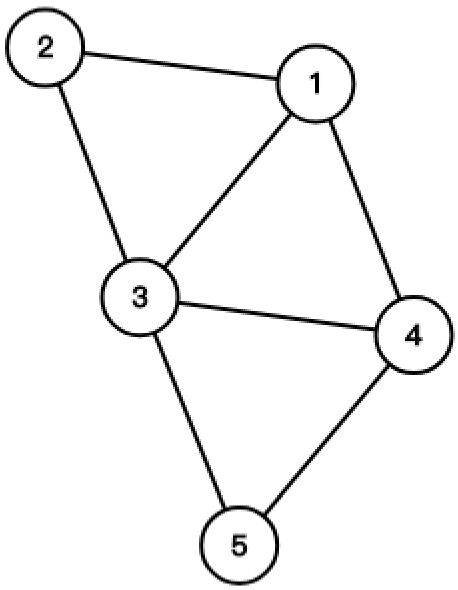
不常用的黑科技——「三元环」

> 给定一张无重边、无自环的无向图
>
> 点数为 n，边数为 m，且 n,m同阶
>
> 问有多少个无序三元组 (i,j,k)，使得存在：
>
> 1. 有一条连接 i,j的边
> 2. 有一条连接 j,k的边
> 3. 有一条连接 k,i的边

举个例子：



这张图中有三个三元环：$(1,2,3),(1,3,4),(3,4,5)$

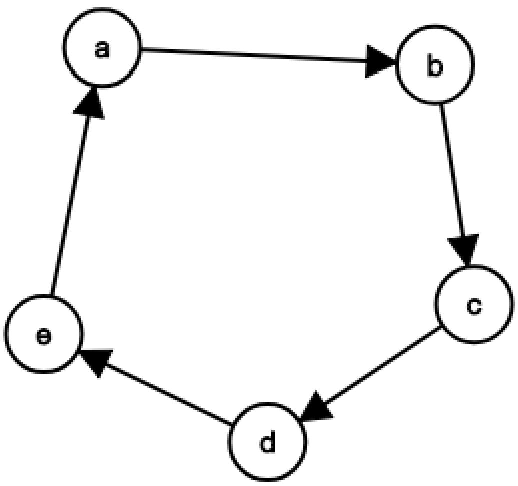
这里介绍一种十分优秀的三元环计数方法：

> 首先要对所有的无向边进行定向，对于任何一条边，从度数大的点连向度数小的点，如果度数相同，从编号小的点连向编号大的点

> 此时这张图是一个有向无环图
>
> 之后枚举每一个点 u，然后将 u的所有相邻的点都标记上“被 u访问了”，然后再枚举 u的相邻的点 v，然后再枚举 v的相邻的点 w，如果 w存在“被 u访问了”的标记，那么 (u,v,w)就是一个三元环了
>
> 而且每个三元环只会被计算一次

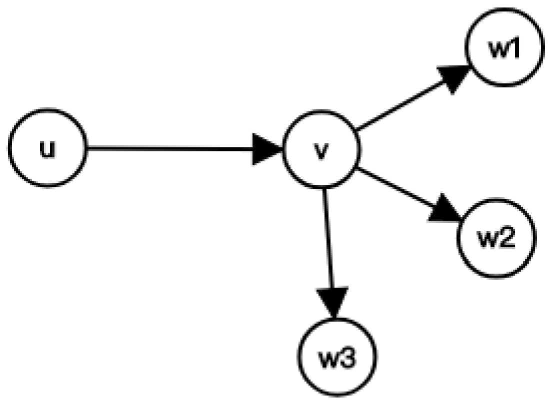
那么现在就只需要证明三件事：

1. 定向后的图是一个有向无环图

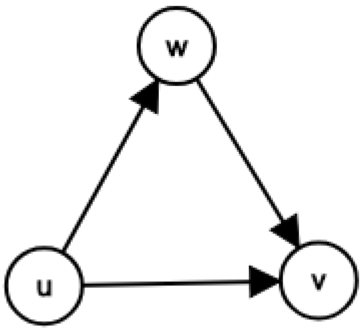
> 
>
>
> 以上图为例，用 deg_u表示 u在原图中的度数，则 $deg_a \ge deg_b \ge deg_c \ge deg_d \ge deg_e \ge deg_a$
>
> 既 $deg_a = deg_b = deg_c = deg_d = deg_e = deg_a$
>
> 对于度数相同的点，是按照编号从小到大连边的，则 $a \le b \le c \le d \le e \le a$
>
> 既 $a = b = c = d = e$
>
> 然而点的编号是 $1 \sim n$的全排列，因此不会产生如上的事情，既不存在环

> 由于这张图有向，而且没有环，因此这张图就是有向无环图

2. 时间复杂度是 $O(m\sqrt{m})$（在此认为 n, m同阶）

> 
>
>
> 对于“打标记”这个操作，每个点都会将所有的出边遍历一遍，那么这里的时间复杂度为 $O(n+m)$
>
> 对于访问 u，然后访问 v，然后访问 w，可以这么考虑：对于每条边（$u \to v$），对时间复杂度的贡献为 out_v，其中 out_v表示 v的出边个数
>
> 这样就转化为了求 $\sum_{i=1}^{n} out_i$
>
> 不妨将 out_v分类讨论
>
> 1. $out_v \le \sqrt{m}$，那么由于 u连接 v，因此 $deg_u \ge deg_v$，这样的 u的个数是 $O(n)$的，因此这里的时间复杂度为 $O(n\sqrt{m})$
> 2. $out_v > \sqrt{m}$，那么由于 u连接 v，因此 $deg_u \ge deg_v$，既 $deg_u > \sqrt{m}$，这样的 u的个数是 $O(\sqrt{m})$的，因此这里的时间复杂度为 $O(\sqrt{m}m) = O(m\sqrt{m})$
>
> 因此时间复杂度为 $O(n+m+n\sqrt{m}+m\sqrt{m}) = O(m\sqrt{m})$

3. 每个三元环只会被统计一次

> 三元环在有向无环图上无非就长这样：
>
> 
>
>
> 也只能且只会在 u处被计算一次