概率论与数理统计 Probability and Statistics

南方科技大学 计算机科学与工程系 11812804 董正

前言 Preface

本笔记是把我曾经手写的笔记敲成电子版

第一章 概率

1.2 样本空间

1.2.1 试验

- 试验的概念
  - 科学实验
  - 对某事物的某一特征进行观察
- 随机试验的特征
  1. 试验可以在相同的条件下重复进行
  2. 试验的结果可能不止一个，但试验前知道全部可能结果
  3. 试验的结果无法预知

  随机试验用字母 E 表示
- 结果的分类
  1. 基本结果（不可分）ω

     又称样本点、基本事件

     例：掷骰子掷出 6 点
  2. 复合结果（可分解）

     称为随机事件，简称事件

     - 基本事件的复合
     - 样本空间的子集

     例：掷出 3 以上的点数

1.2.2 样本空间 Ω

- 试验的全部样本点构成的集合
- 例：掷一枚骰子，观察出现的点数

  $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

1.2.3 几种特殊事件

1. 基本事件

   一个样本点构成的单点集 $\{\omega\}$
2. 必然事件

   每次试验都发生的事件
3. 不可能事件 $\emptyset$

   $\emptyset\subset\Omega$
4. 事件域

   $\mathcal{A}=\{A|A\subset\Omega,A\text{是事件}\}$

1.2.4 事件之间的关系及运算

1.2.4.1 事件之间的关系

1. $A\subset B$：A 包含于 B

   A 发生必然导致 B 发生

   $A=B\equiv A\subset B\wedge B\subset A$
2. $A\cup B=\{\omega|\omega\in A\vee\omega\in B\}$

   A 发生或 B 发生，称为 A 与 B 的和事件
3. $A\cap B=\{\omega|\omega\in A\wedge\omega\in B\}$

   A 与 B 同时发生，称为 A 与 B 的积事件，可记作 AB

   $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{\omega|\omega\in A_i,i=1,2,\ldots,n\}$ (n 可以是 ∞)
4. $A\backslash B=\{\omega|\omega\in A\wedge\omega\notin B\}$

   A 发生 B 不发生，称为 A,B 的差

   若 $A\supset B,$ 则称 $A\backslash B$ 为真差

   $A\backslash B$ 也记作 $A-B$ (存疑)
5. 若 $A\cap B=\emptyset$，则称 A,B 互斥（互不相容）

A, B 不可同时发生

6. 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$，则称 A, B 互为对立事件（逆事件）

   $A = \Omega \backslash B = \overline{B} = B^c$

1.2.4.2 运算律

1. 交换律

   $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

2. 结合律

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. 分配律

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cap (B \cap C) = AB \cap AC = ABC$

4. 摩根律

   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

   $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = 1 - P(A \cap B)$

1.3 概率测度

1.3.1 频率

- 定义

  设 A 为一随机事件，相同条件下重复 n 次试验

  $n_A = n$ 次试验中 A 发生的次数

  $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$，称 n_A 为 A 的频数，$f_n(A)$ 为 A 的频率

  - 一般来说 n 越大 n_A 越大
  - $n_A, f_n(A)$ 的值是随机的
  - $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$
  - $f_n(\Omega) = 1$
- 频率依概率收敛于概率

  $\lim_{n \to \infty} f_n(A) = p$
- 有限可加性

  若 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是两两不相容事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

1.3.2 概率

- 概率的公理化定义 (柯尔莫哥洛夫, 1933)

  设 $\mathcal{A}$ 为样本空间 Ω 上的事件域，$\forall A \in \mathcal{A}$，若 $\exists P(A) \in \mathbb{R}$ 与其对应，且满足

  1. 非负性

     $P(A) \geqslant 0$

  2. 规范性

     $P(\Omega) = 1$

  3. 可列可加性

     对两两不相容的事件列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

  则称 $P(A)$ 为事件的概率，称 $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ 为概率空间

  - 以上是概率这个概念的标准定义，并不是概率的确定方法，你可以说扔硬币正反面的概率是 0.2, 0.8，确实满足定义。但是，是否存在这样的一种硬币，以及一枚标准硬币是否是这样的概率分布，并不能通过公理进行证明。古典概型、几何概型那些才是怎么计算概率究竟是几。

https://www.zhihu.com/question/50046323

- 概率的性质
  1. $P(\emptyset)=0$

     证明:

     $\because \emptyset=\emptyset\cup\emptyset\cup\cdots$

     $\therefore P(\emptyset)=P(\emptyset)+P(\emptyset)+\cdots$ (可列可加性)

     $\because P(\emptyset)\in\mathbb{R}$

     $\therefore P(\emptyset)=0$
  2. 有限可加性

     若 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 是两两不相容事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

3. 若 $A\subset B$ 则
   - $P(B\backslash A)=P(B)-P(A)$
     - $P(B)\geqslant P(A)$

证明:

$\because A\subset B$

$\therefore B=A\cup(B\backslash A)$

互斥事件，根据有限可加性，$P(B)=P(A)+P(B\backslash A)$

$\therefore P(B\backslash A)=P(B)-P(A),P(B)\geqslant P(A)$

4. $0\leqslant P(A)\leqslant 1$
5. $P(\overline{A})=1-P(A)$
6. $P(A)\geqslant P(AB)$
7. 加法定律 (很重要)

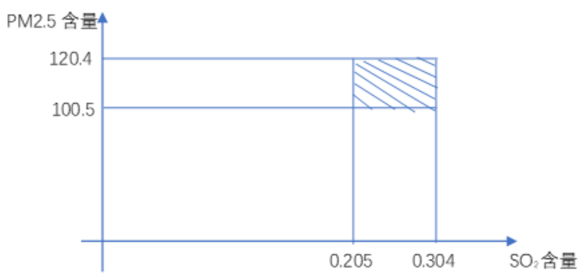
   $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
8. 挖补原理

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

   规律：加奇减偶

例：已知空气中 PM 2.5 含量一般在 0 到 120 $\mu g/m^3$, SO_2 含量一般在 0 到 0.304 ppm 之间，PM 2.5 含量在 100.5 $\mu g/m^3$ 或 SO_2 含量在 0.205 ppm 以上，则认为空气有害。求空气有害的概率

几何概型



$P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

1.4 概率计算

1.4.1 古典概型

1. 古典概型的概念
   - 特征
     - Ω 只有有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$

- 每个样本点出现的可能性相等，即 $P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = \cdots = P\{\omega_n\} = \frac{1}{n}$
    - 又称为等可能概型
  - 概率计算

    $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$

    则 $P(A) = P\{\omega_{i_1}\} + P\{\omega_{i_2}\} + \cdots + P\{\omega_{i_k}\} = \frac{k}{n}$

    $P(A) = \frac{A\text{的有利场合数}}{\text{样本点总数}}$

2. 排列组合
   - 选排列

     $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$
   - 全排列

     $A_n^n = n!$
   - 组合

     $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{A_k^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$
3. 加法原理

   做一件事有 n 类方法，第 1 类有 m_1 种方法，第 2 类有 m_2 种方法...第 n 类有 m_n 种方法

   则方法总数 $N = \sum_{i=1}^n m_i$
4. 乘法原理

   做一件事有 n 个步骤，第 1 步有 m_1 种方法，第 2 步有 m_2 种方法...第 n 步有 m_n 种方法

   则方法总数 $N = \prod_{i=1}^n m_i$
   - 推广

     n 个对象分成 r 类，第 i 类有 n_i 个对象，$i = 1, 2, \ldots, r$ 且 $\sum_{i=1}^r n_i = n$，那么分类方式有

     $$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}^{n_r}$$

- 例：n 个球放入 N 个不同盒，求每盒至多一球的概率

  共 N^n 种投法（每个球有 N 种选择）

  有利场合：N 个盒中选 n 个：A_N^n

  $\therefore P = \frac{A_N^n}{N^n}$

1.4.2 几何概型

- 随机试验

  向平面有界区域 Ω 投掷一个点
- 样本空间

  Ω
- 事件

  点落在可测量面积的平面区域 A
- 事件概率

  $P(A) = \frac{Area(A)}{Area(\Omega)}$

则称上述试验为几何概型

- 事件 A 发生的概率与位置无关，只与 A 的面积有关，这体现了某种等可能性
- 一维或者三维的情况就是长度、体积

1.4.3 习题

1. 证明 $P(AB) + P(AC) - P(BC) \leqslant P(A)$

   证明:

   $\because P(A) \geqslant P(A \cap (B \cup C)), P(BC) \geqslant P(ABC)$

   $\therefore P(A) + P(BC) \geqslant P(A \cap (B \cup C)) + P(ABC)$

   由加法定律，$P(A \cap (B \cup C)) = P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$

   $\therefore P(A) + P(BC) \geqslant P(AB) + P(AC) - P(ABC) + P(ABC) = P(AB) + P(AC)$

   $\therefore P(A) \geqslant P(AB) + P(AC) - P(BC)$
2. 证明 $P(AB) + P(AC) + P(BC) \geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 1$

   证明:

即证 $P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)\leqslant 1$

$\because P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$\therefore$ 即证 $P(A\cup B\cup C)-P(ABC)\leqslant 1$

$\because P(A\cup B\cup C)\leqslant 1, P(ABC)\leqslant 1$

$\therefore P(A\cup B\cup C)-P(ABC)\leqslant 1$

$\therefore$ 原式得证

3. 把 n 个 0 与 n 个 1 随机排列，求没有两个 1 连着的概率

   可以看成有 $2n$ 个位置，只需要考虑 1 放在哪里，剩下的自然是 0

   $\therefore$ 共 C_{2n}^{n} 种放法

   接下来，用 0 把 1 隔开，需要 $n-1$ 个 0，还剩一个，考虑把它插到哪里

   1 0 1 0 1 0 ...

   ↑ ↑

   这两个位置效果一样，都是 1001，所以我们就假设这个 0 只插到 1 的右边，这样有 n 种插法。还有一种是插在开头，所以一共 $n+1$ 种

   $\therefore P=\frac{n+1}{C_{2n}^{n}}$

4. 袋子中有 $n-1$ 个黑球和 1 个白球，每次从口袋中随机摸出一个球，并放入一个黑球，求第 k 次摸球时摸到黑球的概率

   设 $A_k=\{第k次摸到黑球\}$，则 $\overline{A_k}=\{第k次摸到白球\}$

   考虑 $\overline{A_k}$ 的情况:

   因为袋子中只有 1 个白球，所以前 $k-1$ 次摸到的都是黑球

   $\therefore P(\overline{A_k})=(\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{k-1}$

   $\therefore P(A_k)=1-P(\overline{A_k})=1-\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{k-1}$

5. 掷 n 颗骰子，求出现点数最大为 5 的概率

   设 $A=\{最大点数为5\}, B=\{最大点数不超过5\}, C=\{最大点数不超过4\}$

   $\therefore C\subset B$ 且 $A=B\backslash C$

   $\therefore P(A)=P(B)-P(C)=(\frac{5}{6})^n-(\frac{4}{6})^n=\frac{5^n-4^n}{6^n}$

6. n 个人围一圆桌坐，求甲、乙两人相邻的概率

   假设甲先坐好，则乙只有两个位置可坐

   $P=\frac{2}{n-1}$

1.5 条件概率

- 定义

  令 A,B 表示两事件，且 $P(B)\neq 0$。给定事件 B 发生的条件下 A 发生的条件概率为

  $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

  $A|B$ 不是一个事件

- 性质

  1. 非负性

     $\forall A, P(A|B)\geqslant 0$

  2. 规范性

     必然事件 Ω，$P(\Omega|B)=1$

  3. 可列可加性

     设 $\{A_k\}$ 为两两不相容的事件列，则

     $$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_k|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_k|B)$$

  4. 条件概率也满足概率的公式

     $P(A|B)=1-\overline{P}(A|B)$

     $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$

- 乘法定律：求“n 个事件同时发生的概率”

1. 定义

   $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$

2. 推广

   若 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$，则

   $P(A_1A_2\cdots A_n)$

   $=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_1A_2\cdots A_{n-1})$

   $=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_1A_2\cdots A_{n-2})$

   $\cdots$

   $=\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$

- 全概率定律：求“最后结果”的概率

  1. 样本空间的分划

     设 Ω 为样本空间，若 $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 满足

     1. 两两不相容
     2. $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$

     则称 $\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$ 为样本空间的一个分划

  2. 公式

     $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$

     证明：

     $A=A\cap\Omega=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n$

     $\therefore P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$

     $=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$

     $=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$

  - 例：10 件产品中有 3 件次品，从中不放回地取两次，求第二次取得次品的概率

    解：

    设 $A=\{第二次取得次品\},B=\{第一次取得次品\}$

    全概率公式：

    $P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=0.3$

- 贝叶斯公式：已知“最后结果”，求“原因”的概率

  若 $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 为导致试验结果的原因，则称 $P(B_i)$ 为先验概率

  若试验产生事件 A，则要探讨事件发生的原因 $P(B_i|A)$

  称 $P(B_i|A)$ 为后验概率，$P(A|B_i)$ 为原因概率

  $$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}=\frac{P(AB_i)}{P(A)}$$

  实际上就是条件概率的分子分母用乘法定律和全概率公式拆开

  $发生A时发生B的概率=\frac{AB同时发生的概率}{发生A的概率}$

  - 例 1：某工厂的三个车间，产量分别占 $15\%,80\%,5\%$，次品率为 $2\%,1\%,3\%$。现在任取一产品发现为次品，则该次品是哪个车间生产的可能性最大

    解：

    设 $A=\{取到次品\}$，$B=\{次品是第i个车间生产的\},i=1,2,3$

    全概率公式：$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)=0.0125$

    贝叶斯公式：

    $P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.15\times0.02}{0.125}=0.24$

    $P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\frac{0.8\times0.01}{0.125}=0.64$

    $P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=\frac{0.05\times0.03}{0.125}=0.12$

    $\therefore$ 2 车间生产的可能性最大

  - 例 2：某测谎仪，- 表示说真话，+ 表示测得说谎。T 表示人说的是真话，L 表示人在撒谎

    已知 $P(+|L)=0.88,P(-|T)=0.86,P(T)=0.99$

    若有一人测试时显示 +，求测谎仪出错的概率

    解：

    贝叶斯公式：

$$P(T|+)=\frac{P(+|T)P(T)}{P(+|T)P(T)+P(+|L)P(L)}=\frac{(1-0.86)\times 0.99}{(1-0.86)\times 0.99+0.88\times(1-0.99)}=0.94$$

1.6 独立性

- 定义

  若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A,B 相互独立

  - A,B 独立，则 $\overline{A},B;A,\overline{B};\overline{A},\overline{B}$ 相互独立
  - $P(A|B)=P(A)$

    $P(B|A)=P(B)$

- 独立和互不相容的区别

  - 互不相容

    A 发生，B 就一定不发生，反之也是（要么就都别发生）

    $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0$

  - 独立

    A 发生和 B 发不发生没有任何关系

    $P(A|B)=P(A)$

  A,B 不可能既独立又互不相容

- 三个事件的独立性

  两两独立且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

  - 若 A,B,C 三三独立，则 $A\cup B,A\cap B,A\backslash B$ 都与 C 独立

- n 个事件的独立性

  若 n 个事件 $A_1,A_2,\ldots,A_n(n\geqslant 2)$ 满足

  - $P(A_{i_1},A_{i_2},\ldots,A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$
  - $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$
  - $k=2,3,\ldots,n$

  则 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 相互独立

  就是两两独立、三三独立、四四独立、... nn 独立才叫互相独立

- $\Omega,\emptyset$ 与任何事件都相互独立
- 若 A,B 独立，$P(A),P(B)>0$，则 A,B 相容

  $P(AB)=P(A)P(B)>0\rightarrow AB\neq\emptyset$

- 例 1：设一支枪击中目标的概率 $P=0.001$，求 n 支枪齐射命中的概率

  解:

  记 $A_i=\{第i支枪命中目标\},i=1,2,\ldots,n$

  由题意 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 相互独立

  则 $P_n=P(\bigcup_{i=1}^n A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^n\overline{A_i})=1-(1-p)^n=1-0.999^n$

- 例 2：三门炮击中飞机的概率分别为 $0.4,0.5,0.7$，飞机被一门炮击落的概率为 0.2，被两门炮击落的概率为 0.6，被三门炮打中必定被击落，求飞机被击落的概率

  解:

  记 $A=\{飞机被击落\}$

  $A_i=\{飞机被i门炮击中\},i=0,1,2,3$

  $B_j=\{第j门炮击中飞机\},j=1,2,3$

  则:

  $A_1=B_1\overline{B_2B_3}\cup\overline{B_1}B_2\overline{B_3}\cup\overline{B_1B_2}B_3$

  $A_2=B_1B_2\overline{B_3}\cup B_1\overline{B_2}B_3\cup\overline{B_1}B_2B_3$

  $A_3=B_1B_2B_3$

  所以

  $P(A_1)=0.36$

  $P(A_2)=0.41$

  $P(A_3)=0.14$

  全概率公式:

  $P(A)=\sum_{i=0}^3 P(A|A_i)P(A_i)=0+0.36\times 0.2+0.41\times 0.6+0.14\times 1=0.458$

第二章 随机变量

2.1 离散随机变量

- 若变量 X 仅取有限或可列个值，则称 X 为离散型随机变量

2.1.1 概率质量函数 PMF

- 定义
  $P\{X=x_k\}=p(x_k)=p_k, k=1,2,\dots$
  又称频率函数
- 性质
  1. $P(x_k)\geqslant 0, k=1,2,\dots$
  2. 正则性
     $\sum_{k=1}^{\infty} p(x_k)=1$

  以上两条为本质特征（充要条件）
- 表示方法
  1. $P\{X=x_k\}=p(x_k)$
  2. 分布列

X	x_1	x_2	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$

  3. 矩阵
     $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{bmatrix}$

2.1.2 累积分布函数 CDF

- 定义
  对于随机变量 $X, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\{X \leqslant x\} \triangleq \{\omega | X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$$

  $\triangleq$ 表示“定义为”
  称函数 $F(x)=p\{X\leqslant x\}, x\in\mathbb{R}$ 为 X 的分布函数
  - 例：X 的频率函数如下

X	1	2	3
p	0.3	0.2	0.5

    求 X 的分布函数 $F(x)$
    解：
    $\forall x<1, F(x)=P\{X\leqslant x\}=P(\emptyset)=0$
    $\forall 1\leqslant x<2, F(x)=0.3$
    $\forall 2\leqslant x<3, F(x)=p_1+p_2=0.5$
    $\forall x\geqslant 3, F(x)=P(\Omega)=1$
    $\therefore F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 0.3 & 1\leqslant x<2 \\ 0.5 & 2\leqslant x<3 \\ 1 & x\geqslant 3 \end{cases}$
    图像为阶梯状、单调、右连续
- 性质
  1. 单调不减 non-decreasing
  2. $0\leqslant F(x)\leqslant 1$
     $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \lim_{x\to\infty} F(x)=1$
  3. 右连续
     $\lim_{\Delta x\to 0^+} F(x+\Delta x)=F(x)$

  以上三条是判断一个函数是分布函数的判据

- 概率计算
  1. 计算 $P\{a < X \leqslant b\}$

     $P\{a < X \leqslant b\} = P\{X \leqslant b\} - P\{X \leqslant a\} = F(b) - F(a)$
  2. 计算 $P\{X = c\}$

     $P\{X = c\} = \lim_{\Delta t \to 0^+} P\{c - \Delta t < X \leqslant c\} = \lim_{\Delta t \to 0^+} [F(c) - F(c - \Delta t)]$

     若 $X = c$ 处连续，则 $P\{X = c\} = 0$
- 分布函数与事件概率的关系

  $\forall a, b \in \mathbb{R}$
  1. $P\{a < X \leqslant b\} = F(b) - F(a)$
  2. $P\{X = a\} = F(a) - F(a - 0)$
  3. $P\{X \geqslant b\} = 1 - F(b - 0)$
  4. $P\{X > b\} = 1 - F(b)$
  5. $P\{a < X < b\} = F(b - 0) - F(a)$
  6. $P\{a \leqslant X \leqslant b\} = F(b) - F(a - 0)$
  7. $P\{a \leqslant X < b\} = F(b - 0) - F(a - 0)$

2.1.3 离散随机变量的分布

1. 单点分布（退化分布）

   随机变量 X 的 CDF 为 $P\{X = c\} = 1$，称 X 服从单点分布

   记作 $X = c(a.e.)$ 或 $X \xlongequal{a.e.} c$
2. (0-1) 两点分布（伯努利分布）

   若随机变量 X 的频率函数 $P\{X = 1\} = p, P\{x = 0\} = 1 - p$，则称 X 服从 (0-1) 两点分布
3. 二项分布
   - 伯努利试验

     只产生两个结果 $A, \overline{A}$ 的试验

     n 重伯努利试验：将伯努利试验独立重复 n 次的试验
   - 公式

     $X = n$ 重伯努利试验中 A 发生的次数

     $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = b(k; n, p)$

     称 X 服从参数为 (n, p) 的二项分布，$X \sim b(n, p)$
   - 最大值（中心项）

     当 $m = (n + 1)p$ 为正整数时，$b(m; n, p) = b(m - 1; n, p)$ 为最大值

     m 是最可能出现的次数，不是正整数就取整
   - $n = 1$ 时退化为 (0-1) 两点分布
   - $E(X) = np$

     $D(X) = np(1 - p)$
4. 几何分布

   $X = k$，前 k 次全部失败，直到第 k 次才成功

   $$P\{X = k\} = p(1 - p)^{k-1}$$

   记作 $X \sim Ge(P)$
   - 无记忆性

     $P\{X > m + n | X > m\} = P\{x > n\}$
5. 负二项分布

   进行试验直到 r 次成功，用了 k 次

   $$P\{X = k\} = pC_{k-1}^{r-1} p^{r-1} (1 - p)^{k-r} = C_{k-1}^{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}$$

   记作 $X \sim Nb(r, p)$
   - $r = 1$ 时退化为几何分布
6. 超几何分布

   盒中有 n 个球，r 个黑球，$n - r$ 个白球，从盒中无重复抽取 m 个球，设 X 为抽到黑球的次数

   $$P\{X = k\} = \frac{C_r^k C_{n-r}^{m-k}}{C_n^m}, k = 0, 1, 2, \dots, m$$

   先从 r 个黑球中选 k 个，再从 $n - r$ 个白球中选 $m - k$ 个

7. 泊松分布
    - 泊松流
      随时间推移，在时间轴上源源不断出现的随机粒子流
      例：某商店某天的顾客
    - 泊松分布
      X 为区间 $(0,t]$ 中出现的粒子数
      $$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\ldots$$
      $\lambda>0$ 为参数
      记作 $X\sim\pi(\lambda)$ 或 $X\sim P.(\lambda)$
      常用 $k=0$ (一个顾客都没有): $P\{X=0\}=e^{-\lambda}$
    - 性质
      $P\{X=k\}>0$
      $\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda}=1$
    - 泊松分布与泊松流的关系
      $X\sim\pi(\lambda t)$
      $P\{X=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$
      λ 称为泊松强度
    - 泊松定理
      设 $\lambda>0$ 为常数，n 为正整数，$\lim_{n\to\infty}np_n=\lambda$，则 $\forall k=0,1,2,\ldots$
      $$\lim_{n\to\infty}C_n^kp_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
      当 n 很大 p 很小时，根据泊松定理
      $$C_n^kp_n^k(1-p_n)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
8. 多项分布：二项分布的推广
   进行 n 次独立试验，每次试验有 r 种可能的结果，概率为 $p_1,p_2,\ldots,p_r$
   令 N_i 是 n 次试验出现第 i 种结果的总次数，$i=1,2,\ldots,r$，则 $N_1,N_2,\ldots,N_r$ 的联合频率函数
   $$p(n_1,n_2,\ldots,n_r)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$$
    - 例：抛硬币 10 次，每次有 $\frac{3}{8}$ 概率正面，$\frac{3}{8}$ 概率反面，$\frac{1}{4}$ 概率立起来，求出现 4 次正面 3 次反面的概率
      解：
      设 n_1 次正面，n_2 次反面，n_3 次立起来
      $\therefore n_1+n_2+n_3=10$
      $P(n_1,n_2,n_3)=\frac{10!}{n_1!n_2!n_3!}(\frac{3}{8})^{n_1}(\frac{3}{8})^{n_2}(\frac{1}{4})^{n_3}$
      $\therefore P(4,3,3)=\frac{10!}{4!3!3!}(\frac{3}{8})^4(\frac{3}{8})^3(\frac{1}{4})^3$
9. 多维超几何分布
   口袋中有 N 只球，分为 r 类。第 i 种球有 N_i 只，$N_1+N_2+\cdots+N_r=N$
   从中任取 n 只，记 X_i 为取出的 n 只球中第 i 种的个数，则 $(X_1,X_2,\ldots,X_r)$ 的分布为
   $$P(X_1=n_1,X_2=n_2,\ldots,X_r=n_r)=\frac{C_{N_1}^{n_1}C_{N_2}^{n_2}\cdots C_{N_r}^{n_r}}{C_N^n}$$

2.2 连续随机变量

2.2.1 概率密度函数 PDF

- 定义
  若随机变量 X 的分布函数能表示为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,x\in\mathbb{R}$，其中 $f(t)\geqslant 0$，则称 X 为连续型随机变量，非负可积函数 $f(x)$ 称为密度函数
    - 连续随机变量在区间上的取值是“连续的”
    - 连续随机变量的分布函数满足以上特征且连续
      $F(x)$ 可能在有限或可列个点处不可导，但不影响 $f(x)$ 可积

- 例：设 r.v. X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

求概率密度函数 $f(x)$

解:

求导得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

- 性质
  1. $f(x)\geqslant 0$
  2. 正则性

     $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=1$
  3. $\forall x_1<x_2, P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$

     $=P\{x_1<X<x_2\}=P\{x_1\leqslant X<x_2\}=P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}$

     几何意义：面积表示概率

     $P\{x\leqslant x_0\}=\int_{-\infty}^{x_0}f(x)dx$

     $P\{x>x_0\}=\int_{x_0}^{\infty}f(x)dx$
  4. 在 $f(x)$ 的连续点处有 $f(x)=F'(x)$
  5. $P\{X=c\}=0$，但是不代表是不可能事件

     f 在 c 处的高度越大，则 X 取值在 c 附近的概率越大。在某点密度曲线的高度反映了概率集中在该点附近的程度
- p - 分位数

  设 $X\sim f(x)$，若 $\forall 0<p<1$，$\exists$ 常数 x_p 满足 $P\{X\leqslant x_p\}=\int_{-\infty}^{x_p}f(x)dx=p$，则称 x_p 为密度函数的 p 分位数

2.2.2 连续随机变量的分布

1. 均匀分布

   若 r.v. X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

   则称 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布，记作 $X\sim U(a,b)$
   - $\forall(c,c+L)\subset(a,b), P\{c<X<c+L\}=\int_c^{c+L}\frac{1}{b-a}dx=\frac{L}{b-a}$

     只和区间长度有关，和位置无关
2. 指数分布

   若 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

   则称 X 服从参数 $\lambda>0$ 的指数分布，记作 $X\sim EXP(\lambda)$

   λ : 失效率，$\frac{1}{\lambda}$: 平均寿命
   - 分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

   - 无记忆性

     $P\{X>s+t|X>s\}=P\{X>t\}$
   - $E(X)=\frac{1}{\lambda}$

     $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
3. 伽马分布

   若 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $r>0,\lambda>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 (r,λ) 的 Γ 分布，记作 $X\sim\Gamma(r,\lambda)$

$$\Gamma(r)=\int_0^{\infty}x^{r-1}e^{-x}dx,r>0$$

- $\Gamma(1)=1$

  $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

  $\Gamma(n)=(n-1)!$
- r : 形状参数

  λ : 尺度参数
- $\Gamma(1,\lambda)=EXP(\lambda)$

4. 正态分布
   - 定义

     若 X 的密度函数为

     $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in\mathbb{R},\sigma>0$$

     则称 X 服从参数为 (μ,σ^2) 的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$
   - 性质
     1. $f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称
     2. $f(x)$ 在 μ 处取极大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$，左增右减
     3. $f(x)$ 以 x 轴为渐近线
   - 图像

     μ : 位置参数，μ 增大，图像右移

     σ : 刻度参数，σ 增大，图像变尖（高瘦）
   - 标准正态分布

     $\mu=0,\sigma^2=1$

     $$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

     分布函数:

     $$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

     - $\Phi(0)=\frac{1}{2}$
     - 对称性：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
     - 计算
       - $x\geqslant 0$：查表
       - $x<0$：$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
   - 一般正态分布与标准正态分布的转换

     若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，设 $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$，则 $Z\sim N(0,1)$

     $P\{X\leqslant a\}=P\{X-\mu\leqslant a-\mu\}=P\{\frac{x-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{a-\mu}{\sigma}\}=P\{Z\leqslant\frac{a-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
   - 3σ 原则

     $P\{\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\}=0.6826$

     $P\{\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\}=0.9544$

     $P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}=0.9974$
5. 贝塔分布

   $$f(u)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a-1}(1-u)^{b-1},0\leqslant u\leqslant 1$$

   $a=b=1$ 时为均匀分布

   $$p(x)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},0<x<1$$

   记作 $X\sim Be(a,b),a>0,b>0$

   称 $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ 为贝塔函数
   - $B(a,b)=B(b,a)$
   - $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$
   - $Be(1,1)=U(0,1)$

2.3 随机变量的函数

2.3.1 离散随机变量函数的频率函数

1. 离散型+离散型

   设 r.v. X 的频率函数为

X	X_1	X_2	$\cdots$	X_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

   则 $Y=g(X)$ 的频率函数为

X	$g(X_1)$	$g(X_2)$	$\cdots$	$g(X_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

   相同合并

   - 例：X 的频率函数为

X	-1	0	1	2
p	0.2	0.3	0.1	0.4

     求 $Y=(X-1)^2$ 的频率函数

     解：

Y	4	1	0	1
p	0.2	0.3	0.1	0.4

     合并后：

Y	4	1	0
p	0.2	0.7	0.1

2. 连续型+离散型

   例：设 r.v. $X\sim U(0,1)$，定义

   $$Y=\begin{cases}0 & 0<X\leqslant 0.25\\ 1 & 0.25<X\leqslant 0.75\\ 2 & 0.75<X\leqslant 1\end{cases}$$

   求 Y 的频率函数

   解：

   $P\{Y=0\}=P(0<X\leqslant 0.25)=\int_0^{0.25}\frac{1}{1-0}dx=0.25$

   $P\{Y=1\}=P(0.25<X\leqslant 0.75)=\int_{0.25}^{0.75}\frac{1}{1-0}dx=0.5$

   $P\{Y=2\}=P(0.75<X\leqslant 1)=\int_{0.75}^{1}\frac{1}{1-0}dx=0.25$

   因此 Y 的频率函数为

Y	0	1	2
p	0.25	0.5	0.25

2.3.2 连续型随机变量函数的分布

- 计算流程
  1. 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$
  2. 转化为求 X 的概率计算问题

     需要用到函数 $Y=g(X)$ 的性质
  3. 求导 $f_Y(y)=F_Y'(y)$

  - 例 1：设 r.v. X 的密度函数为

    $$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{8} & 0<x<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

    求 $Y=2X+8$ 的密度函数

    解：

    先求 Y 的分布函数

$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X+8\leqslant y\}=P\{X\leqslant \frac{y-8}{2}\}=F_X(\frac{y-8}{2})$

$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt=\begin{cases}\frac{x^2}{16} & 0<x<4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}\frac{(y-8)^2}{64} & 8<y<16\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{y-8}{32} & 8<y<16\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

- 例 2：设 r.v. X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，求 $Y=a+bX,b\neq 0$ 的密度函数

  解：

  $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{a+bX\leqslant y\}$

  1. $b>0$

     $F_Y(y)=P\{X\leqslant \frac{y-a}{b}\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}}f_X(x)dx$

     $\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{b}f_X(\frac{y-a}{b})$

  2. $b<0$

     $F_Y(y)=P\{X\geqslant \frac{y-a}{b}\}=1-\int_{-\infty}^{\frac{y-a}{b}}f_X(x)dx$

     $\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=-\frac{1}{b}f_X(\frac{y-a}{b})$

  综上 $f_Y(y)=F_Y'(y)=sgn(b)\frac{1}{b}f_X(\frac{y-a}{b})$

- 例 3：设 r.v. X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，$Y=g(X)$ 单调递增且处处可导，求 Y 的密度函数

  解：

  $F_Y(y)=P\{g(X)\leqslant y\}$

  $\because Y$单调递增

  $\therefore F_Y(y)=P\{X\leqslant g^{-1}(y)\}=\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)}f_X(x)dx$

  $\because Y$处处可导

  $\therefore f_Y(y)=F_Y'(y)=[g^{-1}(y)]'f_X[g^{-1}(y)]$

- 设 r.v. X 的密度函数为 $f(x)$，$Y=g(X)$ 严格单调，其反函数 $g^{-1}(Y)$ 连续可导，则 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}|[g^{-1}(y)]'|f_X[g^{-1}(y)] & g^{-1}(y)\text{有意义}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

  - 例 4：$X\sim U(0,1)$，求 $Y=e^X$ 的密度函数

    解：

    $X\sim U(0,1)\Rightarrow 0<X<1\Rightarrow 1<Y<e$

    反函数 $h(y)=\ln y,1<y<e$

    $\therefore f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|f_X[h(y)] & 1<y<e\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{y} & 1<y<e\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

- 推论：r.v. X 的密度函数为 $f(x)$，$Y=g(X)$ 在互不相交的区间 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots$ 上逐段严格单调，且其反函数 $h_1(y),h_2(y),\ldots$ 均连续可导，则 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum_i|h_i'(y)|f[h_i(y)] & h_i(y)\text{有意义}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

  - 例 5：设 $X\sim N(0,1)$，求 $Y=X^2$ 的密度函数

    解：

    设 $g(x)=x^2$，则 $x<0$ 时 $g(x)$ 严格单调递减，$x>0$ 时 $g(x)$ 严格单调递增，反函数分别为

    $h_1(y)=-\sqrt{y},h_2(y)=\sqrt{y},y>0$

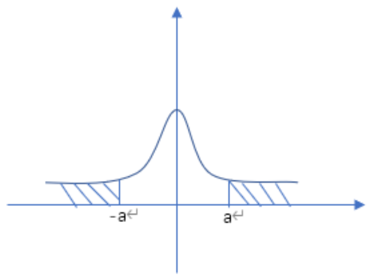
    $\therefore h_1'(y)=-\frac{1}{\sqrt{2y}},h_2'(y)=\frac{1}{\sqrt{2y}},y>0$

    $\therefore f_Y(y)=\begin{cases}|h_1'(y)|\varphi[h_1(y)]+|h_2'(y)|\varphi[h_2(y)] & y>0\\ 0 & y\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\leqslant 0\end{cases}$

2.4 第二章习题

1. 设 $X\sim p(x)$ 且 $p(x)=p(-x)$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，则对任意实数 $a>0$，求 $F(-a)$

   解：



根据偶函数的性质，阴影部分面积相等

即 $F(-a)=1-F(a)$

$\therefore F(0)=1-F(0)\Rightarrow F(0)=\frac{1}{2}$

$\therefore F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a p(x)dx$

2. 设 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-e^{-x} & x\geqslant 1\end{cases}$$

求 $P(X=1)$

解:

$P(X=1)=P(X\leqslant 1)-P(X<1)=F(1)-F(1-0)$

$=F(1)-\lim_{\Delta x\to 0}F(1-\Delta x)=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$

3. 经验表明：预订餐厅座位而不来就餐的顾客的比例为 20%。现在餐厅有 50 个座位，但预订给了 52 个人，求顾客到来时餐厅没有空位的概率

解:

设 X 为 52 位顾客中不来的人数

由题意，顾客鸽了的概率 $p=0.2$

$X\sim b(52,0.2)$

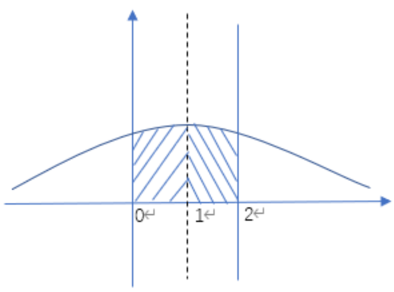
餐厅中没有空位 $\Leftrightarrow$ 最多俩人鸽了

$\therefore P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0.8^{52}+C_{52}^{1}0.8^{51}0.2^{1}+C_{52}^{2}0.8^{50}0.2^{2}$

4. 设 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$ 且 $\int_0^2 f(x)dx=0.6$，求 $P(X<0)$

解:

1. 作图



$P(X<0)=\frac{1-0.6}{2}=0.2$

2. 计算

$1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{\infty}f(x)dx$

令 $x=1+t$

原式 $=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+0.6+\int_1^{\infty}f(1+t)dt$

$=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+0.6+\int_1^{\infty}f(1-t)dt$

令 $u=1-t$

原式 $=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+0.6+\int_0^{\infty}f(u)d(-u)$

$=2\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+0.6$

$\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=0.2\Rightarrow P(X<0)=0.2$

5. 设 $Y\sim EXP(1)$，$a>0$ 为常数，求 $P(Y\leqslant a+1|Y>a)$

解：无记忆性

$P(Y \leqslant a+1|Y>a) = 1-P(Y>a+1|Y>a) = 1-P(Y>1) = P(Y \leqslant 1) = F(1) = 1-e^{-1}$

6. 设 $X \sim N(10,4)$，求 $P(10<X<13), P(|X-10|<2)$

解:

$P(10<X<13) = P(\frac{10-10}{2} < \frac{X-10}{2} < \frac{13-10}{2}) = \Phi(1.5)-\Phi(0) = 0.9932-0.5 = 0.4932$

$P(|X-10|<2) = P(8<X<12) = P(\frac{8-10}{2} < \frac{X-10}{2} < \frac{12-10}{2}) = \Phi(1)-\Phi(-1) = 2\Phi(1)-1 = 0.6826$

7. 已知 $X \sim N(3,2^2)$ 且 $P(X>k) = P(X \leqslant k)$ 求 k

解:

$P(X>k) = P(X \leqslant k)$ 且 $P(X>k)+P(X \leqslant k) = 1$

$\therefore P(X \leqslant k) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\frac{X-3}{2} \leqslant \frac{k-3}{2}) = \Phi(\frac{k-3}{2}) = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{k-3}{2} = 0 \Rightarrow k = 3$

8. 设 $X \sim N(\mu,4^2), Y \sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1 = P(X \leqslant \mu-4), p_2 = P(Y \geqslant \mu+5)$

则 $A. \forall\mu, p_1 = p_2$ $\quad B. \forall\mu, p_1 < p_2$ $\quad C.$ 个别$\mu, p_1 = p_2$ $\quad D. \forall\mu, p_1 > p_2$

解：A

$P(X \leqslant \mu-4) = P(\frac{X-\mu}{4} \leqslant -1) = \Phi(-1) = 1-\Phi(1)$

$P(Y \geqslant \mu+5) = P(\frac{Y-\mu}{5} \geqslant 1) = 1-\Phi(1)$

$\therefore p_1 = p_2$

9. 设随机变量 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且 $P(|X-\mu_1|<1) > P(|Y-\mu_2|<1)$

则必有 $A. \sigma_1 < \sigma_2$ $\quad B. \sigma_1 > \sigma_2$ $\quad C. \mu_1 < \mu_2$ $\quad D. \mu_1 > \mu_2$

解：A

$P(|X-\mu_1|<1) = P(-1<X-\mu_1<1) = P(-\frac{1}{\sigma_1} < \frac{X-\mu_1}{\sigma_1} < \frac{1}{\sigma_1}) = 2\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-1$

同理 $P(|Y-\mu_2|) = 2\Phi(\frac{1}{\sigma_2})-1$

$\therefore \Phi(\frac{1}{\sigma_1}) > \Phi(\frac{1}{\sigma_2})$

$\because \Phi(x)$ 单增

$\therefore \frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2} \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$

10. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[1,3]$ 上均匀分布的概率密度

若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x) & x \leqslant 0 \\ bf_2(x) & x > 0 \end{cases}$ $\quad a,b>0$ 为概率密度函数，则 a,b 满足

解:

$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$

$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} af_1(x)dx + \int_0^3 bf_2(x)dx = 1$

$\therefore \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b = 1 \Rightarrow 2a+3b = 4$

11. 设 $X \sim p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求 $Y = e^X$ 的概率密度

解:

$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(e^X \leqslant y) \xlongequal{y>0} P(X \leqslant \ln y) = F_X(\ln y) = \int_0^{\ln y} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

$\therefore f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi y(1+\ln^2 y)} & y>0 \\ 0 & y \leqslant 0 \end{cases}$

12. 设 $X \sim N(0,\sigma^2)$，求 $Y = X^2$ 的密度函数

解:

$Y = X^2 > 0 \Rightarrow y \leqslant 0$ 时 $f_Y(y) = 0$

$y>0$ 时 $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$

$\therefore f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} - (-\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, y>0$

$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} & y>0 \\ 0 & y \leqslant 0 \end{cases}$

第三章 联合分布

3.1 联合累积分布函数

- 二维随机变量

  设 Ω 为样本空间，$X=X(\omega), Y=Y(\omega), \omega\in\Omega$ 是定义在 Ω 上的两个 r.v.

  记 $(X,Y)\triangleq(X(\omega),Y(\omega)),\omega\in\Omega$ 称 (X,Y) 为二维随机变量或二维随机向量

- 分布函数

  1. 概念

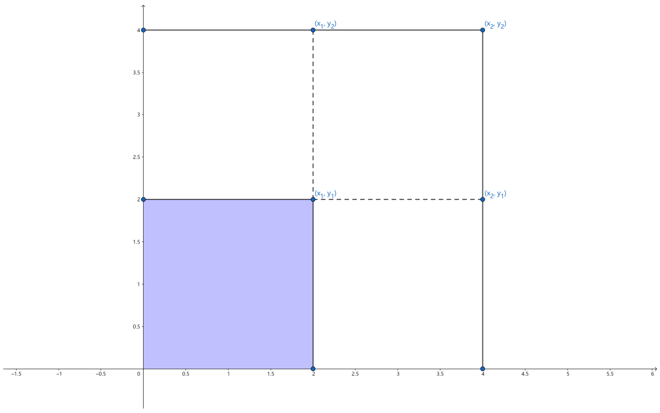
     设 (X,Y) 为二维随机变量。$x,y\in\mathbb{R}$，定义 $F(x,y)\triangleq P(X\leqslant x, Y\leqslant y)$

     称 $F(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合累积分布函数

     几何意义：落在 (x,y) 左下方区域的概率

  2. 概率计算

     $$P(x_1<X\leqslant x_2, y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

     多减了一块阴影

  3. 性质

     1. 任意固定 x_0，$F(x_0,y)$ 是 y 的单调不减函数

        任意固定 y_0，$F(x,y_0)$ 是 x 的单调不减函数

     2. $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$

        $F(\infty,\infty)=1, F(-\infty,-\infty)=0$

        $F(-\infty,y)=0, F(x,-\infty)=0$

     3. $F(x,y)=F(x,y+0)$ 关于 y 右连续

        $F(x,y)=F(x+0,y)$ 关于 x 右连续

     4. $\forall x_1<x_2, y_1<y_2$ 有

        $F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geqslant 0$

        这一条不能由前三条推出，例如 $F(x,y)=\begin{cases}1 & x+y\geqslant 1\\ 0 & x+y<-1\end{cases}$

3.2 二维离散型随机变量

3.2.1 联合频率函数

- 概念

  设 r.v. (X,Y) 的所有可能取值为 x_i,y_j，取值的概率为 $P(X=x_i,Y=y_j)=p(x_i,y_j)=p_{ij}$

  $i,j=1,2,\ldots$ 称上式为 (X,Y) 的频率函数或联合频率函数

- 性质

  1. 非负性

     $P(X=x_i,Y=y_j)\geqslant 0$

  2. 正则性

     $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$

3.2.2 边际分布

- 概念

  称 $F_X(x)$ 为 (X,Y) 关于 X 的边际分布函数，$F_Y(y)$ 是关于 Y 的边际分布函数

  $F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(X\leqslant x,Y\leqslant\infty)=F(x,\infty)$

  同理 $F_Y(y)=F(\infty,y)$

  边际分布完全由联合分布决定

- 边际频率函数

  设 (X,Y) 的频率函数为 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\ (i,j=1,2,\ldots)$

  则 X 的频率函数是 $P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\ (i=1,2,\ldots)$

  同理 Y 的频率函数 $P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$

  称数列 $\{p_{i\cdot}\}$ 为 (X,Y) 关于 X 的边际频率函数，$\{p_{\cdot j}\}$ 为关于 Y 的边际频率函数

  - 例：设 X 从 $1,2,3,4$ 中等可能取值，Y 从 1 到 X 中等可能取值，求 (X,Y) 的联合频率函数以及各自的边际频率函数

    解：

    X 的取值为 $1,2,3,4$，当 $X=i\ (i=1,2,3,4)$ 时，Y 的取值为 $1\sim i$。由乘法公式，

    $P(X=i,Y=j)=P(Y=j|X=i)P(X=i)=\frac{1}{4i},1\leqslant j\leqslant i$

    所以联合频率函数为

$Y\backslash X$	1	2	3	4	$p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{48}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{48}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{48}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{48}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

    边际频率函数为

X	1	2	3	4
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
$p_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$

3.3 二维连续型随机变量

3.3.1 联合概率密度函数

- 概念

  设 r.v. (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)$，若存在非负可积函数 $f(x,y)$ 使得 $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=F(x,y)$，则称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合概率密度函数

- 性质

  1. $f(x,y)\geqslant 0$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)dudv=1$
  3. $\forall D\in\mathbb{R}^2,P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy$

     曲顶柱体的体积
  4. 在 $f(x,y)$ 的连续点处有 $\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

     F_{xy},F_{yx} 混合二阶偏导

- 例：(X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(2x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

  求：(1) k (2) $F(x,y)$ (3) $P(Y\leqslant X)$

  解：

  (1)

  $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$

  $\therefore k\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-2x-y}dxdy=k\int_0^{\infty}e^{-2x}dx\int_0^{\infty}e^{-y}dy=\frac{k}{2}=1$

$\therefore k=2$

(2)

$F(x,y)$

$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$

$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-2u-v}dudv & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

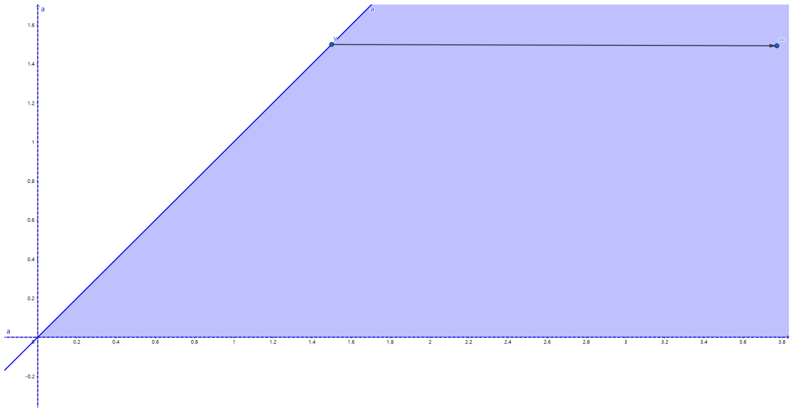
$=\begin{cases}2\int_0^x e^{-2u}du\int_0^y e^{-v}dv & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}) & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

(3)

记 $D=\{(x,y)|y\leqslant x,x,y>0\}$，则 $P(Y\leqslant X)=P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy$

$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_y^{\infty}2e^{-2x-y}dx=\frac{1}{3}$



3.3.2 二维连续变量的边际密度函数

- 边际密度

  X 的分布函数 $F_X(x)=P\{X\leqslant x,Y<\infty\}=\int_{-\infty}^{x}(\int_{-\infty}^{\infty}f(u,y)dy)du$

  则 X 的边际密度函数为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy,x\in\mathbb{R}$

  同理 $f_Y(y)\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx,y\in\mathbb{R}$

  注意积分的上下限根据题意找范围

  - 例：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & x>0,y>x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 求 $f_X(x),f_Y(y)$

    解：

    $x\leqslant 0$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}0dy=0$

    $x>0$ 时 $f_X(x)=\int_x^{\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$

    $y\leqslant 0$ 时 $f_Y(y)=0$

    $y>0$ 时 $f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx=ye^{-y}$

    综上，

    $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$

    $f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y} & y>0\\ 0 & y\leqslant 0\end{cases}$

- Farlie-Morgenstern 族

  设 $F(y),G(y)$ 是一维连续型分布函数，则 $\forall|\alpha|<1$

  $H(x,y)=F(x)G(y)\{1+\alpha[1-F(x)][1-G(y)]\}$ 是二元连续分布函数

  其边际分布 $H(x,\infty)=F(x),H(\infty,y)=G(y)$

  给定边际分布，可以构造无数个不同的二维联合分布

- 连接函数 coupla

  边际分布为均匀分布的联合累积分布函数，记作 $C(u,v)$

  性质：

  1. $C(u,v)$ 关于每个变量都是不减的
  2. $P(U\leqslant u)=C(u,1)=u,C(1,v)=v$
  3. 讨论具有密度函数的连接函数，此时 $c(u,v)=\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}C(u,v)\geqslant 0$

4. 若 X, Y 是分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 的连续随机变量，则 $U = F_X(x)$ 和 $V = F_Y(y)$ 是均匀分布随机变量。对于连接函数 $C(u, v)$，定义联合分布 $F(x, y) = C[F_X(x), F_Y(y)]$，则其边际分布为 $F_X(x), F_Y(y)$，相应的密度为 $f(x, y) = c[F_X(x), F_Y(y)]f_X(x)f_Y(y)$

   说明：两个边际分布与任意的连接函数，可以构造出相同边际分布的联合分布，即：边际分布不能决定联合分布，两个变量的相依性由连接函数控制

3.3.3 二维正态分布

若 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$$

则称 (X, Y) 服从参数为 $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的二维正态分布，记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

其中各参数 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$

- 定理：若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 则 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- 正态密度的图形及边际密度的几何意义

  边际密度是正态曲线

  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$：固定 y，截面曲边梯形的面积
- X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$
- 给定 X 时 Y 或给定 Y 时 X 的条件密度是一维正态分布
- 两个边际密度是正态分布的变量，联合分布不一定是二维正态分布
- 对于二维正态分布，独立 $\Leftrightarrow$ 不相关

3.4 独立随机变量

- 独立变量

  设 $(X, Y) \sim F(x, y), X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y)$

  若 $\forall x, y \in \mathbb{R}$，有 $P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = P(X \leqslant x)P(Y \leqslant y)$，即 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

  则称 X, Y 相互独立
  - 直观意义

    X, Y 的取值是相互独立、互不相干的

    事件 $\{x_1 < X \leqslant x_2\}, \{y_1 < Y \leqslant y_2\}$ 独立
  - 判定相互独立
    1. $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$（本质定义）
    2. $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
    3. $p_{ij} = p_i p_j$
  - X, Y 独立 $\Leftrightarrow f(x, y)$ 可分离变量，$f(x, y) = g(x)h(y)$
- 二维离散型随机变量的独立性

  设 (X, Y) 的频率函数为 $P(X = X_i, Y = y_j) = p_{ij}\ (i, j = 1, 2, \ldots)$

  则 X, Y 相互独立等价于 $\forall i, j = 1, 2, \ldots$，有 $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$
- 二维连续型随机变量的独立性

  设 (X, Y) 为连续型随机变量且 $(X, Y) \sim f(x, y), X \sim f_X(x), Y \sim f_Y(y)$

  若 (X, Y) 相互独立，则 $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv = P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv$

  从而在 $f(x, y), f_X(x), f_Y(y)$ 的连续点处有 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
  - 例：在某一分钟内，信号进入收信机是等可能的。若收到两个互相独立的信号间隔为 0.5 秒，则信号产生相互干扰，求两信号互相干扰的概率

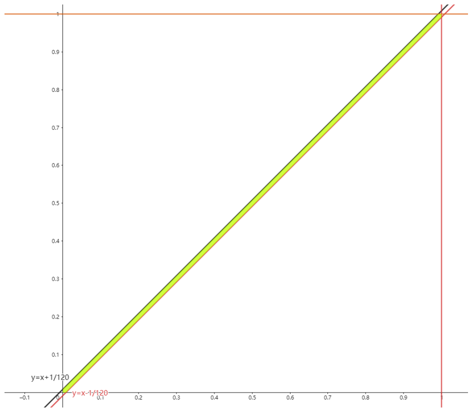
    解：

    设两信号进入收信机的时间分别为 X, Y 分钟，则 $X \sim U(0, 1), Y \sim U(0, 1)$

    $\because X, Y$ 独立

    $\therefore f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

    $\therefore P(|X - Y| \leqslant \frac{1}{120}) = \iint_{|X-Y| \leqslant \frac{1}{120}} f(x, y)dxdy = \iint_D 1dxdy = S_D = 1 - (1 - \frac{1}{120})^2 = 0.016$



- n 维随机变量的边际分布和独立性
  1. 一维边际分布

     设 n 维随机变量的分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\ldots,X_n\leqslant x_n)$

     则 X_i 的边际分布

     $F_{X_i}(x_i)=P(X_1<\infty,X_2<\infty,\ldots,X_{i-1}<\infty,X_i\leqslant x_i,X_{i+1}<\infty,\ldots,X_n<\infty)$

     即 $F(\infty,\infty,\ldots,\infty,x_i,\infty,\ldots,\infty)$
  2. 二维边际分布

     $F_{X_1X_2}(x_1,x_2)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,X_3<\infty,X_4<\infty,\ldots,X_n<\infty)$

     即 $F(x_1,x_2,\infty,\ldots,\infty)$

     类似地可定义高维边际分布
  3. 随机向量的独立性
     - $\forall X_1,X_2,\ldots,X_n\in\mathbb{R}$，若 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$

       则称 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立
     - 两个向量的独立性

       设 $(X_1,X_2,\ldots,X_m)\sim F_1(x_1,x_2,\ldots,x_m),(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)\sim F_2(y_1,y_2,\ldots,y_n)$

       且 $(X_1,X_2,\ldots,X_m;Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)\sim F(x_1,x_2,\ldots,x_m;y_1,y_2,\ldots,y_n)$

       $\forall x_1,x_2,\ldots,x_m,y_1,y_2,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$，若有 $F(x_1,x_2,\ldots,x_m;y_1,y_2,\ldots,y_n)=F_1F_2$，则称 $(X_1,X_2,\ldots,X_m),(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ 相互独立
     - 定理

       设 $(X_1,X_2,\ldots,X_m),(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ 相互独立，则
       1. X_i,Y_j 相互独立
       2. 设 h,g 分别为 m 元和 n 元的连续函数，则

          $h(X_1,X_2,\ldots,X_m),g(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$ 依然相互独立

3.5 条件分布

3.5.1 条件频率函数

- 定义

  设 (X,Y) 的频率函数为 p_{ij}，对于确定的 j，若 $P(Y=y_j)=p_{\cdot j}>0$

  则 $P_{X|Y}(X_i,Y_j)=P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ 为在 $Y=y_j$ 的条件下，X 的条件频率函数

  $P_{Y|X}(y_j|x_i)$ 同理
- 性质
  1. 非负性
  2. 正则性

3.5.2 条件概率密度

- 定义

  设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，若对于固定的 y_0，(X,Y) 关于 Y 的边际密度 $f_Y(y_0)>0$，则称

  $\frac{f(x,y)}{f_Y(y_0)}=f_{X|Y}(x|y_0),x\in\mathbb{R}$ 为在 $Y=y_0$ 的条件下，X 的条件密度

  $F_{X|Y}(x|y_0)=\int_{\infty}^{x}f_{X|Y}(u|y_0)du$ 为 $Y=y_0$ 条件下，X 的条件分布
- 性质
  1. 非负性

2. 正则性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(u|y)du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du = \frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)du = \frac{1}{f_Y(y)} f_Y(y) = 1$$

- 连续情形的全概率公式

  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$

  对 x 积分 $\Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$（边际分布的定义）

- 平面上的均匀分布

  设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A，若 (X,Y) 的概率密度为

  $f(x,y) = \begin{cases} A & (x,y) \in G \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则称 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，记作 $(X,Y) \sim U(G)$

  边际密度不一定是均匀分布

3.5.3 例题

1. 设随机变量 $Y \sim N(0,1)$，求 $X_1 = \begin{cases} 0 & |Y| \geqslant 1 \\ 1 & |Y| < 1 \end{cases}$ 和 $X_2 = \begin{cases} 0 & |Y| \geqslant 2 \\ 1 & |Y| < 2 \end{cases}$ 的联合分布列

   解:

   $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(|Y| \geqslant 2) = P(Y \geqslant 2 \vee Y \leqslant -2) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 0.0455$

   $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(1 \leqslant |Y| < 2) = P(-2 < Y \leqslant -1 \vee 1 \leqslant Y \leqslant 2) = \Phi(-1) - \Phi(-2) + \Phi(2) - \Phi(1) = 2\Phi(2) -$

   $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(|Y| < 1, |Y| \geqslant 2) = 0$

   $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(|Y| < 1) = P(-1 < Y < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

   综上，(X_1, X_2) 的分布列为

$X_1 \backslash X_2$	**0**	**1**
0	0.0455	0.2719
1	0	0.6826

2. (X,Y) 服从区域 $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 上的均匀分布，求 X 的边际密度 $f_X(x)$

   解:

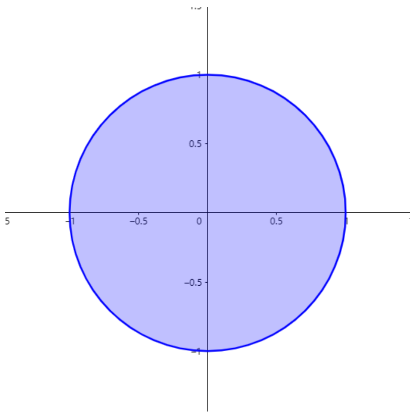
   由题意 $F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

   $x > 1$ 或 $x < -1$ 时 $f_X(x) = 0$

   $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$

   综上，X 的边际密度为

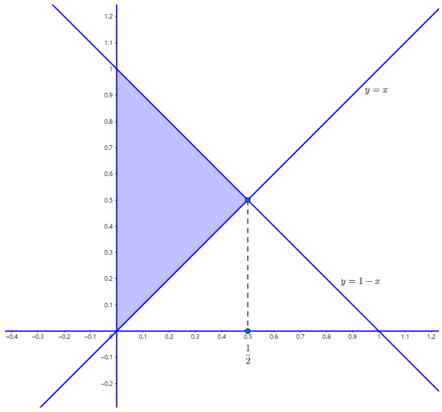
   $f_X(X) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$



3. 设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & 其他 \end{cases}$，求 $P(X + Y \leqslant 1)$

   解:

   $P(X + Y \leqslant 1) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_x^{1-x} e^{-y}dydx = 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}$



3.6 联合分布随机变量函数

3.6.1 连续型 $Z=X+Y$

1. 卷积公式

   若 X,Y 相互独立，则 $Z=X+Y$ 的密度函数为

   $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$

   $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

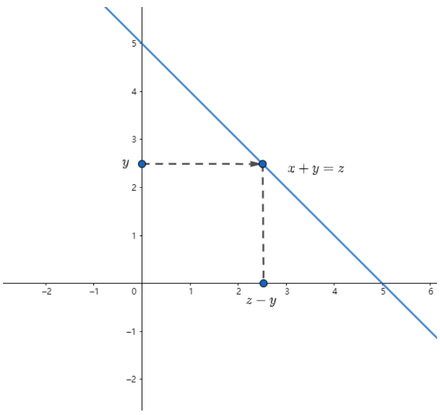
   $=f_X*f_Y$

   - 证明：

     $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant Z)=\iint_{x+y\leqslant z}f(x,y)dxdy$

     $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dxdy\xlongequal{x=u-y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}f(u-y,y)dudy=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{\infty}f(u-y,y)dy]du$

     $\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$



2. 独立正态随机变量的和

   - $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X,Y$ 独立

     则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2),X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

   - $X_1,X_2,\dots,X_n$ 相互独立且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2),i=1,2\dots,n$

     则对于不全为 0 的常数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 有

     $a_1X_1+a_2X_2+\dots+a_nX_n\sim N(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)$

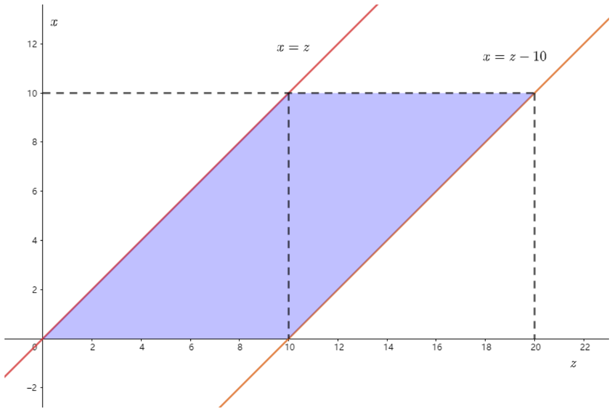
- 例 1：独立变量 X,Y 的概率密度均为 $f(x)=\begin{cases}\frac{10-x}{50} & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

  求 $Z=X+Y$ 的概率密度

  解：

  由卷积公式，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f(z-x)dx$

  被积函数的非 0 区域 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 10\\ 0\leqslant z-x\leqslant 10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 10\\ x\leqslant z\leqslant x+10\end{cases}$



$\therefore f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x)f(z-x)dx & 0 \leqslant z \leqslant 10 \\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)dx & 10 \leqslant z \leqslant 20 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{z^3-60z^2+600z}{15000} & 0 \leqslant z \leqslant 10 \\ \frac{(20-z)^3}{15000} & 10 \leqslant z \leqslant 20 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

3.6.2 离散型 $Z = X + Y$

1. 卷积公式（离散）

   设 X, Y 独立，$P(X=i) = p_i, P(Y=j) = q_j \ (i,j=1,2,\ldots)$

   则 $Z = X + Y$ 的频率为

   $P(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=k-i)P(Y=i), k=1,2,\ldots$

- 例 2：X, Y 独立且 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$，求 $Z = X + Y$ 的分布

  解:

  由离散卷积公式

  $P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=k-i)P(Y=i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^i}{i!} e^{-\lambda_2}$

  $= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} \lambda_1^{k-i}\lambda_2^i \xlongequal{\text{二项分布}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda_1^{k-i}\lambda_2^i$

  $\xlongequal{\text{二项式}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$

  $\therefore Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

3.6.3 $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布

1. $Z = \frac{X}{Y}$ 的计算

   设 $(X,Y) \sim f(x,y), F_Z(z) = P(\frac{X}{Y} \leqslant z) = \iint_{\frac{x}{y} \leqslant z} f(x,y)dxdy$

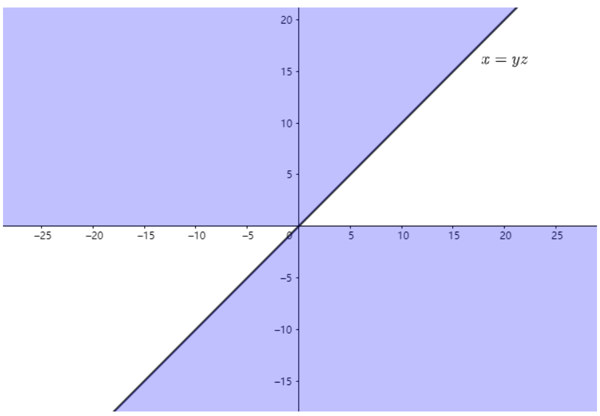
   $F_Z(z) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{yz} f(x,y)dxdy$

   令 $u = \frac{x}{y}, y = y$，则 $|J| = |\begin{vmatrix} y & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}| = |y| \ (x = uy)$

   则 $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} (\int_{-\infty}^{\infty} f(uy,y)|y|dy)du$

   $\therefore f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(zy,y)|y|dy$

   当 X, Y 独立时 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(zy)f_Y(y)|y|dy$



2. 柯西分布

$$f(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi\gamma[1 + (\frac{x-x_0}{\gamma})^2]}, x \in \mathbb{R}$$

- 例 3：设 X,Y 独立且密度函数均为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的密度

  解：

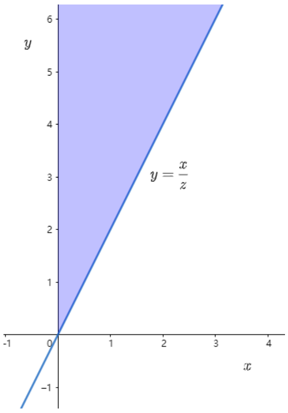
  $Z\geqslant 0$ 时 Z 的分布函数 $F_Z(z)=P(\frac{X}{Y}\leqslant Z)=\iint_{\frac{x}{y}\leqslant z,x,y>0}e^{-(x+y)}dxdy$

  $=\int_0^\infty\int_0^{yz}e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^\infty e^{-y}(1-e^{-yz})dy=1+\frac{1}{1+z}$

  $f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{(1+z)^2},z>0$

  综上，

  $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{(1+z)^2} & z>0\\ 0 & z\leqslant 0\end{cases}$



- 例 4：X,Y 独立且服从标准正态分布，求 $Z=\frac{Y}{X}$ 的概率密度

  解：

  $Z=\frac{Y}{X}$，则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,xz)|x|dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2z^2}{2}}dx$

  偶函数积一半 $=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty xe^{-x^2\frac{z^2+1}{2}}$

  换元 $u=x^2$，$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-u\frac{z^2+1}{2}}du=\frac{1}{\pi(z^2+1)}$（利用 $\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda x}dx=1,\lambda=\frac{z^2+1}{2}$）

  $\therefore f_Z(z)=\frac{1}{\pi(z^2+1)},z\in\mathbb{R}$ 服从标准柯西分布

3.6.4 两个随机变量变换的分布

1. 设 X_1,X_2 独立且服从标准正态分布，且 $Y_1=X_1,Y_2=X_1+X_2$

   则 $(Y_1,Y_2)\sim N(0,0,1,2,\sqrt{\frac{1}{2}})$

   - 推论 1：两个独立标准正态 r.v. 的线性变换服从二元正态分布
   - 推论 2：两个 r.v. 的联合分布是二元正态分布，则它们的非奇异线性变换仍服从二元正态分布

- 例 6：设 X,Y 独立，概率密度均为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

  求 $U=X+Y,V=\frac{X}{Y}$ 的联合密度，并证明 U,V 独立

  解：

  $$F_{UV}(u,v)=P(X+Y\leqslant U,\frac{X}{Y}\leqslant V)=\iint_{\begin{cases}x+y\leqslant u\\ \frac{x}{y}\leqslant v\\ x,y\geqslant 0\end{cases}}f(x)f(y)dxdy$$

  令 $x+y=s,\frac{x}{y}=t$，则 $x=\frac{st}{1+t},y=\frac{s}{1+t}$

  $$\therefore J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}=-\frac{s}{(t+1)^2},s\geqslant 0,t\neq -1$$

  $$\therefore F_{UV}(u,v)=\iint_{\begin{cases}x+y\leqslant u\\ \frac{x}{y}\leqslant v\\ x,y\geqslant 0\end{cases}}e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^v\int_0^u e^{-s}|J|dsdt=\frac{ue^{-u}}{(1+v)^2},u,v\geqslant 0$$

  $\because F_{UV}(u,v)$ 可表示为 $g(u)h(v)=ue^{-u}\cdot\frac{1}{(1+v)^2}$

  $\therefore U,V$ 相互独立

3.6.5 随机变量的其他函数

变量变换法：

已知 (X,Y) 的分布，(U,V) 为 (X,Y) 的函数 $U=g_1(X,Y),V=g_2(X,Y)$，求 (U,V) 的分布：

若 $\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_2(x,y) \end{cases}$ 存在反函数 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

则 (U,V) 的联合密度为 $p_{UV}(u,v) = p_{XY}[x(u,v), y(u,v)]|J|$

其中 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

- 例 7：X, Y 独立，密度函数分别为 $f_X(x), f_Y(y)$，求 $U = XY$ 的密度函数

  解：

  设 $V = Y$

  $\begin{cases} u = xy \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{y} \\ y = v \end{cases}$

  $\therefore J = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u^2}{v} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{v}$

  $\therefore f(u,v) = f_X(\frac{u}{v}) f_Y(v)|J| = f_X(\frac{u}{y}) f_Y(y) \frac{1}{|y|}$

  $\therefore f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\frac{u}{y}) f_Y(y) \frac{1}{|y|}$

解题步骤：

1. 设变量
2. 求 $X =, Y =$
3. 求 $|J|$
4. 代入得 $f(u,v) = f_X(\cdots) f_Y(\cdots)|J|$
5. 求边际密度得 $f_U(u)$

- 例 8：设 X, Y 独立且均服从 $N(0, \sigma^2)$，求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度

  解：

  $Z \geqslant 0$ 时 Z 的分布函数为

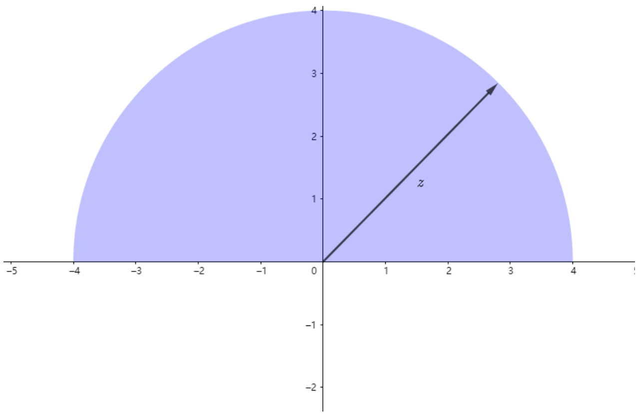
  $F_Z(z) = P(\sqrt{X^2+Y^2} \leqslant z) = \iint_{\sqrt{X^2+Y^2} \leqslant z} f_X(x) f_Y(y) dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_D e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy$

  换极坐标

  $F_Z(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho d\theta = \int_0^z \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = \int_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\frac{\rho^2}{2\sigma^2} = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

  $\therefore f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & z \geqslant 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$

  这样的分布称为瑞利分布



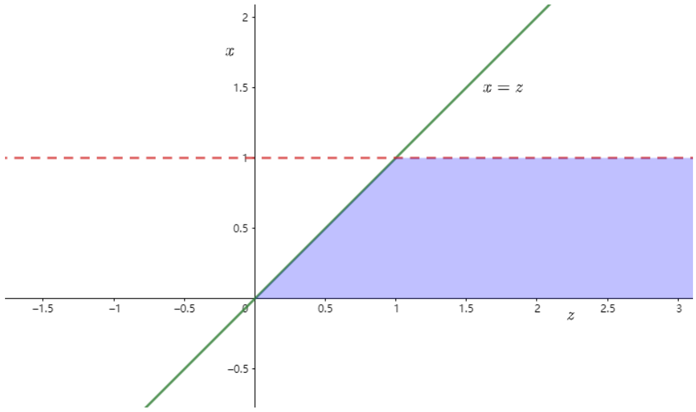
- 例 9：设 X, Y 独立，$X \sim U(0,1), Y \sim EXP(1)$，求 $Z = X + Y$ 的密度

  解：

  $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leqslant 0 \end{cases}$

  卷积公式：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$

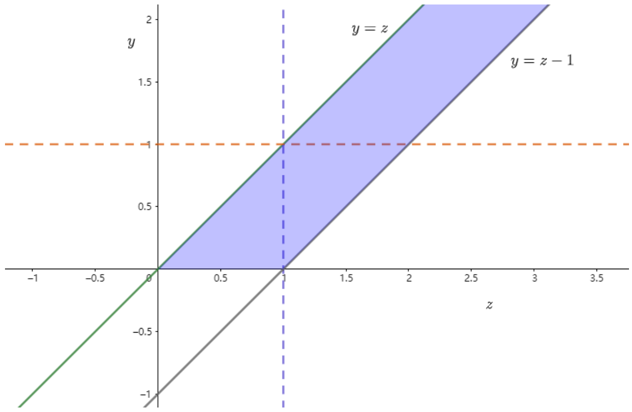
  找积分范围：$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = z - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ z > x \end{cases}$



$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \int_0^1 f_X(x)f_Y(z-x)dx & z>1\\ 0 & z<0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z} & 0\leqslant z\leqslant 1\\ e^{-z}(e-1) & z>1\\ 0 & z<0\end{cases}$$

另一条卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$

$$\begin{cases}0\leqslant z-y\leqslant 1\\ y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z-1\leqslant y\leqslant z\\ y>0\end{cases}$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z e^{-y}dy & 0\leqslant z\leqslant 1\\ \int_{z-1}^z e^{-y}dy & z>1\\ 0 & z<0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z} & 0\leqslant z\leqslant 1\\ e^{-z}(e-1) & z>1\\ 0 & z<0\end{cases}$$

3.7 极值和顺序统计量

3.7.1 极值 $\max(X,Y)$ 和 $\min(X,Y)$ 的分布

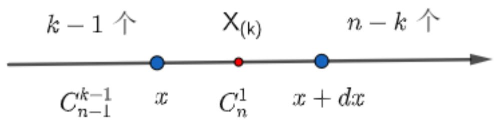
1. $X\sim F_X(x),Y\sim F_Y(y)$ 且 X,Y 独立
   $F_{\max}(z)=P(\max(X,Y)\leqslant z)=P(X\leqslant z,Y\leqslant z)=F_X(z)F_Y(z)$
   $F_{\min}(z)=P(\min(X,Y)\leqslant z)=1-P(\min(X,Y)>z)=1-P(X>z,Y>z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]$
2. $X_i\sim F_{X_i}(x),i=1,2,\ldots,n$ 且 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立
   $F_{\max}(z)=P(\max(X_1,X_2,\ldots,X_n)\leqslant z)=\prod_{i=1}^n F_{X_i}(z)$
   $F_{\min}(z)=P(\min(X_1,X_2,\ldots,X_n)\leqslant z)=1-\prod_{i=1}^n[1-F_{X_i}(z)]$
   - $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 独立同分布时
     $F_{\max}(z)=[F(z)]^n$
     $F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n$
     $f_{\max}(z)=n[F(z)]^{n-1}f(z)$
     $f_{\min}(z)=n[1-F(z)]^{n-1}f(z)$
3. X,Y 独立且概率密度均为 $f(x)$
   $f_{\max}(z)=F'_{\max}(z)=2f(z)F(z)=2f(z)\int_{-\infty}^z f(t)dt$
   $f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=2f(z)[1-F(z)]=2f(z)[1-\int_{-\infty}^z f(t)dt]$

3.7.2 顺序统计量 $X_{(k)}$ 的分布

- 概念
  将独立同分布的 r.v. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 从小到大排序为 $X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)}$
  最小值 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$，最大值 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$

若 $n=2m+1$，则中位数为 $X_{(m+1)}$

- 求 $X_{(k)}$ 的密度



$P(x\leqslant X_{(k)}\leqslant x+dx)=P(\text{第}k\text{个在}x\sim x+dx)P(k-1\text{个在}x\text{左边})P(n-k\text{个在}x\text{右边})$
$=\int_x^{x+dx}f(x)dx\cdot F^{k-1}(x)\cdot[1-F(x)]^{n-k}\cdot C_n^1C_{n-1}^{k-1}$
$=f(x)dx\cdot F^{k-1}(x)\cdot[1-F(x)]^{n-k}\cdot C_n^1C_{n-1}^{k-1}=f_k(x)dx$
$\therefore f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}f(x)F^{k-1}(x)[1-F(x)]^{n-k}$

- $[0,1]$ 区间上均匀分布的 $f_k(x)$

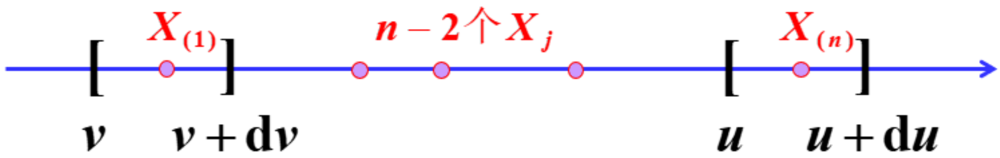
$F(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

代入公式得 $f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k},0\leqslant x\leqslant 1$，即 $Beta(k,n-k+1)$

推论：因为密度函数积分 = 1

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx=\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}$$

- $U=X_{(n)},V=X_{(1)}$ 求 $f(u,v)$



$P(v\leqslant X_{(1)}\leqslant v+dv,u\leqslant X_{(n)}\leqslant u+du)=C_n^1C_{n-1}^1\cdot f(v)dv\cdot[F(u)-F(v)]^{n-2}\cdot f(u)du=f(u,v)dudv$
$\therefore f(u,v)=n(n-1)f(u)f(v)[F(u)-F(v)]^{n-2},u\geqslant v$
对于均匀分布 $U(0,1):f(u,v)=n(n-1)(u-v)^{n-2},0\leqslant v\leqslant u\leqslant 1$

3.8 第三章习题

1. 已知 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，问 X,Y 是否独立

   解：看 $f(x,y)$ 是不是等于 $f_X(x)f_Y(y)$
   求边际密度：
   $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\infty}e^{-x-y}dy=e^{-x},x>0$
   $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^{\infty}e^{-x-y}dx=e^{-y},y>0$
   $\therefore f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，$X,Y$ 独立

2. 设 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)$，求证 X,Y 独立的充要条件为 $f(x,y)$ 可分离变量，即 $f(x,y)=g(x)h(y)$

   证明：
   充分性：X,Y 独立 $\Rightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
   必要性：令 $a=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx,b=\int_{-\infty}^{\infty}h(y)dy$
   $\therefore ab=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)h(y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$
   $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=g(x)\int_{-\infty}^{\infty}h(y)dy=b\cdot g(x)$
   $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=h(y)\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx=a\cdot h(y)$
   $\therefore f_X(x)f_Y(y)=ab\cdot g(x)h(y)=f(x,y)$
   $\therefore X,Y$ 独立

3. 设 (X,Y) 服从圆域 $G:x^2+y^2\leqslant 1$ 上的均匀分布，求 $f_{X|Y}(x|y)$

   解：

   $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

   $f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & -1\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$\therefore f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}\\ 0 & \text{其他}x\end{cases} & -1\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

第四章 随机变量的数字特征

4.1 随机变量的期望

4.1.1 离散型随机变量的期望

- 设 r.v. X 的频率函数为

X	x_1	x_2	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$

  若 $\sum_{k=1}^{\infty}\vert x_k\vert p_k<\infty$（绝对收敛），则称 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 为 X 的数学期望
- 几种分布的期望

X	$E(X)$
$P(\lambda)$	λ
$b(n,p)$	np

4.1.2 连续型随机变量的期望

- 定义
  若 $\int_{-\infty}^{\infty}\vert x\vert f(x)dx<\infty$，则 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$ 为 X 的期望
- 几种分布的期望

X	$E(X)$
$U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	μ
$EXP(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$
柯西分布	不存在

- 马尔科夫不等式
  设 X 满足 $P(X\geqslant 0)=1$ 且 $E(X)$ 存在，则 $P(X\geqslant t)\leqslant\frac{E(X)}{t}$
  证明：
  $E(X)=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\int_0^t xf(x)dx+\int_t^{\infty}xf(x)dx$
  $\geqslant\int_t^{\infty}xf(x)dx\geqslant t\int_t^{\infty}f(x)dx=tP(X\geqslant t)$
  $\therefore P(X\geqslant t)\leqslant\frac{E(X)}{t}$

4.1.3 随机变量函数的期望

- $Y=g(X)$，则 Y 的期望为
  - X 离散
    $E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$
  - X 连续
    $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$

  二元情况同理：$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$
- 已知 $f(x,y)$
  - $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy$
  - $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy$

4.1.4 数学期望的基本性质

1. $a\leqslant X\leqslant b$，则 $a\leqslant E(X)\leqslant b$
2. c 为常数，则 $E(cX)=cE(X)$
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
   $E[g_1(X)\pm g_2(X)]=E[g_1(X)]\pm E[g_2(X)]$
   2, 3 为期望的线性性质，即线性变换的期望等于期望的线性变换
4. X,Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

逆命题不成立

不独立时 $E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)E(Y) = \iint xyf(x,y)dxdy$

- 推论 1

  若 $X = c$，则 $E(X) = c$
- 推论 2

  设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为常数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 r.v.，则 $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$
- 推论 3

  设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立，则 $E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$

- 例 1：公交车有 20 名乘客，途中有 10 站，若没人下车则不停。每位乘客在任一车站下车的概率等可能。以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$

  解:

  设 $X_i = \begin{cases} 1 & 第i站有人下车 \\ 0 & 第i站没人下车 \end{cases}$

  $\because X_i = 0 \Leftrightarrow 20$ 名乘客都不在第 i 站下车

  $\therefore P(X_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}, P(X_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}, i = 1, 2, \ldots, 10$

  $\therefore E(X_i) = 0 \cdot (\frac{9}{10})^{20} + 1 \cdot [1 - (\frac{9}{10})^{20}] = 1 - (\frac{9}{10})^{20}$

  $\therefore E(X) = 10E(X_i) = 8.784$

  相似应用：超几何分布的期望 $E(X) = \sum_{k=0}^n \frac{C_M^k C_{N-M}^{N-k}}{C_N^n} = n\frac{M}{N}$
- 例 2：$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

  求 (1) $E(2X-1)$ (2) $E[(x-2)^2]$

  解：(1) 求 $E(X)$ (2) 性质

  (1)

  $E(X) = \int_0^1 x \cdot 2xdx = \frac{2}{3}$

  $\therefore E(2X-1) = 2E(X) - 1 = \frac{1}{3}$

  (2)

  $E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx = \frac{1}{2}$

  $\therefore E[(x-2)^2] = E(x^2 - 4x + 4) = E(X^2) - 4E(X) + 4 = \frac{11}{6}$

4.2 方差与标准差

- 定义
  1. 方差

     对 r.v. X，若 $D(X) = Var(X) = E[X - E(X)]^2$ 存在，则称 $D(X)$ 为 X 的方差
  2. 标准差

     $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$ 量纲同随机变量的量纲
  3. 意义

     X 偏离均值的平均大小

     离散程度，越大越分散
- 计算
  1. 离散型

     $P(X = X_k) = p_k$，则 $D(X) = \sum_{k=1}^n [X_k - E(X)]^2 \cdot p_k$
  2. 连续型

     设 X 的概率密度为 $f(x)$，则 $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(X)]^2 f(x)dx$
  3. $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$

  - 例 1：$X \sim P(\lambda)$，求 $D(X)$

    解:

    $E(X) = \lambda$

    $E(X^2) = E[X(X-1) + X] = E(X) + E[X(X-1)] = \lambda + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

    $= \lambda + \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda + \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda + \lambda^2$

$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda$

- 例 2：$X\sim U(a,b)$，求 $D(X)$

  解：

  $E(X)=\frac{a+b}{2}$

  $E(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$

  $\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

- 例 3：$f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求 $E(X),D(X)$

  解：

  $E(X)=\int_0^1 x\cdot xdx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx=1$

  $E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot xdx+\int_1^2 x^2\cdot(2-x)dx=\frac{7}{6}$

  $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}$

- 方差的性质
  1. $X=c,D(X)=0$

     但是 $D(X)=0$ 不能推出 $X=c$，可以推出 $P(X=\mu)=1$
  2. $D(cX)=c^2D(X)$

     $D(aX+b)=a^2D(X)$，上下移动不影响方差
  3. $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

     X,Y 独立或者不相关时 $D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)$
- 几种分布的方差
  - $X\sim U(a,b),D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
  - $X\sim P(\lambda),D(X)=\lambda$
  - $X\sim EXP(\lambda),D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
  - $X\sim b(n,p),D(X)=np(1-p)$
  - $X\sim N(\mu,\sigma^2),D(X)=\sigma^2$
- 切比雪夫不等式

  $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$，则 $\forall\varepsilon>0,P(|X-\mu|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

  证明：

  对 $(X-\mu)^2$ 应用马尔科夫不等式：

  $P((X-\mu)^2\geqslant\varepsilon^2)\leqslant\frac{E(X-\mu)^2}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

  由于 $(X-\mu)^2\geqslant\varepsilon^2$ 等价于 $|X-\mu|\geqslant\varepsilon$

  $\therefore P(|X-\mu|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

4.3 协方差与相关系数

4.3.1 协方差

- 定义

  若 X,Y 的方差都存在，记 $Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 为 X,Y 的协方差
- 性质
  1. X,Y 独立 $\Rightarrow Cov(X,Y)=0$
  2. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$
  3. $D(X)=E[X-E(X)]^2=Cov(X,X)$
  4. $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
  5. $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$
  6. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$
  7. 双线性性

     $U=a+\sum_{i=1}^n b_iX_i,V=c+\sum_{j=1}^m d_jY_j$

     $Cov(U,V)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m b_id_jCov(X_i,Y_j)$
  8. $Cov(X,a)=0$

4.3.2 相关系数

- 定义

  $X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}},Y^*=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$

  称 $\rho_{XY}=Cov(X^*,Y^*)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$ 为 X,Y 的相关系数 $Corr(X,Y)$

  或者用公式:

  $$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}}$$

- 均方误差

  用 $\hat{Y}=a+bX$ 线性拟合，记均方误差 $e=E[(Y-\hat{Y})^2]$

  e 最小时 $\begin{cases}b_0=\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}\\a_0=E(Y)-bE(X)=E(Y)-E(X)\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}\end{cases}$

  $\min_{a,b}e=D(Y)(1-\rho_{XY}^2)$

- 性质

  1. $-1\leqslant\rho_{XY}\leqslant1$
  2. $|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow Y=a+bX$ 几乎处处线性相关
  3. $\rho_{XY}=1,X,Y$ 正相关

     $\rho_{XY}=-1,X,Y$ 负相关

     $\rho_{XY}=0,X,Y$ 不相关

     不相关指的是没有线性关系
  4. 二维正态 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $\rho_{XY}=\rho$
  5. 独立与不相关

     独立一定不相关，不相关不一定独立

     独立：没有任何关系

     不相关：没有线性关系

     特例：二维正态

4.3.3 矩

1. k 阶原点矩（k 阶矩）

   $E(X^k),k=1,2,\dots$
2. k 阶中心矩

   $E[(X-E(X))^k],k=2,3,\dots$
3. $k+\ell$ 阶混合矩

   $E(X^kY^\ell),k,\ell=1,2,\dots$
4. $k+\ell$ 阶混合中心矩

   $E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^\ell],k,\ell=1,2,\dots$
5. $E(X)$：一阶矩

   $D(X)$：二阶中心矩

   $Cov(X,Y)$：二阶中心混合矩

4.3.4 协方差矩阵

- 定义

  对于二维随机变量 (X_1,X_2)，记

  $c_{11}=E[(X_1-E(X_1))^2]=D(X_1)$

  $c_{12}=E[(X_1-E(X_1))(X_2-E(X_2))]=Cov(X_1,X_2)$

  $c_{21}=E[(X_2-E(X_2))(X_1-E(X_1))]=Cov(X_2,X_1)$

  $c_{22}=E[(X_2-E(X_2))^2]=D(X_2)$

  记 $C=Cov(X,X)=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}$ 为 $X=(X_1,X_2)$ 的协方差矩阵

- 性质

  1. 对称：$C=C^T$

2. 正定：$C \geqslant 0$

4.4 条件期望

- 定义

  $X=x$ 的条件下，Y 的条件期望定义为

  - 离散

    $E(Y|X=x)=\sum_y yp_{Y|X}(y|x)$

  - 连续

    $E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x)dy$

    求出来是一个 x 的函数

    不同的 $X=x$，$E(Y|X=x)$ 随之变化，是 r.v.

- Y 的函数 $h(Y)$ 的期望

  - 离散

    $E[h(Y)|X=x]=\sum_y h(y)p_{Y|X}(y|x)$

  - 连续

    $E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_{Y|X}(y|x)dy$

- 性质

  1. 全期望公式

     $E(Y)=E[E(Y|X)]$

     外层 X 内层 Y

     证明（离散情形）：

     $E[E(Y|X)]=\sum_x E(Y|X=x)p_X(x)=\sum_x[\sum_y yp_{Y|X}(y|x)]p_X(x)$

     $=\sum_y y\sum_x p_{Y|X}(y|x)p_X(x) \xlongequal{\text{全概率公式}} \sum_y yp_Y(y)=E(Y)$

  2. $D(Y)=D[E(Y|X)]+E[D(Y|X)]$

     - 随机和

       $T=\sum_{i=1}^N X_i$，N 为 r.v. 且具有有限期望与方差，$X_i(i=1,2,\ldots)$ 具有相同的均值 $E(X)$ 和方差 $D(X)$，X_i 与 N 独立

     - 举例：进入商场的顾客数为 N，第 i 个顾客的消费数额为 X_i

     - 计算

       $E(T|N=n)=E(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n E(X)=nE(X)$

       $\therefore E(T|N)=NE(X)$

       $\therefore E(T)=E[E(T|N)]=E[NE(X)]=E(X)E(N)$

       即：完成 N 个工作的平均时间是随机数 N 的平均值乘以完成一个工作的平均时间

       $D[E(T|N)]=D[NE(X)]=E^2(X)D(N)$

       $D(T|N=n)=D(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n D(X)=nD(X)$

       $\therefore D(T|N)=ND(X), E[D(T|N)]=E(N)D(X)$

       $\therefore D(T)=D[E(T|N)]+E[D(T|N)]=E^2(X)D(N)+E(N)D(X)$

       即：总时间 T 的不确定性来源于 N 的随机性和 X 的随机性（若固定 $N=n$，则 $D(T)=nD(X)$）

4.5 第四章习题

1. n 个人，n 份礼物，任意取，X 为拿对自己礼物的人数，求 $E(X),D(X)$

   解：

   记 $X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{个人拿对自己的礼物}\\ 0 & \text{第}i\text{个人未拿对自己的礼物}\end{cases}$

   设 $X=\sum_{i=1}^n X_i$，则 $E(X_i)=1\cdot\frac{1}{n}+0\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$

   $\therefore E(X)=E(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n E(X_i)=1$

   $D(X)=\sum_{i=1}^n D(X_i)+2\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$

   计算 X_iX_j 的期望：

X_iX_j	0	1

X_iX_j	0	1
p	$1-\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$

$\therefore E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}$

$\therefore Cov(X_i,X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2(n-1)}$

$\because D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$

$\therefore D(X)=n\frac{n-1}{n^2}+2\sum_{i<j}\frac{1}{n^2(n-1)}=\frac{n-1}{n}+2C_n^2\frac{1}{n^2(n-1)}=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}=1$

2. (X,Y) 的分布如下所示，求 (1) $P(X=2Y)$ (2) $Cov(X-Y,Y)$

$X\backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

解:

(1) $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}$

(2) 求 X,Y 的边际分布和 XY 的分布

XY	0	1	4
p	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

$\therefore E(X)=\frac{2}{3},E(Y)=1,D(Y)=\frac{2}{3},E(XY)=\frac{2}{3}$

$\therefore Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)-D(Y)=-\frac{2}{3}$

3. $(X,Y)\sim p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y) & 0<x<2,0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求 ρ_{XY}

解:

$E(X)=E(Y)=\int_0^2\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\frac{7}{6}$

$E(X^2)=E(Y^2)=\int_0^2\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\frac{5}{3}$

$\therefore D(X)=D(Y)=\frac{5}{3}-\frac{49}{36}=\frac{11}{36}$

$E(XY)=\int_0^2\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\frac{4}{3}$

$\therefore Cov(X,Y)=\frac{4}{3}-(\frac{7}{6})^2=-\frac{1}{36}$

$\therefore \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{1}{11}$

4. 设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)=x+y,0<x,y<1$，求 $E(X|Y=0.5)$

解：先求 $f_{X|Y}(x|y)$

$0<y<1$ 时 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p(y)}=\frac{x+y}{\int_0^1(x+y)dx}=\frac{x+y}{\frac{1}{2}+y}$

$\therefore f_{X|Y}(x|y=\frac{1}{2})=\begin{cases}x+\frac{1}{2} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$\therefore E(X|Y=0.5)=\int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx=\frac{7}{12}$

5. 设 $E(Y),E[h(Y)]$ 存在，证明 $E[h(Y)|Y]=h(Y)$

证明:

$E[h(Y)|Y]$ 是 $h(Y)$ 的函数，记 $g(Y)=E[h(Y)|Y]$

$\because \forall y\in\mathbb{R},h(y)$ 为实数

$\therefore g(y)=E[h(Y)|Y=y]=E[h(y)|Y=y]=h(y)$（常量的均值等于自己）

$g(Y)=E[h(Y)|Y]=h(Y)$

6. 设 X_1,X_2 独立且均服从参数为 $\frac{1}{\theta}$ 的指数分布，求 $Y_1=4X_1-3X_2,Y_2=3X_1+X_2$ 的相关系数

解：先求 $Cov(Y_1,Y_2)$

设 $E(X_1)=E(X_2)=E,D(X_1)=D(X_2)=D$，$X_1,X_2$ 独立则 $Cov(X_1,X_2)=0$

$\therefore Cov(Y_1,Y_2)=Cov(4X_1-3X_2,3X_1+X_2)=12Cov(X_1,X_1)-9Cov(X_1,X_2)+4Cov(X_1,X_2)-3Cov(X_2,X_2)$

$=12D-3D=9D$

$\therefore \rho_{Y_1Y_2}=\frac{Cov(Y_1,Y_2)}{\sqrt{D(Y_1)D(Y_2)}}=\frac{9D}{\sqrt{(16D+9D)(9D+D)}}=\frac{9}{50}\sqrt{10}$

结果与服从什么分布无关

7. 设 X 服从标准柯西分布，$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbb{R}$，求 $E(X)$

解:

$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}d(x^2)=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\infty}=\infty$

$\therefore E(X)$ 不存在

第五章 大数定律和中心极限定理

5.1 大数定律

5.1.1 背景

1. 概率的产生

   随机试验 $\to$ 统计数据 $\to$ 统计规律 $\to$ 频率稳定性 $\to$ 概率
2. 频率稳定性

   设 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数为 n_A，当 $n\to\infty$ 时

$$\xi_n=\frac{n_A}{n}\to p$$

3. 依概率收敛

   设 $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ 为一列随机变量，若 $\forall\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty}P(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)=0$，则称随机变量列 $\{\xi_n\}$ 依概率收敛于 ξ，记作 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$
   - $\lim_{n\to\infty}P(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}P(|\xi_n-\xi|<\varepsilon)=1$
   - 直观含义

     随着 n 的增大，绝对误差 $|\xi_n-\xi|$ 较大的可能性越来越小
   - 抛硬币试验的频率稳定性 $\xi_n=\frac{n_A}{n}\xrightarrow{P}\frac{1}{2}$

5.1.2 大数定律

1. 伯努利大数定律

   设 n_A 是 n 次重复试验中事件 A 发生的次数，且 $P(A)=p$，则 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{n_A}{n}-p|\geqslant\varepsilon)=0$$

   - 频率会依概率收敛于概率
2. 切比雪夫大数定律

   设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量列，且具有相同的期望和方差，记 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2$，则 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{N\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|\geqslant\varepsilon)=0$$

3. 辛钦大数定律

   设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量列，$E(X_i)=\mu$ 存在，则 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{N\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|\geqslant\varepsilon)=0$$

$$\lim_{N\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon)=1$$

4. 大数定律的一般形式

   若 $\{X_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon)=1$，则称 $\{X_n\}$ 服从大数定律
5. 马尔科夫大数定律

   若 $\{X_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=0$ 则 $\{X_n\}$ 服从大数定律

5.2 中心极限定理

5.2.1 背景

现实中很多数量指标都服从或近似服从正态分布

这些指标通常是由大量相互独立的随机因素综合影响而成，即 $Z=X_1+X_2+\cdots+X_n$

中心极限定理研究的内容：$n\to\infty$ 时，什么情况下 $Z_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的极限分布为正态分布

即 $Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}}$ 是否服从标准正态分布

- 按分布收敛

对于分布函数列 $\{F_n(x)\}$，若在 $F(x)$ 的连续点处都有 $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$，则称 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $F(x)$，记作 $F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$，相应，记 $X_n\xrightarrow{L}X$ 按分布收敛

依概率收敛于按分布收敛的关系：

- $X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{L}X$
- $X_n\xrightarrow{P}a\Leftrightarrow X_n\xrightarrow{L}a$

5.2.2 中心极限定理

- 定义

  若 Z_n 的分布函数 $F_n(x)$ 对任意 x 满足

  $$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P(\frac{\sum_{k=1}^n X_k-\sum_{k=1}^n\mu_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n\sigma_k^2}}\leqslant x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

  则称 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理

  - Z_n 依分布收敛于标准正态分布
- 独立同分布的中心极限定理（林德伯格-列维中心极限定理）

  $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量列，$E(X_k)=\mu,D(X_k)=\sigma^2>0\ (k=1,2,\ldots)$，则 $\{X_n\}$ 服从中心极限定理，即 $Z_n=\frac{\sum_{k=1}^n X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似服从标准正态分布，或 $\sum_{k=1}^n$ 近似服从 $N(n\mu,n\sigma^2)$
- 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

  设 $\{\eta_n\}$ 为服从 $B(n,p)$ 的随机变量列，则 $\forall x$,

  $$\lim_{n\to\infty}P(\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

  即 η_n 近似服从 $N(np,p(1-p))$
- 例：某单位电话交换机有 500 部电话，在所有通话中有 96% 的通话是在各分机内进行的。假定每部分机是否需要打外线是相互独立的，问要配备多少条外线才能以 95% 的概率保证每个分机要用外线时不必等候？

  解：

  在任一时刻，记 $X_k=\begin{cases}1 & 第k台分机要用外线\\ 0 & 其他\end{cases}$

  则 $X_1,X_2,\ldots,X_{500}$ 独立同分布，且 $P(X_k=0)=1-p=0.96,P(X_k=1)=p=0.04$

  $\therefore E(X_k)=0.04,D(X_k)=0.0384$

  由独立同分布的中心极限定理，$\sum_{k=1}^{500}X_k$ 近似服从 $N(20,19.2)$

  设需要 N 条外线才能满足要求，则应有 $P(\sum_{k=1}^n X_k\leqslant N)\geqslant 0.95$

  设 $Z_n=\sum_{k=1}^n X_k$，则 $P(Z\leqslant N)=P(\frac{Z-20}{\sqrt{19.2}}\leqslant\frac{N-20}{\sqrt{19.2}})\geqslant 0.95$

  $\therefore\Phi(\frac{N-20}{\sqrt{19.2}})\geqslant 0.95$，查表得 $\Phi(1.65)=0.95$

  $\therefore\frac{N-20}{\sqrt{19.2}}\geqslant 1.65\Rightarrow N\geqslant 27.23$

  $\therefore$ 至少应该配备 28 条外线

5.3 第五章习题

1. 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，其共同分布为 $P(X_n=\frac{2^k}{k^2})=\frac{1}{2^k},k=1,2,\ldots$，问 $\{X_n\}$ 是否服从大数定律

   解：

   $E(X_n)=\sum_{k=1}^\infty\frac{2^k}{k^2}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{\pi^2}{6}<\infty$

   $\therefore E(X_n)$ 存在，由辛钦大数定律知 $\{X_n\}$ 服从大数定律
2. 每袋味精的净重为随机变量，平均重量为 100g，标准差为 10g，一箱内装有 200 袋味精，求一箱味精的净重大于 20500g 的概率

   解：

   设第 i 袋味精的净重为 X_i，则 X_i 独立同分布且 $E(X_1)=100,D(X_i)=100$

   由独立同分布的中心极限定理，总净重 $Z=\sum_{i=1}^{200}X_i$ 近似服从 $N(20000,20000)$

   $\therefore P(Z>20500)=1-P(Z\leqslant 20500)=1-P(\frac{Z-20000}{100\sqrt{2}}\leqslant\frac{20500-20000}{100\sqrt{2}})=1-\Phi(3.54)=0.0002$

   因此，一箱味精的净重大于 20500g 的概率为 0.0002

第六章 数理统计的基本概念与抽样分布

6.2 数理统计的基本概念

1. 总体

   研究对象的数量指标 $X \sim F(x)$

2. 个体

   r.v. X 的值

   - 例：考察某班级学生的英语课程学习成绩 X，因为每个学生的成绩都在全班平均成绩 μ 的附近波动，所以总体可视为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

3. 抽样与样本

   从研究对象中抽取 n 个个体，观察它们的数量指标 $X_1, X_2, \dots, X_n$，这一过程称为抽样，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 称为容量为 n 的样本

   - 抽样的特点
     - 在相同条件下对总体 X 进行 n 次重复、独立的观察
     - 独立性：各次取样的结果互不影响
     - 代表性：每次取出的样本与总体有相同的分布
   - 样本的二重性
     - 观察前：$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立，与总体同分布的随机变量
     - 观察后：样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 n 个具体的观察数据
   - 例：某厂生产了一大批灯泡，现从中随机抽取 5 只进行检测，测得其寿命（小时）分别为 980、960、1030、1300、850

     分析：

     总体为灯泡的寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

     样本容量为 5，样本为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5

     样本观察值为 $980, 960, 1030, 1300, 850$

4. 样本的分布

   样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为多维随机变量

   - 若总体分布函数为 $F(x)$，则样本联合分布函数为 $F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$
   - 若总体密度为 $f(x)$，则样本联合密度函数为 $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$

   - 例：设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $X \sim b(1, p), 0 < p < 1$ 的样本，求样本分布

     解：

     总体的频率函数 $P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p$

     $\therefore P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$

5. 统计量

   设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 $X \sim F(x)$ 的样本，$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 元函数，若 r.v. $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 不含任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量

   例：样本的均值、最值、样本方差

   统计量也有二重性

   - 常用统计量
     - 样本均值：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
     - 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
     - 样本 k 阶矩：$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$
     - 样本 k 阶中心矩：$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$
     - 顺序统计量
     - 极大值
     - 极小值
   - 样本矩的特性

     总体 k 阶矩 $\mu_k = E(A_k) = E(X^k)$

     $X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k$ 独立，与 X^k 同分布，由辛钦大数定律，$\forall k = 1, 2, \dots$

     $\lim_{n\to\infty} A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k$

     $\lim_{n\to\infty} g(A_1, A_2, \dots, A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$
   - 样本均值与样本方差的数字特征

     设总体 X 的方差和均值 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ 均存在，$X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，则

- $E(\bar{X})=\mu, D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$
- $E(S^2)=\sigma^2, D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

证明:

$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu=\mu$

$D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$

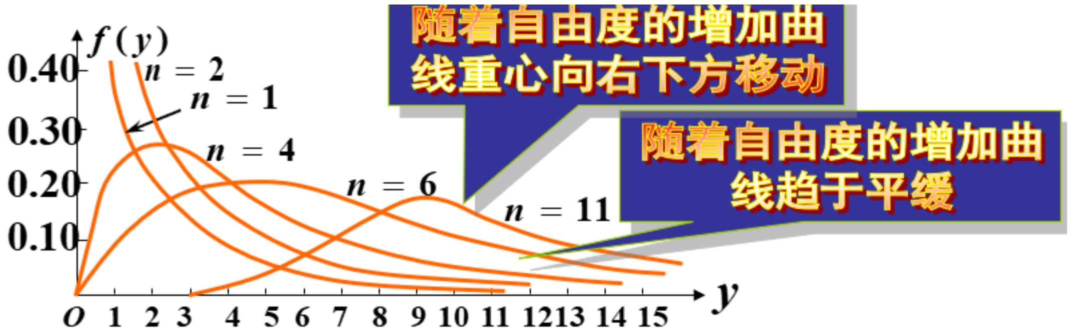
6.3 抽样分布

6.3.1 χ^2 分布（卡方分布）

- 定义

  设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的样本，令 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\dots+X_n^2$，称 χ^2 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2\sim\chi^2(n)$
- 密度函数

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\leqslant 0\end{cases}$$



- 自由度
  - 直观理解：可独立变化的变量个数
  - 严格理解：二次型 $X_1^2+X_2^2+\dots+X_n^2$ 的秩
- 性质
  - 可加性

    χ_1^2,χ_2^2 独立且 $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1),\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，则 $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$
  - 数字特征

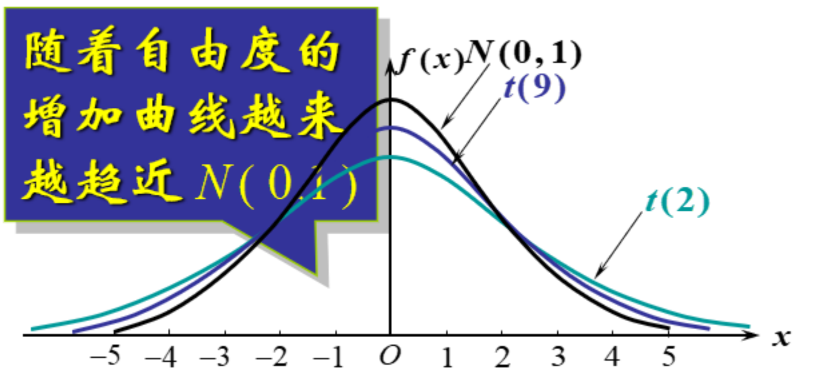
    设 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，则 $E(\chi^2)=n, D(\chi^2)=2n$

6.3.2 $t-$分布

- 定义

  设 $X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$ 且 X,Y 独立，令 $t=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$，称 t 服从自由度为 n 的 $t-$分布，记作 $t\sim t(n)$
- 密度函数

$$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$



- 性质
  - $n>1$ 时 $E(t)$ 存在，$E(t)=0$
  - $n>2$ 时 $D(t)$ 存在，$D(t)=\frac{n}{n-2}$

- $n=1$ 时为标准柯西分布，均值不存在
- $n\to\infty$ 时趋向于标准正态分布

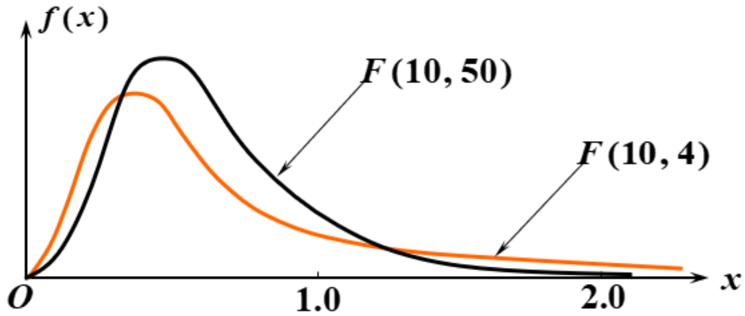
6.3.3 $F-$分布

- 定义

  设 $U\sim\chi^2(n_1),V\sim\chi^2(n_2)$ 且 U,V 相互独立，令 $F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$，称 F 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 $F-$分布，记作 $F\sim F(n_1,n_2)$

- 密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}\frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$



- 性质
  - $F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$
  - $t^2=\frac{X^2/1}{Y^2/n}\sim F(1,n)$
- $\alpha-$分位点

  设 $X\sim f(x)$，若 $\forall 0<\alpha<1,\exists x_\alpha$ 满足$P(X\leqslant x_\alpha)=\int_{-\infty}^{x_\alpha}f(x)dx=\alpha$，则称 x_α 为分布密度 $f(x)$ 的 α 分位点

  - $N(0,1)$ 的 α 分位点记作 u_α，$\Phi(u_\alpha)=P(X\leqslant u_\alpha)=\alpha$

    $u_\alpha=-u_{1-\alpha}$

    例：求 $u_{0.975}$，则 $\Phi(u_{0.975})=0.975$，查表得 $u_{0.975}=\cdots$
  - $t(n)$ 的 α 分位点记作 $t_\alpha(n)$

    $n\geqslant 30$ 时可以近似认为是标准正态分布，查 u_α
  - $\chi^2(n)$ 的 α 分位点记作 $\chi^2_\alpha(n)$

    n 充分大时 $\chi^2_\alpha(n)\approx\frac{1}{2}(u_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$
  - $F(n_1,n_2)$ 的 α 分位点记为 $F_\alpha(n_1,n_2)$

    三反公式：$F_\alpha(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$

6.3.4 抽样分布定理

1. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$
2. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则
   - $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
   - $\bar{X},S^2$ 相互独立
3. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X},S^2$ 分别为样本均值和方差，则

$$\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

   可用 S^2 代替 σ^2

4. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$ 是来自总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本，$Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}$ 是来自总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且两样本相互独立，两样本均值与方差为 $\bar{X},\bar{Y},S_1^2,S_2^2$，则

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

5. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$ 是来自总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本，$Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}$ 是来自总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，且两样本相互独立，两样本均值与方差为 $\bar{X},\bar{Y},S_1^2,S_2^2$，则

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

证明:

1. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
   $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2 \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$
   $(X_i-\bar{X})^2=(X_i-\mu+\mu-\bar{X})^2=(X_i-\mu)^2+2(X_i-\mu)(\mu-\bar{X})+(\mu-\bar{X})^2$
   $\therefore \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
   $=\frac{1}{\sigma^2}[\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2+2\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)(\mu-\bar{X})+\sum_{i=1}^n(\mu-\bar{X})^2]$
   $=\frac{1}{\sigma^2}[\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2+2(\mu-\bar{X})\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)+n(\mu-\bar{X})^2]$
   $=\frac{1}{\sigma^2}[\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2+2n(\mu-\bar{X})(\bar{X}-\mu)+n(\mu-\bar{X})^2]$
   $=\sum_{i=1}^n(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2-(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2=\chi^2(n)-\chi^2(1)=\chi^2(n-1)$
   注：$E(\bar{X})=\mu, D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$
2. $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}}}=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}}=t(n-1)$$

3. $\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$
   $\bar{X}-\bar{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2})$
   标准化：$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$
   原式 $=\frac{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}}{\frac{S_w}{\sigma}}=\frac{N(0,1)}{\frac{S_w}{\sigma}}$
   $S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \Rightarrow \frac{S_w^2}{\sigma^2}=\frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}}{(n_1-1)+(n_2-1)}=\frac{\chi^2(n_1-1)+\chi^2(n_2-1)}{(n_1-1)+(n_2-1)}=\frac{\chi^2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2-2}$
   $\therefore$ 原式 $=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2-2}}}=t(n_1+n_2-2)$

第七章 参数估计

7.1 点估计

7.1.1 基本概念

- 总体分布

  设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，其中 F 的函数形式已知，$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 为未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本。若记 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，则总体分布记作 $X \sim F(x;\theta)$

- 参数空间

  θ 的取值范围称为参数空间，记作 Θ

  例：

  - $X \sim P(\lambda), \Theta=\{\lambda|\lambda>0\}$
  - $X \sim N(\mu,\sigma^2), \Theta=\{(\mu,\sigma^2)|-\infty<\mu<\infty,\sigma>0\}$（形参空间）
  - 设某课的成绩 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\Theta=\{(\mu,\sigma^2)|0\leqslant\mu\leqslant100, 0<\sigma<100\}$（实参空间）

- θ 的点估计

  构造一个统计量 $\hat\theta(X_1,X_2,\ldots,X_n)$，用统计量观察值 $\hat\theta(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 作为 θ 的估计值

  - 称 $\hat\theta(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 为 θ 的估计量
  - 称 $\hat\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 为 θ 的估计值

  二重性

7.1.2 矩估计法

- 定义

  设总体 $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$，$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 为未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的样本

  设下列总体矩都存在：$a_k=E(X^k), k=1,2,\ldots,m$

  由辛钦大数定律：$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k \xrightarrow{P} E(X^k)=a_k, n\to\infty$

  故当 n 较大时，可认为 $A_k\approx a_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k dF(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)=a_k(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$

  因此，近似认为

  $$\begin{cases}a_1(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)=A_1\\ a_2(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)=A_2\\ \vdots\\ a_m(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)=A_m\end{cases}$$

  解方程组得

  $$\begin{cases}\hat\theta_1=\hat\theta_1(A_1,A_2,\ldots,A_m)\\ \hat\theta_2=\hat\theta_2(A_1,A_2,\ldots,A_m)\\ \vdots\\ \hat\theta_m=\hat\theta_m(A_1,A_2,\ldots,A_m)\end{cases}$$

  称 $(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\ldots,\hat\theta_m)$ 为 $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)$ 的矩估计量

- 步骤

  1. 求总体矩
  2. 样本矩代替总体矩
  3. 解方程求出矩估计值

  一个参数的矩估计可能不唯一，尽量用低阶矩

  一般把 $E(X),D(X)$ 写成参数的函数，然后令 $E(X)=\bar X, D(X)=S^2$ 或者 $\tilde S^2$，然后解方程

  注意解出的 $\hat\theta$ 是否在 θ 的定义域内

  - 例 1：估计 $EXP(\lambda)$ 的参数 λ

    解：

    $E(X)=\frac{1}{\lambda}=\bar X\Rightarrow\lambda=\frac{1}{\bar X}$

    $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\tilde S^2\Rightarrow\lambda=\frac{1}{\tilde S}$

    选择低阶矩估计 $\frac{1}{\bar X}$

  - 例 2：设总体 X 的均值 $\mu=E(X)$，方差 $\sigma^2=D(X)$ 均存在，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为样本，求未知参数 μ,σ^2 的矩估计

    解：

μ 为一阶矩，σ^2 为二阶中心矩

令 $a_1 = A_1, a_2 = A_2$，即 $\begin{cases}\mu = \bar{X} \\ \sigma^2 = \tilde{S}^2\end{cases}$

解得

$\begin{cases}\hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2\end{cases}$

- 修正的样本方差

$$\tilde{S}^2 = \frac{n-1}{n}S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

7.1.3 最大似然估计法

- 定义

  设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim f(x;\theta)$ 的样本

  令$L(\theta) = L(\theta; X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$，称 $L(\theta)$ 为似然函数

  若存在统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 使得 $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(\theta; X_1, X_2, \ldots, X_n)$

  则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为 θ 的最大似然估计，简记为 MLE

- 求解步骤

  设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim f(x;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ 的样本

  1. 求似然函数 $L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$

     $f(x_1)f(x_2)\cdots$ 连乘

     样本概率函数的非 0 部分

  2. 写似然方程组

     常用对数似然方程组：

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

  3. 解方程组得 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_m$

  4. 验证二阶导 < 0，即 $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\big|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$

  - 例 1：设总体服从 $X \sim EXP(\frac{1}{\theta})$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体的样本，求 θ 的 MLE

    解：

    $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \theta^{-n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \theta^{-n} e^{-\frac{n\bar{X}}{\theta}}$

    $\because L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 具有相同的极值点

    $\ln L(\theta) = -n\ln\theta - \frac{n\bar{X}}{\theta}$

    $\therefore \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{n\bar{X}}{\theta^2} = 0$

    $\therefore \hat{\theta} = \bar{X}$

  - 例 2：设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，求 μ, σ^2 的 MLE

    解：

    $L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (\sqrt{2\pi})^{-n}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$

    令 $\begin{cases}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial (\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0\end{cases}$

    解得 $\mu = \bar{X}, \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \tilde{S}^2$

- MLE 的不变性

  $\hat{\theta}$ 是 θ 的 MLE，则对于 θ 的函数 $g(\theta)$，其 MLE 为 $g(\hat{\theta})$

7.2 估计量的评价标准

1. 无偏性

   设总体 $X \sim F(x;\theta), \theta \in \Theta$。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 X 的样本，$\hat{\theta}$ 为未知参数 θ 的点估计。若 $\hat{\theta}$ 的期望存在且 $\forall \theta \in \Theta, E_\theta(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计，否则称为有偏估计。称 $b_n(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ 为估计量 $\hat{\theta}$ 的偏差

   $b_n(\hat{\theta}) = 0$ 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的有偏估计，$\lim_{n\to\infty} b_n(\hat{\theta}) = 0$ 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的渐进无偏估计

   直观意义：估计值 $\hat{\theta}$ 应在真值 θ 附近波动，否则为有偏

- μ 的点估计为 $\bar{X}, E(\bar{X})=\mu$，所以是无偏估计

  S^2 是 σ^2 的无偏估计，$\tilde{S}^2$ 是 σ^2 的渐进无偏估计

2. 有效性

   设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim F(x;\theta), \theta \in \Theta$ 的样本，$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计，即 $\forall\theta\in\Theta, E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta$，若 $\forall\theta\in\Theta$ 有 $D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效

   - 有效性的含义举例：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自某总体的样本，记总体均值为 μ，总体方差为 σ^2，$\hat{\mu}_1=X_1, \hat{\mu}_2=\bar{X}$ 均为 μ 的无偏估计（$E(X_1)=\mu$），但是 $D(X_1)=\sigma^2, D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

     $\therefore \hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_1$ 有效，这说明用全部数据的平均估计总体均值比仅用部分数据有效

3. 相合性（一致性）

   - 定义

     设 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是未知参数 θ 的点估计，若 $\forall\theta\in\Theta$，满足：

     $\forall\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon)=0$，则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计

     $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计 $\Leftrightarrow \hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta, n\to\infty$

     直观意义：样本越多估计值越准

   - 一般结论

     1. 由辛钦大数定律，θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 是相合估计
     2. θ 的 MLE $\hat{\theta}$ 一般也为相合估计
     3. $\hat{\theta}$ 为无偏估计则一定为相合估计（证明：切比雪夫不等式）

   - 判断相合性

     设 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为 θ 的一个估计量，若 $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n)=\theta, D(\hat{\theta}_n)=0$，则 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计。若把依赖于样本量 n 的估计量 $\hat{\theta}_n$ 看作一个随机变量序列，相合性就是 $\hat{\theta}_n$ 依概率收敛于 θ，所以证明估计的相合性可应用概率的性质及各种大数定律

7.3 区间估计

7.3.1 区间估计的概念

- 定义

  设总体 $X \sim F(x;\theta), \theta\in\Theta$，$\forall 0<\alpha<1$，若存在两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \underline{\theta}<\overline{\theta}$ 使得 $\forall\theta\in\Theta, P(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\theta})\geqslant 1-\alpha$，则称区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$ 称为置信下限，$\overline{\theta}$ 称为置信上限

  意义：$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 包含了 θ 的真值的概率为 $1-\alpha$

  - 例 1：设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的样本，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

    解：

    μ 的无偏估计为 $\bar{X}$，则有 $P(\bar{X}-c<\mu<\bar{X}+c)=1-\alpha$，$c$ 为常数

    $\because X\sim N(\mu, 1)$

    $\therefore \frac{\bar{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

    $P(\bar{X}-c<\mu<\bar{X}+c)=P(|\bar{X}-\mu|<c)=P(\sqrt{n}|\bar{X}-\mu|<\sqrt{n}c)=1-\alpha$

    $\therefore P(-\sqrt{n}c<\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)<\sqrt{n}c)=2\Phi(\sqrt{n}c)-1=1-\alpha$

    $\therefore \Phi(\sqrt{n}c)=1-\frac{\alpha}{2}$

    $\therefore \sqrt{n}c$ 为 $N(0,1)$ 的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位点，即 $U_{1-\frac{\alpha}{2}}$

    $\therefore c=\frac{U_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$

    $\therefore$ 置信区间为 $(\bar{X}-\frac{U_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \bar{X}+\frac{U_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}})$

- 置信水平也称为置信度

  - 对连续型总体，取 $P(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\theta})=1-\alpha$
  - 对离散型总体，取 $P(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\theta})$ 尽可能接近 $1-\alpha$

- 置信区间不唯一

  在保证置信水平不变的条件下，尽可能缩短置信区间的长度，从而提高精度

  通常采用“两边面积相等”的原则确定分位点

  - 例 2：设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

    解：

    $\bar{X}$ 为 μ 的 MLE 和无偏估计，且 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

由枢轴法，μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间由下式决定

$$P(\frac{|\bar{X}-\mu|}{S/\sqrt{n}}<t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$$

$\therefore$ 置信区间为 $(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))$

- 求解置信区间：枢轴法

  设 θ 是待估计的参数，φ 为其他的未知参数

  1. 求出 θ,φ 较好的点估计 $\hat{\theta},\hat{\varphi}$
  2. 构造样本函数 $T=T(\theta,\hat{\theta},\hat{\varphi})\sim f(x)$

     一般运用抽样分布定理
  3. 对于置信水平 $1-\alpha$，由 $f(x)$ 确定两分位点 $x_{1-\frac{\alpha}{2}},x_{\frac{\alpha}{2}}$

     使得 $P(x_{\frac{\alpha}{2}}<T(\theta,\hat{\theta},\hat{\varphi})<x_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$
  4. 解出 $\underline{\theta},\overline{\theta}$

  - 例 3：设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，求 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

    解 1：

    S^2 是 σ^2 的一个无偏估计，且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

    由枢轴法，$P(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))=1-\alpha$

    解得置信区间 $(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)})$

    解 2：

    S^2 是 σ^2 的一个无偏估计

    $\frac{S^2}{\sigma^2}$ 在常数 1 附近波动，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 在 $n-1$ 附近波动

    $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

    枢轴变量 枢轴 枢轴变量 枢轴

    且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

    $\therefore\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(n-1)}\sim\sigma^2$

    改为分位点，即为置信区间

- 枢轴量法的步骤

  1. 设法构造一个样本和 θ 的函数 $G=G(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)$，使得 G 的分布不依赖于未知参数，一般称具有这种性质的 G 为枢轴量
  2. 适当选择两常数 c,d 使得对给定的 $0<\alpha<1$ 有 $P(c\leqslant G\leqslant d)=1-\alpha$

     一般 c,d 是两个分位数：$\frac{\alpha}{2}$ 分位数和 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位数（等尾置信区间）
  3. 将 $c\leqslant G\leqslant d$ 化简为 $\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\theta}$

  简单来说，(1) 构造一个分布 (2) 解 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点 $\leqslant$ 分布 $\leqslant 1-\frac{\alpha}{2}$ 分位点

7.3.2 双正态总体参数的区间估计

- 例 4：设 $X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$ 为来自总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本，$Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}$ 为来自总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，两样本独立，σ_1^2,σ_2^2 已知，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

  解：

  $\bar{X},\bar{Y}$ 分别为 μ_1,μ_2 的 MLE 和无偏估计，则

  $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$

  $\therefore\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

  枢轴法得置信区间 $((\bar{X}-\bar{Y})-U_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\bar{X}-\bar{Y})+U_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$

- 例 5：设 $X_1,X_2,\ldots,X_{n_1}$ 为来自总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$ 的样本，$Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n_2}$ 为来自总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，两样本独立，μ_1,μ_2,σ^2 未知，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

  解：

  $\bar{X},\bar{Y}$ 分别为 μ_1,μ_2 的 MLE 和无偏估计

  $S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})$ 是总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 的参数 σ^2 的无偏估计

  $S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})$ 是总体 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的参数 σ^2 的无偏估计

  作 S_1^2,S_2^2 的加权平均：$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，则 S_w^2 为 σ^2 的无偏估计

$\therefore \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$（对称区间的简单表示）

- 例 6：设 $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ 为来自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ 为来自总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，两样本独立，$\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知，求 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

  解：

  S_1^2, S_2^2 分别为 σ_1^2, σ_2^2 的无偏估计，由题设条件与抽样分布定理得

  $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

  $\therefore$ 置信区间为 $(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)})$

7.3.3 大样本下非正态总体参数的区间估计

- 例 7：设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，求 μ 置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

  解：

  由中心极限定理，n 充分大时 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 近似服从 $N(0,1)$

  若 σ 未知，因 $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$，则 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 近似服从 $N(0,1)$

  $\therefore \mu$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的近似置信区间为 $(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}U_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}U_{1-\frac{\alpha}{2}})$

7.3.4 单侧置信区间

$\forall 0<\alpha<1$，若存在统计量 $\underline{\theta}$，使得 $\forall \theta \in \Theta$，有 $P(\underline{\theta}<\theta)=1-\alpha$，则称 $(\underline{\theta}, \infty)$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间，称 $\underline{\theta}$ 为单侧置信下限

同理 $(-\infty, \overline{\theta})$ 为单侧置信区间，$\overline{\theta}$ 为单侧置信上限

7.3.5 常用枢轴量

- 单正态总体
  - 已知 σ^2 估计 μ：$-U_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < U_{1-\frac{\alpha}{2}}$
  - 未知 σ^2 估计 μ：$-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
  - 未知 μ 估计 σ^2：$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
  - 已知 μ 估计 σ^2：$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) < \sum_{i=1}^n(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
- 双正态总体
  - 已知 σ_1^2, σ_2^2 估计 $\mu_1-\mu_2$：$-U_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < U_{1-\frac{\alpha}{2}}$
  - 未知 σ^2 估计 $\mu_1-\mu_2$：$-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2) < \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
  - 未知 μ_1, μ_2 估计 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$：$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$

7.4 第七章习题

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自 $X \sim U(a,b)$ 的样本，a, b 为未知参数，求点估计

   解：两个参数，需要用二阶矩

   均匀分布 $E(X)=\frac{a+b}{2}, D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

   得 $a=E(X)-\sqrt{3D(X)}, b=E(X)+\sqrt{3D(X)}$

   用 $\bar{X}, \tilde{S}$ 代换，解得 $\begin{cases} \hat{a}=\bar{X}-\sqrt{3}\tilde{S} \\ \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{3}\tilde{S} \end{cases}$

2. 一个试验有三种结果，概率为 $p_1=\theta^2, p_2=2\theta(1-\theta), p_3=(1-\theta)^2$

   现做了 n 次试验，观测到三种结果发生的次数分别为 n_1, n_2, n_3 $(n_1+n_2+n_3=n)$，求 θ 的 MLE

   解：

   $L(\theta)$ 意义是得到样本的概率

   $L(\theta)=(\theta^2)^{n_1} \cdot [2\theta(1-\theta)]^{n_2} \cdot [(1-\theta)^2]^{n_3} = 2^{n_2} \cdot \theta^{2n_1+n_2} \cdot (1-\theta)^{n_2+2n_3}$

   $\ln L = n_2 \ln 2 + (2n_1+n_2)\ln\theta + (n_2+2n_3)\ln(1-\theta)$

   $\therefore \frac{d\ln L}{d\theta} = \frac{2n_1+n_2}{\theta} - \frac{n_2+2n_3}{1-\theta}$

令 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0$ 得 $\hat{\theta}=\frac{2n_1+n_2}{2n}$

检查二阶导：$\theta=\hat{\theta}$ 时 $\frac{d^2\ln L}{d\theta^2}<0$，是极大值点

3. 设 $X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体 $X\sim U(0,\theta)$ 的样本，求 θ 的 MLE

   解：

   $L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^n I_{\{0<X_i<\theta\}}=\frac{1}{\theta^n}I_{\{X_{(n)}<\theta\}}$

   若使 $L(\theta)$ 最大，首先示性函数 I 取值应为 1，其次 $\frac{1}{\theta^n}$ 尽可能大，即 θ 尽可能小

   但是示性函数为 1 决定了 θ 不能小于 $X_{(n)}$，所以 $\hat{\theta}=X_{(n)}$

第八章 假设检验

8.1 假设检验概述

- 例：某车间用一台自动包装机装化肥，每袋的标称重量规定为 50kg。某日开工后，为了检查机器是否正常，随机抽检 9 袋产品，测得重量如下（kg）：

  49.6, 48.4, 50.0, 48.6, 50.6, 49.8, 50.2, 49.2, 49.0

  设每袋化肥的实际重量服从正态分布，标准差为 0.75 kg，问该日包装机是否正常工作

  解:

  设每袋化肥的重量 $X \sim N(\mu, 0, 75^2)$，若 $\mu = 50$ 则正常

  μ 的点估计 $\hat{\mu} = \bar{X} = 49.49 \neq 50$，是确实因为机器不正常工作，还是随机波动引起?

  作假设：$H_0 : \mu = 50$（原假设）$H_1 : \mu \neq 50$（备择假设）

  对假设 H_0 进行检验:

  - 接受 H_0，则认为机器正常工作
  - 拒绝 H_0，则认为机器不正常工作

  进行显著性检验:

  $H_0 : \mu = \mu_0 = 50, H_1 : \mu \neq \mu_0$

  $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2), \sigma_0 = 0.75$ 的样本，且 $E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma_0^2}{n}$

  故若 H_0 成立，则 $E(\bar{X}) = \mu_0$，即 $\bar{X}$ 的值在 μ_0 附近波动，且波动幅度不会太大，从而绝对偏差 $|\bar{X} - \mu_0|$ 应该较小

  反之，若 $|\bar{X} - \mu_0|$ 的值偏大，则有理由怀疑 H_0 的正确性，从而拒绝 H_0

  可以求一临界值 c，使得

  - $|\bar{X} - \mu_0| \geqslant c$，拒绝 H_0
  - $|\bar{X} - \mu_0| < c$，接受 H_0
- 决策的两类错误
  - I 类错误：H_0 为真但拒绝（弃真）
  - II 类错误：H_0 为假但接受（取伪）
- 检验原则一：对 H_0 采取保护的态度

  H_0, H_1 地位不对等，倾向认为 H_0 是对的

  - I 类风险：$P(拒绝H_0|H_0为真)$
  - II 类风险：$P(接受H_0|H_0为假)$

  保护 H_0，即给定一个较小的数 $0 < \alpha < 1$，使得 $P(拒绝H_0|H_0为真) \leqslant \alpha$，$\alpha$ 称为显著性水平
- 检验原则二：控制 I 类风险（不管 II 类风险）

  接例题:

  $\because E(\bar{X}) = \mu$，若 H_0 成立，则 $|\bar{X} - \mu_0|$ 的值应很小

  给定显著性水平 $\alpha = 0.05$，即 I 类风险 $P(|\bar{X} - \mu_0| \geqslant c | \mu = \mu_0) = \alpha$

  作变换 $P_{H_0}(\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma_2/\sqrt{n}} \geqslant \frac{c}{\sigma_0/\sqrt{n}}) = \alpha = 0.05$

  记 $U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_2/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

  $\therefore \frac{c}{\sigma_0/\sqrt{n}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$，即 $|U| \geqslant 1.96$ 时拒绝 H_0（拒绝域）

  计算得 $|U| = \frac{|49.49-50|}{0.75/\sqrt{9}} = 2.04 > 1.96$

  $\therefore$ 拒绝 H_0，即认为机器工作不正常（u 检验法）

  $(\bar{X} - c, \bar{X} + c)$ 实际上是 μ 的 $1 - \alpha$ 置信区间
- 检验原则三：概率反证法

  若想检验某命题成立，则应提出原假设 H_0 为不成立

  样本的先验信息支持什么结论，就把它作为备择假设，反面作为原假设

  例如例题中 $\bar{X} = 49.49 \neq 50$ 看上去是不正常的，所以应该假设 H_0 为机器正常
- 单边假设检验

  检验形式如 $\mu \leqslant \mu_0, \mu \geqslant \mu_0$ 的假设

  方法：检验统计量采用临界点处的分布 $(\mu_0 = \mu)$
- 假设检验的一般步骤
  1. 根据实际问题提出原假设 H_0 和备择假设 H_1
  2. 求出未知参数的较好的点估计

3. 依据点估计构造一个检验统计量，然后分析当 H_0 成立时，该统计量有什么“趋势”，逆这个“趋势”就给出了 H_0 的拒绝域的形式，即 H_0 的拒绝域形式由 H_1 决定
4. 对于给定的显著性水平 α，按控制 I 类风险的检验原则，确定 H_0 的拒绝域
5. 抽样，判断样本观察值是否落在拒绝域内，从而做出接受或拒绝 H_0 的决策

- 检验 μ 的步骤
  1. 构造分布 w
  2. $\mu=\mu_0$：$w<\frac{\alpha}{2}$ 分位点或 $w>1-\frac{\alpha}{2}$ 分位点

     $\mu\leqslant\mu_0$：$w>1-\alpha$ 分位点

     $\mu\geqslant\mu_0$：$w<\alpha$ 分位点
  3. 代入 $\bar{X},S^2,\mu_0$ 等值求出 w，判断是否在拒绝域内

8.2 正态总体参数的假设检验

8.2.1 单正态总体的假设检验

- 例 1：设 $X_1,X_2,...,X_n$ 为总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ,σ^2 均未知，在显著性水平为 α 下，检验假设：$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$

  解:

  H_0 为真时 $|\bar{X}-\mu_0|$ 应较小

  又因为 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

  $\therefore P(\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)|\mu=\mu_0)=\alpha$

  $\therefore H_0$ 的拒绝域为 $|\bar{X}-\mu_0|>\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
- 例 2：设 $X_1,X_2,...,X_n$ 为总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ,σ^2 均未知，在显著性水平为 α 下，检验假设：$H_0:\mu\leqslant\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$（单侧假设检验）

  解:

  H_0 为真时 $\bar{X}-\mu_0$ 偏小于 0

  $\because\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$（临界点 $\mu=\mu_0$）

  $\therefore P(\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\alpha}(n-1)|\mu=\mu_0)=\alpha$

  $\therefore$ 拒绝域 $\bar{X}>\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}(n-1)$
- 例 3：μ,σ^2 未知，检验 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$

  解:

  S^2 是 σ^2 的无偏估计，且 $D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$，故当 H_0 成立时 S^2 的值应在 σ^2 附近波动，且幅度不应太大，否则有理由拒绝 H_0。当 H_0 为真时:

  $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

  $\therefore$ 拒绝域 $S^2<\frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $S^2>\frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

  检验 $\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ 时的拒绝域：$S^2<\frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{\alpha}(n-1)$，$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ 的拒绝域：$S^2>\frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
- 单正态总体检验时使用的统计量
  - 检验均值（方差已知）

    $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$
  - 检验均值（方差未知）

    $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$
  - 检验方差（均值未知）

    $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$
  - 检验方差（均值已知）

    $\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0})^2\sim\chi^2(n)$

8.2.2 双正态总体的假设检验

- 检验 $\mu_1 = \mu_2$
  1. 若 σ_1^2, σ_2^2 均未知，则检验要求 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$（方差齐性）
$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$$
  2. 若 σ_1^2, σ_2^2 均已知，则统计量取 $U = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$
  3. 若总体方差以及是否具有方差齐性均未知，则先检验 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- 检验 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

  $\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

  单侧 $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$：$\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$
- 常用检验
  1. σ_1^2, σ_2^2 已知，检验 μ_1, μ_2
$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$
     - $\mu_1 = \mu_2$：$|U| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
     - $\mu_1 \leqslant \mu_2$：$U > u_{1-\alpha}$
     - $\mu_1 \geqslant \mu_2$：$U < u_{\alpha}$
  2. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 检验 μ_1, μ_2
$$t = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$
     - $\mu_1 = \mu_2$：$|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
     - $\mu_1 \leqslant \mu_2$：$t > t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
     - $\mu_1 \geqslant \mu_2$：$t < t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
  3. σ_1^2, σ_2^2 未知，n_1, n_2 充分大
$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$
  4. σ_1^2, σ_2^2 未知，n_1, n_2 不够大
$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

8.3 第八章习题

1. 从甲地发送一个信号到乙地。设乙地接收到的信号值服从正态分布 $N(\mu, 0.2^2)$，其中 μ 为甲地发送的真实信号值。现甲地重复发送同一信号 5 次，乙地接收到的信号值分别为 0.85, 8.15, 8.20, 8.10, 8.25。设乙地猜测到的信号真实值为 8，问能否接受该猜测?

   解:

   由题意得 $\bar{X} = 8.15$

   $\therefore$ 作假设 $H_0 : \mu = \mu_0 = 8, H_1 : \mu \neq \mu_0$

   $\because \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

   $\therefore H_0$ 的拒绝域为 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 或 $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

   取 $\alpha = 0.05$，查表得 $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$

   代入 $\bar{X}$ 得 $\frac{8.15-8}{0.2/\sqrt{5}} = 1.6771 \leqslant 1.96$

   $\therefore$ 可以认为信号的真实值是 8
2. 某厂生产的某种铝材的长度服从正态分布，其均值设定为 240cm，现从该厂的产品中抽取 5 件，测得其长度（cm）分别为 239.7, 239.6, 239, 240, 239.2，问该厂的产品是否满足要求

   解:

   由题意 $\bar{X} = 239.5, S^2 = 0.16$

$\therefore$ 设 $H_0: \mu = \mu_0 = 240, H_1: \mu \neq \mu_0$

$\because \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(4)$

$\therefore$ 由 t 检验知 H_0 的拒绝域为 $|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)$

取 $\alpha = 0.05$，查表得 $t_{0.975}(4) = 2.776$

代入 $\bar{X}, S^2$ 得 $t = -2.7951$

$\therefore |t| > 2.776$

$\therefore$ 拒绝 H_0，即认为该厂的产品不满足要求

3. 某类钢板每块的重量 X 服从正态分布，其一项质量指标是钢板重量的方差不能超过 $0.016kg^2$，现从某天是生产的钢板中随机抽取 25 块，得到样本方差 $S^2 = 0.025kg^2$，问该天生产的钢板是否满足要求

解:

作假设 $H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 = 0.016, H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

$\because \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(24)$

$\therefore$ 由 χ^2 检验知 H_0 的拒绝域为 $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(24)$

取 $\alpha = 0.05$，查表得 $\chi^2_{0.95}(24) = 36.415$

代入 S^2, σ_0^2 得 $\chi^2 = \frac{24\times0.025}{0.016} = 37.5 > 36.415$

$\therefore$ 拒绝 H_0，即认为该天生产的钢板不满足要求

END