目录

消解反演

在消解原理部分，已经介绍过消解原理（归结原理）的基本思想如下：

- 定理证明的任务：
  由前提A1 ∧A2 ∧... ∧An
  推出结论B
  即证明:A1 ∧A2 ∧... ∧An→B 永真
- 转化为证明：
  A1 ∧A2 ∧... ∧An ∧ ¬B为永假式
- 消解推理就是:从A1 ∧A2 ∧... ∧An ∧ ¬B出发,使用消解推理规则来找出矛盾,最后证明定理A1 ∧A2 ∧... ∧ An→B的成立。

消解反演

- 消解方法是一种机械化的,可在计算机上加以实现的推理方法。
- 可认为是一种反向推理形式。
- 提供了一种自动定理证明的方法。
- **如欲证明B为$A_1,A_2,\ldots,A_n$的逻辑结论，只需证**

$$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)\wedge\neg B$$

是不可满足的，或证明其子句集是不可满足的。而子句集的不可满足性可用消解原理来证明。

消解反演

应用消解原理证明定理的过程称为消解（归结）反演。

- 设F为已知前提的公式集，Q为目标公式(结论)，用消解反演进行证明的步骤是：

1.否定Q，得到¬Q；
2.把¬Q并入到公式集F中，得到{F, ¬Q}；
3.把公式集{F, ¬Q}化为子句集S；
4.应用消解推理规则对子句集S中的子句进行消解，并把每次消解得到的消解式都并入S中。如此反复进行，若出现了空子句，则停止消解。

消解反演

- 空子句不含有文字,它不能被任何解释满足,所以空子句是永假的,不可满足的。
- 消解过程出现空子句,说明出现互补文字,说明S中有矛盾,因此S是不可满足的。

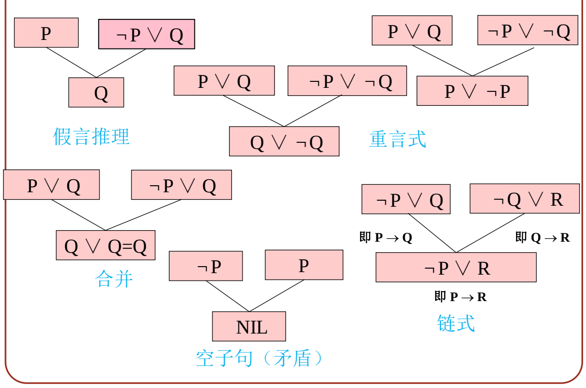
消解推理规则

例如，如果存在某个公理¬ P∨Q和另一公理¬ Q∨R，那么¬ P∨R在逻辑上成立。这就是消解，而称¬ P∨R为¬ P∨Q和¬ Q∨R的消解式（resolvent）。

- 消解的定义
- 令L_1,L_2为两任意原子公式：L_1和L_2具有相同的谓词符号，但一般具有不同的变量，已知两个子句$L_1\vee\alpha$和$\neg L_2\vee\beta$，如果L_1和L_2具有最一般合一σ(**通过置换最少的变量以使表达式一致**),那么通过消解可以从两个父辈子句推导出一个新子句（α∨β）σ 。这个新子句叫做消解式。

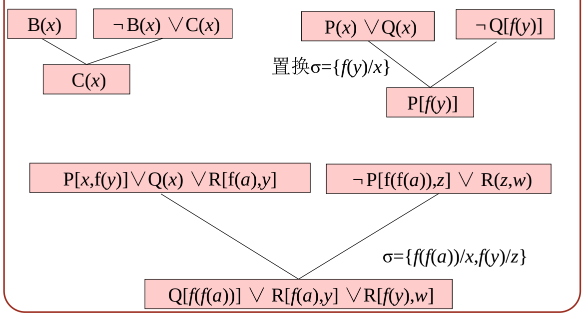
- 消解式求法

重言式对应于所有解释均为真



含有变量的消解式

要把消解推理规则推广到含有变量的子句，必须找到一个作用于父辈子句的置换，使父辈子句含有互补文字。



消解推理的常用规则

父 辈 子 句	消 解 式
P和¬P∨Q即(P→Q)	Q
P∨Q和¬P∨Q	Q
P∨Q和¬P∨¬Q	Q∨¬Q和P∨¬P
¬P和P	NIL
¬P∨Q(即P→Q)和¬Q∨R(即Q→R)	¬P∨R(即P→R)
$B(x)$和$\neg B(x) \vee C(x)$	$C(x)$
$P(x)\vee Q(x)$和$\neg Q(f(y))$	$P(f(y))$，$\sigma=\{f(y)/x\}$
$P(x,f(y)) \vee Q(x) \vee R(f(a),y)$和 $\neg P(f(f(a)),z) \vee R(z,w)$	$Q(f(f(a))) \vee R(f(a),y) \vee R(f(y),w)$， $\sigma=\{f(f(a))/x,f(y)/z\}$

消解反演

- 例1:证明
- 前提：(P →Q)∧¬Q，结论： ¬P
- 证明：首先建立子句集:
  S={¬P∨Q, ¬Q , P}

- 对S作消解:
  (1) ¬P∨ Q
  (2) ¬Q
  (3) P
  (4) ¬P　　(1)(2)消解
  (5) NIL　　(3)(4)消解

消解反演

例2　已知　F：$(\forall x)[(\exists y)(A(x,y)\wedge B(y))\rightarrow(\exists y)(C(y)\wedge D(x,y))]$
G：$\neg(\exists x)C(x)\rightarrow(\forall x)(\forall y)(A(x,y)\rightarrow\neg B(y))$

求证：G是F的逻辑结论。

证明：首先把F和¬G化为子句集：

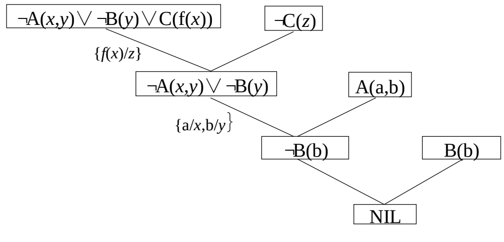
$F=\{\neg A(x,y)\vee\neg B(y)\vee C(f(x)), \neg A(x',y')\vee\neg B(y')\vee D(x',f(x'))\}$
$\neg G=\{\neg C(z), A(a,b), B(b)\}$

将上述5个公式依次标为(1)-(5)，然后进行消解：

(6) $\neg A(x,y)\vee\neg B(y)$　由(1)与(3)消解，$\{f(x)/z\}$
(7) $\neg B(b)$　由(4)与(6)消解，$\{a/x, b/y\}$
(8) NIL　由(5)与(7)消解

所以G是F的逻辑结论。

上述消解过程如图所示。



消解反演

- 例3:
- 某公司招聘工作人员，A、B、C三人应试，经面试后公司表示如下想法:
- （1）三人中至少录取一人。
- （2）如果录取A而不录取B，则一定录取C。
- （3）如果录取B，则一定录取C。
- 求证：公司一定录取C。

消解反演

（1）三人中至少录取一人。
（2）如果录取A而不录取B，则一定录取C。
（3）如果录取B，则一定录取C。
求证：公司一定录取C。

- 例3
- 证明：设用P(x)表示录取x。
- 把公司的想法用谓词公式表示如下：
- （1）$P(A) \vee P(B) \vee P(C)$
- （2）$P(A) \wedge \neg P(B) \rightarrow P(C)$
- （3） $P(B) \rightarrow P(C)$
- 把要求证的问题否定，并用谓词公式表示出来：
- （4） $\neg P(C)$

化为子句集
（1）$P(A) \vee P(B) \vee P(C)$
（2） $\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$
（3） $\neg P(B) \vee P(C)$
（4） $\neg P(C)$

应用消解原理进行消解：
（5）$P(B) \vee P(C)$ (1)与(2)消解
（6）P(C)　(3)与(5)消解
（7）nil　(4)与(6)消解
所以,公司一定录取C。

小结

•消解反演

目录

1 消解反演

2 反演求解

反演求解过程

从反演树求取答案步骤:
- （1）把由目标公式的否定产生的每个子句添加到目标公式否定之否定的子句中去。
- （2）按照反演树，执行和以前相同的消解，直至在根部得到某个子句止。
- （3）用根部的子句作为一个回答语句。

实质
- 把一棵根部有NIL的反演树变换为根部带有回答语句的一棵证明树。

反演求解过程

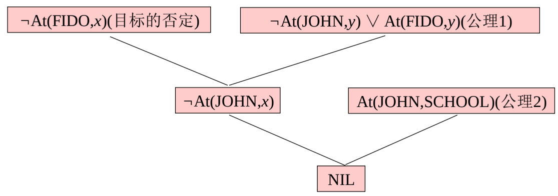
- 例1:
  “如果无论约翰(John)到哪里去，菲多(Fido)也就去那里，那么如果约翰在学校里，菲多在哪里呢?”
- 公式集S:
- $(\forall x)[At(JOHN, x) \rightarrow At(FIDO, x)]$
- At(JOHN,SCHOOL)

反演求解过程

- 如果我们首先证明公式(∃x)At(FIDO,x)在逻辑上遵循S，然后寻求一个存在x的例，那么就能解决“菲多在哪里”的问题。
- 关键想法是把问题化为一个包含某个存在量词的目标公式，使得此存在量词量化的变量表示对该问题的一个解答。如果问题可以从给出的事实得到答案，那么按这种方法建立的目标函数在逻辑上遵循S。在得到一个证明之后，我们就试图求取存在量词量化变量的一个例，作为一个回答。

反演求解过程

- 目标公式(∃x)At(FIDO,x)的否定：
- (∀x)[¬At(FIDO,x)]
- 其子句形式为: ¬At(FIDO,x)

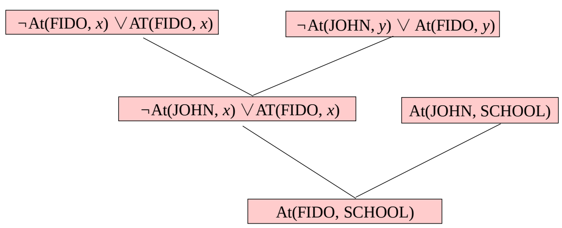


"菲多在哪里"例题的反演树

反演求解过程

- (1) 目标公式否定的子句形式为：¬At(FIDO,x)，把它添加至目标公式的否定之否定的子句中去，得重言式 ¬At(FIDO,x)∨AT(FIDO,x)。
- (2) 用反演树进行消解，并在根部得到子句: At (FIDO,SCHOOL)
- (3) 从根部求得答案At(FIDO，SCHOOL)，用此子句作为回答语句。
- 因此，子句At (FIDO,SCHOOL)就是这个问题的合适答案 。

反演求解过程



从消解求取答案的反演树

反演求解过程

- 答案求取涉及到把一棵根部有NIL的反演树变换为在根部带有可用作答案的某个语句的一颗证明树。
- 由于变换关系涉及到把由目标公式的否定产生的每个子句变换为一个重言式，所以被变换的证明树就是一棵消解的证明树，其在根部的语句在逻辑上遵循公理加上重言式，因而也单独地遵循公理。因此被变换的证明树本身就证明了求取办法是正确的。

反演求解过程

例2:

已知:

(∀x) (∀y) (∀z) [Father(z,x) ∧ Brother(x,y)→Father(z,y)]

Brother(John,Bob)

Father(Jim,John)

问：谁是Bob的父亲？

Father(u,Bob), u=?

解：构造:

¬Father(u, Bob)∨ Father(u, Bob)

化为子句集：

1 ¬Father(z,x) ∨ ¬Brother(x,y) ∨ Father(z,y)

2 Brother(John,Bob)

3 Father(Jim,John)

4 ¬Father(u, Bob) ∨ Father(u, Bob)

¬Father(z,x) ∨ ¬Brother(x,y) ∨ Father(z,y)　　Brother(John,Bob)

John/x, Bob/y

Father(Jim,John)　　¬Father(z,John) ∨ Father(z,Bob)

Jim/z

¬Father(u, Bob) ∨ Father(u, Bob)　　Father(Jim,Bob)

Jim/u

Father(Jim, Bob)

反演求解过程

例3：

已知：如果x和y是同班同学，则x的教室也是y的教室；张和李是同班同学；现在张在302教室上课。

问：现在李在哪个教室上课？

反演求解过程

解：第一步：定义谓词；

$C(x, y)$：x和y是同班同学；

$At(x, u)$：x在u教室上课。

第二步：根据定义的谓词写出上述知识的谓词表示，并化成子句集；

把已知前提用谓词公式表示如下：

C(zhang, li)

$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(C(x, y) \wedge At(x, u) \rightarrow At(y,u))$

At(zhang, 302)

把目标的谓词公式表示如下：

$(\exists v)At(li, v)$

反演求解过程

把上述公式化为子句集：

(1) C(zhang, li)

(2) $\neg C(x, y) \vee \neg At(x, u) \vee At(y, u)$

(3) At(zhang, 302)

把目标的否定化成子句式：

(4) $\neg At(li,v) \vee At(li, v)$

第三步：使用消解原理对子句集进行消解

(5) $\neg C(x, li) \vee \neg At(x, v) \vee At(li, v)$　　(2)(4)消解，$\{li/y, v/u\}$

(6) $\neg At(zhang, v) \vee At(li, v)$　　(1)(5)消解，$\{zhang/x\}$

(7) At(li, 302)　　(3)(6)消解，$\{302/v\}$

所以，李在302教室上课。

例：已知：A,B,C三人中有人从不说真话，也有人从不说假话。某人向这三人分别提出同一个问题：谁是说谎者？

A答：“B和C都是说谎者”；

B答：“A和C都是说谎者”；

C答：“A和B中至少有一个人是说谎者”。

• 思考：谁是老实人，谁是说谎者？

解：首先定义谓词

$T(x)$：表示x说真话

把已知前提用谓词公式表示如下：

如果A说的是真话，则有：

$T(A) \rightarrow \neg T(B) \wedge \neg T(C)$

如果A说的是假话，则有：

$\neg T(A) \rightarrow T(B) \vee T(C)$

对B和C说的话作相同的处理，可得：

$T(B) \rightarrow \neg T(A) \wedge \neg T(C)$

$\neg T(B) \rightarrow T(A) \vee T(C)$

$T(C) \rightarrow \neg T(A) \vee \neg T(B)$

$\neg T(C) \rightarrow T(A) \wedge T(B)$

把上述公式化成子句集，得到前提子句集S：

$\neg T(A) \vee \neg T(B)$

$\neg T(A) \vee \neg T(C)$

$T(C) \vee T(A) \vee T(B)$

$\neg T(B) \vee \neg T(C)$

$\neg T(C) \vee \neg T(A) \vee \neg T(B)$

$T(A) \vee T(C)$

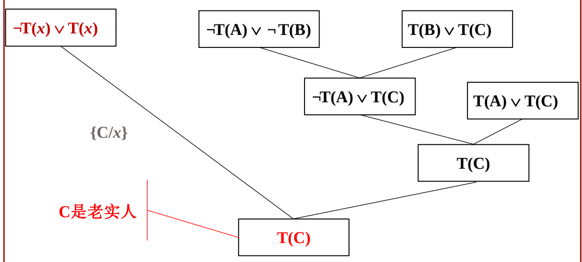
$T(B) \vee T(C)$

先求谁是老实人，结论的否定为：$\neg(\exists x)\, T(x)$

把目标的否定化成子句式，并用下面的重言式代替：

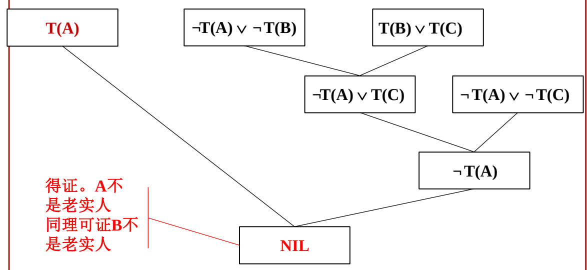
$\neg T(x) \vee T(x)$

把此重言式加入前提子句集S，得到一个新的子句集，对这个新的子句集，应用消解原理求出其证明树。



下面证明A不是老实人，即要证明的结论为：$\neg T(A)$

将结论的否定$\neg(\neg T(A))$并入前提子句集S中，应用消解原理对新的子句集进行消解：



小结

•反演求解

思考

- 利用消解反演进行问题求解和利用消解反演进行问题证明的过程中，主要的差别是什么？

作业：

已知 规则1：任何人的兄弟不是女性。

$$(\forall x)(\forall y)[Brother(x,y) \rightarrow \neg Woman(x)]$$

规则2：任何人的姐妹必是女性。

$$(\forall x)(\forall y)[Sister(x,y) \rightarrow Woman(x)]$$

事实：Mary是Bill的姐妹。

求证：用消解反演方法证明Mary不是Tom的兄弟。

请依次完成以下小题，从而使问题得证。

（1）将上述规则与事实及求证目标的否定化成子句集。

（2）利用消解原理对上面的子句集中的子句进行消解。

作业

- 已知规则：对于任意的x，y，z，若x是y的父亲且z是x的父亲，则z是y的祖父，即
- $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ [F(z,x) \wedge F(x,y)] \rightarrow G(z,y)$。
- 已知事实1：John是Bob的父亲，即F(John, Bob)。
- 已知事实2：Jim是John的父亲，即F(Jim, John)。
- 用消解反演方法求解：谁是Bob的祖父？