1º Teste de Mecânica e Campo Electromagnético
8 de Novembro de 2011
Resolução

I a) $\vec{F} = (3,0)\ N$, $m = 2\,kg$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)\ m/s^2$

$$\vec{v} = \int dt\, \vec{a} = \left(\frac{3}{2}t + v_0^x,\ v_0^y\right)\ m/s$$

Para $t=0$ a velocidade é $\vec{v} = (v_0^x, v_0^y) = (1,1)\ m/s$

Logo, o vector velocidade em função do tempo é

$$\vec{v} = \left(\frac{3}{2}t + 1,\ 1\right)\ m/s$$

I b) Denotamos $v \equiv \|\vec{v}\|$. Então, por definição:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{v}$$; no nosso caso

$$v = \sqrt{\left(\frac{3}{2}t+1\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{4}t^2 + 3t + 2} \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\frac{9}{4}t + \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}t^2 + 3t + 2}}$$

Em $t=0$: $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$; $\vec{v} = (1,1)$; $v = \sqrt{2}$

Logo $\vec{a}_t(0) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4}(1,1)$;

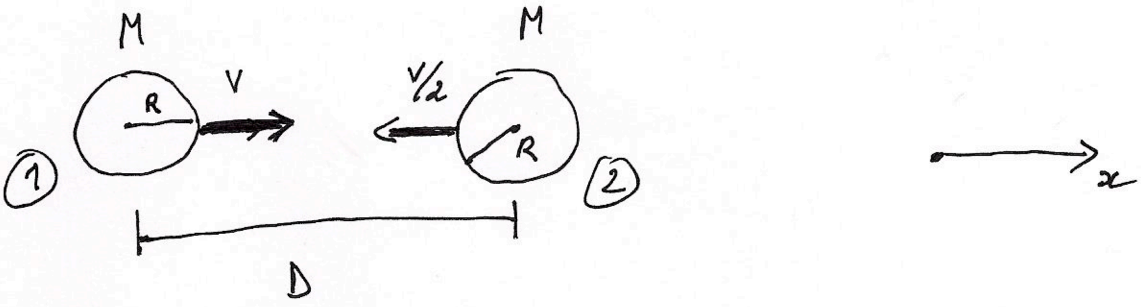
Como $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Leftrightarrow \vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$; Logo $\vec{a}_n(0) = \left(\dfrac{3}{2}, 0\right) - \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$

$$= \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$$

Ib cont) A magnitude de cada é:

$$a_t(0) = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}} \quad ; \quad a_n(0) = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}}$$

II a)



Consideremos um referencial que se desloca na direcção $\underline{x}$ com velocidade $V/4$. Nesse referencial a velocidade do planeta $\underline{1}$ e $\underline{2}$ é:

$$V_1 = \frac{3}{4} V \quad ; \quad V_2 = -\frac{3}{4} V$$

Como (neste referencial) os planetas tem a mesma velocidade (com sentidos opostos) e dado que sofrem a mesma aceleração (com sentidos opostos), no instante da colisão irão ter também a mesma velocidade (com sentidos opostos):

$$V_1^{\text{colisão}} = \alpha \qquad V_2^{\text{colisão}} = -\alpha$$

A colisão ocorre quando a distância entre os planetas for $2R$. Usando conservação de energia:

$$E_c^{\text{inicial}} + E_p^{\text{inicial}} = E_c^{\text{final}} + E_p^{\text{final}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}M\left(\frac{3}{4}V\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(-\frac{3}{4}V\right)^2 - \frac{GM^2}{D} = \frac{1}{2}M\alpha^2 + \frac{1}{2}M(-\alpha)^2 - \frac{GM^2}{(2R)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16}V^2 - \frac{GM}{D} = \alpha^2 - \frac{GM}{2R} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{9}{16}V^2 + GM\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{D}\right)}$$

A velocidade relativa dos planetas no momento da colisão é 2α:

$$2\alpha = \sqrt{\frac{9}{4}V^2 + GM\left(\frac{2}{R} - \frac{4}{D}\right)}$$

Note que a velocidade relativa é independente do referencial

II b) No referencial usado na alínea anterior o novo planeta ficaria em repouso, logo no referencial original o novo planeta desloca-se com velocidade

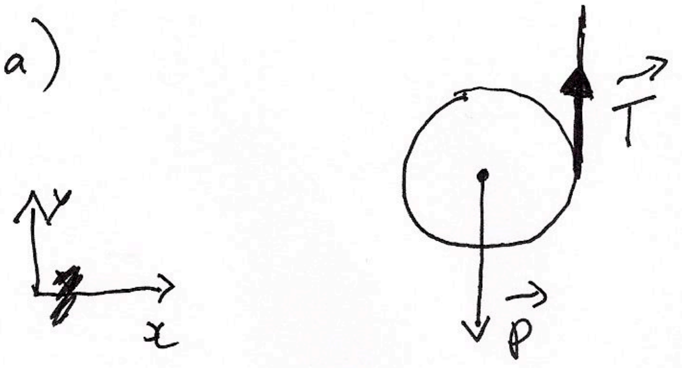
$\frac{V}{4}$ no sentido $\underline{x}$ positivo

A mesma conclusão é facilmente obtida usando a conservação de momento:

$$\vec{P}_1^{\,inicial} + \vec{P}_2^{\,inicial} = \vec{P}^{\,final} \Leftrightarrow MV - M\frac{V}{2} = 2MV_{final}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_{final} = \frac{V}{4}}$$

III a)



$\vec{P}$ = peso

$\vec{T}$ = tensão do fio

b) Neste problema devemos aplicar as leis fundamentais da dinâmica ($\vec{F} = m\vec{a}$) e da dinâmica de rotação ($\tau = I\alpha$). No referencial x-y:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{-P + T = Ma} \quad (1)$$

E a relação entre a aceleração linear $\underline{a}$ e angular $\underline{\alpha}$ é

$$a = R\alpha$$

Note que a aceleração angular é positiva quando $a > 0$ e como tal quando o iô-iô sobe (roda no sentido retrógrado)

O torque é devido a $\vec{T}$;

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{RT = -\frac{1}{2}MR^2\alpha}$$

O sinal menos é porque o torque imprime aceleração no sentido directo

Desta eq. obtemos:

$$T = -\frac{1}{2}MR\frac{a}{R} = -\frac{1}{2}Ma$$

Substituindo em (1): $-Mg - \frac{1}{2}Ma = Ma$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{a = -\frac{2}{3}g}$$

IV a) $x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{30}{3}}\ Hz$

Temos de determinar ϕ_0 e A. Assumimos que é empurrada no instante $t=0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Logo $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \pi/2) \underset{t=0}{=} -A\omega$

Como $|v(0)| = 2\ m/s = A\omega \Leftrightarrow A = \frac{2}{\sqrt{10}}\ m$

Logo $\boxed{x(t) = \frac{2}{\sqrt{10}} \cos\left(\sqrt{10}\,t + \pi/2\right)}$

---

b) $x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi_0)$; $\omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

$K = 30\ N/m$; $m = 3\ kg$; $b = 0.2\ Ns/m$

$v(t) = -A_0 \omega e^{-b/2m\,t} \sin(\omega t + \phi_0) - \frac{A_0 b}{2m} e^{-b/2m} \cos(\omega t + \phi_0)$

Energia total:

$\boxed{E_c + E_p} = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\omega^2 m x^2 + \frac{1}{2}mv^2$

$$\boxed{= \frac{1}{2}A_0^2 \omega^2 m\, e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{1}{2}A_0^2 b\omega\, e^{-\frac{b}{m}t} \sin(\omega t + \phi_0)\cos(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{8m}A_0^2 b^2 e^{-b/m\,t} \cos^2(\omega t + \phi_0)}$$