Mecânica e Campo Electromagnético - Teste 1

6 de Novembro de 2012

Universidade de Aveiro

Duração: 1.5 horas

Problema 1

Uma partícula pontual move-se com uma aceleração:

$$\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{u}_t + 4t^2\mathbf{u}_n \quad (m/s^2) \ ,$$

partindo do repouso do ponto $x = 1$ no eixo dos xx.

a) Calcule a magnitude da velocidade no instante $t = 1$ s.

b) Identifique o tipo de movimento e indique a equação da trajectória $y = y(x)$.

c) Determine a expressão da posição em função do tempo.

Problema 2

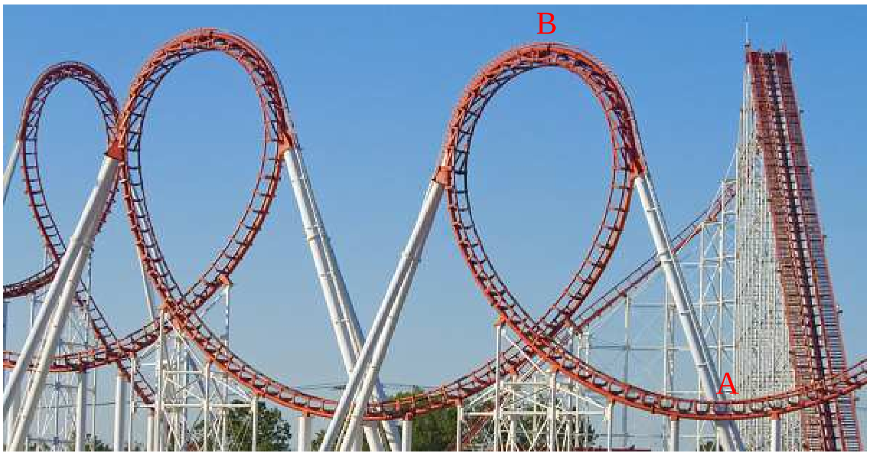
a) Enuncie as três leis de Newton

b) Demonstre, utilizando as leis de Newton, que o momento linear total de um sistema de N partículas é conservado, na ausência de forças exteriores. Pode considerar $N = 3$.

c) Um homem encontra-se no meio de um lago, em cima de uma jangada em repouso (relativamente às margens) que possui um mastro. Não tendo remos e evitando colocar as mãos na água, infestada de piranhas, decide empurrar o mastro da jangada na direcção de uma das margens, com o objectivo de deslocar a jangada nessa direcção. Irá ter sucesso? Justifique?

Problema 3

Considere a montanha russa da Figura. Qual a velocidade mínima no ponto mais baixo A, de modo a que a carruagem não "caia" no ponto mais alto B? Assuma que a diferença de altura entre os dois pontos é h metros, que a calha na vizinhança de B é aproximadamente circular com raio R e despreze o atrito.



Problema 4

Uma mola de constante $k = 0.4\ N/m$ e massa $m = 0.1kg$ tem o ponto de equilíbrio em $x = 0$. É lançada em $t = 0$ de $x = 0.1\ m$ e com uma velocidade de $v = -0.2\ m/s$.

a) Sem fazer qualquer cálculo argumente se a amplitude é maior ou menor do que 0.1 m.

b) Determine a posição em função do tempo.

c) Se houver atrito com $F_a = -0.2v\ N$ onde v é a velocidade em m/s, o oscilador está no regime subamortecido? Determine a posição em função do tempo.

Formulário

- $a_t = dv/dt; \quad a_n = v^2/R$.
- Vector aceleração em coordenadas polares: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$.
- Movimento harmónico simples: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$, $\omega_0^2 = k/m$.
- Movimento harmónico amortecido (no regime apropriado): $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi_0)$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$; $\gamma = b/2m$; $F_a = -bv$.

Proposta de resolução:

Problema 1

a) Como a aceleração é:

$$\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{u}_t + 4t^2\mathbf{u}_n \quad (m/s^2) ,$$

usando as fórmulas dadas no formulário para a aceleração tangencial e normal obtemos,

$$\frac{dv}{dt} = 2 , \tag{1}$$

$$\frac{v^2}{R} = 4t^2 . \tag{2}$$

Integrando a fórmula (1) obtemos, para a magnitude da velocidade, v, $v = 2t + v_0$ e tomamos a constante de integração $v_0 = 0$, pois é dito que a partícula parte do repouso. Logo

$$v(t) = 2t . \tag{3}$$

Logo, a magnitude da velocidade em $t = 1\ s$ é $v = 2\ m/s$.

b) Usando o resultado (3) na equação (2) obtemos

$$R = 1 .$$

Como o raio é constante temos um <u>movimento circular</u>; como a aceleração tangencial é constante o movimento é <u>uniformemente acelerado</u>.

Logo é um <u>movimento circular uniformemente acelerado</u>.

A trajectória é uma circumferência de raio 1, centrada na origem:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2} .$$

c) A velocidade angular ω relaciona-se com a magnitude da velocidade linear v, para um movimento circular, por $v = \omega R$. Neste caso, como $R = 1$, temos $\omega = v = 2t$. Num movimento circular, cuja posição angular é $\theta(t)$, centrado na origem e com raio R, temos

$$x(t) = R\cos(\theta(t)) , \qquad y(t) = R\sin(\theta(t)t) .$$

Como

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \theta(t) = \int \omega dt = t^2 + \theta(0) ,$$

e como para $t = 0$, temos $x = 1$, $y = 0$, tomamos $\theta(0) = 0$. Logo

$$x(t) = \cos(2t^2) , \qquad y(t) = \sin(2t^2) ,$$

o que determina a posição em função do tempo.

Problema 2

a) i) Primeira lei de Newton (lei da inércia) - um corpo sobre o qual não actua nenhuma força permanece em repouso ou em movimento rectilínio e uniforme (relativamente a um referencial inercial).

ii) Segunda lei de Newton (lei fundamental) - um corpo com massa m que se move relativamente a um referencial inercial com velocidade $\vec{v}$, e sobre o qual actua uma força $\vec{F}$, sofre uma variação de momento linear dada por

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ , \qquad \text{onde} \qquad \vec{p} = m\vec{v} \ .$$

iii) Terceira lei de Newton (lei da acção - reacção) - Se um corpo A exerce sobre um corpo B uma força $\vec{F}$, o corpo B exerce sobre o corpo A uma força $-\vec{F}$.

b) Denotamos por $\vec{f}_{ij}$ a força sobre a partícula i devido à partícula j. Pela segunda lei de Newton

$$\frac{d\vec{p_1}}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} \ , \qquad \frac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} \ , \qquad \frac{d\vec{p_3}}{dt} = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} \ ,$$

dado que não há forças exteriores (apenas as forças entre as partículas). O momento linear total do sistema é

$$\vec{P} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} \ .$$

Logo

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} + \frac{d\vec{p_3}}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} \ .$$

Pela terceira lei de Newton $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$. Logo

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \ ,$$

pelo que o momento linear total é conservado.

c) Não irá ter sucesso. Dado que a força exterior sobre o sistema homem/jangada é nula, o momento linear do sistema irá manter-se inalterado; ou seja o sistema manter-se-á em repouso relativamente à margem.

Problema 3

No ponto mais alto, B, a segunda lei de Newton para a carruagem escreve-se:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{P} + \mathbf{R}_N \ , \tag{4}$$

onde $\mathbf{P}$ é o peso e $\mathbf{R}_N$ é a reacção da calha sobre a carruagem. Dado que na vizinhança de B a calha é aproximadamente circular com raio R, apenas a projecção normal à calha em B é não trivial (não existem forças horizontais). Usando a expressão da aceleração em coordenadas polares, com raio constante, obtemos, em B,

$$m\frac{v_B^2}{R} = mg + R_N \geq mg \ . \tag{5}$$

A igualdade na última condição é atingida quando a carruagem estiver na iminência de cair. Logo $v_B^2 \geq gR$.

Dado que não há atrito, usamos a conservação de energia:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh \qquad \Leftrightarrow \qquad v_A^2 = v_B^2 + 2gh \geq gR + 2gh \ . \tag{6}$$

Concluimos que a velocidade mínima é $(v_A^2)^{\min} = g(R + 2h)$.

Problema 4

a) A amplitude é maior do que 0.1 m porque na posição inicial é este o deslocamento e ainda existe energia cinética. Quando o deslocamento iguala amplitude toda a energia será potencial. Por conservação de energia, esse deslocamento será maior do que 0.1 m.

b) A posição em função do tempo é dada por $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$. Necessitamos por isso de especificar A, ω_0, ϕ_0.

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{0.4/0.1} = 2 \ rad/s \ .$$

Usando as condições iniciais:

$$0.1 = x(t = 0) = A\cos(\phi_0) \ , \qquad -0.2 = v(t = 0) = -2A\sin(\phi_0) \ .$$

Logo

$$\phi_0 = \frac{\pi}{4} \ , \qquad A = \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \ .$$

c) O regime subamortecido acontece para $\omega_0 > \gamma$. Neste caso

$$\omega_0 = 2 > 1 = \frac{0.2}{2 \times 0.1} = \frac{b}{2m} = \gamma \ .$$

Logo o oscilador está no regime subamortecido.

A posição em função do tempo é dada por $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi_0)$, onde $\gamma = 1$ e $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 = 3$. Para determinar A, ϕ_0 temos que considerar que a velocidade para $v(t = 0)$ é modificada:

$$0.1 = x(t = 0) = A\cos(\phi_0) \ , \qquad -0.2 = v(t = 0) = -\omega A\sin(\phi_0) - \gamma A\cos\phi_0 \ .$$

Dados os valores de $\omega = \sqrt{3}$ e $\gamma = 1$ a solução para A, ϕ_0 é:

$$\phi_0 = \frac{\pi}{6} \ , \qquad A = \frac{1}{5\sqrt{3}} \ .$$

Note-se que a amplitude é menor do que na alínea anterior, como esperado devido ao atrito e como tal a fase inicial é mais próxima de 0, o que corresponderia a ter o máximo da amplitude em $t = 0$.