

2 LK 光流

2.1 光流文献综述 *Lucas-Kanade 20 Years On: A Unifying Framework*

1. 分为 additive 加法算法 or compositional 复合算法；forward 正向算法 or inverse 逆向算法。
2. compositional 的两种算法（Forward Compositional & Inverse Compositional）中，都需要在当前位姿估计之前引入增量式 warp（incremental warp）以建立半群约束要求（the semi-group requirement）。
3. 反向光流中，（To derive an efficient inverse additive algorithm, Hager and Belhumeur assumed that the warp W has a particular form.）梯度使用的是第一张图像的，Jacobian 和 Hessian 是保持不变的，可以在第一次迭代时保留结果，后续中持续使用。这样每次迭代只需要计算残差即可。而正向光流中，增量 Δp 是使用被匹配对象计算的。

2.2 forward-additive Gauss-Newton 光流的实现

1. 最小二乘法定义的误差：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^* = -(A^T A)^{-1} A^T b$$

2. 误差相对自变量的导数：

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma I}{\sigma X} \\ \frac{\sigma I}{\sigma Y} \end{bmatrix}$$

2.4 推广到金字塔

1. coarse-to-fine 是指在 pyrDown 顶层的图像（最小的）开始计算，把上一层的追踪结果提供给下一层做为计算的初始值。
2. **特征点法**的图像金字塔是用来解决对极约束中的尺度不变问题，如果相机在向后运动，那么就需要用前一帧的图片与下一帧 pyrDown 的图片寻找匹配；反之，相机向前运动，就需要用前一帧的图片与下一帧 pyrUp 的图片寻找匹配。因为尺度的变换对极约束条件仍成立。

光流法的图像金字塔用于解决局部极小值的问题，当相机移动速度快时，光流法很容易陷入局部极小值得不到全局最优解，用图像金字塔 coarse-to-fine，顶层更容易移动相对于底层较大的像素，以逼近最优解。

2.5 讨论

1. 如果是纯白墙面，或者是有很少特征的场景，图像块就会出现多个与目标块匹配的，这种情况下是不合理的。
2. 图像块越小会误匹配吧，但是过大的话我觉得可能会没有合适的匹配块，相机运动的过程受到干扰，如果匹配块过大，干扰就越多，匹配成功的概率就越小。
3. 如果金字塔层数不够，对目标运动尺度的缩小程度也不够，不能满足 LK 算法所需的前提；金字塔的层数过多，会导致顶层图像分辨率过低，影响图像块匹配。

3 直接法

3.1 单层直接法

1. 误差项：

$$e(T) = I_1(p_1) - I_2(u)(u = \frac{1}{Z_2}KTP)$$

2. 雅可比维度：

$$\frac{\sigma e}{\sigma T} = \frac{\sigma I_2}{\sigma u} \frac{\sigma u}{\sigma q} \frac{\sigma q}{\sigma \delta \xi}(q = TP)$$

上图↑维度分别为 1×2、2×3、3×6。

$$\frac{\sigma I_2}{\sigma u} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma I_2}{\sigma X} & \frac{\sigma I_2}{\sigma Y} \end{bmatrix} \qquad \frac{\sigma u}{\sigma q} = \begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z} & 0 & -\frac{f_x X}{Z^2} \\ 0 & \frac{f_y}{Z} & -\frac{f_y Y}{Z^2} \end{bmatrix} \qquad \frac{\sigma q}{\sigma \delta \xi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z' & Y' \\ 0 & 1 & 0 & Z' & 0 & -X' \\ 0 & 0 & 1 & -Y' & X' & 0 \end{bmatrix}$$

(公式用 LaTeX 打的截图下来的)

3. 书上窗口取的是 4×4。我觉得不能取单个像素，可能会因为误匹配计算出错误的变换矩阵 T。

3.3 延伸讨论

这个讨论的问题不是特别会，之后再想一想听听讲评。