谓词逻辑表示与推理技术

目录

1 谓词逻辑基本概念

2 谓词逻辑的语法元素

3 连词与量词

4 量词的辖域

谓词逻辑

- 命题逻辑虽然能够把客观世界的各种实事表示为逻辑命题，但具有很大局限性，不适合表达比较复杂的问题；
- 而谓词逻辑则允许我们表达那些无法用命题逻辑表达的事情。

- 例：张三是大学生。P
- 李四是大学生。Q
- 我们班所有人都是大学生 。

谓词逻辑

- 谓词逻辑是一种形式语言。接近自然语言，又方便存入计算机处理。
- 例：张三是大学生。
- 李四是大学生。
- 谓语有共同的属性：是大学生。因此引入一个符号表示“是大学生”，再引入一个方法表示个体的名称，这样就能把“某某是大学生”这个命题的本质属性刻画出来。
- 用于刻画个体的性质、状态和个体之间关系的语言成分就是谓词。

谓词

一般来说，“x是A”类型的命题可以用A(x)表达。

对于“x大于y”这种两个个体之间关系的命题，可表达为B(x,y)，这里B表示“…大于…”谓词。

A(x)称为一元谓词，B(x, y)称为二元谓词，M(x, y, z)称为三元谓词

依次类推，通常把二元以上谓词称作多元谓词。

用P(x_1,x_2,…x_n)表示一个n元谓词公式 其中P为n元谓词 ，x_1,x_2,…x_n为客体变量或变元。

- 例：张三是大学生。
- 李四是大学生。
- 解：定义谓词U(x)，表示x是大学生，则 U (Zhang)； U(Li)

谓词逻辑的语法元素

- 谓词逻辑的语法元素表示如下：
- 常量（个体符号）:A、B、张三、李四等等，通常是对象的名称。
- 变量符号：习惯上用小写字母表示，如x、y、z等。 项
- 函数符号：习惯上用小写英文字母或小写英文字母串表示，如f、g等。
- 谓词符号：习惯上用大写英文字母或首字母大写的英文字母串表示。
- 联结词（连词）：谓词逻辑中所使用的联结词和命题逻辑中所使用的联结词一样。
- 结合力的强弱顺序： ¬， ∧， ∨， →， ↔

谓词逻辑 --连词和量词

- 连词
- 与/合取(conjunction)
- 例：我喜爱音乐和绘画。
- Like(I, MUSIC) ∧Like(I, PAINTING)

- 或/析取 (disjunction)
- 例：李力擅长打篮球或踢足球。
- Plays(LILI, BASKETBALL)∨Plays (LILI, FOOTBALL)

- 蕴涵 (Implication)—用连词→表示“如果—那么”的语句。
- 例：如果刘华跑得最快，那么他取得冠军。

Runs(LIUHUA， FASTEST) → Wins(LIUHUA，CHAMPION)

- 非 (Not)用符号¬表示否定的公式。
- 例：机器人不在2号房间内。

¬Inroom (ROBOT，r2)

量词

- 全称量词（Universal Quantifiers）
- 若一个原子公式 P(x)，对于所有可能变量x都具有T值,则用 ($\forall x$)P(x)表示。
- 例：所有学生都穿彩色制服。

($\forall x$)[Student(x) → Uniform(x, Color)]

- 所有的机器人都是灰色的。
- ($\forall x$)[Robot(x) → Color(x, Gray)]
- 我们班所有人都是大学生。
- ($\forall x$)[Ourclass(x) → U(x)]

量词

- 存在量词（Existential Quantifiers）
- 若一个原子公式P(x), 至少有一个变元x可使 P(x)为T值，则用($\exists x$)P(x)表示。
- 例：1号房间内有个物体

  ($\exists x$)Inroom(x,r1)

- 一阶谓词演算不允许对谓词符号或函数符号进行量化。

量词的辖域

- 定义:量词的辖域是邻接量词之后的最小子公式，故除非辖域是个原子公式，否则应在该子公式的两端有括号。
- 例：($\forall x$)P(x)→Q(y)
- $\forall x$的辖域是P(x)
- 例：($\exists x$)[P(x,y)→Q(x,y)] ∨ P(y,z)
- $\exists x$的辖域是P(x,y)→Q(x,y)

量词的辖域

- 定义：在量词$\forall x$，$\exists x$辖域内变元x的一切出现叫约束出现，称这样的x为约束变元。
- 变元的非约束出现称为自由出现，称这样的变元为自由变元。
- 例：指出下列谓词公式中的自由变元和约束变元，并指明量词的辖域
- ($\forall x$)[P(x) ∧ R(x)]→($\forall x$) P(x) ∧ Q(x)
- 解：表达式中的$\forall x$[P(x)∧R(x)]中x的辖域是 P(x) ∧ R(x),其中的x是约束出现。
- ($\forall x$) P(x)中x的辖域是 P(x),其中的x是约束出现。
- Q(x)中的x是自由变元。

量词的辖域

- 例：指出下列谓词公式中的自由变元和约束变元，并指明量词的辖域。
- ($\forall x$)[P(x，y)→($\exists y$)R(x，y)]
- 解：其中的P(x，y)中的y是自由变元，x是约束变元，R(x，y)中的x，y是约束变元。
- 注：在一个公式中，一个变元既可以约束出现，又可以自由出现。为避免混淆可用改名规则对变元改名。

小结

- 谓词逻辑基本概念
- 谓词逻辑的语法元素
- 连词与量词
- 量词的辖域

谓词公式

- 原子谓词公式
- 用**P**($x_1,x_2,\ldots x_n$)表示一个**n**元谓词公式 其中**P**为**n**元谓词 ，$x_1,x_2,\ldots x_n$为客体变量或变元。通常把**P**($x_1,x_2,\ldots,x_n$)叫做谓词演算的原子公式。
- 分子谓词公式
- 用连词把原子谓词公式组成复合谓词公式，并把它叫做分子谓词公式。

合式公式(WFF，well-formed formulas)

合式公式的递归定义

1.原子谓词公式是合式公式。

2.若**A**为合式公式，则¬**A**也是一个合式公式。

3.若**A**和**B**都是合式公式，则（**A**∧**B**），(**A**∨**B**)，(**A**→**B**)，(A↔B)也都是合式公式。

4.若**A**是合式公式，x为**A**中的自由变元，则(∀x)**A**和(∃x)**A**都是合式公式。

5.只有按上述**1**至**4**规则求得的那些公式，才是合式公式。

合式公式的真值

- 真值表： **p**与 **q**是两个合式公式，则由这两个合式公式所组成的复合表达可由下列真值表给出

p	q	¬p	p∨q	p∧q	p→q	p↔q
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T

如果两个合式公式，无论如何解释，其真值表都是相同的，那么就称两合式公式是等价的。

合式公式的性质

- 合式公式具有强大的形式化表示功能，但由于包括了多种连词和量词以及它们的嵌套应用，会使表示形式过于复杂，不利于演绎推理系统的设计和高效运作。
- 为此，化简合式公式到某些约定的标准形式是很有意义的，合式公式的性质则为化简工作提供了依据。

合式公式的性质

- 否定之否定：¬(¬P)等价于P。
- P∨Q等价于¬P→Q。
- 德 • 摩根定律：¬ (P∨Q)等价于¬P∧¬Q；¬ (P∧Q)等价于¬P∨¬Q。
- 分配律：P∧(Q∨R)等价于(P∧Q) ∨(P∧R)。
  P∨(Q∧R)等价于(P∨Q)∧(P∨R)。
- 交换律：P∧Q等价于Q∧P；P∨Q等价于Q∨P。
- 结合律：(P∧Q)∧R等价于P∧(Q∧R)；(P∨Q)∨R等价于P∨(Q∨R)。
- 逆否律：P→Q等价于¬Q→¬P。

合式公式的性质

- 量词否定：
  $\neg(\exists x)P(x)$等价于$(\forall x)[\neg P(x)]$；$\neg(\forall x)P(x)$等价于$(\exists x)[\neg P(x)]$；
- 量词分配：
  $(\forall x)[P(x)\wedge Q(x)]$等价于$(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$
  $(\exists x)[P(x)\vee Q(x)]$等价于$(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$
- 约束变量的虚元性（约束变量名的变换不影响合式公式的真值）：
  $(\forall x)P(x)$等价于$(\forall y)P(y)$；$(\exists x)P(x)$等价于$(\exists y)P(y)$；

谓词逻辑表示方法

- 表示步骤：
- (1)先根据要表示的知识定义谓词
- (2)再用连词、量词把这些谓词连接起来

- 例：π的平方是非负的。
- 解：
- 个体：π的平方，以A表示
- 谓词：…是非负的，以Q(x)表示
- 符号化：Q(A)

另解：
个体：π
函数符号：…的平方，以$f(x)$表示
谓词：…是非负的，以Q(x)表示
符号化：$Q(f(\pi))$

谓词逻辑表示方法

- 例：所有实数的平方都是非负的。
- 解：
- 个体：每一个实数，以x代表
- 函数符号：x的平方，以$f(x)$表示
- 谓词：x是非负的，以$Q(x)$表示
- 符号化：$(\forall x)Q(f(x))$

- 另解：
- 个体：每一个数：以z代表
- 谓词：x是一个实数，以$R(x)$表示
- 函数符号：x的平方：以$f(x)$表示
- 谓词：x是非负的：以$Q(x)$表示
- 符号化：$\underline{(\forall z)}\,[R(z)\rightarrow \underline{Q(f(z))}]$

x可以代表不同的个体，称为个体变元（变量）；相对地π等称为个体常元（常量）

个体变元x和z的取值范围不同。个体变元的取值范围称为它的论域（个体域）。

谓词逻辑表示方法

- 对不同的个体变元，用不同的论域是可以的。但有时，不同的个体变元一起讨论时，用不同的论域甚为不便。
- 于是我们设想有一个集合，它包括谓词中各个变元的所有个体域，我们称它为全总个体域。
- 用了全总个体域后，个体变元取值范围一致了，但不同的论述对象，需要不同的特性谓词再加以刻画。

谓词逻辑表示方法

- 人总是要死的。
- 有些人不怕死。
- 如果论域是全人类，用$D(x)$表示“x是要死的”，用$F(x)$表示“x是不怕死的”，则
- 人总是要死的。$(\forall x)\,D(x)$
- 有些人不怕死。$(\exists x)\,F(x)$
- 如果论域是全总个体域，用$M(x)$表示“x是人”，则
- 人总是要死的。$(\forall x)\,[M(x)\rightarrow D(x)]$
- 有些人不怕死。$(\exists x)\,[M(x)\wedge F(x)]$

谓词逻辑表示方法

- 如果论域是全总个体域，用$M(x)$表示“x是人”，则
- 人总是要死的。$(\forall x)\,[M(x)\rightarrow D(x)]$
- 有些人不怕死。$(\exists x)\,[M(x)\wedge F(x)]$
- $M(x)$是特性谓词，用以刻画论述对象具有“人”这一特征。特性谓词的使用有以下两条规则：
- （1）对全称量词，特性谓词作为蕴含式的前件而加入之；
- （2）对存在量词，特性谓词作为合取项而加入之；

谓词逻辑表示方法

- 人总是要死的。 $(\forall x)\,[M(x) \rightarrow D(x)]$
- 有些人不怕死。 $(\exists x)\,[M(x) \wedge F(x)]$
- （1）对全称量词，特性谓词作为蕴含式的前件而加入之；
- （2）对存在量词，特性谓词作为合取项而加入之；
- 思考：人总是要死的。 $(\forall x)\,[M(x) \wedge D(x)]$ 这样表示是否正确？
- 上述的意义是“所有的x都是人并且都是要死的”因而这样表示不正确。

谓词逻辑表示方法

- 例：所有学生都穿彩色制服
  $(\forall x)[\mathrm{Student}(x) \rightarrow \mathrm{Uniform}\ (x, \mathrm{Color})]$
- 所有的机器人都是灰色的
  $(\forall x)[\mathrm{Robot}(x) \rightarrow \mathrm{Color}(x, \mathrm{Gray})]$
- 我们班所有人都是大学生。
- $(\forall x)[\mathrm{Ourclass}(x) \rightarrow \mathrm{U}(x)]$

谓词逻辑表示方法

- 例：凡是有理数皆可写成分数。
- 解：
- $\mathrm{Q}(x)$：x是有理数
- $\mathrm{F}(x)$：x可写成分数
- $(\forall x)\,[\mathrm{Q}(x) \rightarrow \mathrm{F}(x)]$

谓词逻辑表示方法

- 例：有学生通过了英语六级考试。
- 解：
- $\mathrm{Student}(x)$：x是学生
- $\mathrm{Pass}(x，y)$：x通过y考试
- CET6：英语六级考试
- $(\exists x)\,[\mathrm{Student}(x) \wedge \mathrm{Pass}(x，\ \mathrm{CET6})]$

例：已知：A, B, C三人中有人从不说真话，也有人从不说假话。某人向这三人分别提出同一个问题：谁是说谎者？

A答：“B和C都是说谎者”；

B答：“A和C都是说谎者”；

C答：“A和B中至少有一个人是说谎者”。

- 思考：谁是老实人，谁是说谎者？

解：首先定义谓词

$\mathrm{T}(x)$：表示x说真话

把已知前提用谓词公式表示如下：

如果A说的是真话，则有：

$T(A) \rightarrow \neg T(B) \wedge \neg T(C)$

如果A说的是假话，则有：

$\neg T(A) \rightarrow T(B) \vee T(C)$

对B和C说的话作相同的处理，可得：

$T(B) \rightarrow \neg T(A) \wedge \neg T(C)$

$\neg T(B) \rightarrow T(A) \vee T(C)$

$T(C) \rightarrow \neg T(A) \vee \neg T(B)$

$\neg T(C) \rightarrow T(A) \wedge T(B)$

要完成自动推理，接下来需要：

化子句集

应用消解原理

谓词逻辑表示注意事项：

- (1) 分析命题中表示性质和关系的谓词，分别符号化为一元和n（$n \geq 2$）元谓词。
- (2) 根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词。
- (3) 在不同的个体域中，命题符号化的形式可能不一样。如果事先没有给出个体域，都应以全总个体域为个体域。
- (4) 多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序，颠倒后会改变原命题的含义。

练习

- 用谓词演算公式表示下列句子。
- （1）猫比老鼠跑得快。
- （2）有的猫比所有老鼠跑得快。
- （3）并不是所有的猫比老鼠跑得快。
- （4）不存在跑得同样快的两只猫。
- 解 C（x）：x是猫；M（y）：y是老鼠；Q（x，y）：x比y跑得快；L（x，y）：x和y跑得同样快。
- 这4个命题分别符号化为：
- （1）$(\forall x)(\forall y)[C(x)\wedge M(y)\rightarrow Q(x,y)]$；
- （2）$(\exists x)[C(x)\wedge(\forall y)(M(y)\rightarrow Q(x,y))]$；
- （3）$\neg(\forall x)(\forall y)[C(x)\wedge M(y)\rightarrow Q(x,y)]$；
- （4）$\neg(\exists x)(\exists y)[C(x)\wedge C(y)\wedge L(x,y)]$。

练习

- 如果张三比李四大，那么李四比张三小。
- Older(x,y):x比y大
- Younger(x,y)：x比y小
- Older(Zhang,Li)→Younger(Li,Zhang)
- 所有老实人都不会说谎。
- Honest(x):x是老实人
- Lie(x):x说谎
- $(\forall x)[\mathrm{Honest}(x)\rightarrow\neg\mathrm{Lie}(x)]$
- **For every set *x*, there is a set *y*, such that the cardinality of *y* is greater than the cardinality of *x*.**
- $(\forall x)\{Set(x)\rightarrow(\exists y)(\exists u)(\exists v)[Set(y)\wedge Card(x,u)\wedge Card(y,v)\wedge G(v,u)]\}$

练习

- 1 并不是所有的学生选修了历史和生物。
- 2 所有选修人工智能课程的学生都喜欢玩游戏。
- 3 选修人工智能课程的学生都不喜欢玩游戏。
- 4 并不是所有选修人工智能课程的学生都喜欢玩游戏。

- S(x):x是学生；T(x,y):x选修y课程
- Like(x,y):x喜欢y
- H：历史；B：生物；AI：人工智能；Game：游戏

作业
用谓词公式表示下列语句。

- 1 历史考试中有学生不及格。
- 2 凡是选修人工智能课程的学生都参加了人工智能课程的考试。
- 3 不存在两片相同的树叶。
- 4 星期六，未选修人工智能课程的学生都去舞会了。

置换&合一

一个表达式的置换就是在该表达式中用置换项置换变量。

- 置换（Subtitution)是形如{ t_1/x_1, t_2/x_2, …， t_n/x_n}的有限集合。其中，t_i是不同于x_i的项（常量、变量、函数）；$x_1,x_2,\ldots,x_n$是互不相同的变量； t_i/x_i表示用t_i代换x_i。
- 例子：
  - {a/x, w/y, f(s)/z}, {g(x)/x}是置换；
  - {x/x}, {y/f(x)}不是置换；

置换&合一

- 例 表达式P[*x*,*f*(*y*),B]的4个置换为
- s1={*z*/*x*,*w*/*y*}
- s2={A/*y*}
- s3={*q*(*z*)/*x*,A/*y*}
- s4={*c*/*x*,A/*y*}

于是，我们可得到P[*x*,f(*y*),B]的4个置换的例，如下：

- P[*x*,f(*y*),B] s1=P[*z*,*f*(*w*),B]
- P[*x*,f(*y*),B]s2=P[*x*,f(A),B]
- P[*x*,f(*y*),B]s3=P[*q*(*z*),*f*(A),B]
- P[*x*,f(*y*),B]s4=P[*c*,*f*(A),B]

合一

- 合一（Unification)
  合一：寻找项对变量的置换，以使两表达式一致。
- 如果一个置换s作用于表达式集{E_i}的每个元素，则我们用{E_i}s来表示置换例的集。
- 称表达式集{E_i}是可合一的，如果存在一个置换s，使得：$E_1s= E_2s= E_3s=\ldots$
- 我们称此s为{E_i}的合一者，因为s的作用是使集合{E_i}成为单一形式。

合一

- 例：表达式集{P[x,f(y),B],P[x,f(B),B]}的合一者为
- s={A/x,B/y}
- 因为
- P[x，f(y),B]s=P[x,f(B),B]s =P[A,f(B),B]
- 即s使表达式成为单一形式
- P[A,f(B),B]

小结

•合式公式
•谓词逻辑的表示方法