目录

1 绪论

1.1 三个问题

1. **存在性问题**解是否存在
2. **计数问题**有多少种解
3. **构造问题**解应该怎么构造

1.2 求解方法

1. **数学归纳法**
2. **迭代法**
3. **一一对应技术**

   利用两个事物间一一对应的关系，将较复杂的组合计数问题 A 转化成容易计数的 B
4. **殊途同归方法**

   从不同角度讨论计数问题，建立组合等式
5. **数论方法**

   利用整数的奇偶性、整除性等数论性质进行分析推理

1.3 两个法则

1. **加法法则**

   若完成一件事有两个方案，第一个方案有 m 种方法，第二种有 n 种，只要选择任何方案中某一种方法就能完成，并且方法两两互不相同，则完成事情共有 m+n 个方法
2. **乘法法则**

   若完成一件事有两个步骤，第一步有 m 个方法，第二步有 n 种方法，则完成事情共有 m · n 种方法

1.4 排列与组合

1.4.1 相异元素不允许重复的排列数和组合数

从 n 个相异元素种不重复的取 r 个元素的排列数和组合数分布为：

$$P_n^r = P(n,r) = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1}$$

$$C_n^r = C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{2}$$

相异元素不允许重复的排列问题也可以描述为：将 r 个有区别的球放入 n 个不同的盒子，每个盒子不超过一个，则总的放法数为 $P(n,r)$。同样，若球不加区别，则有 $C(n,r)$ 种放法。这是排列与组合的数学模型——**分配问题**，也称**分配模型**

1.4.2 相异元素允许重复的排列

从 n 个不同元素种允许重复的选 r 个元素的排列，简称 **r 元重复排列**。其排列个数记为 $RP(\infty,r)$。其对应的分配模型为将 r 个有区别的球放入 n 个不同的盒子，每个盒子的球数不加限制而且同盒的球不分次序。则排列数为：

$$RP(\infty,r) = n^r \tag{3}$$

从集合的角度理解，问题也可以描述为：

设集合 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\dots,\infty\cdot e_n\}$，即 S 种共含 n 类元素，每类元素有无穷多个，从 S 中取 r 个元素的排列数即为 $RP(\infty,r)$

1.4.3 不尽相异元素排列

设 $S=\{n_1\cdot e_1,n_2\cdot e_2,\dots,n_t\cdot e_t\}$，即元素 e_i 有 n_i 个 $(i=1,2,\dots,t)$，且 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$，从 S 中任取 r 个元素，求其排列数 $RP(n,r)$

本问题的数学模型事将 r 个有区别的球放入 t 个不同的盒子，而每个盒子的容量事有限的，其中第 i 个盒子最多只能放入 n_i 个球，求分配方案数。

相对于前两种情况，这种事有限重复的排列问题，即相异元素不重复的排列强调事不重复，即盒子的容量为 1；允许重复的排列实际上是盒子容量无限。而有限重复是盒子容量有限。

如下是几个特例：

1. r=1 时，$RP(n,1) = P_t^1 = t$
2. r = n 时，n 个元素的全排列数为

$$RP(n,n) = \frac{n!}{n_1!n-2!\dots n_3!} \tag{4}$$

   先视为 n 个不同元素的排列，共有 n！ 种。但每个排列实际重复统计了 $n_1!n_2!\dots n_t!$ 次。因为当元素不同时，同类元素交换位置，对应不同的排列。而当同类元素相同时，针对每个确定的排列，同类元素互相交换位置，该排列不变。

3. t = 2 时, 2 个元素的全排列数为

$$RP(n,n) = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \binom{n}{n_1} \tag{5}$$

1.4.4 相异元素不允许重复的圆排列

1. **问题一：** n 个有标号的珠子排成一个圆圈，共有几种不同的排法

   (a) 方法一

   n 个相异元素任意排成一行（线排列），共有 n！ 种排法，再首尾相接，每当元素转动时，相当于 n 个不同的线排列，故排列数为：

$$CP(n,n) = \frac{P(n,n)}{n} = (n-1)! \tag{6}$$

   (b) 方法二

   先取出某一元素 k，放于圆上某确定位置，再令余下的 n-1 个元素作成一个线排列，首位置于 k 的两侧构成一个圆排列同样可以得到：

$$CP(n,n) = \frac{P(n,n)}{n} = (n-1)!$$

2. **问题二：** 从 n 个相异元素中不重复地去 r 个围成圆排列，求不同排列总数 CP(n,r)

即为从 n 个相异的元素中取出 r 个线排列，且由于对称过来仍然相同，则共有：

$$\frac{P(n,r)}{2r} = \frac{n!}{2r(n-r)!} \tag{7}$$

1.4.5 相异元素允许重复的组合

设 $S = \{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \ldots, \infty \cdot e_n\}$，从 S 中允许重复地取 r 个元素构成组合，称为 r 可重组合，组合数记为 $RC(\infty, r)$。

将 S 的 n 个不同元素分别用 1,2,...,n 表示，则取出 r 个元素从小到大设为 $a_1, a_2, \ldots, a_r$，则 a_i 满足：

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_r \leq n$$

令 $b_i = a_i + (i-1), i = 1, 2, \ldots, e$，则

$$1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leq n + (r-1)$$

对应一个从 n+r-1 个相异元素中不允许重复地取 r 个元素的组合。从而两个集合一一对应：

$$RC(\infty, r) = C(n+r-1, r) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

重复组合的模型是将 r 个无区别的球放入 n 个不同的盒子，每个盒子的球数不变

1.4.6 不尽相异的元素组合

设 $S = \{n_1 \cdot e_1, n_2 \cdot e_2, \ldots, n_t \cdot e_t\}$，且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$，从 S 中任取 r 个，求其组合数 RC(n,r)

设多项式

$$\prod_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{n_i} x^j = \prod_{i=1}^{t} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n_i}) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r$$

则 RC(n,r) 就是多项式中 x^r 的系数，即

$$RC(n,r) = a_r$$