(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + o(t^4))} - \frac{1}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{8} - t + \frac{t^3}{24} + o(t^4)}{t^2 + o(t^3)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Значит этот множитель имеет устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \left( \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) \in L_1[0, \delta]$$

и опять работает теорема об осцилляции.  $\square$

**Утверждение 3.1.** Анализ доказательства признака Дини показывает, что необходимым и достаточным условием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции  $f \in L_{2\pi}$  к  $S(x_0)$  в точке  $x_0$  является равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

**Определение 3.1.** Будем говорить, что функция  $f$  удовлетворяет условию Гёльдера порядка  $\alpha \in (0, 1]$  в точке  $x_0$ , если  $\exists$  конечные односторонние пределы  $f(x_0 \pm 0)$  и константы  $C, \delta > 0$  такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta, |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq Ct^\alpha, |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| \leq Ct^\alpha$$

**Определение 3.2.** Обобщённой односторонней производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}$$

**Теорема 3.2.** Признак Липшица.

Если  $f \in L_{2\pi}$  удовлетворяет условию Гёльдера порядка  $\alpha$  в точке  $x_0$ , то тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в точке  $x_0$  к  $\frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$

*Доказательство.* По условию теоремы

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Значит функций  $\varphi_{x_0}$  из признака Дини примет вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) + (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0))}{t}$$

То, что  $\varphi$  измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left| \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) d\mu(t) \right| \leq \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)|}{t} d\mu(t) \leq 2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} d\mu(t) = 2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

## 4 Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

Непобедимость заключена в  
себе самом, возможность  
победы заключена в  
противнике.

---

Лукашов А.Л.

**Теорема 4.1.** *О почленном дифференцировании рядов Фурье.*

Если  $F$  —  $2\pi$ -периодическая абсолютно непрерывная на периоде функция, то тригонометрический ряд Фурье её производной совпадает с продифференцированным почленно тригонометрическим рядом Фурье  $F$ .

*Доказательство.*  $f(x) := F'(x) \in L_1$ . Значит  $f(x)$  раскладывается в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \cos(nx) d\mu(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} F(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) d\mu(x) = nB_n \end{aligned}$$

Аналогично докажем, что  $b_n = -nA_n$ , а также заметим, что  $a_0 = 0$ .

Нетрудно заметить, что мы доказали утверждение теоремы.  $\square$

**Следствие.** *Если  $f, \dots, f^{(k-1)}$  —  $2\pi$ -периодические, и  $f^{(k-1)}$  — абсолютно непрерывная на периоде, то коэффициенты ряда Фурье функции  $f(x)$  удовлетворяют:*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right); \quad n \rightarrow +\infty$$

*Доказательство.* Пусть  $k = 1$ :  $f$  — абсолютно непрерывная, значит  $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}$ ,  $b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$ . По теореме об осцилляции:  $a_n(f'), b_n(f') = o(1) \Rightarrow a_n(f), b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Далее применяем по индукции много-много раз. Мы имеем право так делать, потому что если производная абсолютно непрерывная, то она ограничена. А из ограниченной производной следует абсолютная непрерывность самой функции.  $\square$

**Теорема 4.2.** *Оценки коэффициентов Фурье функции ограниченной вариации.*

Если  $f$  — функция ограниченной вариации на периоде  $2\pi$ , то её коэффициенты Фурье удовлетворяют:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad n \rightarrow +\infty$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $a_n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right] \cos(nx) dx = \dots = \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right] \cos(nx) dx, \quad \forall k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Сложив все эти  $n$  равенств, получим:

$$|na_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \left| f\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right| dx \leq V(f)$$

□

**Теорема 4.3.** *Лебега об интегрировании рядов Фурье.*

Если  $f \in L_{2\pi}^1$ ,  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  – её тригонометрический ряд Фурье,  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) d\mu(t)$  – неопределённый интеграл Лебега для  $f$ , то  $F(x) = \frac{a_0}{2}x + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos(nx) + a_n \sin(nx)}{n}$ , где ряд равномерно сходится на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.*  $F(x)$  – абсолютно непрерывная,  $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\mu(t) = \pi a_0$ .  
 $\Rightarrow F(x) - \frac{a_0}{2}x$  – тоже абсолютно непрерывная на периоде и  $2\pi$ -периодическая.

Значит по (4.1) ряд Фурье  $(F(x) - \frac{a_0}{2}x)'$  получается почленным дифференцированием ряда Фурье для  $F(x) - \frac{a_0}{2}x$ . Но с другой стороны  $(F(x) - \frac{a_0}{2}x)' = f(x) - \frac{a_0}{2}$ .

Равномерная сходимостъ проинтегрированного ряда очевидно следует из признака Жордана. □

## 5 Теорема Жордана.

Когда обороняются, значит,  
 есть в чем-то недостаток;  
 когда нападают, значит, есть  
 все в избытке.

---

Лукашов А.Л.

Возможно тут должна быть какая-то другая теорема Жордана, но пока здесь признак Жордана – на консультации уточню.

**Теорема 5.1.** *Признак Жордана.*

Если  $f \in L_{2\pi}$  и является функцией ограниченной вариации на  $[a, b]$ , то тригонометрический ряд Фурье  $f$  сходится к  $f(x_0)$  в каждой точке  $x_0 \in [a, b]$  непрерывности  $f(x)$  и к  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$  в каждой точке разрыва  $x_0 \in [a, b]$ .

Если, кроме того,  $f \in C[a, b]$ , то тригонометрический ряд Фурье функции  $f$  сходится к ней равномерно на любом отрезке  $[a', b'] \subset (a, b)$ .

*Доказательство.* Так как  $f$  ограниченной вариации, то она представима в виде  $f = f_1 - f_2$ , где  $f_1, f_2$  – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждение для неубывающих функций.

По (3.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\delta} \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Будем доказывать

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

а для  $-t$  аналогично.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : 0 \leq f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как  $f$  монотонная и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) dt = (f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0)) \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\sin(nt)}{t} dt$$

Но мы знаем, что  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  сходится, поэтому если обозначим за  $G(v) := \int_0^v \frac{\sin t}{t} dt$ , то  $G(v)$  будет ограничена, т.е.  $\exists C : |G(v)| \leq C$ .

Но теперь рассмотрим  $\forall A$ :

$$\left| \int_0^A \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| \stackrel{nt=u}{=} \left| \int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u} du \right| \leq C$$

Используя эту оценку получим, что

$$\left| \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \sin(nt) dt \right| \leq 2\varepsilon C$$

Таким образом, разбив исходный интеграл от 0 до  $\delta$  на сумму интегралов от 0 до  $\delta_1$  и от  $\delta_1$  до  $\delta$ . Получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости:

Вспомним, как мы расписывали разность  $S_n(f, x_0) - S(x_0)$  на четыре слагаемых, только теперь мы знаем, что  $S(x_0) = f(x_0)$ . Применим к каждому из трёх последних слагаемых лемму (2.2) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела из прошлого пункта доказательства.

Это сделать несложно: заметим, что если  $f$  непрерывна на  $[a', b']$ , то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы сможем найти  $\delta_1$  из текущего доказательства независимо от  $x_0$ . Также независимо от  $x_0$  мы ограничиваем интеграл  $\frac{\sin(nx)}{x}$ , поэтому второе утверждение этой теоремы доказано.  $\square$

## 6 Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции

Идти вперед туда, где не  
ждут; атаковать там, где не  
подготовились

---

Лукашов А.Л.

**Теорема 6.1.** *Коровкина.*

Если последовательность линейных положительных операторов  $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  такова, что  $L_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_i$  на  $[a, b]$ ,  $e_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2$ , то

$$\forall f \in C[a, b] : L_n(f) \rightrightarrows f$$

на  $[a, b]$ .

*Доказательство.*  $f \in C[a, b] \Rightarrow f$  ограничена:

$$\exists M : -M \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$$

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, x \in [a, b], |t - x| < \delta : -\varepsilon < f(t) - f(x) < \varepsilon$$

Заметим, что  $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow L_n(f_1) \leq L_n(f_2) \forall x \in [a, b]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, x \in [a, b] : -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2} \psi(t) < f(t) - f(x) < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \psi(t)$$

где  $\psi_x(t) = (t - x)^2$ .

Откуда это следует? Если  $|t - x| < \delta$ , то мы только ослабляем условие равномерной непрерывности, значит неравенство сохраняется. Если же  $|t - x| \geq \delta \Rightarrow \frac{\psi(t)}{\delta^2} = \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \Rightarrow$  неравенство сохраняется благодаря ограниченности  $f$ .

Зафиксировав произвольный  $x$ , применяем оператор  $L_n$  относительно переменной  $t$ . Все неравенства сохраняются:

$$-\varepsilon L_n(e_0, x) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x) < L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x) < \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x(t), x)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} L_n(\psi_x, x) &= L_n((t - x)^2, x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2, x) = L_n(e_2, x) - 2x L_n(e_1, x) + x^2 L_n(e_0, x) \Rightarrow \\ e_2(x) - 2xe_1(x) + x^2 e_0(x) &= x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Значит

$$\exists N_1 \forall n > N_1 \forall x \in [a, b] : |L_n(\psi_x, x)| \leq \frac{\varepsilon \delta^2}{4M}$$

А из того, что  $L_n(e_0) \Rightarrow e_0$ :

$$\exists N_2 \forall n > N_2 \forall x \in [a, b] : |L_n(e_0, x)| < \frac{3}{2}$$

Также не забываем, что:

$$|L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leq \varepsilon L_n(e_0, x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_x, x)$$

Объединяя эти три условия, получим, что

$$\forall n > \max(N_1, N_2) : |L_n(f, x) - f(x) L_n(e_0, x)| \leq 2\varepsilon$$

Снова используем тот факт, что  $L_n(e_0) \Rightarrow e_0$ :

$$\exists N_3 \forall n > N_3 \forall x \in [a, b] : |L_n(e_0, x) - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Значит

$$|f(x) L_n(e_0, x) - f(x)| \leq |f(x)| \cdot |L_n(e_0, x) - 1| \leq \varepsilon$$

Объединяя ВСЕ неравенства, получим:

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3) \forall x \in [a, b] : |L_n(f, x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$$

□

**Теорема 6.2.** *Коровкина'*

Если последовательность линейных положительных операторов  $L_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$  такова, что  $L_n(e_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_i$  на  $\mathbb{R}$ ,  $e_0(x) = 1, e_1(x) = \cos(x), e_2(x) = \sin(x)$ , то

$$\forall f \in C_{2\pi} : L_n(f) \Rightarrow f$$

на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Аналогично немодифицированной теореме, только вместо функции  $\psi_x$  введём

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(t) \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(t) \sin(x) = \\ &= \frac{1}{2} e_0(t) - \frac{1}{2} \cos(x) e_1(t) - \frac{1}{2} \sin(x) e_2(t) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_n(\varphi_x, x) &= \frac{1}{2} L_n(e_0, x) - \frac{1}{2} \cos(x) L_n(e_1, x) - \frac{1}{2} \sin(x) L_n(e_2, x) \Rightarrow \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(x) - \frac{1}{2} \sin^2(x) = 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 6.3.** *Фейера.*

Для любой непрерывной  $2\pi$ -периодической функции последовательность средних арифметических частичных сумм её тригонометрического ряда Фурье равномерно на  $\mathbb{R}$  сходится к ней.

*Доказательство.* Распишем среднее арифметическое частичных сумм:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &:= \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \dots + S_n(f, x)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=0}^n D_k(t) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n \sin((k + \frac{1}{2})t) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n \sin((k + \frac{1}{2})t) \sin(\frac{t}{2}) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4 \sin^2(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^n (\cos(kt) - \cos((k+1)t)) dt = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{4 \sin^2(\frac{t}{2})} (1 - \cos((n+1)t)) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot \frac{\sin^2(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} dt \end{aligned}$$

Получается,  $\sigma_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$  образует последовательность линейных положительных операторов. Это значит, что нам нужно проверить сходимость лишь на трёх функциях:  $e_0 := 1, e_1 := \sin(x), e_2 := \cos(x)$ .

$$\sigma_n(e_0) = e_0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \sigma_n(e_1) = e_1 \cdot \frac{n}{n+1}, \sigma_n(e_2) = e_2 \cdot \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда, по теореме Коровкина, получаем, что  $\forall f \in C_{2\pi} : \sigma_n(f) \Rightarrow f$

□

## 7 Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами

Война – это путь обмана,  
постоянной организации  
ложных выпадов,  
распространения  
дезинформации,  
использования уловок и  
хитростей.

---

Лукашов А.Л.

**Теорема 7.1.** *Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.*

*Любая непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  может быть с любой степенью точности равномерно приближена алгебраическими многочленами, то есть*

$$\forall f \in C[a, b] \forall \varepsilon > 0 \exists P_n \forall x \in [a, b] : |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$ .

Введём многочлены Берштейна:

$$B_n(f, x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Мы можем рассматривать их, как операторы  $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ . Очевидно, что они линейные и положительные, поэтому достаточно проверить сходимость трёх функций:  $1, x, x^2$ .

$$B_n(e_0, x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1 = e_0(x)$$

Рассмотрим  $g(t) := (tx + (1-x))^n = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k x^k (1-x)^{n-k}$ . Тогда

$$g'(t) = nx(tx + (1-x))^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k t^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

Используя  $g'(1)$  получим равенство:

$$nx = \sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Rightarrow B_n(e_1, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x = e_1(x)$$

Взяв вторую производную от  $g$ , получим:

$$n(n-1)x^2(tx + (1-x))^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k t^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$$



Используя  $g''(1)$  получим равенство:

$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^n (k^2 - k)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - nx \Rightarrow$$

$$B_n(e_2, x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_2(x)$$

Получили, что для оператора  $B_n$  справедлива теорема Коровкина и утверждение доказано.

Для завершения доказательства перейдём к произвольному отрезку  $[a, b]$ : для  $f \in C[a, b]$  введём  $F(x) = f(x(b-a) + a) \in C[0, 1]$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in [0, 1] : |B_n(F, x) - F(x)| < \varepsilon$$

Осталось заметить, что если в многочлен Бернштейна подставить какую-то линейную функцию, то получится какой-то многочлен:

$$\Rightarrow |B(F, \frac{t-a}{b-a}) - f(t)| < \varepsilon$$

□

**Следствие.** Из данной теоремы и теоремы Коровкина' следует теорема Вейштрасса о приближении непрерывной  $2\pi$ -периодической функции тригонометрическими многочленами:

$$\forall f \in C_{2\pi} \forall \varepsilon > 0 \exists T_n := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) : |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$$

## 8 Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.

Избегание столкновения с  
большими силами  
свидетельствует не о трусости,  
а о мудрости, ибо принесение  
себя в жертву никогда и нигде  
не является преимуществом.

---

Лукашов А.Л.

**Определение 8.1.** Коэффициентами Фурье функции  $f$  в произвольном евклидовом (гильбертовом) пространстве называются скаляры вида

$$f_k = \frac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$$

где  $\{e_k\}$  – ортогональная система ненулевых элементов.

**Теорема 8.1.** *Минимальное свойство сумм Фурье.*

Если  $\{e_k\}$  – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства  $E$ , то

$$\forall f \in E \forall c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^N c_k e_k\| \geq \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|$$

, где  $\{f_k\}$  – коэффициенты Фурье для  $f$ .

Причём равенство достигается  $\Leftrightarrow \forall k = \overline{1, N} : c_k = f_k$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{k=1}^N c_k e_k\|^2 &= \langle f - \sum_{k=1}^N c_k e_k, f - \sum_{k=1}^N c_k e_k \rangle = \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=1}^N c_k \langle f, e_k \rangle + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N c_k c_l \langle e_k, e_l \rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=1}^N f_k c_k \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^N c_k^2 \|e_k\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 + \sum_{k=1}^N (f_k^2 - 2f_k c_k + c_k^2) \|e_k\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2 \end{aligned}$$

□

**Следствие.** *Тождество Бесселя.*

Если  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства  $E$ , то  $\forall f \in E$ :

$$\|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2$$

*Доказательство.* Очевидно следует из цепочки неравенств из доказательства предыдущей теоремы. □

**Следствие.** *Неравенство Бесселя.*

Если  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства  $E$ , то  $\forall f \in E$ :

$$\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2$$

*Доказательство.* Из тождества Бесселя следует, что

$$\forall N \in \mathbb{N} : \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 \geq 0$$

Устремляя  $N \rightarrow +\infty$  получим требуемое. □

## 9 Полнота ортогональной системы функций, ортонормированный базис и равенство Парсеваля

**Теорема 9.1.** *Если  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства  $E$ , то  $\forall f \in E$  следующие утверждения эквивалентны:*

1.  $\forall \varepsilon > 0 \exists T = \sum_{k=1}^N c_k e_k : \|f - T\| < \varepsilon$
2.  $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$
3.  $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$  – равенство Парсеваля для  $f$ .

*Доказательство.*  $1 \Leftrightarrow 2$  по предыдущей теме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\| < \varepsilon$$

Тогда используя неравенство Бесселя:

$$\forall n > N : \|f - \sum_{k=1}^n f_k e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^N f_k e_k\|^2$$

Ну а  $3 \Leftrightarrow 1$  так как при равенстве Парсеваля разность  $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \|e_k\|^2$  будет бесконечно малая, а значит применяя равенство Бесселя получим требуемое.  $\square$

**Следствие.** Если  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства  $E$ , то следующие утверждения эквивалентны:

1.  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  – полная система в  $E$ .
2.  $\forall f \in E : f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$
3.  $\forall f \in E : \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2$

## 10 Полнота тригонометрической системы в пространстве функций суммируемых с квадратом...

**Определение 10.1.**  $f \in L_{2\pi}^2 \Leftrightarrow f$  –  $2\pi$ -периодическая и  $f \in L_2[-\pi, \pi]$ . Это пространство гильбертово.

**Утверждение 10.1.** Мы уже знаем, что ортогональной системой в этом пространстве будет система

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots \right\}$$

**Утверждение 10.2.** Благодаря теореме Фейера мы можем утверждать, что  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  полна в  $C_{2\pi}$ .

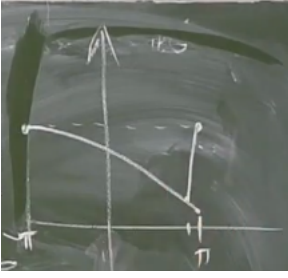
**Утверждение 10.3.** Мы уже знаем, что  $C[-\pi, \pi]$  всюду плотно в  $L_p[-\pi, \pi], p \geq 1$ .

Заметим, что  $C_{2\pi}$  всюду плотно в  $C[-\pi, \pi]$  в смысле нормы  $L_p[-\pi, \pi]$ . Делается это с помощью такого трюка:

Используя транзитивность свойства полноты, получим, что  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  – полна в  $L_p[-\pi, \pi]$ , в частности в  $L_{2\pi}^2$ .

**Утверждение 10.4.** Посчитаем коэффициенты Фурье для нашей ортогональной системы в явном виде:

Если  $e_k = \cos(nx)$ , то  $f_k = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) d\mu(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx} = a_n$ . Если  $e_k = \sin(nx)$ , то  $f_k = b_n$ . Ну и  $e_1 = a_0$ .



**Утверждение 10.5.** Равенство Парсеваля для тригонометрической системы в  $L_{2\pi}^2$  будет иметь вид:

$$\|f\|^2 = a_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \pi$$

**Утверждение 10.6.** Теорема Рисса-Фишера даёт следующее следствие: если  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  сходится, то коэффициенты  $a_0, \{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$  – коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции из  $L_{2\pi}^2$ .

## 11 Теорема Рисса-Фишера

**Теорема 11.1.** Рисса-Фишера.

Если  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства  $H$  и  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  – последовательность действительных чисел, такая что  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$  сходится, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$  сходится к некоторому  $f \in H$ .

*Доказательство.*  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$  сходится  $\stackrel{\text{к. Коши}}{\Rightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} : \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Тогда оценим норму некоего элемента из  $H$ :

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\rangle = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon$$

Это означает, что последовательность частичных сумм нашего ряда является фундаментальной, а значит благодаря гильбертовости пространства  $H$  мы можем сказать, что ряд сходится.

Что и требовалось доказать. □

**Следствие.** Если  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  – ортогональная система ненулевых элементов гильбертова пространства  $H$ , то  $\forall f \in H$  р. Фурье сходится к  $f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0$ , то

$$\langle f - f_0, e_j \rangle = 0, \forall j \in \mathbb{N}$$

*Доказательство.* Из неравенства Бесселя следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \|e_k\|^2 < +\infty \stackrel{\text{т. Р.Ф.}}{\Rightarrow} \exists f_0 \in H : \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = f_0 \Rightarrow \langle f - f_0, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - f_j \|e_j\|^2 = 0$$

□

## 12 Полнота и замкнутость ортогональной системы, их СВЯЗЬ

**Определение 12.1.** Система функций  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , называется полной в  $L_p(E)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L_p(E) \exists \{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|_p < \varepsilon$$

**Определение 12.2.** Система  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  называется замкнутой в евклидовом пространстве  $E$  (по Банаху, в банаховом пространстве тотальной, в  $C$  и  $L_p$  – полной), если  $\forall k \in \mathbb{N} : \langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ .

**Теорема 12.1.** О связи.

$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  – замкнутая система в гильбертовом пространстве  $\Leftrightarrow$  она полная.

*Доказательство.*  $\Rightarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  – замкнутая  $\xRightarrow{\text{сл-е Т.Р-Ф}} \forall f \in H : f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$  Тогда, применяя следствие теоремы (9.1) получим полноты системы.

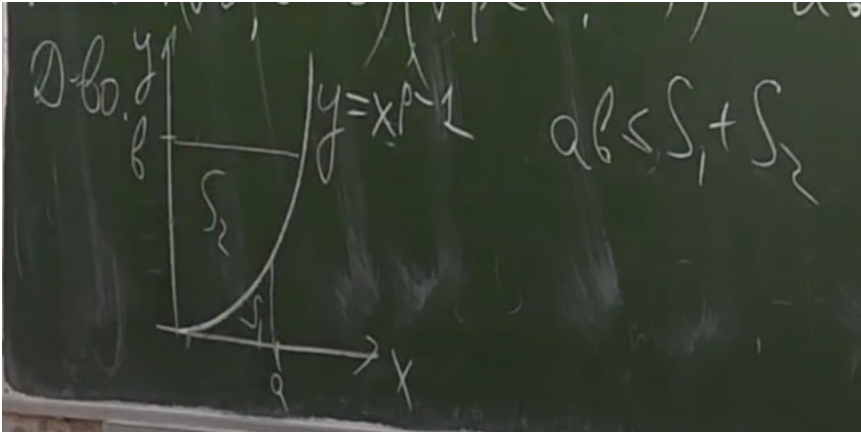
$\Leftarrow \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  – полная система,  $\forall k \in \mathbb{N} \forall f \in H : \langle f, e_k \rangle = 0 \Rightarrow f_k = 0$ . Теперь снова применим следствие теоремы (9.1) и свойства полноты системы, получим, что  $f = \sum 0 e_k = 0$ .  $\square$

## 13 Полнота пространств $C[a, b]$ и $L_p[a, b], p > 1$

**Определение 13.1.** Для  $1 < p < +\infty$  обозначим через  $q$  такое число, что  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Лемма 13.1.**  $\forall a, b > 0 \forall p \in (1, +\infty) : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

*Доказательство.* Геометрическое:



Причём  $S_1$  и  $S_2$  можно легко посчитать:

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \quad S_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

$\square$

**Теорема 13.1.** *Неравенство Гёльдера.*

Если  $f \in L_p(X)$ ,  $g \in L_q(X)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 < p < +\infty$ , то

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \left( \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Доказательство.* Если правая часть равна нулю, то всё доказано.

Иначе введём обозначения:

$$A^p := \int_X |f(x)|^p d\mu(x), \quad B^q := \int_X |g(x)|^q d\mu(x)$$

Тогда, используя предыдущую лемму с параметрами:

$$a = \frac{|f(x)|}{A} \quad b = \frac{|g(x)|}{B}$$

Получим, что

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{AB} \leq \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^q}{qB^q}$$

Теперь проинтегрируем обе части по  $x$  и получим требуемое:

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)|d\mu(x)}{AB} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

**Теорема 13.2.** *Для  $p \in [1, +\infty)$   $L_p([a, b])$  – банахово пространство.*

*Доказательство.* Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  – фундаментальная последовательность в  $L_p[a, b]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Отсюда получаем, что  $\exists \{n_k\}_{k=1}^\infty \uparrow \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$ .

Тогда в силу неравенства Гёльдера:

$$\|f_m - f_{n_k}\|_1 \leq \|f_m - f_{n_k}\|_p \cdot \|1\|_q < \frac{C}{2^k}$$

Рассмотрим ряд

$$\Phi(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^\infty |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$$

И для него верно равенство (по теореме Леви):

$$\|\Phi\|_1 = \|f_{n_1}\|_1 + \sum_{k=2}^\infty \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_1 < +\infty$$

Значит  $\Phi(x)$  конечная почти всюду  $\Rightarrow$  ряд  $|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=2}^\infty |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$  – сходится почти всюду на  $[a, b]$ .

Тогда ряд  $f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^\infty (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x))$  сходится абсолютно почти всюду на  $[a, b]$ , но его частичные суммы – это  $f_{n_k} \Rightarrow$  мы получили, что эта последовательность сходится почти всюду к чему-то, что мы обозначим, как  $f(x)$ .

Докажем, что  $f \in L_p[a, b]$ : если есть сходимость почти всюду, то по теореме Фату мы можем оценить:

$$\int_{[a, b]} |f(x)|^p d\mu(x) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} |f_{n_k}(x)|^p d\mu(x) = \|f_{n_k}\|_p^p < +\infty$$

Снова используем свойство последовательности  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k, l > N : \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_p < \varepsilon$$

Но мы можем перейти к пределу  $l \rightarrow +\infty$  благодаря теореме Лебега:  $\|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon$ . Тогда при достаточно больших  $m$ :

$$\|f_m - f\|_p \leq \|f_m - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < 2\varepsilon$$

□

## 14 Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость интегралов, зависящих от параметра

**Определение 14.1.** Пусть функция  $f(x, \alpha)$  зависит от  $x, \alpha$ . Тогда мы можем рассматривать функцию  $f_{1, \alpha}(x)$  – изначальная функция, которую мы теперь считаем зависящей только от первого параметра, а второй параметр считаем фиксированным. Аналогично вводится  $f_{2, x}(\alpha)$ .

**Теорема 14.1.** *Непрерывность интеграла, зависящего от параметра*

Пусть  $\forall \alpha \in A \subset \mathbb{R}^n$  функция  $f_{1, \alpha}(x) = f(x, \alpha)$  суммируема на  $E \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f_{2, x}(\alpha) = f(x, \alpha)$  при почти всех  $x \in E$  непрерывна в  $\alpha_0 \in E$ , и при почти всех  $x \in E, \forall \alpha \in A : |f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  суммируема на  $E$ . Тогда

$$F(\alpha) = \int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$$

непрерывна в  $\alpha_0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset A, \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha_0$ .

Тогда, по условию,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x, \alpha_n) = f(x, \alpha_0)$  при почти всех  $x \in E$ . Кроме того, для почти всех  $x$  из  $E$ , выполняется неравенство  $\forall n \in \mathbb{N} : |f(x, \alpha_n)| \leq \varphi(x)$ . Тогда, используя теорему Лебега, мы сможем перейти к пределу интегралов:

$$F(\alpha_n) = \int_E f_{1, \alpha_n}(x) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E f(x, \alpha_0) d\mu(x) = F(\alpha_0)$$

□

**Теорема 14.2.** *Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра*

Пусть  $f_{1, \alpha}(x) = f(x, \alpha)$  при всех  $\alpha \in U(\alpha_0) \subset \mathbb{R}^n$  суммируема на  $E \subset \mathbb{R}^m$  вместе с  $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ , и при почти всех  $x \in E, \forall \alpha \in U(\alpha_0) : \left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| \leq \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  суммируема на  $E$ . Тогда

$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha_0)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset \dot{U}(\alpha_0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha_0$ .

Тогда частная производная в точке  $\alpha_0$  – это

$$\left| \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} \right| = \left| \frac{\partial f(x, \xi_n(x))}{\partial \alpha} \right| \leq \varphi(x)$$

Теперь, используя теорему Лебега, получим равенство пределов интегралов:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f(x, \alpha_0)}{\partial \alpha} d\mu(x)$$

□

## 15 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле

**Определение 15.1.** Пусть  $f(x, y) \in \mathcal{R}[a, \tilde{b}] \forall \tilde{b} < b \forall y \in A \subset \mathbb{R}$ . Тогда несобственным интегралом Римана, зависящим от параметра  $y$  называется

$$\int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\tilde{b} \rightarrow b-0} \int_a^{\tilde{b}} f(x, y) dx \quad (1)$$

**Определение 15.2.** Мы говорим, что несобственный интеграл (1) сходится поточечно, если:

$$\forall y \in A \forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall B' \in (B, b) : \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

**Определение 15.3.** Несобственный интеграл (1) сходится равномерно на  $A$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall B' \in (B, b) \forall y \in A : \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

**Теорема 15.1.** Критерий Коши равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра

(1) сходится равномерно на  $A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall a < B' < B'' < b \forall y \in A : \left| \int_{B'}^{B''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  При всех требуемых кванторах можем сделать оценку:

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx - \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| < 2\varepsilon$$

$\Leftarrow$  Фиксируем  $\forall y \in A$ , тогда используем критерий Коши сходимости несобственных интегралов (без параметра), то есть

$$\int_a^b f(x, y) dx < +\infty \xrightarrow{B'' \rightarrow b-0} \left| \int_{B'}^b f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon$$

□



**Следствие. Признак сравнения.**

Если  $|f(x, y)| < g(x, y)$ ,  $f, g$  удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана,  $\int_a^b g(x, y)dx$  равномерно сходится на  $A$ , то  $\int_a^b f(x, y)dx$  равномерно сходится на  $A$ .

**Следствие. Признак Вейерштрасса.**

Если  $|f(x, y)| \leq g(x)$ ,  $f, g$  удовлетворяют условиям определения несобственных интегралов Римана,  $\int_a^b g(x, y)dx$  сходится на  $A$ , то  $\int_a^b f(x, y)dx$  равномерно сходится на  $A$ .

**Теорема 15.2. Признак Дирихле равномерной сходимости НИРЗП.**

1.  $f \in \mathcal{R}[a, \tilde{b}] \forall \tilde{b} \in (a, b) \forall y \in A$  и  $\forall y \in A$ :

$$\left| \int_a^x f(t, y)dt \right| \leq C$$

2.  $g(x, y) \downarrow 0$  при  $x \rightarrow b - 0$  равномерно по  $y \in A$ .

Тогда  $\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx$  равномерно сходится на  $A$ .

*Доказательство.*

$$\int_{B'}^{B''} f(x, y)g(x, y)dx = g(B', y) \int_{B'}^{\xi(y)} f(x, y)dx + g(B'', y) \int_{\xi(y)}^{B''} f(x, y)dx$$

$g \Rightarrow 0$ , значит

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, b) \forall x \in (B, b) \forall y \in A : |g(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4C}$$

А все интегралы в полученной формуле можно оценить сверху, как  $2C$ , поэтому получим, что

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x, y)g(x, y)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4C} \cdot 2C + \frac{\varepsilon}{4C} \cdot 2C = \varepsilon$$

□

## 16 Непрерывность и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра

**Теорема 16.1. Непрерывность НИРЗП**

Если  $f(x, y)$  непрерывна на  $[a, b) \times [c, d]$  ( $b \leq +\infty$ ) и  $\int_a^b f(x, y)dx$  равномерно сходится на  $[c, d]$ , то он является непрерывной функцией на  $[c, d]$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную  $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ , а также введём

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x, y)dx$$

Равномерная сходимость  $\int_a^b f(x, y)dx$  влечёт равномерную сходимость  $I_n(y)$ . Используя теорему о пределе равномерно сходящейся функциональной последовательности получим, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(y)$  – непрерывная. □

**Теорема 16.2.** Собственная интегрируемость НИРЗП.

Если  $f(x, y)$  непрерывна на  $[a, b) \times [c, d]$  ( $b \leq +\infty$ ) и  $\int_a^b f(x, y)dx$  равномерно сходится на  $[c, d]$ , то

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную последовательность  $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset [a, b)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ . Положим

$$I_n(y) := \int_a^{b_n} f(x, y)dx$$

Тогда равномерная сходимость  $\int_a^b f(x, y)dx$  влечёт равномерную сходимость  $I_n(y)$ .

Используя предыдущую теорему и теорему об интегрируемости функциональных последовательностей и тот факт, что  $f(x, y)$  непрерывна на прямоугольнике  $[a, b_n] \times [c, d]$ , поэтому мы можем переставить пределы интегрирования и получим:

$$\int_a^{b_n} \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d I_n(y)dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

□

## 17 Дифференцирование несобственных интегралов по параметру

**Теорема 17.1.** Дифференцируемость НИРЗП.

Если  $f(x, y)$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  непрерывны на  $[a, b) \times [c, d]$ ,  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$  сходится равномерно на  $[c, d]$ ,  $\int_a^b f(x, y)dx$  сходится для некоторого  $y_0 \in [c, d]$ , то  $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$  сходится и является дифференцируемой функцией на  $[c, d]$ , причём

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

*Доказательство.*  $\forall t \in [c, d]$  и фиксированного  $x \in [a, b]$  справедлива формула

$$f(x, t) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

Тогда, если мы проинтегрируем обе части по  $x$ , то получим что

1. Первое слагаемое сходится по условию
2. Второе слагаемое удовлетворяет условию теоремы о собственной интегрируемости несобственного интеграла, а это значит что он сходится по  $x$ .

Значит и интеграл от левой части также сходится  $\forall t$ , причём он равен

$$I(t) := \int_a^b f(x, y_0)dx + \int_a^b \left( \int_{y_0}^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \right) dx = \int_a^b f(x, y_0)dx + \int_{y_0}^t \left( \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx \right) dy$$

Тогда при взятии производной  $I'(t)$ , первое слагаемое обнулится, а второе, являясь переменным верхним пределом, превратится в  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)dx$ . □

## 18 Гамма- и бета-функции и связь между ними

**Определение 18.1.** Гамма-функцией называется

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$

**Утверждение 18.1.** Гамма-функция сходится

*Доказательство.*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx =: I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$$

$I_1$  сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq x^{\alpha-1}, \quad \int_0^1 x^{\alpha-1} dx < +\infty, \alpha > 0$$

$I_2$  также сходится по признаку сравнения, так как

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq C e^{-\frac{x}{2}}, x \geq 1; \quad \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx < +\infty$$

□

**Теорема 18.1.** Основные свойства гамма-функции.

1.  $\Gamma(\alpha)$  бесконечно дифференцируема  $\forall \alpha > 0$ .
2. Формула понижения.  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \alpha > 0$
3.  $\Gamma(n + 1) = n! \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

*Доказательство.* 1.  $(x^{\alpha-1} e^{-x})'_\alpha = x^{\alpha-1} e^{-x} \ln x$ , заметим, что все оценки, сделанные в предыдущем пункте сохранятся (с немного изменённым коэффициентом  $\alpha$ ), так как

$$\ln x \leq \frac{1}{x^\varepsilon}, x \in (0, 1]; \quad \ln x \leq x^\varepsilon, x \geq 1$$

Значит мы можем дифференцировать сколько угодно раз с сохранением сходимости.

2. Проинтегрировав по частям, получим:

$$\Gamma(\alpha) = -x^\alpha e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \Gamma(\alpha)$$

3. Заметим, что  $\Gamma(1) = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$ . Используя предыдущее свойство, доказываемое утверждение становится очевидным.

□

**Определение 18.2.** Бета-функцией называется  $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx; \quad a, b \geq 0$

**Теорема 18.2.** Связь бета- и гамма-функций.

$$\forall a, b > 0 : B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

*Доказательство.*

$$B(a, b)\Gamma(a+b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}dy \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} \xi^{a-1}e^{-\xi}d\xi \int_0^{+\infty} \eta^{b-1}e^{-\eta}d\eta$$

Будем рассматривать оба интеграла, как двойные. Рассмотрим замену координат вида

$$\begin{cases} xy = \xi \\ (1-x)y = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \xi + \eta \\ x = \frac{\xi}{\xi + \eta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y & 1-x \end{vmatrix} = y(1-x+x) = y \neq 0$$

Проведите данную замену и у вас всё обязательно получится! □

## 19 Формула Гаусса-Эйлера для гамма-функции

**Теорема 19.1.** Формула Гаусса-Эйлера.

Для любых  $\alpha > 0$ :

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}$$

*Доказательство.* Напоминаем, что

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \stackrel{e^{-x} =: u}{=} \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{u} du$$

Докажем, что  $f_n(u) = n(1 - u^{\frac{1}{n}})$  монотонно стремится к  $\ln \frac{1}{u}$ ,  $u \in (0, 1]$ . Для этого рассмотрим функцию  $g(t, u) = t(1 - u^{\frac{1}{t}})$ . Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 1 - u^{\frac{1}{t}} - t \cdot u^{\frac{1}{t}} \ln u \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = 1 - u^{\frac{1}{t}} + u^{\frac{1}{t}} \ln u \frac{1}{t}, u \in (0, 1], t > 0$$

Обозначив  $y := u^{\frac{1}{t}} \Rightarrow y \in (0, 1]$  получим новую функцию  $\varphi(y) = 1 - y + y \ln y$ . Тогда

$$\varphi'(y) = -1 + \ln y + 1 = \ln y < 0, y \in (0, 1]; \quad \varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(y) \geq 0 \Rightarrow g \geq 0 \Rightarrow f_n(u) \uparrow$$

Тогда рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{n} \ln u}}{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{2й зам-й пр-л}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{n} \ln u}{\frac{1}{n}} = -\ln u = \ln \frac{1}{u}$$

Значит мы можем применить теорему Леви для последовательности  $f_n(u)$ :

$$\int_0^1 (n(1 - u^{\frac{1}{n}}))^{\alpha-1} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln^{\alpha-1} \frac{1}{u} du$$

То есть мы получили, что

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha-1} \int_0^1 (1 - u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1} du \stackrel{u = t^n}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{\alpha-1} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha B(n, \alpha) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!\Gamma(\alpha)}{(\alpha+n-1) \cdots \alpha \Gamma(\alpha)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} \end{aligned}$$

□

## 20 Формула Валлиса. Представление синуса в виде бесконечного произведения.

**Теорема 20.1.** *Формула Валлиса.*

Для любого  $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$ :

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\cos \alpha x$  на  $[-\pi, \pi]$ , разложим её в тригонометрический ряд Фурье:

$$\begin{aligned} b_n = 0, a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(\alpha + n)x + \cos(\alpha - n)x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(\alpha + n)x}{\alpha + n} + \frac{\sin(\alpha - n)x}{\alpha - n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha + n} + \frac{1}{\alpha - n} \right) = \\ &= \frac{2(-1)^n \alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}, n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Значит

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx, \alpha x \in [-\pi, \pi]$$

Возьмём  $x := \pi$ , тогда

$$\cos \alpha \pi = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} \left( 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right) \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha \pi = \frac{1}{\alpha \pi} + 2\frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

В итоге получим, что

$$\operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} = 2\frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}, |\alpha| < 1, \alpha \neq 0$$

Где слева – устранимая точка разрыва, а справа ряд равномерно сходится при  $\alpha \leq \alpha_0 < 1$  (Можем оценить  $\left| \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$ ). Значит мы можем проинтегрировать обе части по  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x \left( \operatorname{ctg} \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} \right) d\alpha &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2 - n^2}, |x| < 1 \Rightarrow \\ \left[ \frac{1}{\pi} \ln |\sin \alpha \pi| - \frac{1}{\pi} \ln |\alpha| \right] \Big|_0^x &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \ln |\alpha^2 - n^2| \Big|_0^x \Rightarrow \\ \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \pi x}{x} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |x^2 - n^2| - \ln n^2) \Rightarrow \\ \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \end{aligned}$$

□

## 21 Формула дополнения для гамма-функции

**Теорема 21.1.** *Формула дополнения.*

Для любых  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$$

*Доказательство.* Используем формулу Гаусса-Эйлера:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)} \cdot n^{1-\alpha} \frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha) \cdots (n-\alpha)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n((n-1)!)^2(\alpha+n)}{\alpha(1-\alpha^2)(2^2-\alpha^2) \cdots (n^2-\alpha^2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha+n}{\alpha} \cdot \frac{1}{n(1-\frac{\alpha^2}{1})(1-\frac{\alpha^2}{2^2}) \cdots (1-\frac{\alpha^2}{n^2})} = \\ &= \frac{1}{\alpha \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{\alpha^2}{n^2})} \stackrel{\text{ф. Вальлиса}}{=} \frac{1}{\alpha \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \end{aligned}$$

□

## 22 Равносходимость интеграла и ряда Фурье в точке

**Определение 22.1.** Пусть  $f$  суммируема на  $\mathbb{R}$ . Интегралом Фурье функции  $f$  называется

$$I_f(x) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\lambda t) d\mu(t); \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\lambda t) d\mu(t)$$

**Теорема 22.1.** *Признак Дини сходимости интегралов Фурье.*

Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , и для некоторого  $x_0 \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$  и  $S(x_0)$ , такие что

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t} \in L_1(0, \delta)$$

Тогда  $I_f(x_0) = S(x_0)$

*Доказательство.* Давайте распишем разность

$$\begin{aligned} I_f(x_0) - S(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\lambda(x_0-t)) d\mu(t) \right] d\lambda - S(x_0) \stackrel{u:=x_0-t}{=} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(x_0-u) \cos(\lambda u) d\mu(u) \right] d\lambda - S(x_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{[0,+\infty)} f(x_0+u) \cos(\lambda u) d\mu(u) + \int_{[0,+\infty)} f(x_0-u) \cos(\lambda u) d\mu(u) \right] d\lambda - S(x_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\Lambda} \int_{[0,+\infty)} (f(x_0+u) + f(x_0-u)) \cos(\lambda u) d\mu(u) d\lambda - S(x_0) \end{aligned}$$

Мы можем сделать оценку

$$|(f(x_0+u) + f(x_0-u)) \cos(\lambda u)| \leq |f(x_0+u) + f(x_0-u)| \in L_1(\mathbb{R} \times [0, \Lambda])$$

Значит мы можем применить теорему Фубини и переставить интегралы:

$$\begin{aligned} I_f(x_0) - S(x_0) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty)} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \int_0^\Lambda \cos(\lambda u) d\lambda d\mu(u) - S(x_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty)} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \frac{\sin(\Lambda u)}{u} d\mu(u) - S(x_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty)} (f(x_0 + u) + f(x_0 - u)) \frac{\sin(\Lambda u)}{u} d\mu(u) - 2S(x_0) \int_{[0, +\infty)} \frac{\sin(\Lambda u)}{u} du \right] \end{aligned}$$

Последний переход получился из того факта (интеграл Дирихле), что

$$\int_{[0, +\infty)} \frac{\sin(\Lambda u)}{u} du = \frac{\pi}{2}, \Lambda > 0$$

Продолжим расписывать...

$$\begin{aligned} I_f(x_0) - S(x_0) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2S(x_0)}{u} \sin(\Lambda u) d\mu(u) + \right. \\ &\quad \left. \int_\delta^{+\infty} \frac{f(x_0 + u) + f(x_0 - u)}{u} \sin(\Lambda u) d\mu(u) - 2S(x_0) \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin(\Lambda u)}{u} du \right] \end{aligned}$$

Рассмотрим каждое из этих слагаемых поотдельности:

1. По теореме Римана об осцилляции:

$$\int_{[0, \delta]} \varphi_{x_0}(u) \sin(\Lambda u) d\mu(u) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0$$

2. На  $[\delta, +\infty)$  мы можем использовать следующую оценку:

$$\left| \frac{f(x_0 + u)}{u} \right| \leq \frac{1}{\delta} |f(x_0 + u)|$$

Значит по теореме Римана об осцилляции (предыдущим неравенством мы доказали, что  $\frac{f(x_0+u)}{u} \sin(\Lambda u)$  суммируемая, аналогично для второго подслагаемого):

$$\int_{[\delta, +\infty)} \frac{f(x_0 + u)}{u} \sin(\Lambda u) d\mu(u) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0$$

3. Совершим замену и получим хвост сходящегося интеграла Римана (интеграла Дирихле):

$$\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin(\Lambda u)}{u} du = \int_{\Lambda\delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Таким образом, теорема доказана.  $\square$

**Следствие.** Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$  и удовлетворяет условию Гёльдера (3.1) порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  в точке  $x_0$ , то  $I_f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ .

Если  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ , то  $I_f(x) = f(x)$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

## 23 Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье суммируемой функции. Формулы обращения.

**Определение 23.1.** Преобразованием Фурье функции  $f$ , суммируемой на  $\mathbb{R}$  называется

$$F[f] := \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t)$$

**Определение 23.2.** Обратным преобразованием Фурье функции  $F \in C(\mathbb{R})$  называется

$$F^{-1}[f] := \tilde{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda) d\lambda$$

**Теорема 23.1.** Свойства преобразования Фурье суммируемых на всей числовой оси функций.

1. (Линейность)

Если  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(\lambda) = \alpha \hat{f}(\lambda) + \beta \hat{g}(\lambda)$$

2. Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $\hat{f}(\lambda)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$ .

3. Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(x) = f(\alpha x)$ ,  $\alpha > 0$ , то  $\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \hat{f}(\frac{\lambda}{\alpha})$

4. Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ ,  $\psi(\lambda) = f(\lambda + a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , то  $\hat{\psi}(\lambda) e^{ia\lambda} = \hat{f}(\lambda)$

*Доказательство.* 1. Очевидна из свойств интеграла

2. Снова распишем преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t)$$

Справедливо неравенство:

$$|f(t) e^{-i\lambda t}| \leq |f(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

После этого распишем комплексную экспоненту в сумму тригонометрических функций и сведём к теореме об осцилляции ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). Почему мы имеем право так делать? Работает теорема о непрерывности несобственного интеграла Лебега, зависящего от параметра.

3. Распишем более подробно преобразование функции  $\varphi(\lambda)$ :

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha t) e^{-i\lambda t} d\mu(t) \stackrel{x:=\alpha t}{=} \frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\frac{\lambda}{\alpha} x} d\mu(x) = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$$



4. Распишем более подробно преобразование функции  $\psi(\lambda)$ :

$$\hat{\psi}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} f(t+a)e^{-i\lambda t} d\mu(t) \stackrel{x:=t+a}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x+i\lambda a} d\mu(x) = e^{i\lambda a} \hat{f}(\lambda)$$

□

**Лемма 23.1.** *Формула обращения.*

Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$  и удовлетворяет условию Гёльдера в точке  $x$ , то

$$\tilde{\hat{f}}(x) = f(x)$$

*Доказательство.* Заметим, что  $\tilde{\hat{f}}$  – это интеграл Фурье, тогда утверждение становится очевидным, благодаря одному из следствий признака Дини (22). □

## 24 Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. Свёртка и её преобразование Фурье.

**Теорема 24.1.** *Преобразование Фурье производной.*

Если  $f$  абсолютно непрерывная на любом отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , и  $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$ , то

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \hat{f}'(\lambda) = (i\lambda) \hat{f}(\lambda)$$

*Доказательство.* Перепишем  $f(x)$  благодаря формуле Ньютона-Лейбница для суммируемых функций:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) d\mu(t), x > 0$$

Устремляя  $x \rightarrow +\infty$  увидим, что правая часть имеет предел, а значит и левая тоже:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(+\infty) = 0$$

Аналогично получим, что  $f(-\infty) = 0$ .

Тогда рассмотрим следующее преобразование Фурье:

$$\hat{f}'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\lambda t} d\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)(e^{-i\lambda t})'_t d\mu(t) = (i\lambda) \hat{f}(\lambda)$$

□

**Теорема 24.2.** *Производная преобразования Фурье.*

Если  $f(t), tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$ , то преобразование Фурье  $\hat{f}(\lambda)$  дифференцируемо, причём

$$(\hat{f})'(\lambda) = (\widehat{-itf(t)})(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.* Зададимся вопросом, имеем ли мы право продифференцировать интеграл, зависящий от параметра  $\lambda$ :

$$(\hat{f})'(\lambda) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)(e^{-i\lambda t})'_\lambda d\mu(t) = (\widehat{-itf(t)})(\lambda)$$

Для разрешения этого вопроса оценим следующее выражение:

$$|f(t)(e^{-i\lambda t})'_\lambda| = |-itf(t)e^{-i\lambda t}| \leq |tf(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

Значит мы имеем право (так как производная по параметру оценивается суммируемой функцией), согласно теореме о дифференцировании интеграла с параметром.  $\square$

**Определение 24.1.** Свёрткой функций  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$  называется

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)d\mu(x)$$

**Утверждение 24.1.** Свёртка определена почти всюду.

*Доказательство.* Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f(x)g(t-x))d\mu(x)d\mu(t) &\stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(t-x)d\mu(t)d\mu(x) \stackrel{u:=t-x}{=} \\ &\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(u)d\mu(u)d\mu(x) \end{aligned}$$

Последний интеграл расписывается, как произведение двух интегралов, а так как каждая из функций суммируемая, значит их произведение тоже получится суммируемой, значит свёртка является суммируемой функцией, а значит по той же теореме Фубини свёртка определена почти всюду.  $\square$

**Теорема 24.3.** Преобразование Фурье свёртки.

Если  $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $\widehat{(f * g)}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)d\mu(x)e^{-i\lambda t}d\mu(t) \stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x} \int_{\mathbb{R}} g(t-x)e^{-i\lambda(t-x)}d\mu(t)d\mu(x) \stackrel{u:=t-x}{=} \\ \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}d\mu(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u)e^{-i\lambda u}d\mu(u) &= \sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda) \end{aligned}$$

$\square$

## 25 Пространства основных и обобщённых функций. Дифференцирование обобщённых функций. $\delta$ -функция

**Определение 25.1.** Носителем функции  $f(\text{supp } f)$  называется замыкание множества, где она не равна нулю:

$$\text{supp } f := \text{cl } \{x : f(x) \neq 0\}$$

**Определение 25.2.** Функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется финитной, если её носитель компактен.

**Определение 25.3.** Пространство  $D$  основных функций – это множество финитных бесконечно дифференцируемых функций с топологией, определяемой позже. ( $D = C_0^\infty$ )

**Определение 25.4.** Пусть  $D_K$  – множество финитных бесконечно дифференцируемых функций  $f$ , таких, что  $\text{supp } f \subset K$ .

**Определение 25.5.** Полунормой на линейном пространстве  $E$  называется функция  $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что

1.  $p(cx) = |c|p(x) \quad \forall x \in E \quad \forall c \in \mathbb{R}$
2.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$

**Утверждение 25.1.** Если на  $E$  задана совокупность нетривиальных полунорм  $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , то  $E$  является топологическим пространством, открытые множества в котором – всевозможные объединения множеств

$$U_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \varepsilon}(a) := \{x \in E : p_{\alpha_i}(x - a) < \varepsilon, i = \overline{1, n}\}$$

**Замечание.** В  $D_{[-N, N]}$  рассмотрим счётную совокупность полунорм:

$$p_m(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}, k = \overline{0, m}} |f^{(k)}(x)|$$

А в  $D$  рассмотрим совокупность полунорм  $\{p_\alpha\}, \alpha = \{N_m\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ :

$$p_\alpha(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{x \in [-m, m] \setminus [-m+1, m-1], k = \overline{0, N_m}} |f^{(k)}(x)|$$

Это было для **общего развития**, главное знать, что  $D$  – топологическое пространство, причём сходимость в нём даётся определением:

**Определение 25.6.** Последовательность  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset D$  сходится к  $\varphi_0 \in D$ , если:

1.  $\exists [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N} : \text{supp } \varphi_n \subset [a, b]$
2.  $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(m)}(x) - \varphi_0^{(m)}(x)| = 0$

**Определение 25.7.** Линейный функционал на  $D$  – линейное отображение  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Действие функционала будем обозначать так:

$$(f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha(f, \varphi_1) + \beta(f, \varphi_2)$$

**Определение 25.8.** Пусть  $D'$  – линейное топологическое пространство **непрерывных** функционалов на  $D$ .

**Определение 25.9.** Функционалы из  $D'$  непрерывны в смысле:

$$\forall f \in D' \quad \forall \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset D : (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$$

**Определение 25.10.** Последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset D'$  сходится к  $f \in D'$ , если  $\forall \varphi \in D$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$$

**Утверждение 25.2.** Если  $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ , то  $f$  соответствует линейный функционал из  $D'$ , определённый, как

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)d\mu(x)$$

*Доказательство.* Линейность очевидна. Докажем непрерывность:

Пусть  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi$  в  $D \Rightarrow \text{supp } \varphi_n, \text{supp } \varphi \subset [a, b], \varphi_n \rightrightarrows \varphi$  на  $[a, b]$ . Значит  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно ограничена, тогда

$$|f(x)\varphi_n(x)| \leq C|f(x)| \xrightarrow{\text{т. Лебега}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_n(x)d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)d\mu(x)$$

□

**Следствие.** УСЛОВНО можем считать, что  $L_{loc}(\mathbb{R}) \subset D'$

**Определение 25.11.** Элементы пространства  $D'$  называются также обобщёнными функциями.

**Определение 25.12.** Линейные функционалы из  $D'$ , соответствующие функциям из  $L_{loc}(\mathbb{R})$  называются регулярными функционалами.

**Определение 25.13.** Нерегулярный функционал называется сингулярным.

**Определение 25.14.** Пусть  $\lambda \in C^{\infty}$ . Тогда  $\forall f \in D' : \lambda f$  определяется как:

$$(\lambda f, \varphi) := (f, \lambda \varphi)$$

**Определение 25.15.** Обобщённой производной обобщённой функции  $f \in D'$  называется  $f' \in D$ , определяемая формулой:

$$\forall \varphi \in D : (f', \varphi) := -(f, \varphi')$$

**Теорема 25.1.** Свойства обобщённого дифференцирования.

*Операция дифференцирования на  $D'$  обладает следующими свойствами:*

1. (Линейность)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall f, g \in D' : (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

2. (Непрерывность)

Если  $f_n \rightarrow f$  в  $D'$ , то  $f'_n \rightarrow f'$  в  $D'$

3. (Правило Лейбница)

Если  $\lambda \in C^{\infty}, f \in D'$ , то  $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$

*Доказательство.* Все свойства доказываются очевидно расписыванием действия рассматриваемых функционалов на произвольную функцию  $\varphi$ . □

**Определение 25.16.**  $\delta$ -функцией называется функционал  $\delta \in D'$ :

$$\forall \varphi \in D : (\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

## 26 Пространство Шварца быстро убывающих функций

**Определение 26.1.**  $f \in S$ , если  $f$  – бесконечно дифференцируемая на  $\mathbb{R}$ , и

$$\forall k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \exists C(k, l) \forall x \in \mathbb{R} : (1 + |x|)^k |f^{(l)}(x)| \leq C(k, l)$$

То есть любая производная функций из пространства Шварца стремится к нулю быстрее любой отрицательной степени.

**Теорема 26.1.** Преобразование Фурье является биекцией на  $S$ .

*Доказательство.* Сделаем оценку:

$$|x^k f^{(l)}(x)| \leq \frac{C(k+2, l)}{(1+|x|)^2} \Rightarrow x^k f^{(l)} \in L_1(\mathbb{R})$$

Теперь мы можем утверждать, что преобразование Фурье является бесконечно дифференцируемой функцией на  $S$ . Также вспомним формулу преобразования Фурье производной:

$$\hat{f}'(\lambda) = i\lambda \hat{f}(\lambda) \Rightarrow |\hat{f}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \rightarrow \infty$$

Но мы можем вместо первой производной ставить любую производную, значит

$$|\hat{f}(\lambda)| = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right), n \in \mathbb{N}, \lambda \rightarrow +\infty$$

Таким образом, мы показали, что  $f \in S \Rightarrow \hat{f} \in S$ . Осталось установить, что  $\forall g \in S : \tilde{g} \in S$ :

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \hat{g}(-x)$$

Значит  $g = \hat{\tilde{g}}, \tilde{g} \in S$ . □

**Теорема 26.2.** Равенство Парсеваля в  $S$ .

$\forall f_1, f_2 \in S$ :

$$1. \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) f_2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) \hat{f}_2(x) dx$$

$$2. \int_{\mathbb{R}} f_1(x) \overline{\hat{f}_2(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) \overline{f_2(x)} dx$$

в частности,  $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R})}$

*Доказательство.* 1. Распишем интеграл произведения:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) f_2(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_2(x) \int_{\mathbb{R}} f_1(t) e^{-itx} dt dx$$

Оценим подынтегральную функцию:

$$|f_1(t) f_2(x) e^{-itx}| \leq |f_1(t)| \cdot |f_2(x)| \in L_1(\mathbb{R}^{\neq})$$

Значит мы можем применить теорему Фубини:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \int_{\mathbb{R}} f_2(x) e^{-itx} dx dt = \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \hat{f}_2(t) dt$$

2. Введём  $h(x) := \overline{\hat{f}_2}(x)$ . Распишем интеграл произведения:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(t) \hat{h}(t) dt$$

Тогда

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_2}(x) e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_2(x) e^{itx} dx} = \overline{\hat{\hat{f}_2}}(t) = \overline{f_2}(t)$$

Заметим, что мы доказали второй пункт.

□