Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ***ИУК «Информатика и управление»***
КАФЕДРА ***ИУК3 «Системы автоматического управления»***

ОТЧЁТ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

«Преобразование Лапласа. Нахождение оригинала функции по её изображению»

ДИСЦПЛИНА: «Общая теория автоматического управления»

Выполнил: студент гр. ИУК3-51Б ____________ (Смирнов Ф.С.)
(Подпись) (Ф.И.О.)

Проверил: ____________ (Корнюшин Ю.П.)
(Подпись) (Ф.И.О.)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга , 2023

Цель лабораторной работы - формирование практических навыков по использованию преобразования Лапласа для исследования систем управления.

Задача лабораторной работы - освоение свойств преобразования Лапласа, способов вычисления оригинала функции по её изображению, а также применение MATLAB к вычислению оригиналов функций по их изображениям. Закрепить полученные знаний на практике.

Функция, которая подвергается преобразованию Лапласа, должна обладать следующими свойствами:

1. Функция должна быть определена и дифференцируема по всей положительной полуоси;

2. Функция должна быть тождественно равна 0 при $t<0$, т.е. ($x(t)\equiv 0$ при $t<0$);

3. Функция должна быть ограниченна, т.е. для функции $x(t)$ существуют такие положительные числа ***M*** и ***c***, что $\left|x(t)\right| \le Me^{ct}$ при $0 \le t < \infty$, т.е. $\int\limits_0^\infty x(t)\,dt < \infty$

, где ***c*** – абсцисса абсолютной сходимости (некоторое положительное число).

Преобразование Лапласа это *соотношение вида* $X(s)=\int\limits_0^\infty x(t)e^{-st}dt$, *ставящее функции* $x(t)$ *вещественного переменного* t *в соответствие функцию* $X(s)$ *комплексного переменного* s *(*$s=\sigma+j\omega$*).*

При этом $x(t)$ называется *оригиналом*, $X(s)$ – *изображением*.

Символическая запись преобразования Лапласа, а именно,

$X(s)=L\left\{x(t)\right\}$, где L – оператор прямого преобразования Лапласа.

1.1 Нахождение оригиналов функций по их изображениям

Если изображение функции является дробно-рациональной функцией вида

$$X(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)} =$$
$$= \frac{b_m(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\ldots(s-\gamma_m)}{a_n(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)},$$

где γ_i, $i=\overline{1,m}$, s_i, $i=\overline{1,n}$ - нули и полюса изображения $X(s)$,

то нахождение оригинала производится по аналитическим формулам:

1. Для случая, когда корни простые, вещественные:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} e^{s_i t}. \qquad (1)$$

2. Для случая, когда корни простые, вещественные и один корень нулевой, т.е. $X(s) = \frac{B(s)}{sA(s)}$:

$$x(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_i)}{s_i A'(s_i)} e^{s_i t}. \qquad (2)$$

3. Для случая, когда корни комплексно-сопряженные, $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ (считается для одного корня):

$$x(t) = 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{B(s_{1i})}{A'(s_{1i})} e^{s_{1i} t}\right], \text{ если } s_{1i} = -\alpha_i + j\omega_i \qquad (3)$$

$$e^{\alpha t} e^{j\omega t} = e^{\alpha t}(Cos\,\omega t + jSin\,\omega t).$$

4. Для случая, когда корни комплексно-сопряженные и один нулевой:

$$x(t)=\frac{B(0)}{A(0)}+2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{B(s_{1i})}{s_{1i}A'(s_{1i})}e^{s_{1i}t}\right]. \qquad (4)$$

Практическая часть

Определим порядок вычисления оригинала функции по его изображению:

1. Вычислить корни полинома $A(s)$: $A(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0=0$.

Число корней s_i, $i=1,n$ равно n порядку полинома $A(s)$.

2. Выбрать формулу для расчёта оригинала.

3. Вычислить производную $A'(s)$.

4. Вычислить значения полиномов $A'(s_i)$ и $B(s_i)$ при подстановке корней полинома знаменателя.

5. Вычислить значения коэффициентов при функциях $e^{s_i t}$.

10	$\frac{2+s}{s^2+7s+10}$	$\frac{4s}{s^2+4s+20}$

Задание 1.

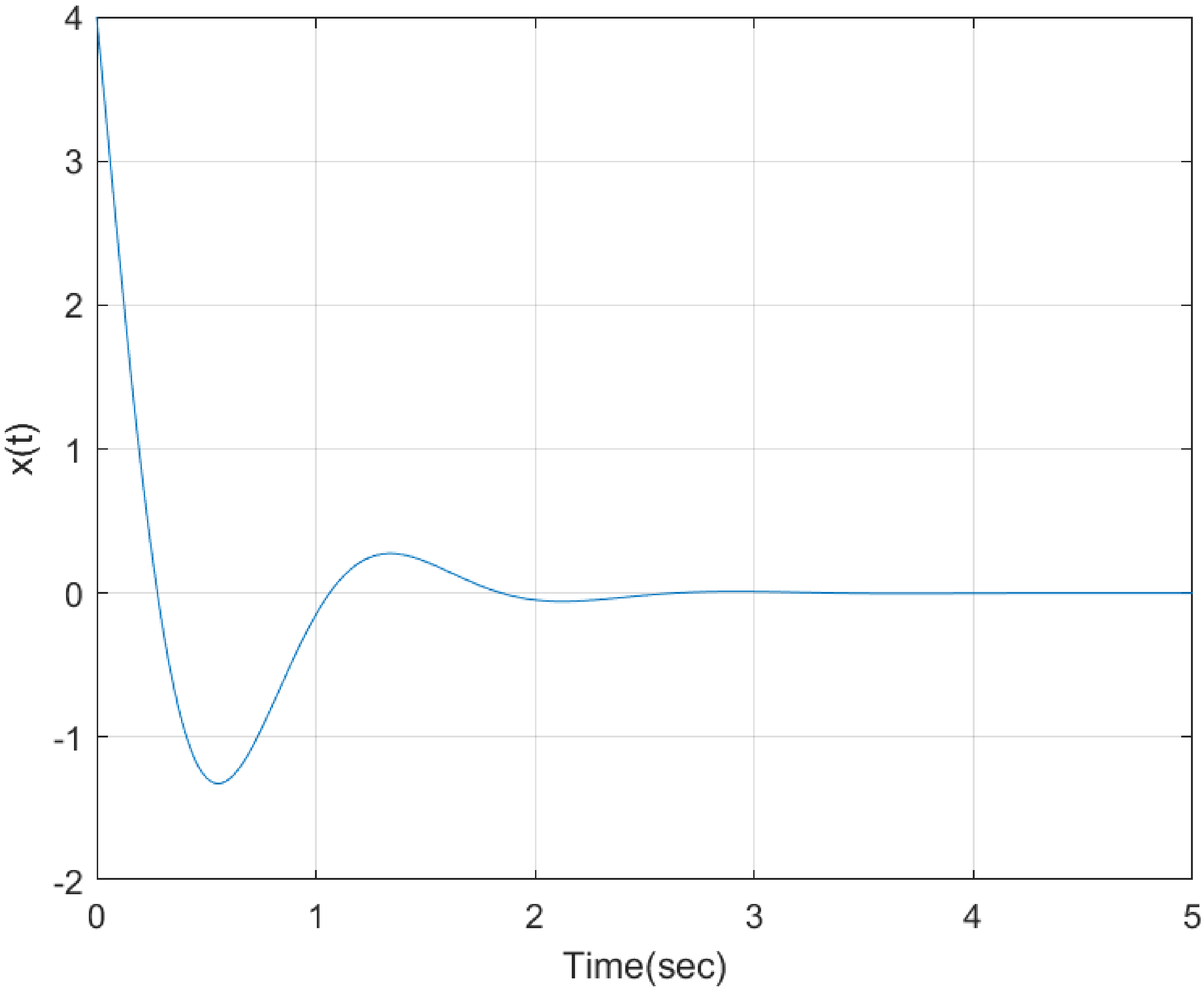
$$\frac{2+s}{s^2+7s+10}$$

1. Вычислить самостоятельно оригинал x(t) по изображению $X(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$, используя формулу (1) и пример 1.

2. Определить начальное и конечное значение функции, используя теоремы о предельных значениях из свойств преобразования Лапласа.

3. Определить оригинал функции с применением вычислительных процедур в пакете MATLAB и построить график этой функции x(t).

```
p=[1 7 10];
b=[2 1];
r=roots(p)
r1=r(1);
r2=r(2)
dp=polyder(p)
A1=polyval(dp,r1)
A2=polyval(dp,r2)
B1= polyval(b, r1)
C1=B1./A1
B2= polyval(b, r2)
C2=B2./A2
t=[0:0.01:5] ;
x=C1.*exp(r1.*t)+C2.*exp(r2.*t);
plot(t,x),grid on, xlabel('Time(sec)'), ylabel('x(t)')
syms s
y = poly2sym(p, s)
z = poly2sym(b, s)
expression = s*(z/y);
limit(expression, s, 0)
limit(expression, s, inf)
```



Проверим правильность преобразований. Для этого воспользуемся предельными теоремами.

$$x(0) = 2$$

$$x(0) = \lim_{s \to \infty} sX(s) = 2$$

$$x(\infty) = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX = 0$$

Задание 2.

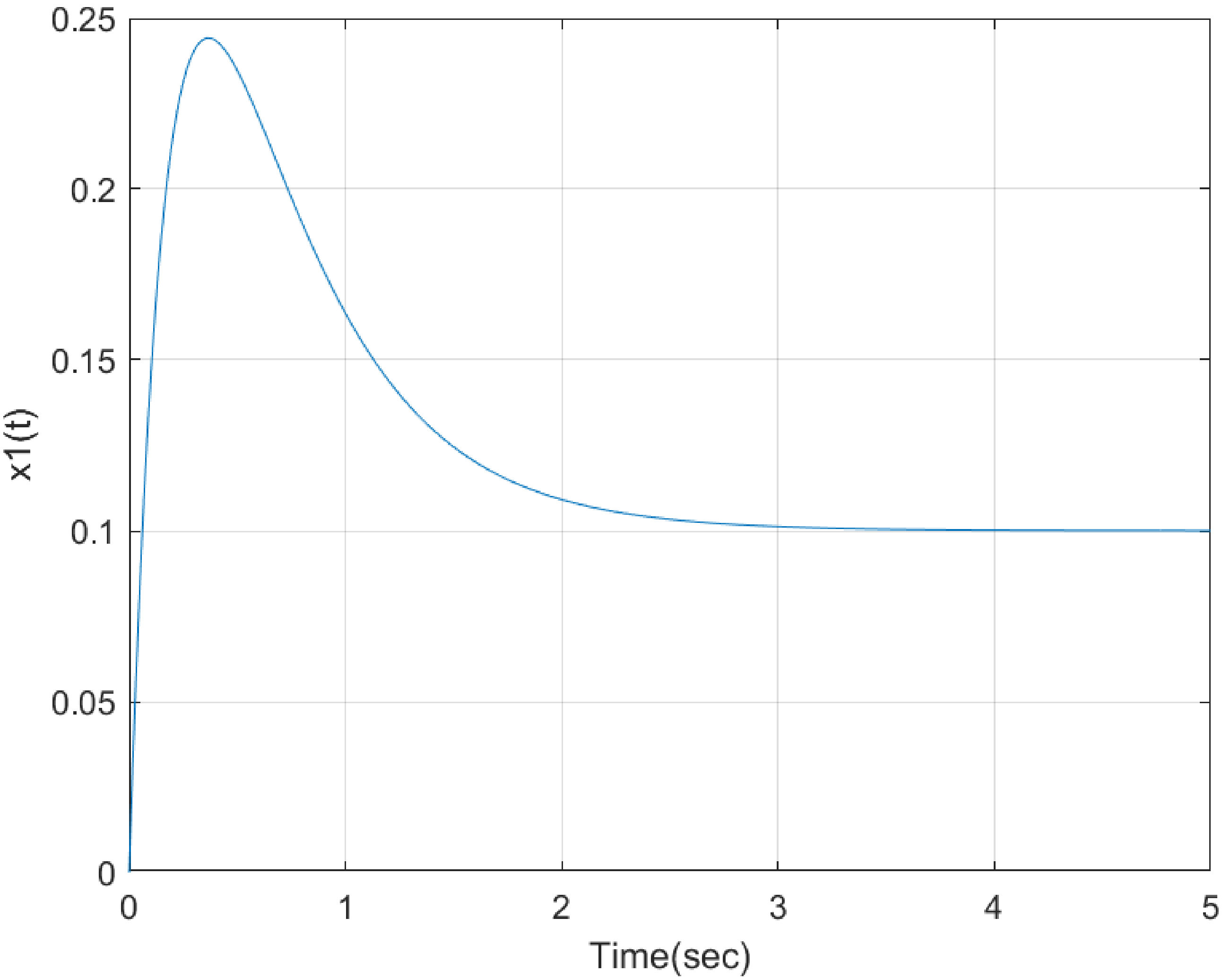
$$\frac{2+s}{s^2+7s+10}$$

1. Вычислить самостоятельно оригинал x(t) по изображению $X(s) = \frac{B(s)}{sA(s)}$, используя формулу (2) пример 2.

2. Определить начальное и конечное значение функции, используя теоремы о предельных значениях из свойств преобразования Лапласа.

3. Определить оригинал функции с применением вычислительных процедур в пакете MATLAB и построить график этой функции x(t).

```
C3=C1./(r1)
C4=C2./(r2)
B0= polyval(b, 0)
A0=polyval(p,0)
C0=B0./A0
x1=C0+C3.*exp(r1.*t)+C4.*exp(r2.*t);

plot(t,x1), grid on, xlabel('Time(sec)'), ylabel('x1(t)')
syms s
y = poly2sym(p, s)
z = poly2sym(b, s)
expression = s*(z/y);
limit(expression, s, 0)
limit(expression, s, inf)
```



Проверим правильность преобразований

$$x(0) = 0$$

$$x(0) = \lim_{s \to \infty} sX(s) = 0$$

$$x(\infty) = 2$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = 2$$

Задание 3.

$$\frac{2s}{s^2+3s+18{,}25}$$

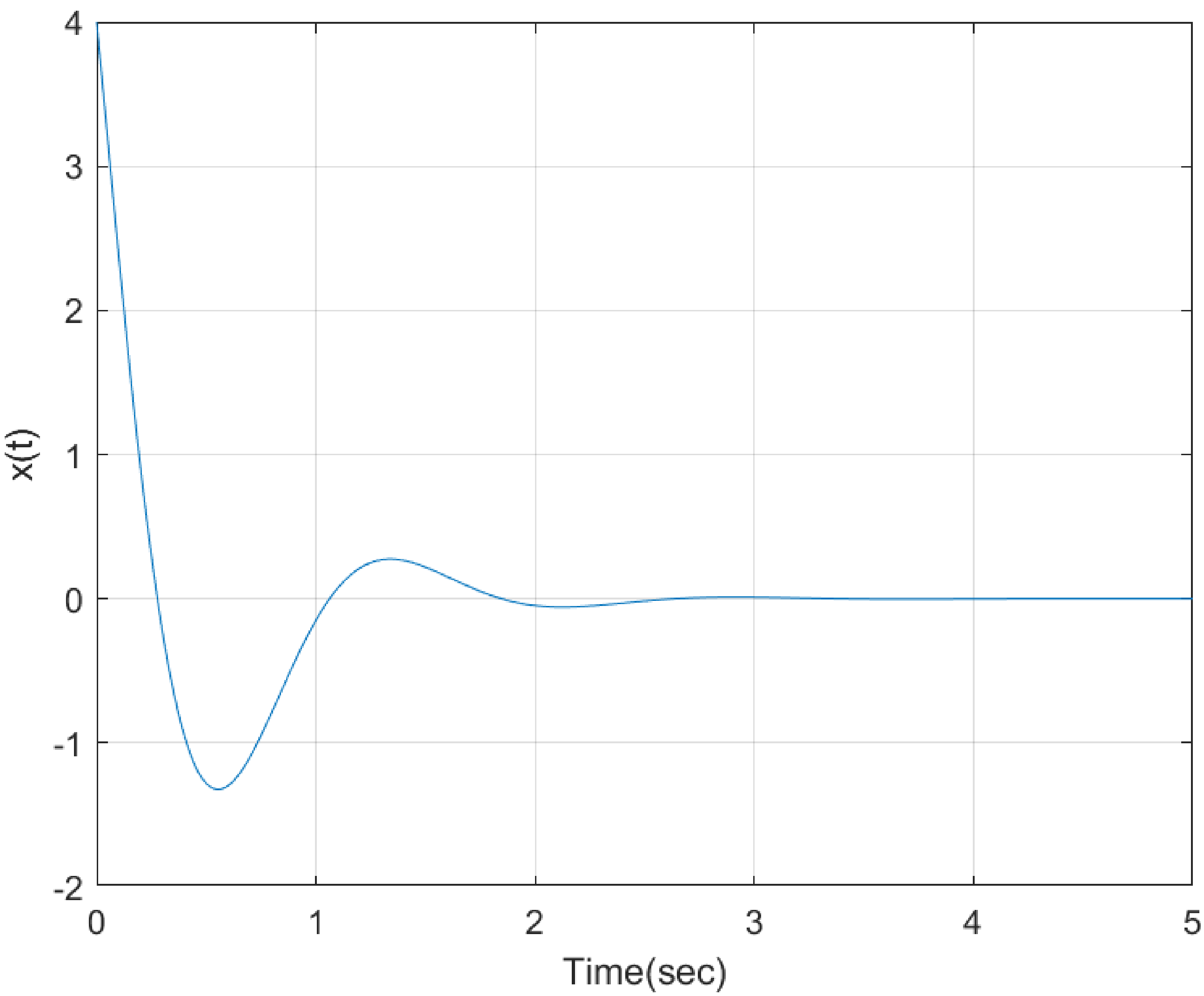
1. Вычислить самостоятельно оригинал x(t) по изображению $X(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$, используя формулу (3) и пример 3.

2. Определить начальное и конечное значение функции, используя теоремы о предельных значениях из свойств преобразования Лапласа.

3. Определить оригинал функции с применением вычислительных процедур в пакете MATLAB и построить график этой функции x(t).

```
clear all


p=[1 4 20];

b =[4 ];

r=roots(p)

r1=r(1);

dp=polyder(p)

A1=polyval(dp, r1)

B1= polyval(b, r1)

C1=B1./A1





t =[0:0.01:5];

x =  2*exp(-2.*t).*(2*cos(4.*t)- sin(4.*t))
```

```
r2=r(2);

plot(t,x), grid on, xlabel('Time(sec)'), ylabel('x(t)')
```



Изображению $\frac{2s}{s^2+3s+18{,}25}$ соответствует оригинал $x(t) = 2 * e^{-\frac{3}{2}*t} * \cos(4t) - \frac{3}{4} * e^{-\frac{3}{2}*t} * \sin(4t)$.

Проверим правильность преобразований

$$x(0) = 4$$

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = 4$$

$$x(\infty) = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) = 0$$

Задание 4.

$$\frac{2s}{s^2 + 3s + 18{,}25}$$

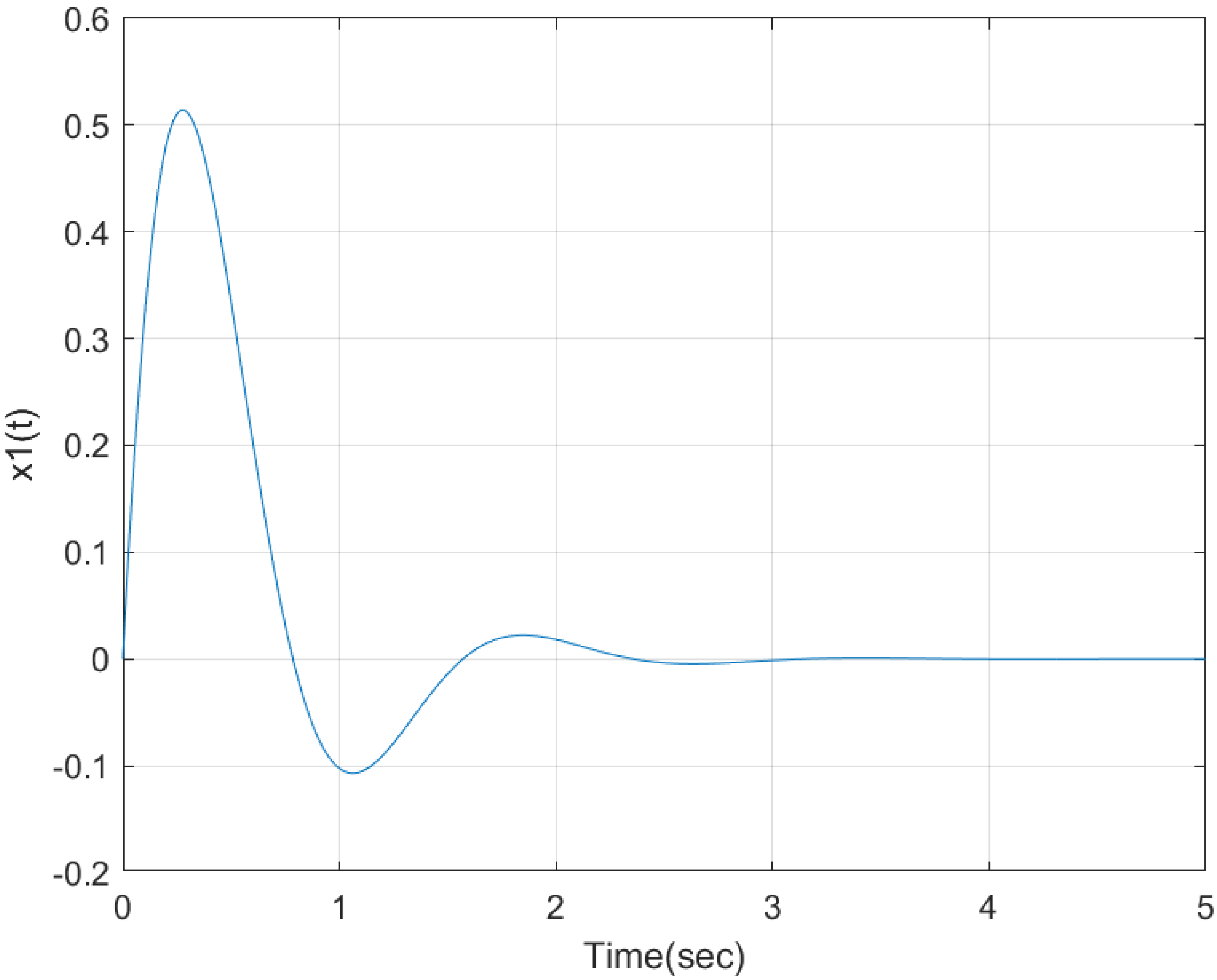
1. Вычислить самостоятельно оригинал x(t) по изображению $X(s) = \dfrac{B(s)}{sA(s)}$, используя формулу (4) и пример 4.

2. Определить начальное и конечное значение функции, используя теоремы о предельных значениях из свойств преобразования Лапласа.

3. Определить оригинал функции с применением вычислительных процедур в пакете MATLAB и построить график этой функции x(t).

```
clear all


p=[1 4 20];
b =[4 0];
r=roots(p)
r1=r(1);
dp=polyder(p)
A1=polyval(dp, r1)
B1= polyval(b, r1)
C1=B1./A1
C3=C1./r1
A0=polyval(p,0)
B0= polyval(b, 0)
C0=B0./A0
t =[0:0.01:5];
trg =  exp(-2.*t).*(0.5*sin(4.*t))
```

```
x1 =C0+trg * 2

plot(t,x1), grid on, xlabel('Time(sec)'), ylabel('x1(t)')
```



Проверим правильность преобразований

$$x(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} * e^{-\frac{3}{2}*t} * \sin{(4t)}\right) = 0$$

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{2s}{s^2 + 3s + 18{,}25}\right) = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} * e^{-\frac{3}{2}*t} * \sin{(4t)}\right) = 0$$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{2s}{s^2 + 3s + 18{,}25}\right) = 0$$