模糊推理

模糊命题

1 张三是一个年轻人。 模糊概念

2 李四的身高为1.75m左右。 模糊数据

3 他考上大学的可能性在60%左右。

4 明天八成是个好天气。

模糊推理

模糊命题

◆ 含有模糊概念、模糊数据的语句称为模糊命题。它的一般表示形式为：

x is A

或者 x is A (CF)

其中，A是模糊概念或者模糊数，用相应的模糊集及隶属函数刻画； x是论域上的变量，用以代表所论述对象的属性； CF是该模糊命题的可信度，它既可以是一个确定的数，也可以是一个模糊数或者模糊语言值。

模糊推理

模糊语言值是指表示大小、长短、多少等程度的一些词汇。如：极大、很大、相当大、比较大。模糊语言值同样可用模糊集描述。

模糊数：如果实数域R上的模糊集A的隶属函数$\mu_A(u)$在R上连续且具有如下性质，则A为一模糊数：

(1) A是正规模糊集，即存在u属于R，使得$\mu_A(u)=1$。

(2) A是凸模糊集，即对于任意实数x，a<x<b，有$\mu_A(x)>=\min\{\mu_A(a), \mu_A(b)\}$。

直观上看，模糊数的隶属函数的图形是单峰的，在峰顶时隶属度达到1。

模糊知识的表示

（1）模糊产生式规则的一般形式是：

IF E THEN H (CF,λ)

其中，E是用模糊命题表示的模糊条件；H是用模糊命题表示的模糊结论；CF是知识的可信度因子，它既可以是一个确定的数，也可以是一个模糊数或模糊语言值。λ是匹配度的阈值，用以指出知识被运用的条件。例如：

IF x is A THEN y is B (CF,λ)

（2）推理中所用的证据也用模糊命题表示，一般形式为

x is A’

或者

x is A’ (CF)

（3）模糊推理要解决的问题：证据与知识的条件是否匹配；如果匹配，如何利用知识及证据推出结论。

模糊匹配与冲突消解

◆ 在模糊推理中，知识的前提条件中的A与证据中的A’不一定完全相同，因此首先必须考虑**匹配问题**。例如：

IF x is 小 THEN y is 大 (0.6)

x is 较小

◆ 两个模糊集或模糊概念的相似程度称为**匹配度**。常用的计算匹配度的方法主要有**贴近度**、**语义距离**及**相似度**等。

1. **贴近度**

设A与B分别是论域U={u1, u2, •••, un}上的两个模糊集，则它们的贴近度定义为：

(A, B)= [A•B+(1-A⊙B)] /2

其中

$$A\bullet B=\underset{U}{\vee}(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(u_i))\quad \text{内积}$$

$$A\odot B=\underset{U}{\wedge}(\mu_A(u_i)\vee\mu_B(u_i))\quad \text{外积}$$

2. **语义距离**

(1) **海明距离**

$$d(A,B)=\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

$$d(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b|\mu_A(u)-\mu_B(u)|du$$

(2) **欧几里得距离**

$$d(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i))^2}$$

(3) **明可夫斯基距离**

$$d(A,B)=[\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|^q]^{\frac{1}{q}},\quad q\ge 1$$

(4) **切比雪夫距离**

$$d(A,B)=\max_{1\le i\le n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

匹配度为：1-d(A,B)

3. 相似度

(1) 最大最小法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\max\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}$$

(2) 算术平均法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)+\mu_B(u_i))}$$

(3) 几何平均最小法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mu_A(u_i)\times\mu_B(u_i)}}$$

61

(4) 相关系数法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\bar{\mu}_A)\times(\mu_B(u_i)-\bar{\mu}_B)}{\sqrt{[\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\bar{\mu}_A)^2]\times[\sum_{i=1}^{n}(\mu_B(u_i)-\bar{\mu}_B)^2]}}$$

$$\bar{\mu}_A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i),\quad \bar{\mu}_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_B(u_i)$$

(5) 指数法

$$r(A,B)=e^{-\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|}$$

62

匹配度举例

$$A\bullet B=\bigvee_U(\mu_A(u_i)\wedge\mu_B(u_i))$$ 内积

$$A\odot B=\bigwedge_U(\mu_A(u_i)\vee\mu_B(u_i))$$ 外积

设U={a, b, c, d}

A=0.3/a+0.4/b+0.6/c+0.8/d

B=0.2/a+0.5/b+0.6/c+0.7/d

贴近度：

A•B=(0.3∧0.2)∨(0.4∧0.5)∨(0.6∧0.6)∨(0.8∧0.7)=0.7

A⊙B=(0.3∨0.2)∧(0.4∨0.5)∧(0.6∨0.6)∧(0.8∨0.7)=0.3

(A,B)=1/2[A•B+(1-A⊙B)]=1/2[0.7+(1-0.3)]=0.7

63

匹配度举例

$$d(A,B)=\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

$$d(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b|\mu_A(u)-\mu_B(u)|\,du$$

设U={a, b, c, d}

A=0.3/a+0.4/b+0.6/c+0.8/d

B=0.2/a+0.5/b+0.6/c+0.7/d

海明距离：

d(A,B)=1/4×(|0.3-0.2|+|0.4-0.5|+|0.6-0.6|+|0.8-0.7|)=0.075

(A,B)=1-d(A,B)=1-0.075=0.925

64

匹配度举例

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\max\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}$$

设U={a, b, c, d}

A=0.3/a+0.4/b+0.6/c+0.8/d

B=0.2/a+0.5/b+0.6/c+0.7/d

相似度：

最大最小法：

r(A,B)=((0.3∧0.2)+(0.4∧0.5)+(0.6∧0.6)+(0.8∧0.7))/((0.3∨0.2)+(0.4∨0.5)+(0.6∨0.6)+(0.8∨0.7))

=1.9/2.2=0.86

65

复合条件的模糊匹配

(1) 分别计算出每一个子条件与其证据的匹配度

例如对复合条件

$E=x_1$ is A_1 AND x_2 is A_2 AND x_3 is A_3

及相应证据E'：

x_1 is A'_1 , x_2 is A'_2 , x_3 is A'_3

分别算出A_i与A'_i的匹配度$\delta_{match}(A_i,A'_i)$,i=1,2,3。

66

复合条件的模糊匹配

(2) 求出整个前提条件与证据的总匹配度。
目前常用的方法有“取极小”和“相乘”等。

$\delta_{match}(E,E')=\min\{\delta_{match}(A_1,A'_1),\delta_{match}(A_2,A'_2),\delta_{match}(A_3,A'_3)\}$

$\delta_{match}(E,E')=\delta_{match}(A_1,A'_1)\times\delta_{match}(A_2,A'_2)\times\delta_{match}(A_3,A'_3)$

(3) 检查总匹配度是否满足阈值条件，如果满足就可以匹配，否则为不可匹配。

模糊推理中的冲突消解

当有一条以上的规则的条件部分和当前数据库相匹配时，就需要决定首先使用哪一条规则，这称为冲突消解。

解决方法

（1）按匹配度大小排序

（2）按加权平均值排序

（3）按广义顺序关系排序

模糊推理中的冲突消解

1. 按匹配度大小排序
2. 按加权平均值排序

例如，设$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$，
$A=0.9/u_1+0.6/u_2+0.4/u_3$
$B=0.6/u_2+0.8/u_3+0.5/u_4$
$C=0.5/u_3+0.8/u_4+1/u_5$
$D=0.8/u_1+0.5/u_2+0.1/u_3$

并设有如下模糊知识：

R1:	IF	x is A	THEN	y is H_1
R2:	IF	x is B	THEN	y is H_2
R3:	IF	x is C	THEN	y is H_3

用户提供的初始证据为：

E': x is D

$\delta_{match}(A,D)=\mu_D(u_1)/\mu_A(u_1)+\mu_D(u_2)/\mu_A(u_2)+\mu_D(u3)/\mu_A(u_3)$
$=0.8/0.9+0.5/0.6+0.1/0.4$

同理可得：

$\delta_{match}(B,D)=0.8/0+0.5/0.6+0.1/0.8$
$\delta_{match}(C,D)=0.8/0+0.5/0+0.1/0.5$

以上D与A、B、C的匹配度不是用一个数而是用模糊集形式表示。

下面求匹配度的加权平均值：

$AV(\delta_{match}(A,D))=(0.8\times0.9+0.5\times0.6+0.1\times0.4)/(0.9+0.6+0.4)$
$=0.56$

同理可得：

$AV(\delta_{match}(B,D))=0.27$
$AV(\delta_{match}(C,D))=0.1$

于是得到：

$AV(\delta_{match}(A,D))>AV(\delta_{match}(B,D))>AV(\delta_{match}(C,D))$

所以R1是当前首先被选用的知识。

3. 按广义顺序关系排序

由上例可得：

$\delta_{match}(A,D)=\mu_D(u1)/\mu_A(u1)+\mu_D(u2)/\mu_A(u2)+\mu_D(u3)/\mu_A(u3)$
$=0.8/0.9+0.5/0.6+0.1/0.4$
$\delta_{match}(B,D)=0.8/0+0.5/0.6+0.1/0.8$
$\delta_{match}(C,D)=0.8/0+0.5/0+0.1/0.5$

下面以$\delta_{match}(A,D)$与$\delta_{match}(B,D)$为例说明广义顺序关系排序的方法：

(1)首先用$\delta_{match}(B,D)$的每一项分别与$\delta_{match}(A,D)$的每一项进行比较。比较时$\mu_D(u_i)$与$\mu_D(u_j)$中取其小者，$\mu_A(u_i)$与$\mu_B(u_j)$按如下规则取值：若$\mu_A(u_i) \geq \mu_B(u_j)$则取"1"；若$\mu_A(u_i) < \mu_B(u_j)$则取"0"。例如用$\mu_D(u_1)/\mu_B(u_1)$与$\delta_{match}(A,D)$的各项进行比较时得到：

$$0.8/1+0.5/1+0.1/1$$

(2)然后对得到的各项进行归并，把"分母"相同的项归并为一项，"分子"取其最大者，于是得到如下比较结果：

$$\mu_1/1+\mu_0/0$$

此时，若$\mu_1 > \mu_0$，则就认为$\delta_{match}(A,D)$优于$\delta_{match}(B,D)$，记为$\delta_{match}(A,D) \geq \delta_{match}(B,D)$。

按这种方法，对$\delta_{match}(A,D)$与$\delta_{match}(B,D)$可以得到：

$0.8/1+0.5/1+0.1/1+0.5/1+0.5/1+0.1/0+0.1/1+0.1/0+0.1/0$

$=0.8/1+0.1/0$

由于$\mu_1=0.8>\mu_0=0.1$，所以得到：

$$\delta_{match}(A,D) \geq \delta_{match}(B,D)$$

同理可得：

$$\delta_{match}(A,D) \geq \delta_{match}(C,D)$$
$$\delta_{match}(B,D) \geq \delta_{match}(C,D)$$

最后得到：

$$\delta_{match}(A,D) \geq \delta_{match}(B,D) \geq \delta_{match}(C,D)$$

由此可知**R1**应该是首先被选用的知识。

模糊推理的基本模式

1. 模糊假言推理

知识：**IF　　x is A THEN　　　y is B**

证据：　　　**x is A'**

结论：　　　　　　　　**y is B'**

对于复合条件有：

知识：**IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND…AND x_n is A_n THEN　　y is B**

证据：**x_1 is A'_1，x_2 is A'_2，…，x_n is A'_n**

结论：　　　　　　　　**y is B'**

2. 模糊拒取式推理

知识：IF　x is A　　THEN　y is B

证据：　　　　　　　y is B'

结论：　　x is A'

简单模糊推理

- 知识中只含有简单条件，且不带可信度因子的模糊推理称为简单模糊推理。
- 合成推理规则：对于知识

　　IF　　x is A THEN　　　y is B

首先构造出**A**与**B**之间的模糊关系**R**，然后通过**R**与证据的合成求出结论。

如果已知证据是

x is A'

且**A**与**A'**可以模糊匹配，则通过下述合成运算求取**B'**：

B'=A'◦R

如果已知证据是

y is B'

且**B**与**B'**可以模糊匹配，则通过下述合成运算求出**A'**：

A'=R◦B'

构造模糊关系R的方法

1. 扎德方法

- 扎德提出了两种方法：一种称为**条件命题的极大极小规则**；另一种称为**条件命题的算术规则**，由它们获得的模糊关系分别记为R_m和R_a。

设$A \in F(U)$, $B \in F(V)$，其表示分别为

$$A=\int_U \mu_A(u)/u \quad ,B=\int_V \mu_B(u)/u$$

且用×，∪，∩，¬,⊕分别表示模糊集的笛卡儿乘积、并、交、补及**有界和**运算，则扎德把R_m和R_a分别定义为：

$$R_m=(A\times B)\cup(\neg A\times V)=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,v)$$

$$R_a=(\neg A\times V)\oplus(U\times B)=\int_{U\times V}1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,v)$$

有界和　$x \oplus y=\min\{1,\ x+y\}$

IF x is A THEN y is B

对于模糊假言推理，若已知证据为

x is A’

则：

$B'_m=A'\circ R_m$

$B'_a=A'\circ R_a$

对于模糊拒取式推理，若已知证据为

y is B’

则：

$A'_m=R_m\circ B'$

$A'_a=R_a\circ B'$

扎德法推理举例(1)

例：设U=V={1, 2, 3, 4, 5}, A=1/1+0.5/2, B=0.4/3+0.6/4+1/5

并设模糊知识及模糊证据分别为：

IF x is A THEN y is B x is A’

其中，A’ 的模糊集为：A’ =1/1+0.4/2+0.2/3

则由模糊知识可分别得到R_m与R_a：

$$R_m=\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},R_a=\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0.5&0.5&0.9&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

扎德法推理举例(2)

$$B'_m=A'\circ R_m=\{1,0.4,0.2,0,0\}\circ\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}=\{0.4,0.4,0.4,0.6,1\}$$

$B'_a=A'\circ R_a=\{0.4,0.4,0.4,0.6,1\}$

若已知证据为:y is B’，且B’=0.2/1+0.4/2+0.6/3+0.5/4+0.3/5，则：

$$A'_m=R_m\circ B'=\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.2\\0.4\\0.6\\0.5\\0.3\end{bmatrix}=\{0.5,0.5,0.6,0.6,0.6\}$$

$A'_a=R_a\circ B'=\{0.5,0.6,0.6,0.6,0.6\}$

2. Mamdani方法

IF x is A THEN y is B

$$R_c=A\times B=\int_{U\times V}\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)/(u,v)$$

对于模糊假言推理， $B'_c=A'\circ R_c$

对于模糊拒取式推理， $A'_c=R_c\circ B'$

3. Mizumoto方法

◆ 米祖莫托等人提出了一组构造模糊关系的方法，分别记为R_s, R_g, R_{sg}, R_{gs}, R_{gg}, R_{ss}等等。其定义分别为：

$$R_s=A\times V\underset{s}{\Rightarrow}U\times B=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\xrightarrow[s]{}\mu_B(v)]/(u,v)$$

其中，$$\mu_A(u)\xrightarrow[s]{}\mu_B(v)=\begin{cases}1,\mu_A(u)\le\mu_B(v)\\0,\mu_A(u)>\mu_B(v)\end{cases}$$

$$R_g=A\times V\underset{g}{\Rightarrow}U\times B=\int_{U\times V}[\mu_A(u)\xrightarrow[g]{}\mu_B(v)]/(u,v)$$

其中，$$\mu_A(u)\xrightarrow[g]{}\mu_B(v)=\begin{cases}1,\mu_A(u)\le\mu_B(v)\\\mu_B(v),\mu_A(u)>\mu_B(v)\end{cases}$$

…

设U=V={1,2,3,4,5}, A=1/1+0.5/2, B=0.4/3+0.6/4+1/5

模糊知识： IF x is A THEN y is B

模糊证据： x is A’

其中，A’的模糊集为：A’=1/1+0.4/2+0.2/3

$$R_s=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},R_g=\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0&0&0.4&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$B'_s=A'\circ R_s=\{0.2,0.2,0.2,0.4,1\}$

$B'_g=A'\circ R_g=\{0.2,0.2,0.4,0.6,1\}$

模糊判决方法

在推理得到的模糊集合中取一个相对最能代表这个模糊集合的单值的过程就称作解模糊（去模糊）或模糊判决(Defuzzification)。

模糊判决可以采用不同的方法：
重心法
最大隶属度方法
加权平均法

85

◆下面介绍各种模糊判决方法，并以“水温适中”为例，说明不同方法的计算过程。

◆假设“水温适中”的模糊集合为

F=0.0/0+0.0/10+0.33/20+0.67/30+1.0/40+1.0/50+0.75/60+0.5/70+0.25/80+0.0/90+0.0/100

86

◆1、重心法

所谓重心法就是取模糊隶属函数曲线与横坐标轴围成面积的重心作为代表点。理论上应该计算输出范围内一系列连续点的重心，即

$$u=\frac{\int_x x\mu_N(x)dx}{\int_x \mu_N(x)dx}$$

但实际上是计算输出范围内整个采样点（即若干离散值）的重心。这样，在不花太多时间的情况下，用足够小的取样间隔来提供所需要的精度，这是一种最好的折衷方案。

$$u=\sum x_i\cdot\mu_N(x_i)/\sum\mu_N(x_i)$$

87

F=0.0/0+0.0/10+0.33/20+0.67/30+1.0/40+1.0/50+0.75/60+0.5/70+0.25/80+0.0/90+0.0/100

$$u=\sum x_i\cdot\mu_F(x_i)/\sum\mu_F(x_i)$$

=（0×0.0+10×0.0×+20×.033×+30×0.67×+40×1.0×+50×1.0
+60×0.75×+70×0.5+80×0.25+90×0.0+100×0.0）
/（0.0+0.0+0.33+0.67+1.0+1.0+0.75+0.5+0.25+0.0+0.0）
=48.2

在隶属函数不对称的情况下，其输出的代表值48.2 °C。

88

F=0.0/0+0.0/10+0.33/20+0.67/30+1.0/40+1.0/50+0.75/60+0.5/70+0.25/80+0.0/90+0.0/100

◆ **2.最大隶属度法**

◆ 这种方法最简单，只要在推理结论的模糊集合中取隶属度最大的那个元素作为输出量即可。不过，要求这种情况下的隶属函数曲线一定是单峰曲线。如果该曲线是梯形平顶，那么具有最大隶属度的元素就可能不只一个，这时就要对所有取最大隶属度的元素求其平均值。

◆ 例如，对于“水温适中”这种情况，按最大隶属度原则，有两个元素**40**和**50**具有最大隶属度 **1.0**，那就要对所有取最大隶属度的元素**40**和**50**求平均值，执行量应取：

◆ $u_{max}=(40+50)/2=45$

89

◆ **3.系数加权平均法**

系数加权平均法的输出执行量由下式决定：

$$u=\sum k_i\, x_i/\sum k_i$$

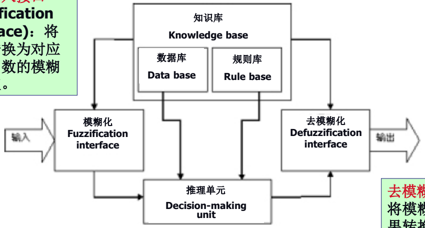
式中，系数k_i的选择要根据实际情况而定，不同的系统决定了系统有不同的响应特性。

90

模糊推理系统

知识库：包含模糊**if-then**规则库和数据库。其中，规则库（**rule base**）中的模糊规则定义和体现了与领域问题有关的专家经验或知识，而数据库则定义模糊规则中用到的隶属函数。

模糊输入接口(fuzzification interface)：将输入转换为对应隶属函数的模糊语言值。



去模糊输出接口：将模糊的计算结果转换为明确的输出。

推理单元(decision-making unit)：按照这些规则和所给的事实执行推理过程，求得合理的输出或结论。

91

小结

- ◈模糊集合
- ◈模糊运算及合成
- ◈模糊推理