Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ***ИУК «Информатика и управление»***

КАФЕДРА ***ИУК3 «Системы автоматического управления и электротехника»***

ОТЧЕТ
Лабораторная работа №3

«Численные методы поиска минимума функции одной переменной»

ДИСЦИПЛИНА: «Вычислительные методы теории управления»

Выполнил: студент гр. ИУК3-41Б ________________ (Смирнов Ф.С.)
(Подпись) (Ф.И.О.)

Проверил: ________________ (Серегина Е.В.)
(Подпись) (Ф.И.О.)

Дата сдачи (защиты):
Результаты сдачи (защиты):
- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга , 2023

Цель работы: Изучение численных методов поиска минимума функции одной переменной. В ходе лабораторной работы выполняется исследование различных методов по точности вычисления и быстродействию построенных на их основе алгоритмов.

Методы поиска минимума для функции одной переменной

Все численные методы можно разделить на две группы: прямые, в которых для поиска минимума используются только значения самой функции, и градиентные, в которых используется значение производной функции $f(x)$. Последние также используются для поиска минимума функции многих переменных.

Рассмотрим идею, лежащую в основе прямых методов. Предположим, что точки a и b определяют (возможно, очень грубо) интервал, который содержит истинную точку минимума, и внутри этого интервала функция унимодальная, то есть имеет один минимум в точке x^*. Следовательно, данная функция имеет форму, близкую к той, что приведена на рис. 1. Если известны значения функции такого вида в трех точках x_1, x_2, x_3, таких, что $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, а $f(x_2) < f(x_1)$ и $f(x_2) < f(x_3)$, то $x_1 < x^* < x_3$.

Тогда точка x^* будет лежать внутри интервала (x_1, x_3), меньшего по размеру, чем интервал (a, b).

Последовательно уменьшая интервал неопределенности, можно определить с заданной точностью точку, в которой достигается минимум функции $f(x)$.

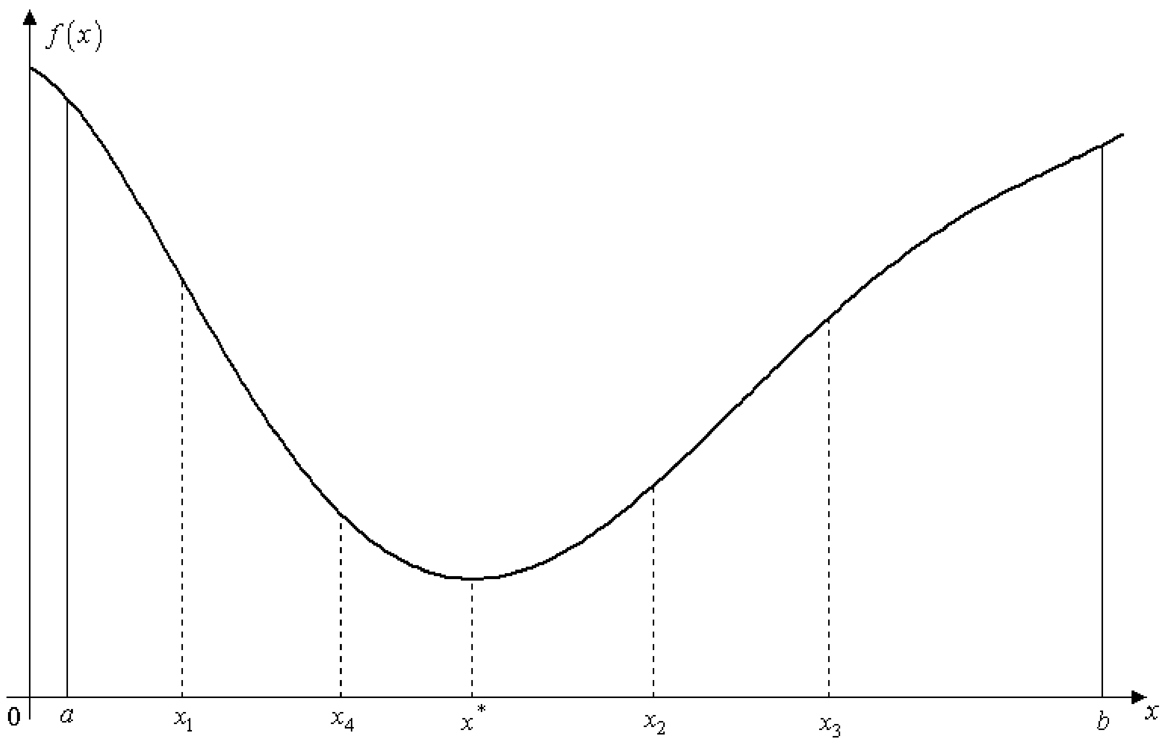


Рис. 1. График унимодальной функции

Естественно задаться вопросом: как определить минимум функции, выполняя минимальное количество вычислений ее значения в промежуточных точках? Как следует выбрать эти точки?

Поиск минимума методом Фибоначчи. Очевидно, что не следует искать решение для всех точек, получаемых в результате эксперимента. Надо попытаться сделать так, чтобы значения функции, полученные в предыдущих экспериментах, определяли положение последующих точек. Действительно, зная значения функции, мы тем самым имеем информацию о самой функции и положении ее минимума и используем эту информацию в дальнейшем поиске.

Предположим, что имеется интервал неопределенности $\left(x_1,\, x_3\right)$ и известно значение функции $f\left(x_2\right)$ внутри этого интервала (см. рис. 1.). Если можно вычислить функцию всего один раз в точке x_4, то где следует поместить точку x_4, для того чтобы получить наименьший возможный интервал неопределенности?

Положим $x_2 - x_1 = L$ и $x_3 - x_2 = R$, причем $L > R$, как показано на рис. 1., и эти значения будут фиксированы, если известны x_1, x_2 и x_3. Если x_4 находится в интервале $\left(x_1,\, x_2\right)$, то:

если $f\left(x_4\right) < f\left(x_2\right)$, то новым интервалом неопределенности будет $\left(x_1,\, x_2\right)$ длиной $x_2 - x_1 = L$;

если $f\left(x_4\right) > f\left(x_2\right)$, то новым интервалом неопределенности будет $\left(x_4,\, x_3\right)$ длиной $x_3 - x_4$.

Поскольку не известно, какая из этих ситуаций будет иметь место, выберем x_4 таким образом, чтобы минимизировать наибольшую из длин $x_3 - x_4$ и $x_2 - x_1$. Достигнуть этого можно, сделав длины $x_3 - x_4$ и $x_2 - x_1$ равными, то есть поместив x_4 внутри интервала симметрично относительно точки x_2, уже лежащей внутри интервала. Любое другое положение точки x_4 *может* привести к тому, что полученный интервал будет больше L.

Помещаем x_4 симметрично относительно точки x_2.

Если окажется, что можно выполнить еще одно вычисление функции, то следует применить описанную процедуру к интервалу $\left(x_1,\, x_2\right)$, в котором уже есть значение функции, вычисленное в точке x_4, или к интервалу $\left(x_4,\, x_3\right)$, в котором уже есть значение функции, вычисленное в точке x_2. Следовательно, нужно поместить следующую точку внутри интервала неопределенности симметрично относительно уже находящейся там точки.

Рассмотрим, каким образом организуется процесс вычислений. Начнем с предполагаемого окончания вычислительного процесса.

На n-м вычислении n-ю точку следует поместить симметрично по отношению к $(n-1)$-й точке. Положение этой последней точки зависит от экспериментатора. Для того, чтобы получить наибольшее уменьшение интервала на данном этапе, следует разделить пополам предыдущий интервал. Тогда точка x_n будет совпадать с точкой x_{n-1}. Однако при этом не получается никакой новой информации. Обычно точки x_{n-1} и x_n отстоят друг от друга на достаточном расстоянии, чтобы определить, в какой половине, левой или правой, находится интервал неопределенности. Они помещаются на расстоянии $\varepsilon/2$ по обе стороны от середины отрезка L_{n-1}; можно произвольно задать величину ε или выбрать эту величину равной минимально возможному расстоянию между двумя точками.

Интервал неопределенности будет иметь длину L_n, следовательно,

$L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon$ (рис. 2., нижняя часть).

На предыдущем этапе точки x_{n-1} и x_{n-2} должны быть помещены симметрично внутри интервала L_{n-2} на расстоянии L_{n-1} от концов этого интервала. Следовательно,

$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n$ (рис. 2., средняя часть).

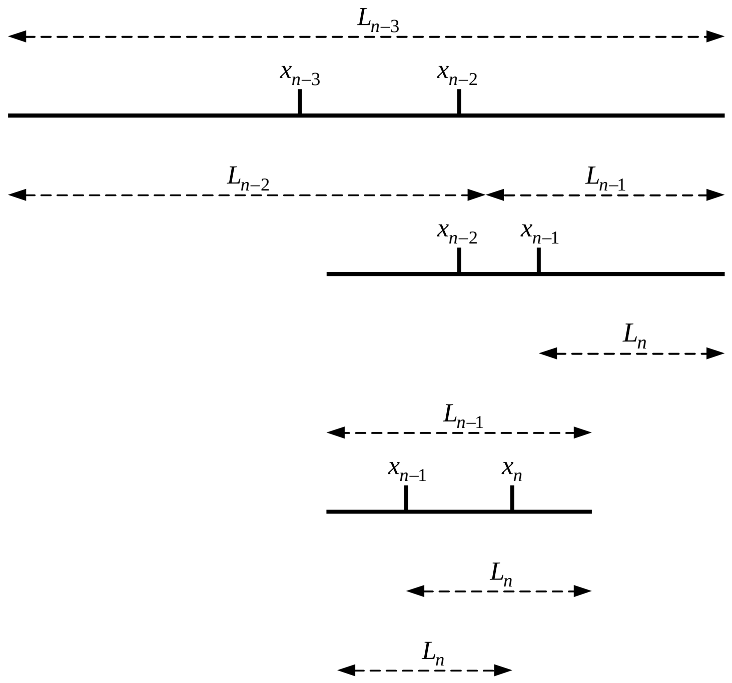


Рис. 2. Схема организации эксперимента на последней, предыдущей и пре предыдущей итерациях

Из рисунка видно, что на предпоследнем этапе x_{n-2} остается в качестве внутренней точки.

Аналогично

$L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1}$ (рис. 2. верхняя часть)

В общем случае

$$L_{i-1} = L_j + L_{j+1} \text{ при } 1 < j < n. \qquad (1.)$$

Таким образом,

$$L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon,$$

$$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n = 3L_n - \varepsilon,$$

$$L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1} = 5L_n - 2\varepsilon,$$

$$L_{n-4} = L_{n-3} + L_{n-2} = 8L_n - 3\varepsilon,$$

и т.д.

Если определить последовательность чисел Фибоначчи следующим образом: $F_0 = 1; F_1 = 1$ и $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ для $k = 2, 3, \ldots$, то

$$L_{n-j} = F_{j+1}L_n - F_{j-1}\varepsilon,\ j = 1, 2, ..., n-1.$$

Если начальный интервал (a, b) имеет длину $L_1(= b - a)$, то

$$L_1 = F_n L_n - \varepsilon F_{n-2},$$

то есть

$$L_n = \frac{L_1}{F_n} + \varepsilon\frac{F_{n-2}}{F_n}.$$

Следовательно, произведя n вычислений функции, можно уменьшить начальный интервал неопределенности в $1/F_n$ раз по сравнению с его начальной длиной (пренебрегая ε), и это – наилучший результат.

Если поиск начат, то его несложно продолжить, используя описанное выше правило симметрии. Следовательно, необходимо найти положение первой точки, которая помещена на расстоянии L_2 от одного из концов начального интервала, причем не важно, от какого конца, поскольку вторая точка помещается согласно правилу симметрии на расстоянии L_2 от конца интервала:

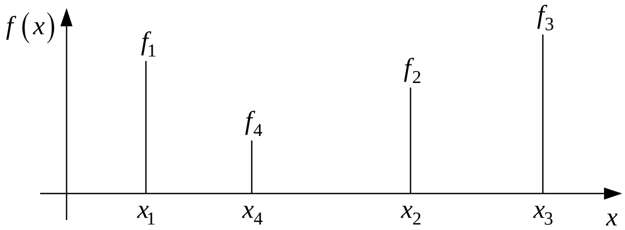
$$L_2 = F_{n-1}L_n - \varepsilon F_{n-3} = F_{n-1}\frac{L_1}{F_n} + \varepsilon\frac{(F_{n-1}F_{n-2} - F_nF_{n-3})}{F_n} = \\ = \frac{F_{n-1}}{F_n}L_1 + \frac{(-1)^n\varepsilon}{F_n}. \qquad (2.)$$

После того, как найдено положение первой точки, числа Фибоначчи больше не нужны. Используемое значение ε может определяться из практических соображений. Оно должно быть меньше L_1/F_{n-1}, иначе будут иметь место лишние вычисления значений функции $f(x)$.

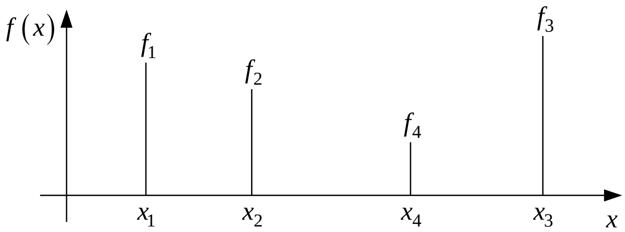
Таким образом, поиск методом Фибоначчи, названный так ввиду появления при поиске чисел Фибоначчи, является итерационной процедурой. В процессе поиска интервала (x_1, x_2) с точкой x_2, уже лежащей в этом интервале, следующая точка x_4 всегда выбирается такой, что $x_3 - x_4 = x_2 - x_1$ или $x_4 - x_4 = x_1 - x_2 + x_3$.

Обозначим $f(x_2) = f_2$ и $f(x_4) = f_4$, тогда можно рассмотреть четыре случая организации вычислительного процесса:

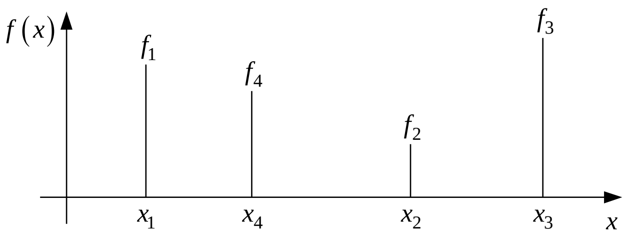
1. $x_4 < x_2, f_4 < f_2$: новый интервал (x_1, x_2), содержащий точку x_4 (рис. 3.а)
2. $x_4 > x_2, f_4 < f_2$: новый интервал (x_2, x_3), содержащий точку x_4 (рис. 3.б)
3. $x_4 < x_2, f_4 > f_2$: новый интервал (x_4, x_3), содержащий точку x_2 (рис. 3.в)
4. $x_4 > x_2, f_4 > f_2$: новый интервал (x_1, x_4), содержащий точку x_2 (рис. 3.г)



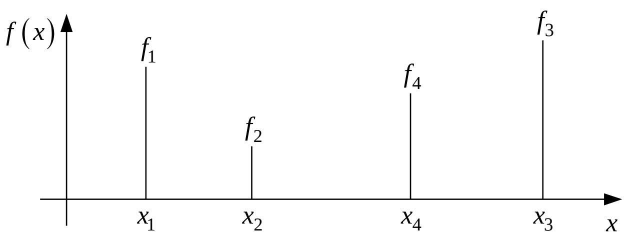
а)



б)



в)



г)

Рис. 3. Схема организации вычислений по методу Фибоначчи

Оканчивать вычислительный процесс можно двумя способами. Либо выполнить намеченные ранее n вычислений, либо, если в процессе вычислений интервал неопределенности станет меньше заданной величины.

Поиск методом золотого сечения. Не всегда можно заранее определить, сколько раз придется вычислять функцию. В методе Фибоначчи это нужно знать для определения L_2, то есть положения начальной точки (см. уравнение (2.)).

Метод золотого сечения почти столь же эффективен, как и метод Фибоначчи, однако при этом не требует знать n – количество вычислений функции, определяемое вначале. После того как выполнено j вычислений, исходя из тех же соображений, что и ранее (см. выражение (1.)), записываем

$$L_{j-1} = L_j + L_{j+1}.$$

Однако, если n неизвестно, то мы не можем использовать условие $L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon$. Если отношение последующих интервалов будет постоянным, т.е.

$$\text{то } \frac{L_{j-1}}{L_j} = \frac{L_j}{L_{j+1}} = \frac{L_{j+1}}{L_{j+2}} = \ldots = \tau, \qquad (3.)$$

$$\frac{L_{j-1}}{L_j} = 1 + \frac{L_{j+1}}{L_j},$$

то есть $\tau = 1 + 1/\tau$.

Таким образом, $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, откуда $\tau = \left(1+\sqrt{5}\right)/2 \approx 1.618033989$. Тогда

$$\frac{L_{j-1}}{L_{j+1}} = \tau^2, \frac{L_{j-2}}{L_{j+1}} = \tau^3$$

и так далее.

Следовательно, $\dfrac{L_1}{L_n} = \tau^{n-1}$, то есть

$$L_n = \frac{L_1}{\tau^{n-1}}.$$

В результате анализа двух рассмотренных значений функции будет определен интервал, который должен исследоваться в дальнейшем. Это интервал будет содержать одну из предыдущих точек и следующую точку, помещаемую симметрично ей. Первая точка находится на расстоянии L_1/τ от одного конца интервала, вторая – на таком же расстоянии от другого. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n-1}/F_n = 1/n$, то из уравнения (2) видно, что поиск методом золотого сечения является предельной формой поиска методом Фибоначчи. Название «золотое сечение» произошло от названия отношения в уравнении (3.). Видно, что L_{j-1} делится на две части так, что отношение целого к большей части равно отношению большей части к меньшей, т.е. равно так называемому золотому отношению.

Таким образом, если определяется интервал $\left(x_0, x_3\right)_{\pm}$ и имеется два значения функции f_1 и f_2 в точках x_1 и x_3, то имеет место два случая (рис. 4.):

1. $f_1 < f_2$. Новый интервал неопределенности (x_0, x_2) (рис. 4. *а*).
2. $f_1 > f_2$. Новый интервал неопределенности (x_1, x_3) (рис. 4. *б*).

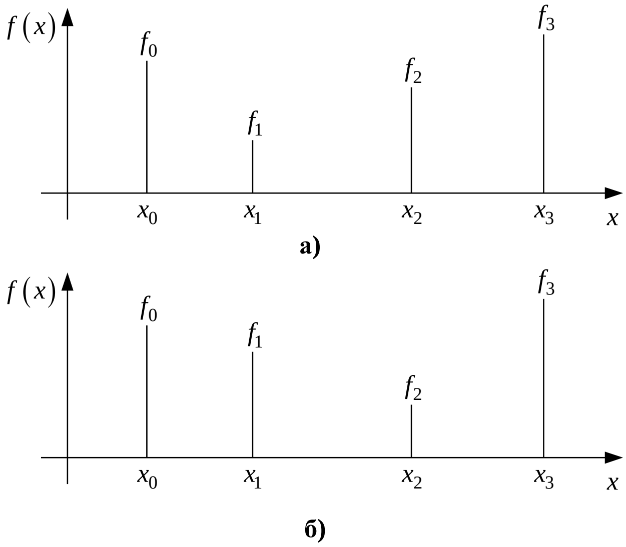


Рис. 4. Схема принятия решения в интервале золотого сечения

Оканчивать вычислительный процесс можно также как и в методе Фибоначчи.

Метод поиска минимума функции, основанный на ее аппроксимации полиномом второй степени. Рассмотренный ниже подход к поиску минимума функции $f(x)$ также может быть использован при ее аппроксимации полиномами более высокого порядка. Очевидным является, что получаемая в этих случаях точность будет выше.

Рассмотрим основную идею и ее реализацию в виде конкретного алгоритма при аппроксимации функции $f(x)$ квадратичным полиномом.

Если известны значения функции $f(x)$ в трех различных точках α, β, γ, равные соответственно $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$, то функция $f(x)$ может быть аппроксимирована квадратичной функцией

$$\varphi(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

где A, B и C определяются из уравнений

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = f_\alpha,$$

$$A\beta^2 + B\beta + C = f_\beta,$$

$$A\gamma^2 + B\gamma + C = f_\gamma.$$

После преобразований этих уравнений получаем

$$A=\left[(\gamma-\beta) f_{\alpha}+(\alpha-\gamma) f_{\beta}+(\beta-\alpha) f_{\gamma}\right]/\Delta,$$
$$B=\left[\left(\beta^{2}-\gamma^{2}\right) f_{\alpha}+\left(\gamma^{2}-\alpha^{2}\right) f_{\beta}+\left(\alpha^{2}-\beta^{2}\right) f_{\gamma}\right]/\Delta,$$
$$C=\left[\beta\gamma(\gamma-\beta) f_{\alpha}+\gamma\alpha(\alpha-\gamma) f_{\beta}+\alpha\beta(\beta-\alpha) f_{\gamma}\right]/\Delta,$$

где $\Delta=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$. Ясно, что $\varphi(x)$ будет иметь минимум в точке $x=-B/2A$, если $A>0$. Следовательно, можно аппроксимировать точку минимума функции $f(x)$ значением

$$\delta=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\beta^{2}-\gamma^{2}\right) f_{\alpha}+\left(\gamma^{2}-\alpha^{2}\right) f_{\beta}+\left(\alpha^{2}-\beta^{2}\right) f_{\gamma}}{(\beta-\gamma) f_{\alpha}+(\gamma-\alpha) f_{\beta}+(\alpha-\beta) f}\right]. \qquad (4)$$

Алгоритм поиска минимума в данном случае может быть следующим.

Пусть задана унимодальная функция $f(x)$, начальная аппроксимация положения минимума и длина шага H, являющаяся величиной того же порядка, что и расстояние из точки A до точки истинного минимума x^{*} (условие, которое не всегда просто удовлетворить). Вычислительная процедура имеет следующие шаги:

1. Вычислить $f(A)$ и $f(A+H)$.
2. Если $f(A)<f(A+H)$, то взять в качестве третьей точки $A-H$ и вычислить $f(A-H)$. В противном случае, в качестве третьей точки взять $A+2H$ и найти $f(A+2H)$ (рис. 5.)
3. Используя эти точки, найти δ из уравнения (4.) и вычислить $f(\delta)$.
4. Если разница между полученным наименьшим значением функции и предыдущим наименьшим значением функции меньше заданной точности, то процедура заканчивается.
5. Если процедура не завершалась на шаге 4, то точка с наибольшим значением обычно отбрасывается, и возвращается на шаг 3. Но если, оставив точку с наибольшим значением функции, мы определим конечные границы интервала, в котором лежит минимум, то следует действительно оставить это значение и затем вернуться на шаг 3.

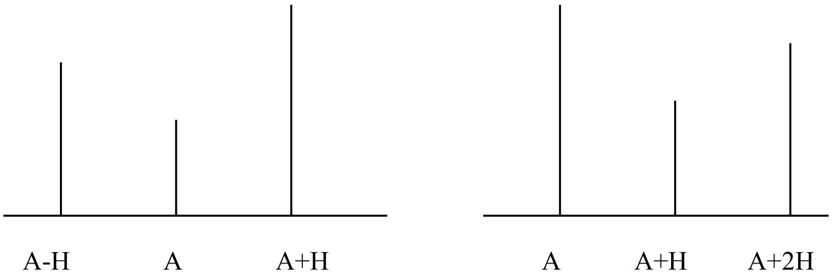


Рис.5. Схема принятия решения при квадратичной аппроксимации минимизации функции

Практическая часть.

Вариант 14.

$f\left(x\right)=x^2+ae^{bx}$	5,0	-0,05

```
clc; clear all
a0=-1;
b0=2;
f=@(x)x^4-0.9*atan(2.5*x);
a=[a0]; b=[b0]; k=1; eps=0.1; L=[a0 b0];
y=[a(k)+((3-sqrt(5))/2)*(b(k)-a(k))];
z=[a(k)+b(k)-y(k)];
Fy=[f(y(k))];Fz=[f(z(k))];
del=abs(a(k)-b(k));
while del>eps
    if Fy(k)<=Fz(k)
        a(k+1)=a(k); b(k+1)=z(k);
        y(k+1)=a(k+1)+b(k+1)-y(k);
        z(k+1)=y(k);
    else
        a(k+1)=y(k); b(k+1)=b(k);
        y(k+1)=z(k);
        z(k+1)=a(k+1)+b(k+1)-z(k);
    end
    L(k+1,:)=[a(k+1) b(k+1)];
    del=abs(a(k+1)-b(k+1));
    k=k+1;
    Fy(k)=f(y(k)); Fz(k)=f(z(k));
end
L
x_min=(a(k)+b(k))/2
F_min=f(x_min)
x=-1:0.1:2;
F=x.^4-0.9*atan(2.5*x);
plot(x,F,'k',x_min,F_min,'*r','LineWidth',1.2);
grid on
legend('Метод золотого сечения','min')
```

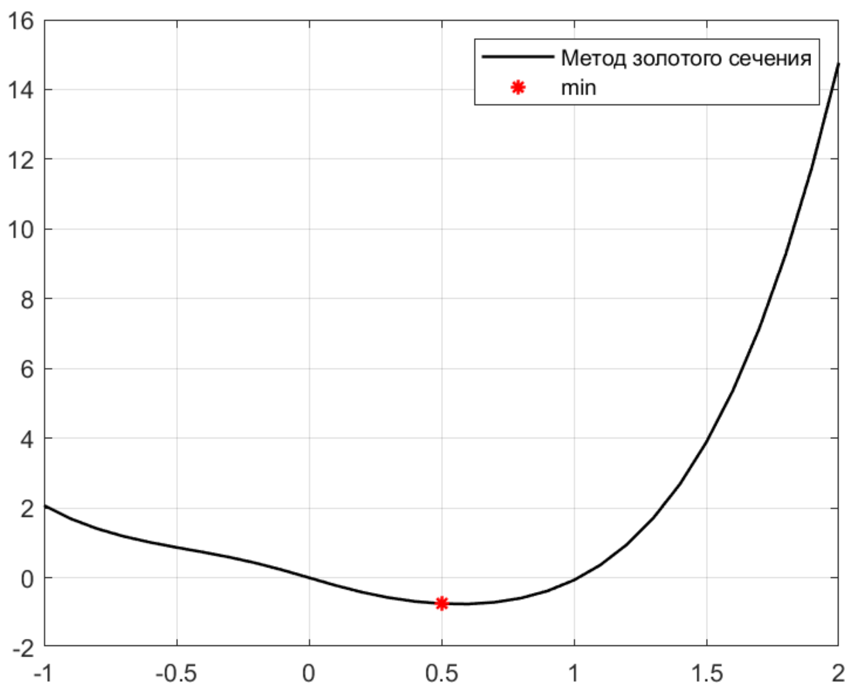


Рис.1 – значение eps = 1

x_min =

0.5000

F_min =

-0.7439

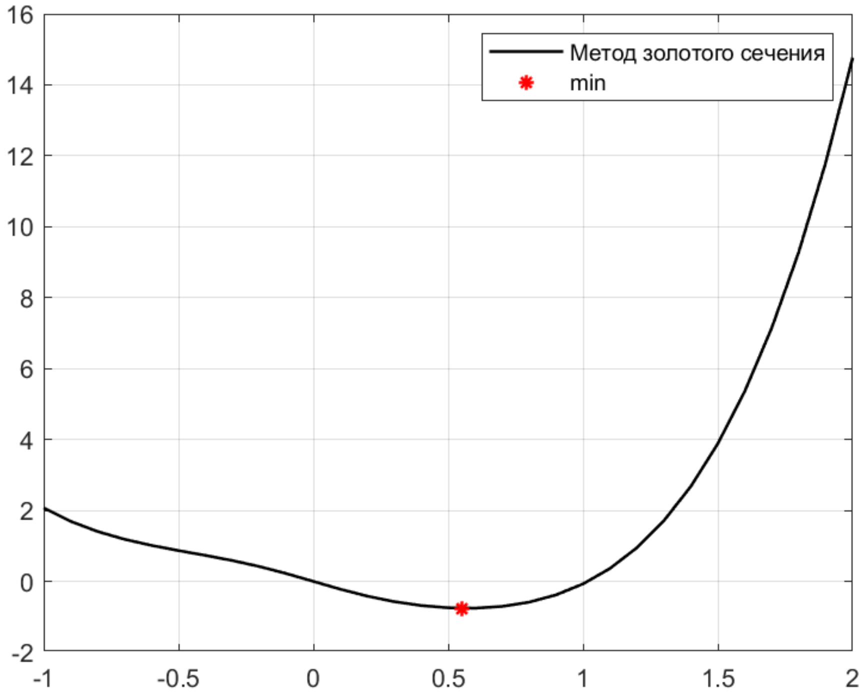


Рис.2 – значение eps = 0.1

x_min =

0.5517

F_min =

-0.7565

Вывод: Я изучил численные методы поиска минимума функции одной переменной. В ходе лабораторной работы я выполнил исследование различных методов по точности вычисления и быстродействию построенных на их основе алгоритмов.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний. 2001.
2. А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин Методы оптимизации. М.: МГТУ, 2001, 440 с.
3. В.М. Вержбицкий Численные методы. М.: Высшая школа. 2000, 266 с.
4. В.М. Вержбицкий Основы численных методов. М.: Высшая школа. 2002, 840 с.
5. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. – М.: Мир. 1977.

6. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столяров Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука. 1979.
7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. 1981.
8. Сухарев А.Г., Тимохов А.Ф., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука. 1986.