Содержание

1 Теорема Римана об осцилляции

Определение 1.1. **Носителем** функции $f(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $f(x) \neq 0$. ($\operatorname{supp} f$) Функции с ограниченным носителем называются **финитными**.

Определение 1.2. Множество D называется всюду плотным в множестве G, если

$$\overline{D} = G$$

Утверждение 1.1. $L_1(\mathbb{R})$ *– линейное нормированное пространство.*

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x)$$

Лемма 1.1. *Множество непрерывных финитных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R})$*.*

Доказательство. Заменим $\mathbb{R}$ на $[a, b]$. То есть докажем, что множество непрерывных на $[a, b]$ функций всюду плотно в $L_1[a, b]$.

- Докажем для ограниченных неотрицательных. По теореме о представлении ограниченной измеримой функции пределом последовательности ступенчатых

  $$\exists \{h_n\} : \ h_n \uparrow f$$

  Теорема Леви гарантирует, что

  $$\int_a^n h_n(x) d\mu(x) \to \int_a^b f(x) d\mu(x)$$

  Значит

  $$\int_a^b |f(x) - h_n(x)| d\mu(x) = \int_a^b (f(x) - h_n(x)) d\mu(x) \overset{n\to+\infty}{\to} 0$$

  То есть нам достаточно доказать, что любую ступенчатую можно приблизить непрерывной:

  $$h_n(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbb{I}_{E_k}(x)$$

  В силу того, что $\forall k : \ E_k$ – измеримое, то

  $$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \text{элементарное } M_\varepsilon : \ \mu(E_k \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

  Значит

  $$\int_a^b |\mathbb{I}_{E_k}(x) - \mathbb{I}_{M_\varepsilon}(x)| d\mu(x) = \int_a^b \mathbb{I}_{E \triangle M_\varepsilon}(x) d\mu(x) = \mu(E \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$$

  Нам осталось научиться приблизить индикатор интервала непрерывными функциями (так как элементарное множество представимо объединением интервалов), а это сделать очень просто, используя непрерывную функцию $\varphi(x)$, которая выглядит вот так: Тогда

  $$\int_a^b |\mathbb{I}_{(c,d)}(x) - \varphi(x)| d\mu(x) = \frac{2}{m} < \varepsilon$$

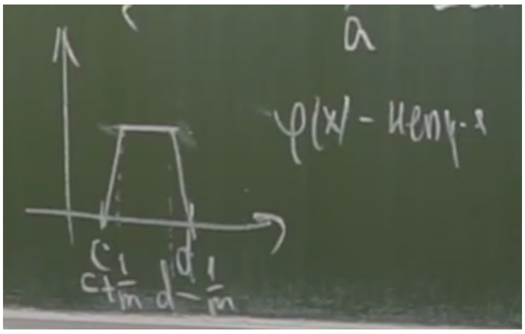

Рис. 1: Один из способов ввода функции φ

- Докажем для любой неотрицательной: как обычно введём срезки, для которых рассуждения аналогичны предыдущему пункту.
- Для произвольных расписываем как сумму знакопостоянных.

Возвращаемся к общему случаю: пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По доказанному выше:

$$f|_{[-N,\,N]} : \; \forall\varepsilon > 0 \; \exists g \in C[-N, N] \; \|f|_{[-N,\,N]} - g\|_{L_1[-N,\,N]} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Далее мы можем продлить g на всю прямую линейных образом (аналогично введению функции φ из рассуждений выше), так, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} |g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| d\mu(x) \leqslant \int_{-N}^{N} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}\setminus[-N,\,N]} (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) < \varepsilon$$

□

Лемма 1.2. *Каждая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ непрерывна в среднем относительно сдвига, то есть*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Доказательство. Докажем, что для $f \in L_1[a, b]$:

$$\lim_{\delta\to+0} \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \int_{a}^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

По предыдущей лемме:

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists g \in C[a, b] : \; \int_{a}^{b} |f(x) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

g – непрерывная на $[a,b] \Rightarrow$ по теореме Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta : \ |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Тогда $\forall h\ 0 \leqslant h \leqslant \delta$:

$$\int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) \leqslant \int_a^{b-h} |f(x+h) - g(x+h)| d\mu(x) + \int_a^{b-h} |f(x) - g(x)| d\mu(x) + \\ + \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

Так как f суммируема на $\mathbb{R}$, то $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда выберем $[a,b] := [-N-1, N+1]$ и введём $g := f\mathbb{I}_{[-N,N]} \in L_1[a,b]$. Применим к этой функции доказанное выше равенство:

$$\exists \delta \in (0,1)\, \forall h, 0 \leqslant h \leqslant \delta : \ \int_a^{b-h} |g(x+h) - g(x)| d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь возьмём $\forall t, |t| < \delta$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = \int\limits_{\{x, x+t\} \subseteq [a,b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) + \int\limits_{\{x, x+y\} \not\subseteq [a,b]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) < \varepsilon$$

$\square$

Теорема 1.1. *Римана об осцилляции.*

Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

Доказательство.

$$\int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) \overset{x = t + \frac{\pi}{\lambda}}{=} - \int_{I - \frac{\pi}{\lambda}} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) =$$

$$-\frac{1}{2} \int_I \left(f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right) \cos(\lambda t) d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \triangle I} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t)$$

Заметим, что

$$\left| \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \setminus I} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leqslant \int_{(I - \frac{\pi}{\lambda}) \triangle I} \left| f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| d\mu(t) = \\ = \int_{I \triangle (I + \frac{\pi}{\lambda})} |f(x)| d\mu(t) \overset{\lambda \to \infty}{\to} 0$$

Последнее заключение следует из того, что $\mu\left(I \triangle (I + \frac{\pi}{\lambda})\right) \overset{\lambda \to \infty}{\to} 0$

Также очевидно, что

$$\left| \int_I \left(f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right) \cos(\lambda t) d\mu(t) \right| \leqslant \int_I \left| f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(t) \right| d\mu(t) \overset{\text{по пред. Лемме}}{\to} 0$$

$\square$

2 Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации.

Определение 2.1. $f \in L_{2\pi} \Leftrightarrow f \in L_1[-\pi, \pi]$ и 2π периодическая.

Определение 2.2. Ядром Дирихле $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

Доказательство.

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{iku} + e^{-iku}) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)u-1}}{e^{iu}-1} =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-inu}\frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}} - e^{-i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}} \cdot \frac{e^{i(2n+1)\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{u}{2})}$$

□

Лемма 2.1. *О представлении частичной суммы.*

Если $f \in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

может быть представлена следующим образом:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)d\mu(u)$$

Доказательство. Подставим в S_n формулы для a_k, b_k:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt))\right)d\mu(t) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)d\mu(t)$$

Первая формула доказана, вторая доказывается очевидно заменой $t = x + u$, а также используя тот факт, что интеграл по любому отрезку длины T, T-периодичной функции одинаков. □

Лемма 2.2. *Пусть $f \in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \to +\infty$ равномерно по x.*

Доказательство. g – ограниченная $\Rightarrow \exists M :\ \forall u\ |g(u)| \leqslant M$.

f – измеримая $\Rightarrow$ по (1.1) мы можем её представить, как $f = f_1 + f_2$, причём $f_1 \in C[-\pi, \pi]$, а $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)|d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

f_1 – непрерывная на компакте $[-\pi, \pi] \Rightarrow \exists B\ \forall u :\ |f_1(u)| \leqslant B$.

Введём функцию, которая называется интегральный модуль непрерывности функции F:

$$\omega_1(\delta, F) := \sup_{0\leqslant h\leqslant \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+h)-F(t)|d\mu(t)$$

Рассмотрим a_n для функции χ:

$$a_n(\chi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi(t)\cos(nt)d\mu(t) \overset{t=u+\frac{\pi}{n}}{=} \frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi\left(u+\frac{\pi}{n}\right)\cos(nu)d\mu(u) =$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\chi\left(t+\frac{\pi}{n}\right)-\chi(t)\right]\cos(nt)d\mu(t) \Rightarrow$$

$$|a_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\chi\right)$$

Аналогично получим неравенство для $b_n(\chi)$:

$$|b_n(\chi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\chi\right)$$

То есть мы свели доказательство к доказательству факта, что $\lim_{n\to+\infty}\omega_1(\frac{\pi}{n},\chi) = 0$ равномерно по x:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(t+h)-\chi(t)|d\mu(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)g(t+h)-f(x+t)g(t)|d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h)-f(x+t)|\cdot|g(t+h)|d\mu(t) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant M\int_{-\pi}^{\pi} |f(u+h)-f(u)|d\mu(u) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x+t)|\cdot|g(t+h)-g(t)|d\mu(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant M\omega_1(\frac{\pi}{n}, f) + B\omega_1(\frac{\pi}{n}, g) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Но по (1.2) мы знаем, что модуль непрерывности стремится к нулю при $\delta\to 0$. Что и требовалось доказать. □

Теорема 2.1. *Принцип локализации.*

Если $f\in L_{2\pi}$ и тождественно равна нулю в некотором интервале $(a,b)\subset[-\pi,\pi]$, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a',b']\subset(a,b)$.

Доказательство. Так как $[a',b']$ содержится в (a,b), то

$$\exists\eta>0\,\forall x\in[a',b']\,\forall t, 0\leqslant|t|<\eta:\ x+t\in(a,b)$$

Построим функцию $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, t\in(-\eta,\eta) \\ 1, t\in[-\pi,\pi]\setminus(-\eta,\eta) \end{cases}$$

Кроме того, λ – 2π-периодическая.

Тогда, используя лемму о представлении частичной суммы, получим:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)d\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t)D_n(t)d\mu(t)$$

Данное соотношение верно, так как когда $t \notin (-\eta, \eta)$, то $\lambda(\eta) = 1$, ничего не меняем. Если же $|t| < \eta$, то $x + t \in (a, b)$, где $f = 0$, поэтому получили, что подынтегральные функции совпадают везде на $[-\pi, \pi]$.

Продолжим раскрытия данной формулы, используя тригонометрические соотношения для ядра Дирихле:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t) \operatorname{ctg}(\frac{t}{2}) \sin(nt) d\mu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\lambda(t) \cos(nt) d\mu(t)$$

Взяв в качестве g из предыдущей леммы для первого слагаемого $\lambda(t) \operatorname{ctg}(\frac{t}{2})$ и $\lambda(t)$ для второго, то получим требуемое по этой же лемме.

$\square$