# 人工智能概论

慕彩红
人工智能学院
mucaihongxd@foxmail.com

# 第四章 确定性推理——
## 谓词逻辑表示与推理技术

谓词逻辑表示与推理技术

目录



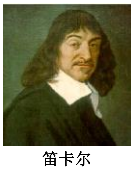
## 机器自动推理

- 逻辑推理是人类的一种重要的智能行为
- 一个用规则和事实来程序化的高速数字计算机可能表现出智力行为

——图灵

经典人工智能技术主要以符号表示、符号处理为实现智能的主要手段，推理和搜索是其中的核心技术

## 自动推理证明的发展史



笛卡尔

莱布尼茨

自动证明的提出

- 笛卡尔、莱布尼茨（17世纪）
  - 萌发了用机械的系统的方法实现定理证明的想法
  - 把一类数学问题当作一个整体，建立统一的证明过程，按照规定的程序步骤机械地进行下去，在有限步骤之后判断出定理的正确性

## 自动推理证明的发展史

- 由于传统的兴趣和应用的价值，初等几何问题的自动求解成为数学机械化的研究焦点。
- 希尔伯特
  - 20世纪初，在他的名著《几何基础》中给出了一条可以对一类几何命题进行判定的定理。
  - 希尔伯特对命题的要求太高，当时仅能解决很少的一类几何定理的机器证明，却是历史上第一个关于某类几何命题的机械化检验方法的定理。

希尔伯特

## 自动推理证明的发展史

- 塔斯基（波兰）
  - 1950年，证明了：“一切初等几何和初等代数范围的命题都可以用机械方法判定”
  - 为几何定理的机器证明开拓了一条利用代数方法的途径
  - 方法太复杂，即使用高速计算机也证明不了稍难的几何定理

塔斯基

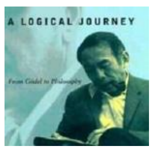
## 自动推理证明的发展史

- 纽厄尔，西蒙和肖
  - 1956年，发表了论文《逻辑理论机》(LTM)
  - 认为LTM不仅是计算机智力的有力证明，也是人类认知本质的证明
  - 1957年开发了**最早的AI程序设计语言**IPL (Information Processing Language)语言
  - 1960年，成功地合作开发了“通用问题求解系统” GPS (General Problem Solver)
  - GPS是根据人在解题中的共同思维规律编制而成的，可以解11种不同类型的问题

艾伦.纽厄尔

赫伯特.西蒙

## 自动推理证明的发展史 —王浩




王浩

- 美籍华裔王浩（1921 —1995）
  - 数学家、逻辑学家、计算机科学家、哲学家。
    - 生于山东济南市
    - 1943年毕业于西南联合大学数学系
    - 1945年毕业于清华大学研究生院哲学系
    - 1948年获哈佛大学哲学博士学位
    - 1954-1956年在牛津大学任高级教职
    - 1961-1967年任哈佛大学教授
    - 1967-1991年任洛克菲勒大学逻辑学教授
    - 20世纪50年代初当选美国科学院院士及不列颠科学院外籍院士。

## 自动推理证明的发展史 —王浩

- 美籍华裔王浩（1921 —1995）
  - **1953年起开始计算机理论与机器证明的研究**。他敏锐地感觉到被认为过分讲究形式的精确又十分繁琐而无任何实际用处的**数理逻辑**，**可以在计算机领域发挥极好的作用**。
  - 1959年，采用“王浩算法”用计算机证明了罗素、怀海德的巨著《数学原理》中的几百条有关命题逻辑的定理，仅用了 9 分钟，宣告了用计算机进行定理证明的可能性，第一次明确提出“**走向数学的机械化**”。

## 自动推理证明的发展史 —王浩

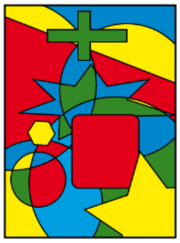
- 美籍华裔王浩
  - 1983年，获国际人工智能联合会 “**数学定理机械证明里程碑奖**”，表彰他在数学定理机械证明研究领域的开创性贡献。
  - 1972年以后，王浩数次回国讲学。1985年兼任北京大学教授；1986年兼任清华大学教授。
  - 新中国成立之初，公开发表演说表示对新中国的支持。1972年回国时曾受周恩来总理的接见。1973年撰写了《访问中国的沉思》，赞美新中国，被报纸与杂志广泛刊载。为此，他受到了许多攻击。他热爱祖国和中华民族的精神值得人们学习与称道。

## 自动推理证明的发展史

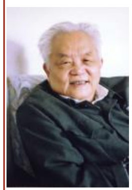
- 1965年，美国数学家鲁滨逊提出了归结原理，该原理的基本出发点是，要证明一个命题为真都可以通过证明其否命题为假得到。
- 该原理推进了用逻辑方法进行机器证明的研究。

## 自动证明的发展

- 1976年，美国年轻的数学家阿佩尔等在高速电子计算机上耗费 1200 小时的计算时间，证明了著名的“四色定理”，人类百年悬而未决的疑问最终被圆满解决了。这一成就轰动一时，成为机器定理证明的一个典范。



## 属于中国的自动证明方法 —吴方法



著名数学家吴文俊

中国科学院数学与系统科学研究院研究员、中国科学院院士、第三世界科学院院士

1919年出生于上海

1940年毕业于交通大学数学系

1949年获法国国家博士学位

1951年回到祖国，任北京大学数学系的教授

1956年与华罗庚、钱学森同台领取国家自然科学奖一等奖；38岁时当选为中国科学院学部委员

1993年获得陈嘉庚数理科学奖

1994年获首届求是科技基金会杰出科学家奖

1997年获Herbrand自动推理杰出成就奖

2001年获国家最高科学技术奖

## 属于中国的自动证明方法 —吴方法

吴文俊

创立了初等几何定理证明的机械化方法，国际上称“吴方法”，首次实现了高效的几何定理的机器证明。“吴方法”也可用于几何定理的自动发现和未知关系的自动推导。吴文俊先生的开创性成果，打破了国际自动推理界在几何定理自动证明研究中长期徘徊不前的局面，也使我国在这一领域处于领先地位。

## 属于中国的自动证明方法 —吴方法

1983年，周咸青在美国数学会年会同期举办的定理机器证明专题会上展示了利用吴方法编制的定理证明器，证明了几百条困难的几何定理，而且每条定理的证明常常都在几秒钟之内。从此，吴方法在西方迅速传播，并使这一日趋被人冷落的研究领域又变得异常活跃。而且，吴方法的成功也使得用代数方法证明几何定理的方向重新受到重视。

## 属于中国的自动证明方法 —吴方法

1984 年出版专著《几何定理机器证明的基本原理》，利用中国古典数学的成就，提出具有中国特色的定理自动证明方法，被国际上誉为“吴氏方法”。
1985 年发表论文“关于代数方程组的零点” —吴文俊消元法，即“吴氏公式”。
2010年5月4日，国际小行星中心发布公报通知国际社会，将国际永久编号为第7683号的小行星永久命名为“吴文俊星”。

## 机器真的能够自动推理吗？

例：

- 已知：A,B,C三人中有人从不说真话，也有人从不说假话。某人向这三人分别提出同一个问题：谁是说谎者？

  A答：“B和C都是说谎者”；

  B答：“A和C都是说谎者”；

  C答：“A和B中至少有一个人是说谎者”。

- 请问：谁是老实人，谁是说谎者？

## 数理逻辑

自然语言不适合计算机处理。

例：小王不方便接电话，他方便去了。

需要一种无歧义，方便存储和表达的形式化符号表征体系。

数理（符号）逻辑是采用数学的方法，研究思维形式及其规律的学科。它不但避免了自然语言的歧义性，同时将推理理论公式化。

数理逻辑既是数学又是逻辑学，它研究数学中的逻辑问题，用数学的方法研究形式逻辑。

数理逻辑包括命题逻辑、谓词逻辑。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 命题逻辑

  逻辑主要研究推理过程，而推理过程必须依靠命题来表达。

- 什么是命题？

  命题是陈述客观外界发生事情的陈述句。

  命题是或为真或为假的陈述句。

- 特征：

  陈述句；

  真假必居其一，且只居其一。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 例1 下列句子是命题吗？

  8小于10。

  8大于10。

  任一个大于5的偶数可表示成两个素数的和。

答：是

- 例2 下列句子是命题吗？

  8大于10吗？

  请勿吸烟。

  X大于Y。

  我正在撒谎。

  —— 悖论

答：不是

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

命题的抽象

- 以p、q、r等表示命题。
- 以1表示真，0表示假。

则命题就抽象为：取值为0或1的p等符号。

- 若p取值1，则表示p为真命题；
- 若p取值0，则表示p为假命题；

真值:作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值。真值只有真和假两种，通常记为1和0（T和F）。

真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 例3：由简单命题能构造更加复杂的命题
- (1) 期中考试，张三没有考及格。
- (2) 期中考试，张三和李四都考及格了。
- (3) 期中考试，张三和李四中有人考90分。
- (4) 如果张三能考90分，那么李四也能考90分。
- (5) 张三能考90分当且仅当李四也能考90分。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 联结词和复合命题

  上述诸如“没有”、“如果・・・ 那么・・・”等连词称为联结词。

- 由联结词和命题连接而成的更加复杂的命题称为复合命题；相对地，不能分解为更简单命题的命题称为简单命题。
- 复合命题的真假完全由构成它的简单命题的真假所决定。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 否定联结词
- 定义1：设p为一个命题, 复合命题“非p”称为p的否定式，记为¬p，“¬”称为否定联结词.“¬p”为真当且仅当p为假。

| p | ¬p |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

- 例3中, 若p代表“期中考试张三考及格了”，则 (1)“期中考试, 张三没有考及格。”可表示为¬p。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 合取联结词
- 定义2：设p、q为两个命题，复合命题“p而且q”称为p、q的合取式，记为p∧q，“∧”称作合取联结词。p∧q为真当且仅当p与q同时为真。

| p | q | p∧q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

- 例3的(2)“期中考试, 张三和李四都考及格了。”可记为p∧q, 其中p代表“张三考及格”,q代表“李四考及格”。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 析取联结词
- 定义3：设p、q为两个命题，复合命题“p或者q”称为p、q的析取式，记为p∨q，“∨”称作析取联结词。p ∨ q 为真当且仅当p与q中至少有一个为真。

| p | q | p∨q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

- 例3的(3)“期中考试, 张三和李四中有人考90分。”可记为p ∨ q, 其中p代表“张三考90分”,q代表“李四考90分”。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- “相容或”与“相斥或”
- 日常语言中“或”有两种标准用法, 例如:
  (1) 张三或者李四考了90分。
  (2) 第一节课上数学课或者上英语课。
- 差别在于：当构成它们的简单命题都真时，前者为真，后者却为假。
  前者称为“相容或”，后者称为“相斥或”。
  前者(“相容或”)可表示为p∨q，后者却不能。
- 注意：不能见了或就表示为p∨q。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 蕴涵联结词
- 定义4：设 p、q 为命题, 复合命题“如果p，则q”称为p对q的蕴涵式，记作p→q，其中又称p为此蕴涵式的前件，称q为此蕴涵式的后件，“→”称为蕴涵联结词。“p→q”为假当且仅当p真而q假。

| p | q | p→q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

- p→q这样的真值规定有其合理性，也有人为因素。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 等价联结词
- 定义5：设p、q为命题, 复合命题“p当且仅当q”称作p、q的等价式, 记作p↔q, “↔”称作等价联结词。

| p | q | p↔q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

- p↔q为真当且仅当p、q同时为真或同时为假。

## 命题逻辑——简单命题与复合命题

- 注意：上述五个联结词来源于日常使用的相应词汇，但并不完全一致，在使用时要注意。
- 以上联结词组成的复合命题的真假值一定要根据它们的定义去理解，而不能据日常语言的含义去理解。
- 不能“对号入座”，如见到“或”就表示为“∨”。
- 有些词也可表示为这五个联结词，如“但是”也可表示为“∧”。
- 结合力的强弱顺序：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，联结词相同时，从左至右运算。
- 在今后我们主要关心的是命题间的真假值的关系，而不讨论命题的内容。

## 命题逻辑——命题符号化练习

- 例4 将下列命题符号化：
- (1)小张是计算机系学生，他喜欢编程。
- (2)铁和氧化合，但铁和氮不化合。
- (3)英语四级考试小张通过了，或者小李通过了。
- (4)如果我下班早，就去商店看看，除非我很累。

（1）小张是计算机系学生，他喜欢编程。

解：$p\wedge q$，其中：

p代表“小张是计算机系学生”，

q代表“小张喜欢编程”。

（2）铁和氧化合，但铁和氮不化合。

解：$p\wedge(\neg q)$，其中：

p代表“铁和氧化合”，

q代表“铁和氮化合”。

（3）英语四级考试小张通过了，或者小李通过了。

解：$p\vee q$，其中：

p代表“英语四级考试小张通过了”，

q代表“英语四级考试小李通过了”。

（4）如果我下班早，就去商店看看，除非我很累。

解：$((\neg p)\wedge q)\rightarrow r$，其中：

p代表“我很累”，

q代表“我下班早”，

r代表“我去商店看看”

## 命题逻辑——命题公式及其解释、等价命题公式

原子公式：单个命题变元、单个命题常元称为原子公式。

命题公式：由如下规则生成的公式称为命题公式：

1. 单个原子公式是命题公式。
2. 若A，B是命题公式，则$\neg A$，$A\wedge B$，$A\vee B$，$A\rightarrow B$，$A\leftrightarrow B$是命题公式。
3. 所有命题公式都是有限次应用1、2得到的符号串。

## 命题逻辑——命题公式及其解释、等价命题公式

命题公式的解释：给命题公式中的每一个命题变元指定一个真假值，这一组真假值，就是命题公式的一个解释。用I表示。

例如：公式$G=(A\vee B)\rightarrow C$的一个解释是：

$I_1(G)=$ A/T, B/F, C/T

在解释$I_1(G)$下G为真。

永真公式与永假公式：如果公式在它所有的解释I下，其值都为T，则称公式G为恒真的；如果其值都为F，则称公式G为恒假的（不可满足的）。

## 命题逻辑——命题公式及其解释、等价命题公式

### 解释的个数及真值表

如果一个公式G中有n个不同的原子公式，则G有$2^n$个不同的解释，于是G在$2^n$个解释下有$2^n$个真值。如果将这些真值和它们的解释列成表，就是G的真值表。

## 命题逻辑——命题公式及其解释、等价命题公式

等价命题公式

如果两个命题公式所含原子公式相同，且在任一解释下，两个命题公式的值相同，则称这两个命题公式为等价命题公式或等价公式。常用的等价公式有：

1. $(P \leftrightarrow Q) = (P \to Q) \land (Q \to P)$
2. $(P \to Q) = (\neg P \lor Q)$
3. $\neg(\neg P) = P$
4. 交换律：$P \lor Q = Q \lor P$

   $P \land Q = Q \land P$

## 命题逻辑——命题公式及其解释、等价命题公式

5.结合律：$P \lor (Q \lor R) = (P \lor Q) \lor R$

$P \land (Q \land R) = (P \land Q) \land R$

6.分配律：$P \lor (Q \land R) = (P \lor Q) \land (P \lor R)$

$P \land (Q \lor R) = (P \land Q) \lor (P \land R)$

7.泛界律：$P \lor F = P$，$P \land T = P$

$P \land F = F$，$P \lor T = T$

8.互余律：$P \lor \neg P = T, P \land \neg P = F$

9.德 • 摩根定律：$\neg(P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$

$\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$

## 命题逻辑——命题公式及其解释、等价命题公式

等价性验证

2. $(P \to Q) = (\neg P \lor Q)$

| p | q | p→q | ¬p∨q |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## 小结

命题公式
联结词
命题符号化
等价命题公式

## 思考

- 如何利用真值表验证两个命题公式为等价命题公式？