2 图像去畸变（3 分，约 1 小时）

现实生活中的图像总存在畸变。原则上来说，针孔透视相机应该将三维世界中的直线投影成直线，但是当我们使用广角和鱼眼镜头时，由于畸变的原因，直线在图像里看起来是扭曲的。本次作业，你将尝试如何对一张图像去畸变，得到畸变前的图像。

图 1: 测试图像

图 1 是本次习题的测试图像（code/test.png），来自 EuRoC 数据集 [1]。可以明显看到实际的柱子、箱子的直线边缘在图像中被扭曲成了曲线。这就是由相机畸变造成的。根据我们在课上的介绍，畸变前后的坐标变换为：

$$\begin{cases} x_{\text{distorted}} = x\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right) + 2p_1 xy + p_2\left(r^2 + 2x^2\right) \\ y_{\text{distorted}} = y\left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right) + p_1\left(r^2 + 2y^2\right) + 2p_2 xy \end{cases} \tag{1}$$

其中 x, y 为去畸变后的坐标，$x_{\text{distorted}}, y_{\text{distroted}}$ 为去畸变前的坐标。现给定参数：

$$k_1 = -0.28340811,\ k_2 = 0.07395907,\ p_1 = 0.00019359,\ p_2 = 1.76187114e - 05.$$

以及相机内参

$$f_x = 458.654,\ f_y = 457.296,\ c_x = 367.215,\ c_y = 248.375.$$

请根据 undistort_image.cpp 文件中内容，完成对该图像的去畸变操作。

注：本题不要使用 OpenCV 自带的去畸变函数，你需要自己理解去畸变的过程。我给你准备的程序中已经有了基本的提示。作为验证，去畸变后图像如图 2 所示。如你所见，直线应该是直的。

图 2: 验证图像

作业的代码部分均见附件。

image_undistorted

3 双目视差的使用 (2 分，约 1 小时)

双目相机的一大好处是可以通过左右目的视差来恢复深度。课程中我们介绍了由视差计算深度的过程。本题，你需要根据视差计算深度，进而生成点云数据。本题的数据来自 Kitti 数据集 [2]。

Kitti 中的相机部分使用了一个双目模型。双目采集到左图和右图，然后我们可以通过左右视图恢复出深度。经典双目恢复深度的算法有 BM(Block Matching), SGBM(Semi-Global Block Matching)[3, 4] 等，但本题不探讨立体视觉内容（那是一个大问题）。我们假设双目计算的视差已经给定，请你根据双目模型，画出图像对应的点云，并显示到 Pangolin 中。

本题给定的左右图见 code/left.png 和 code/right.png，视差图亦给定，见 code/right.png。双目的参数如下：

$$f_x = 718.856,\ f_y = 718.856,\ c_x = 607.1928,\ c_y = 185.2157.$$

且双目左右间距（即基线）为：

$$d = 0.573\ \mathrm{m}.$$

请根据以上参数，计算相机数据对应的点云，并显示到 Pangolin 中。程序请参考 code/disparity.cpp 文件。

图 3: 双目图像的左图、右图与视差

作为验证，生成点云应如图 4 所示。

图 4: 双目生成点云结果

见 stereo_vision

4 矩阵运算微分（2 分，约 1.5 小时）

在优化中经常会遇到矩阵微分的问题。例如，当自变量为向量 $\mathbf{x}$，求标量函数 $u(\mathbf{x})$ 对 $\mathbf{x}$ 的导数时，即为矩阵微分。通常线性代数教材不会深入探讨此事，这往往是矩阵论的内容。我在 ppt/目录下为你准备了一份清华研究生课的矩阵论课件（仅矩阵微分部分）。阅读此 ppt，回答下列问题：

设变量为 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$，那么：

1. 矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$，那么 $\mathrm{d}(\mathbf{Ax})/\mathrm{d}\mathbf{x}$ 是什么[1]？
2. 矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$，那么 $\mathrm{d}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax})/\mathrm{d}\mathbf{x}$ 是什么？
3. 证明：

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \mathrm{tr}(\mathbf{Axx}^{\mathrm{T}}). \tag{2}$$

$\boxed{1.}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$

$$d(Ax)/dx = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\boxed{2.}$ $\cancel{\frac{1}{2}}f(x) = x^T A x = [x_1, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_na_{n1}, \cdots, x_1a_{1n} + x_2a_{2n} + \cdots + x_na_{nn}]x$

$$= x_1(x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_na_{n1}) + x_2(x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{n2}) + \cdots + x_n(x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn})$$

$$\frac{d(x^TAx)}{dx} = \nabla_x f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right]^T$$

$$= \left[(a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n) + (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n), \cdots, (a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n) + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)\right]^T$$

$$= A^Tx + Ax$$

$\boxed{3.}$ 证：$x^TAx = \mathrm{tr}(Axx^T)$

$$x^TAx = x_1(x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_na_{n1}) + x_2(x_1a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{n2}) + \cdots + x_n(x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn})$$

$$\mathrm{tr}(Axx^T) = (\mathrm{vec}(A))^T \mathrm{vec}(xx^T)$$

$(\mathrm{vec}(A))^T = [a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn}]$ $\quad xx^T = \begin{bmatrix} x_1x_1 & \cdots & x_1x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & \cdots & x_nx_n \end{bmatrix}$

$$\mathrm{vec}(xx^T) = [x_1x_1, \cdots, x_1x_n, \cdots, x_nx_1, \cdots x_nx_n]^T$$

$$(\mathrm{vec}(A))^T\mathrm{vec}(xx^T) = \begin{aligned} & a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ + & a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ + & \cdots \\ + & a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_nx_n \end{aligned}$$

$$= x^TAx$$

5 高斯牛顿法的曲线拟合实验（3 分，约 2 小时）

我们在课上演示了用 Ceres 和 g2o 进行曲线拟合的实验，可以看到优化框架给我们带来了诸多便利。本题中你需要自己实现一遍高斯牛顿的迭代过程，求解曲线的参数。我们将原题复述如下。设有曲线满足以下方程：

$$y = \exp(ax^2 + bx + c) + w. \tag{3}$$

其中 a, b, c 为曲线参数，w 为噪声。现有 N 个数据点 (x, y)，希望通过此 N 个点来拟合 a, b, c。实验中取 $N = 100$。

那么，定义误差为 $e_i = y_i - \exp(ax_i^2 + bx_i + c)$，于是 (a, b, c) 的最优解可通过解以下最小二乘获得：

$$\min_{a,b,c} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left\| y_i - \exp\left(ax_i^2 + bx_i + c\right) \right\|^2. \tag{4}$$

现在请你书写 Gauss-Newton 的程序以解决此问题。程序框架见 code/gaussnewton.cpp，请填写程序内容以完成作业。作为验证，按照此程序的设定，估计得到的 a, b, c 应为：

$$a = 0.890912, \ b = 2.1719, \ c = 0.943629.$$

这和书中的结果是吻合的。

见 Gaussian_Neuton 文件夹

6 * 批量最大似然估计 (2 分，约 2 小时)

考虑离散时间系统：

$$
\begin{aligned}
x_k &= x_{k-1} + v_k + w_k, \qquad & w \sim \mathcal{N}(0, Q) \\
y_k &= x_k + n_k, \qquad & n_k \sim \mathcal{N}(0, R)
\end{aligned}
$$

这可以表达一辆沿 x 轴前进或后退的汽车。第一个公式为运动方程，v_k 为输入，w_k 为噪声；第二个公式为观测方程，y_k 为路标点。取时间 $k = 1, \ldots, 3$，现希望根据已有的 v, y 进行状态估计。设初始状态 x_0 已知。

请根据本题题设，推导批量（batch）最大似然估计。首先，令批量状态变量为 $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$，令批量观测为 $\mathbf{z} = [v_1, v_2, v_3, y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$，那么：

1. 可以定义矩阵 $\mathbf{H}$，使得批量误差为 $\mathbf{e} = \mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}$。请给出此处 $\mathbf{H}$ 的具体形式。
2. 据上问，最大似然估计可转换为最小二乘问题：

$$
\mathbf{x}^* = \arg\min \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}), \tag{5}
$$

   其中 $\mathbf{W}$ 为此问题的信息矩阵，可以从最大似然的概率定义给出。请给出此问题下 $\mathbf{W}$ 的具体取值。
3. 假设所有噪声相互无关，该问题存在唯一的解吗？若有，唯一解是什么？若没有，说明理由。

1. $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\quad v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\quad H = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

2. $z - Hx = e \sim N(0, W)$ （不太清楚是否是这个意思）

3. 存在。 $(H^T W^{-1} H)^{-1} H^T W^{-1} z$ （自己试着推了一下和书上不太符，希望可以讲一下（讲评时））