目录

消解原理

- 前面介绍过谓词公式、合式公式性质以及置换、合一等概念。在此基础上,进一步介绍消解原理。
- 消解原理又称为归结原理。该原理是Robinson提出的一种基于逻辑的、采用反证法的推理方法。
- 由于其理论上的完备性，归结原理成为机器定理证明的主要方法。

消解原理

- 证明的基本思想是：
  设F_1、F_2…、F_n、G为公式，G为F_1、F_2…、F_n的逻辑推论，当且仅当公式
  $((F_1\wedge F_2 \ldots\wedge F_n)\rightarrow G)$是有效的。
- 可以采用反证法的思想：
  设F_1、F_2…、F_n、G为公式，G为F_1、F_2…、F_n的逻辑推论，当且仅当公式$(F_1\wedge F_2 \ldots\wedge F_n\wedge\neg G)$是不可满足的。

消解原理

分析：

- 令$C= F_1\wedge F_2 \ldots\wedge F_n$
- $(C\rightarrow G)$等价于$\neg C\vee G$
- $\neg(C\rightarrow G)$等价于$\neg(\neg C\vee G)$，可化为$C\wedge\neg G$，
- 即$(F_1\wedge\ldots\wedge F_n\wedge\neg G)$
- 归结法的本质上就是一种反证法，它是在归结推理规则的基础上实现的：为了证明一个命题P恒真，它证明其反命题¬P恒假，即不存在使得¬P为真的解释，从而证明了命题P恒真。
- 只要证明$((F_1\wedge\ldots\wedge F_n)\rightarrow G)$的否定，即$(F_1\wedge\ldots\wedge F_n\wedge\neg G)$是不可满足的（找不到一个解释使其为真），则说明原公式成立。

基本概念

文字：一个原子公式和原子公式的否定都叫做文字，如：

$P(x)$，$\neg P(x,f(x))$，$Q(x, g(x))$

互补的文字：形如P和¬P，$Q(x)$和$\neg Q(x)$的文字对称为互补的文字

子句：由文字的析取组成的公式，如：

$P(x)\vee Q(x)$，　$\neg P(x,f(x))\vee Q(x,g(x))$

空子句：不包含任何文字的子句。

子句集：由子句构成的集合。

例：$\{P(x)\vee Q(x)\ , \neg P(x, f(x))\vee Q(x,g(x))\ \}$

基本概念

设C_1，C_2，C_3…，C_n为n个子句

合取范式：$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \cdots \wedge C_n$

子句集：　$S=\{C_1, C_2, C_3\cdots, C_n\}$

任何谓词公式 F 都可通过等价关系及推理规则化为相应的子句集S。

消解

- 当消解可使用时，消解过程被应用于母体子句对，以便产生一个导出子句。
- 例如，如果存在某个公理¬ P∨Q和另一公理¬ Q∨R，那么¬ P∨R在逻辑上成立。这就是消解，而称¬ P∨R为¬ P∨Q和¬ Q∨R的消解式（resolvent）。

分析：

- 要证明： ¬P∨R是¬P∨Q和¬Q∨R的逻辑结论，就是要证明使¬P∨Q和¬Q∨R为真的解释I，也使得¬P∨R为真。
- 设I是使¬P∨Q和¬Q∨R为真的任一解释。
- 若解释I下的Q为真，则¬Q为假，又已知¬Q∨R为真，则在I下，R为真，故¬P∨R为真。
- 若解释I下的Q为假，又已知¬P∨Q为真，则在I下，¬P为真，故¬P∨R为真。
- 故¬P∨R是¬P∨Q和¬Q∨R的逻辑结论。

消解

- 所以，以后遇到形如¬ P∨Q和¬ Q∨R的子句，就可以直接得到一个新子句¬ P∨R，这个新子句是由上面两个子句导出的，并且可以看成是消去互补文字Q和¬ Q后剩余部分进行析取构成的新子句，这个过程就是消解。

小结

- 消解原理

思考

- 为什么说¬P∨R是¬P∨Q和¬Q∨R的逻辑结论？

目录

子句集的求取

- 任一谓词演算公式可以都化成一个子句集。其变换过程由下列九个步骤组成：

(1)消去蕴涵符号

只应用∨和¬符号，以¬A∨B替换A → B。

(2)减少否定符号的辖域

- 每个否定符号¬最多只用到一个谓词符号上，并反复应用德 摩根定律。例如：

以¬A∨ ¬B代替¬(A∧B)

以¬A∧¬B代替¬(A∨B)

以(∃x){¬A}代替¬(∀x)A

以(∀x){¬A}代替¬(∃x)A

以A代替¬(¬A)

子句集的求取

(3) 对变量标准化

在任一量词辖域内，受该量词约束的变量为一哑元(虚构变量)，它可以在该辖域内处处统一地被另一个没有出现过的任意变量所代替，而不改变公式的真值。合式公式中变量的标准化，意味着对哑元改名以保证每个量词有其自己唯一的哑元。

例如，把 $(\forall x)\{P(x)\rightarrow(\exists x)Q(x)\}$

标准化而得到：$(\forall x)\{P(x)\rightarrow(\exists y)Q(y)\}$

子句集的求取

(4)消去存在量词

(a) 如果要消去的存在量词在某些全称量词的辖域内

- Skolem函数：在公式$(\forall y)[(\exists x)P(x,y)]$中，存在量词是在全称量词的辖域内，我们允许所存在的x可能依赖于y值。令这种依赖关系用函数$g(y)$定义，它把每个y值映射到存在的那个x。这种函数叫做Skolem函数。如果用Skolem函数代替存在的x，我们就可以消去全部存在量词，并写成：

$$(\forall y)P(g(y), y)$$

- Skolem函数所使用的函数符号必须是新的，即不允许是公式中已经出现过的函数符号。

子句集的求取

- (4)消去存在量词
- (b)如果要消去的存在量词不在任何一个全称量词的辖域内，那么就使用不含变量的Skolem函数即常量。
- 例如，$(\exists x)P(x)$化为P(A)，其中常量符号A用来表示我们知道的存在实体。A必须是个新的常量符号，它未曾在公式中其它地方使用过。

子句集的求取

(5) 化为前束形

到这一步，已不留下任何存在量词，而且每个全称量词都有自己的变量。把所有全称量词移到公式的左边，并使每个量词的辖域包括这个量词后面公式的整个部分。所得公式称为前束形。前束形公式由前缀和母式组成，前缀由全称量词串组成，母式由没有量词的公式组成，即

前束形 ＝（前缀）（母式）

全称量词串　无量词公式

子句集的求取

(6) 把母式化为合取范式

任何母式都可写成由一些谓词公式和(或)谓词公式的否定的析取的有限集组成的合取。这种母式叫做合取范式。我们可以反复应用分配律。把任一母式化成合取范式。例如，我们把A∨{B∧C}化为{A∨B}∧{A∨C}。

子句集的求取

(7) 消去全称量词

到了这一步，所有余下的量词均被全称量词量化了。同时，全称量词的次序也不重要了。因此，我们可以消去前缀，即消去明显出现的全称量词。

(8) 消去合取符号∧

用{(A∨B),(A∨C)}代替(A∨B)∧(A∨C)，以消去明显的符号∧。反复代替的结果，最后得到一个有限集，其中每个公式是文字的析取。任一个只由文字的析取构成的合式公式叫做一个子句。

子句集的求取

(9) 更换变量名称

可以更换变量符号的名称，使一个变量符号不出现在一个以上的子句中。例如，对于子集

$\{\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P[f(x,y)],\ \neg P(x) \vee Q[x,g(x)],\ \neg P(x) \vee \neg P[g(x)]\}$，

在更改变量名后，可以得到子句集：

$\{\neg P(x_1) \vee \neg P(y) \vee P[f(x_1,y)],\ \neg P(x_2) \vee Q[x_2,g(x_2)],$

$\neg P(x_3) \vee \neg P[g(x_3)]$

子句集的求取

例1：将下列谓词演算公式化为一个子句集

$$(\forall x)\{P(x) \rightarrow \{(\forall y)[P(y) \rightarrow P(f(x,y))] \wedge \neg(\forall y)[Q(x,y) \rightarrow P(y)]\}\}$$

$$(\forall x)\{P(x) \boxed{\rightarrow} \{(\forall y)[P(y) \boxed{\rightarrow} P(f(x,y))] \wedge \neg(\forall y)[Q(x,y) \boxed{\rightarrow} P(y)]\}\}$$

子句集的求取过程

1. 消去蕴涵符号

只应用∨和¬符号，以¬A∨B替换A→B。

$$(\forall x)\{\boxed{\neg P(x) \vee}\{(\forall y)[\boxed{\neg P(y) \vee} P(f(x,y))] \wedge \neg(\forall y)[\boxed{\neg Q(x,y) \vee} P(y)]\}\}$$

2. 减少否定符号的辖域

每个否定符号¬最多只是用到一个谓词符号上。

$$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \boxed{(\exists y)[Q(x,y) \wedge \neg P(y)]}\}\}$$

$$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \boxed{(\exists y)[Q(x,y) \wedge \neg P(y)]}\}\}$$

子句集的求取过程

3. 对变量标准化

对哑元（虚构变量）改名，以保证每个量词有其自己唯一的哑元。

$$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge \boxed{(\exists w)[Q(x,w) \wedge \neg P(w)]}\}\}$$

4. 消去存在量词

以Skolem函数代替存在量词内的约束变量，然后消去存在量词。

$$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge [Q(x,\boxed{g(x)}) \wedge \neg P(\boxed{g(x)})]\}\}$$

式中—$w=g(x)$为Skolem函数

子句集的求取过程

5. 化为前束形

把所有全称量词移到公式的左边，并使每个量词的辖域包括这个量词后面公式的整个部分。

前束形={前缀} {母式}

全称量词串 无量词公式

$$\boxed{(\forall x)(\forall y)}\{\neg P(x) \vee \{[\neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge [Q(x,g(x)) \wedge \neg P(g(x))]\}\}$$

6. 把母式化为合取范式

任何母式都可写成由一些谓词公式和（或）谓词公式的否定的析取的有限集组成的合取。

$$(\forall x)(\forall y)\boxed{\{[\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))] \wedge [\neg P(x) \vee Q(x,g(x))] \wedge [\neg P(x) \vee \neg P(g(x))]\}}$$

子句集的求取过程

7.消去全称量词

所有余下的量词均被全称量词量化了。消去前缀，即消去明显出现的全称量词。

$$\{[\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))] \boxed{\wedge} [\neg P(x) \vee Q(x,g(x))] \boxed{\wedge} [\neg P(x) \vee \neg P(g(x))]\}$$

8.消去合取符号∧

用{A,B}代替(A∧B)，消去符号∧。最后得到一个有限集，其中每个公式是文字的析取。

$\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))$

$\neg P(x) \vee Q(x,g(x))$

$\neg P(x) \vee \neg P(g(x))$

子句集的求取过程

9. 更换变量名称

可以更换变量符号的名称，使一个变量符号不出现在一个以上的子句中

$$\neg P(x_1) \vee \neg P(y) \vee P[f(x_1,y)]$$
$$\neg P(x_2) \vee Q[x_2,g(x_2)]$$
$$\neg P(x_3) \vee \neg P[g(x_3)]$$

例2： $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,y) \rightarrow (Q(x,y) \vee R(x,z)))$

解：先消去蕴含符号→，得：

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y) \vee R(x,z))$$

再消去存在量词：

$$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y) \vee R(x,f(x,y)))$$

最后消去全称量词得子句集：

$$S = (\neg P(x,y) \vee Q(x,y) \vee R(x,f(x,y)))$$

例3：

$$(\exists x)(\forall y)\{[S(x) \vee T(x,y)] \rightarrow R(x)\}$$

解：先消去蕴含符号→，得：

$$(\exists x)(\forall y)\{\neg[S(x) \vee T(x,y)] \vee R(x)\}$$

减少否定词辖域：

$$(\exists x)(\forall y)\{[\neg S(x) \wedge \neg T(x,y)] \vee R(x)\}$$

再消去存在量词：

$$(\forall y)\{[\neg S(A) \wedge \neg T(A,y)] \vee R(A)\}$$

母式化为合取范式，消去全称量词，并将母式化为子句集：

$$(\forall y)\{[\neg S(A) \vee R(A)] \wedge [\neg T(A,y)] \vee R(A)]\}$$

$$[\neg S(A) \vee R(A)] \wedge [\neg T(A,y)] \vee R(A)]$$

$$S = \{\neg S(A) \vee R(A), \neg T(A,y) \vee R(A)\}$$

练习

- 将谓词公式化为子句集：

$$(\forall x)(\exists y)\{P(x,y) \vee [Q(x,y) \rightarrow R(x,y)]\}$$

小结

- 化子句集

思考

- 化子句集有哪些步骤？

作业题：

- 将下列谓词公式化为子句集：
- (1) $(\forall x)(\forall y)[On(x,y) \rightarrow Above(x,y)]$
- (2)
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[Above(x,y) \wedge Above(y,z) \rightarrow Above(x,z)]$
- (3) $(\forall x)\{[(\forall y)P(x,y)] \rightarrow \neg(\forall y)[Q(x,y) \rightarrow R(x,y)]\}$