

به نام حق

پایدارسازی سیستم توپ و میله با کنترلر PID

## درس کنترل خطی

دکتر شمعقدری

تهیه کنندگان :

حمیدرضا رستاد

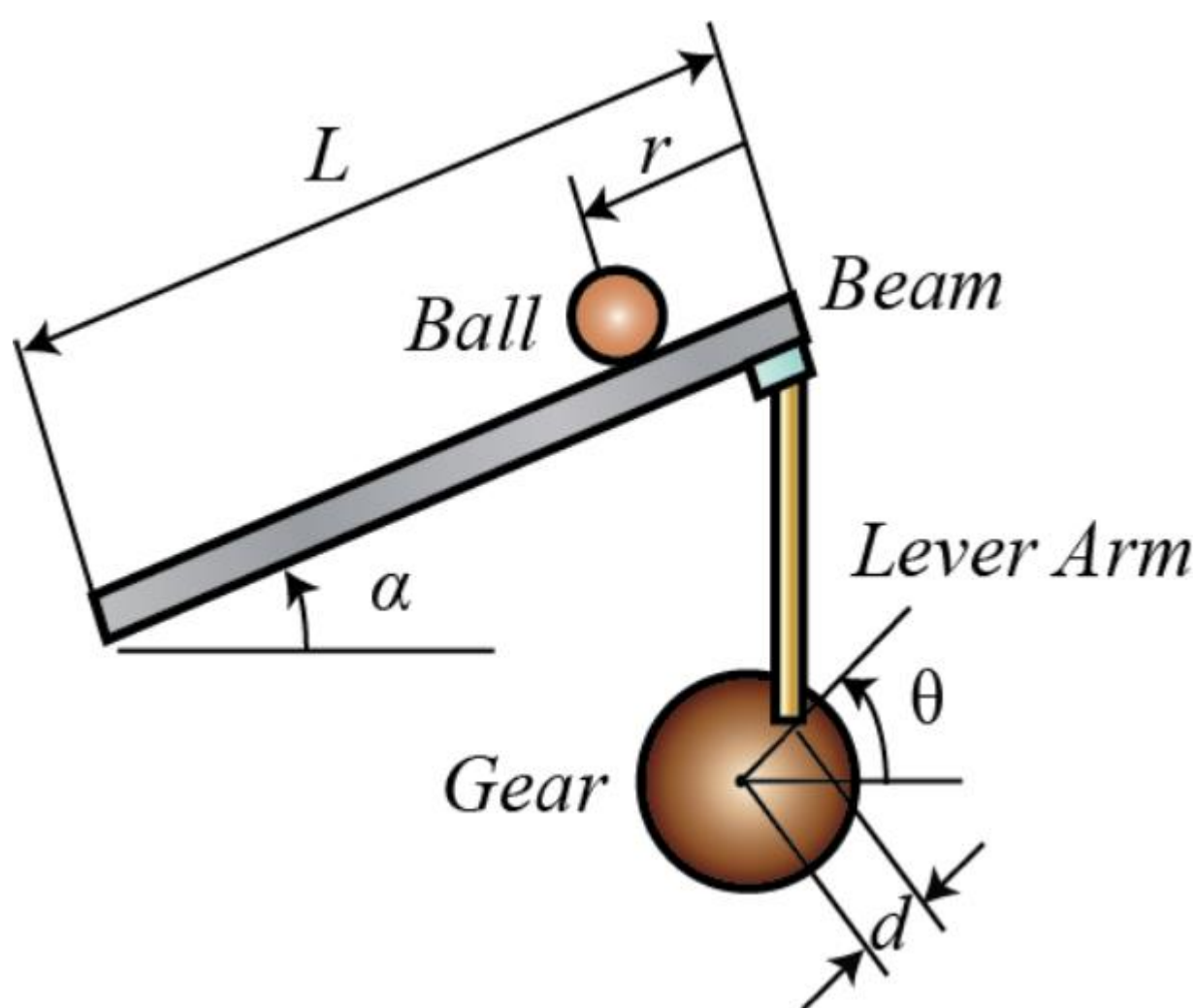
محسن زارعزاده

## ۱ - مقدمه

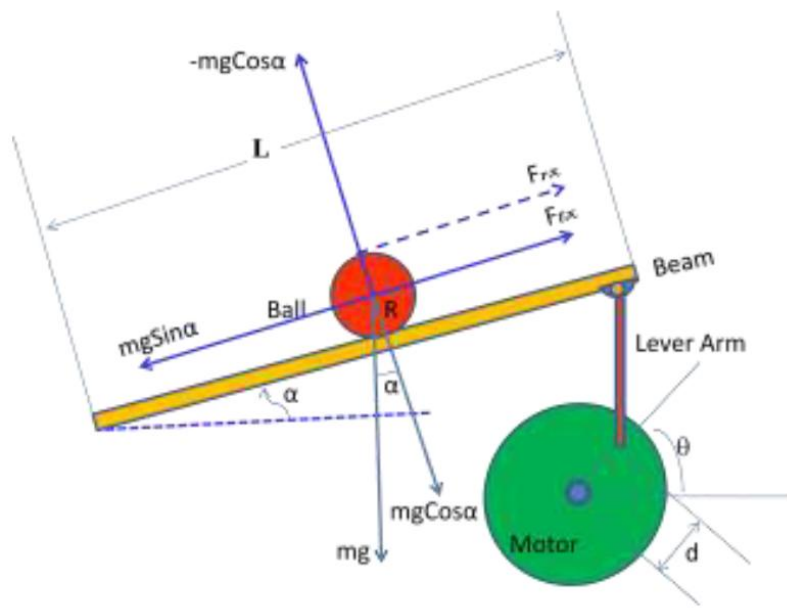
سیستم کنترل خطی Ball & Beam یکی از مثال‌های کلاسیک در مهندسی کنترل است که به طور گسترده‌ای برای بررسی و طراحی الگوریتم‌های کنترلی استفاده می‌شود. این سیستم شامل یک توپ (Ball) است که باید در طول یک میله (Beam) با زاویه متغیر حرکت کند. هدف اصلی در این سیستم، کنترل موقعیت توپ با استفاده از تنظیم زاویه تیر است، به گونه‌ای که توپ در موقعیت دلخواه ثابت بماند. در این پروژه، هدف اصلی طراحی یک کنترل کننده PID (Proportional-Integral-Derivative) برای سیستم Ball & Beam است. کنترل کننده‌های PID به دلیل سادگی و کارایی بالا در بسیاری از سیستم‌های صنعتی و تحقیقاتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این کنترل کننده‌ها قادرند با تنظیم سه پارامتر اصلی (تناسب، انتگرال و مشتق)، به بهینه‌سازی پاسخ سیستم پرداخته و خطاهای ماندگار را از بین ببرند. استفاده از سروو موتور برای تغییر زاویه تیر و اعمال نیرو به سیستم، چالش‌هایی از جمله تأخیر در پاسخ و محدودیت‌های دینامیکی را به همراه دارد که نیاز به طراحی دقیق کنترل کننده را برجسته می‌کند. در این گزارش، ابتدا مدل ریاضی سیستم Ball & Beam با استفاده از سروو موتور به عنوان عامل محرک بیان می‌شود، سپس با استفاده از کنترل کننده PID به تحلیل و طراحی سیستم پرداخته خواهد شد.

## ۲- مدل کردن سیستم

یک توپ بر روی یک میله قرار داده می‌شود، به طوری که امکان حرکت آن در طول تیر با یک درجه آزادی وجود دارد. یک اهرم از یک سمت به تیر متصل شده و از سمت دیگر به یک چرخ دنده سروو وصل است. وقتی که چرخ دنده سروو به زاویه  $\theta$  می‌چرخد، اهرم زاویه تیر را به اندازه  $\alpha$  تغییر می‌دهد. هنگامی که زاویه تیر از موقعیت افقی تغییر می‌کند، نیروی گرانش باعث می‌شود توپ بر روی میله حرکت کند. یک کنترل کننده برای این سیستم طراحی خواهد شد تا موقعیت توپ قابل کنترل و دستکاری شود.



ابتدا معادلات مکانیکی سیستم را بدون سرو موتور نوشته :



$$F_{tx} = \frac{m d^2 x}{dt^2}$$

$$F_{rx} = J/R^2 \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_{rx} + F_{tx} = -mgsina$$

پس معادله لاگرانژ حرکت توپ به صورت زیر بدست می آید:

$$0 = \left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - m r (\dot{\alpha})^2$$

برای خطی سازی حول نقطه تعادل  $\alpha = 0$  و تقریب زیر حاصل می گردد :

$$\left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} = -mg \alpha$$

که به طور تقریبی زاویه میله با زاویه چرخ دنده از رابطه  $\alpha = \theta \frac{d}{L}$  قابل تعویض است و بعد از لاپلاس گرفتن از طرفین :

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = G_B(s) = \frac{-mg d}{\left( \frac{J}{R^2} + m \right) L} \times \frac{1}{s^2}$$

متغیر	واحد/اندازه
m	0.045 Kg
R	0.011 m
d	0.05 m
g	9.8 m/s^2
L	0.35 m
J	2.2 e-6 Kg.m^2
X(فاصله از اول میله)	m
Theta (زاویه چرخ دنده)	rad

که در سیستم ما به صورت زیر می شود :

$$G_B(s) = \frac{0.997}{s^2}$$

برای تغییر زاویه چرخ دنده از سروو موتور استفاده می‌کنیم. سروو موتور SG90 یک موتور DC کوچک با سیستم کنترلی داخلی است که امکان کنترل دقیق زاویه را فراهم می‌کند. این موتور با استفاده از سیگنال PWM (Pulse Width Modulation) زاویه‌ای بین  $0^\circ$  تا  $180^\circ$  را تنظیم می‌کند. دینامیک سروو شامل تأخیر، بهره موتور، و رفتار غیرخطی است که بر پاسخ سیستم تأثیر می‌گذارد.

### ضرورت تابع تبدیل زاویه ورودی به زاویه نهایی سروو :

برای طراحی و تحلیل سیستم‌های کنترلی توپ و میله، مدل‌سازی دقیق دینامیک سروو ضروری است. تابع تبدیل ورودی سروو به زاویه نشان‌دهنده رفتار دینامیکی موتور است و برای پیش‌بینی پاسخ سیستم و طراحی کنترلر مانند PID مورد نیاز است. این تابع تأثیر تأخیر و محدودیت‌های مکانیکی سروو را در مدل سیستم لحاظ می‌کند و منجر به بهبود دقت کنترل می‌شود.

اما روش بدست آوردن تابع تبدیل به صورت الکترومکانیکی نیست و در آزمایشگاه بصورت تقریبی قابل دستیابی است :

طبق مقاله [https://www.researchgate.net/publication/353754375\\_SG90\\_Servo\\_Characterization](https://www.researchgate.net/publication/353754375_SG90_Servo_Characterization)

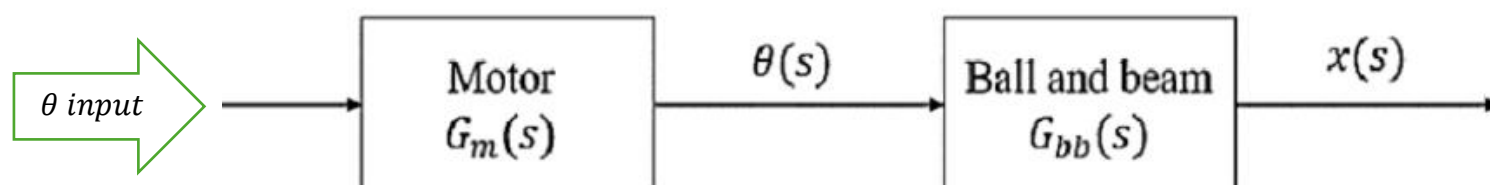
بعلت کوچکی جرم توپ و طول میله، زاویه مورد نیاز برای چرخش سروو را در کمترین حد ممکن انتخاب می‌کنیم.

برای تغییر زاویه چرخ دنده و اهرم تا  $10^\circ$  میتوان تابع تبدیل را به فرم مقابل در نظر گرفت :

توجه شود که طبق مقاله باید یک صفر در  $-1158.3$  هم در نظر گرفته شود که بعلت دوری از محور موهومی قابل صرف نظر است و رنج کاری فرکانس پایدار ساز ما نیز مورد تأثیر صفر نخواهد بود .

$$G(s) = \frac{5118}{s^2 + 103.6s + 4903}$$

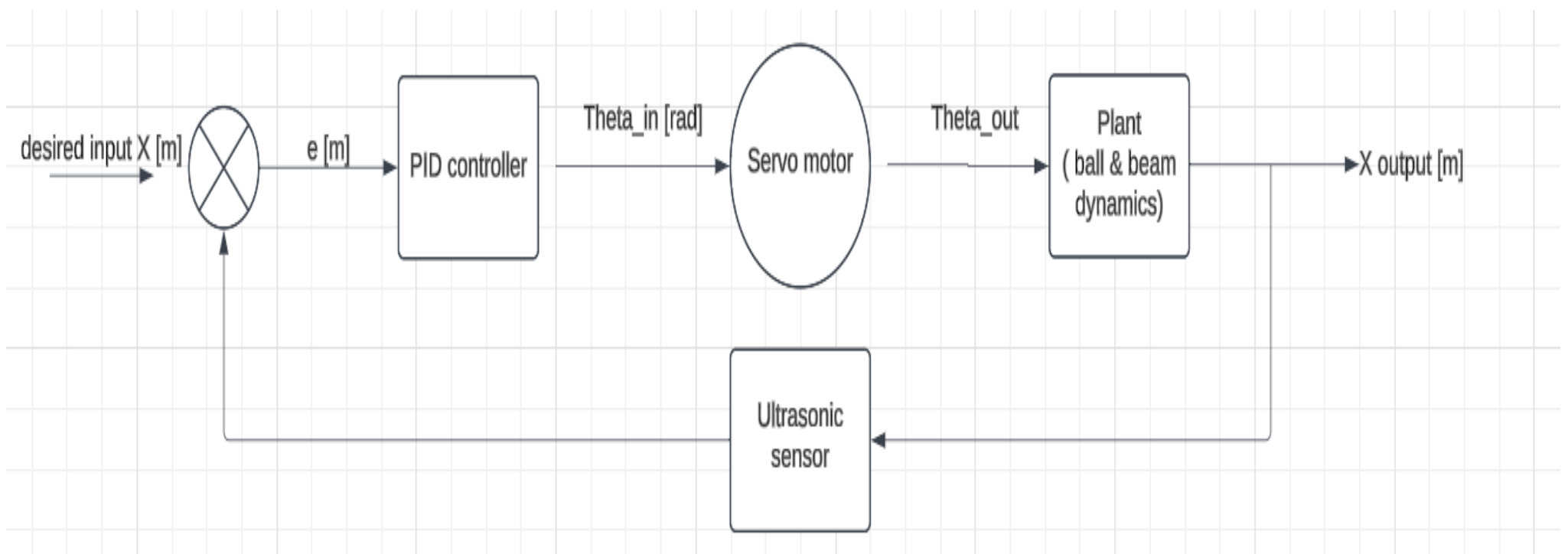
در نهایت تابع تبدیل کلی سیستم ما که زاویه ورودی به سروو را به فاصله توپ از لبه میله تبدیل می‌کند برابرست با :



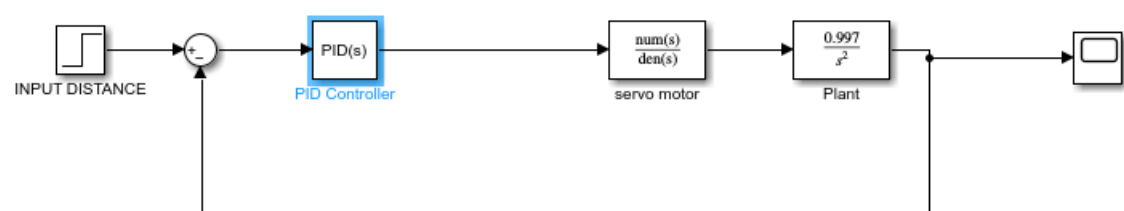
$$G_{uncompensated} = \frac{5102}{s^2 + 103.6s + 4903} \times \frac{1}{s^2}$$

از این تابع حلقه باز برای طراحی پایدار ساز استفاده می‌کنیم، به طور مشخصی تابع تبدیل حلقه باز سیستم ناپایدار است .

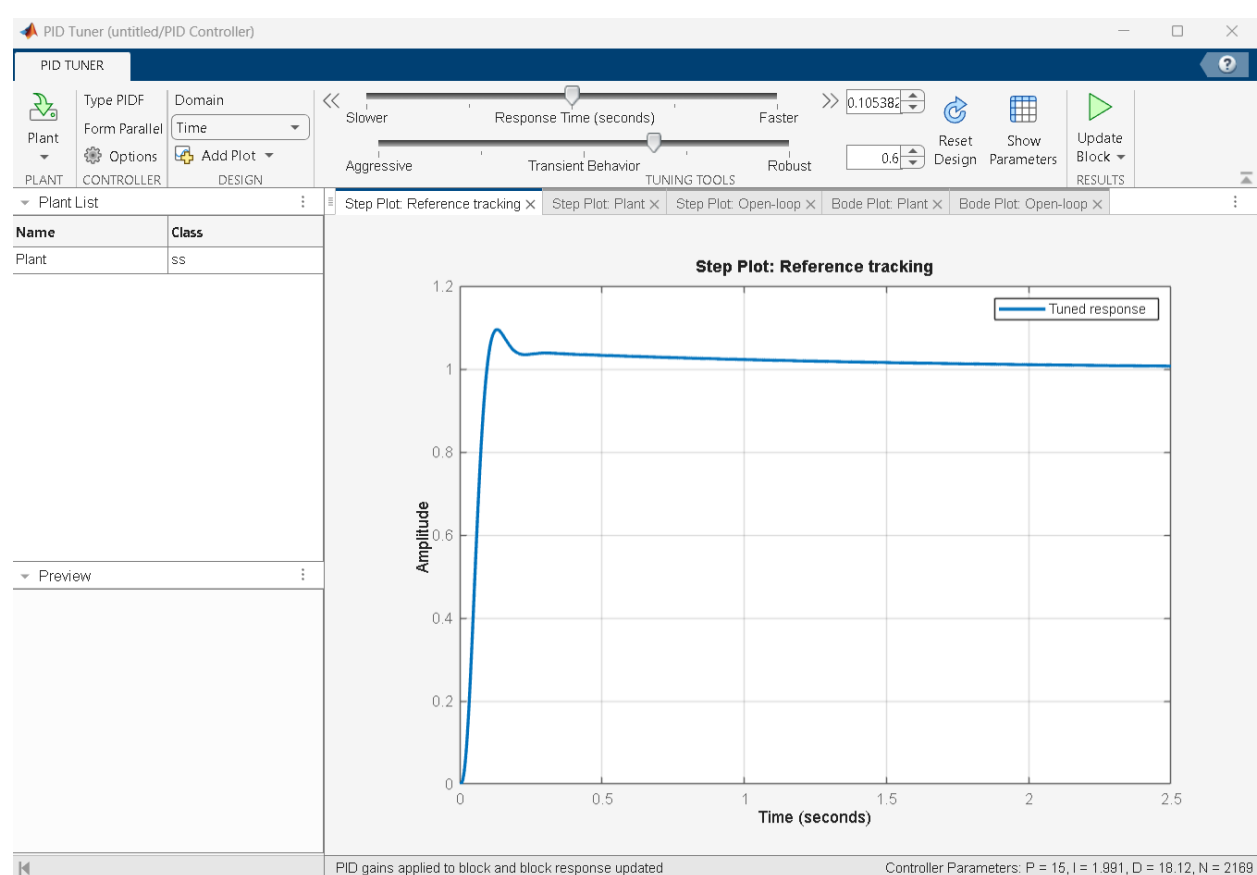
### ۳ – طراحی پایدارساز با کنترلر PID



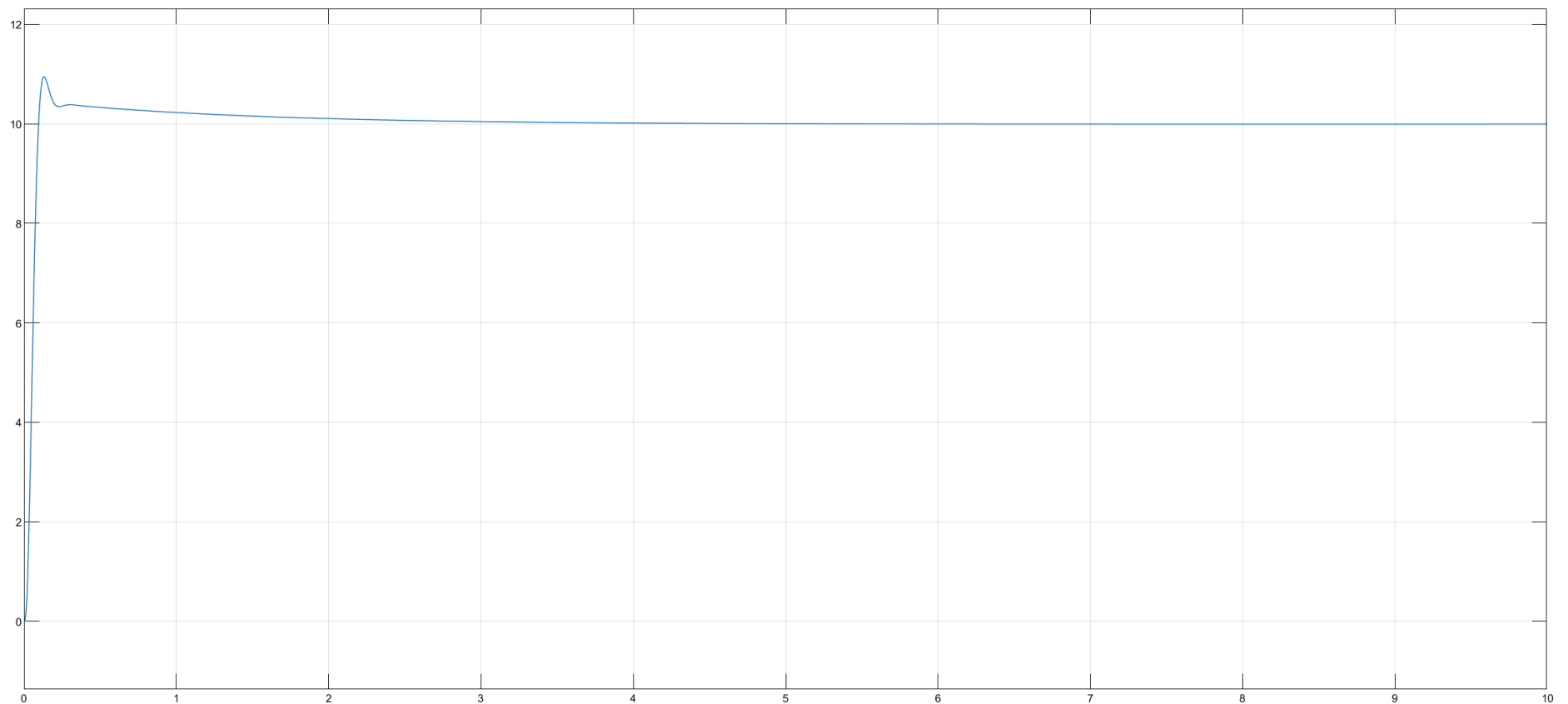
سنسور التراسونیک را با تقریب یک سنسور با گین ۱ در نظر می‌گیریم و خطای موقعیت فعلی با موقعیت خواسته شده را به کنترلر ارجاع می‌دهیم . در متلب پیاده سازی بلوک دیاگرام به صورت زیر خواهد بود :



با استفاده از PID Tuner می‌توانیم ضرایب بهینه کنترلر را برای افزایش reference tracking و در نتیجه پایداری سیستم حلقه بسته را پیدا کرده :



و در نهایت پاسخ سیستم به ورودی فاصله به طور مثال  $10\text{ cm}$  به صورت زیر می شود :

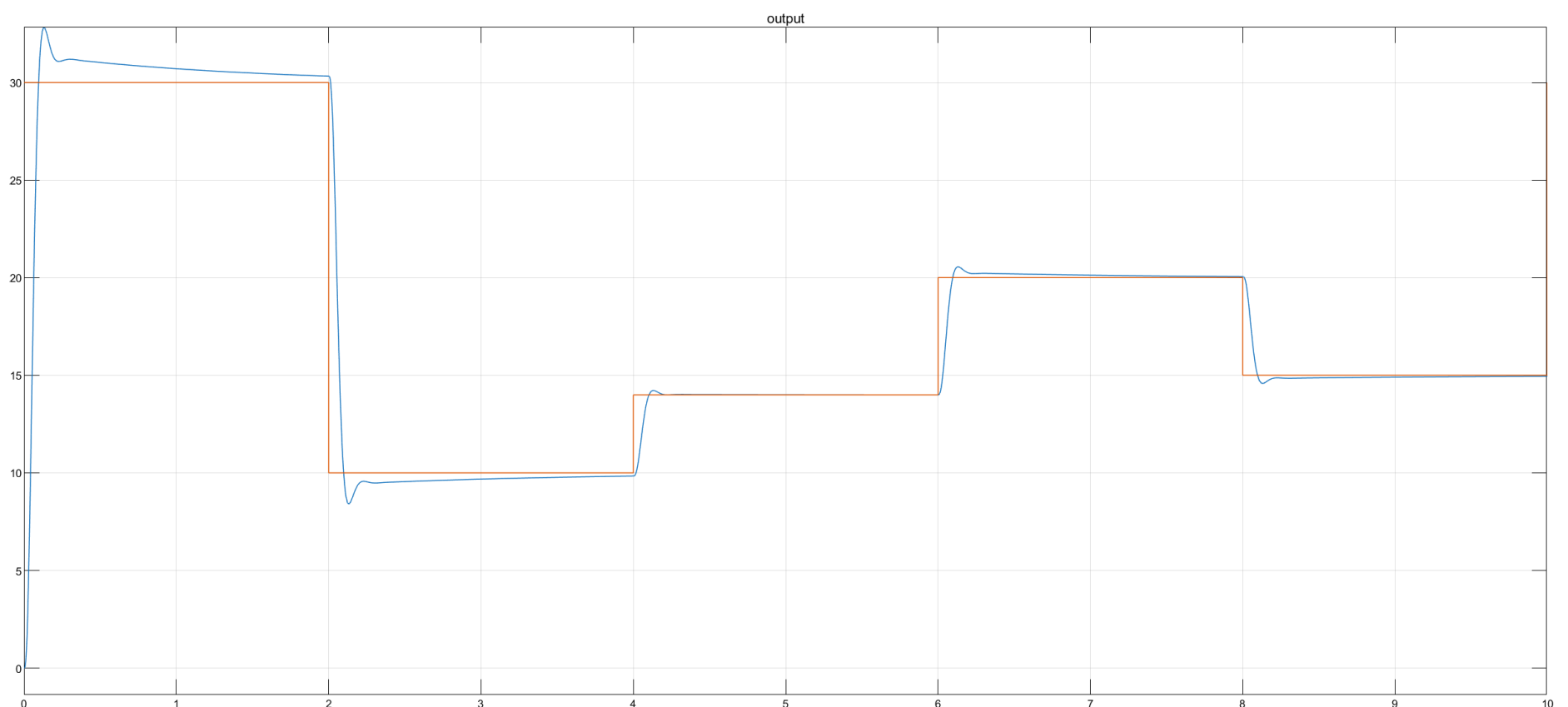


```
>> info = stepinfo(output, time);  
disp(info);
```

مشخصات پاسخ بصورت روبه رو است :

```
RiseTime: 0.0582  
TransientTime: 1.2097  
SettlingTime: 1.2097  
SettlingMin: 9.0558  
SettlingMax: 10.9493  
Overshoot: 9.5473  
Undershoot: 5.8996e-76  
Peak: 10.9493  
PeakTime: 0.1311
```

سیستم دارای پاسخ نسبتاً سریعی برای  $K_p = 15 / K_I = 1.991 / K_D = 18.12$  است ؛ اورشوت نیز مقدار تقریبی ۱۰ درصد را داراست که مقدار قابل قبولی است :



1 پاسخ سیستم به ورودی های مختلف

البته میتوان با تغییر پارامترها ، زمان نشست را نصف کرد اما اورشوت افزایش چشم گیری میابد که بعلت طول کوچک میله قابل قبول نیست

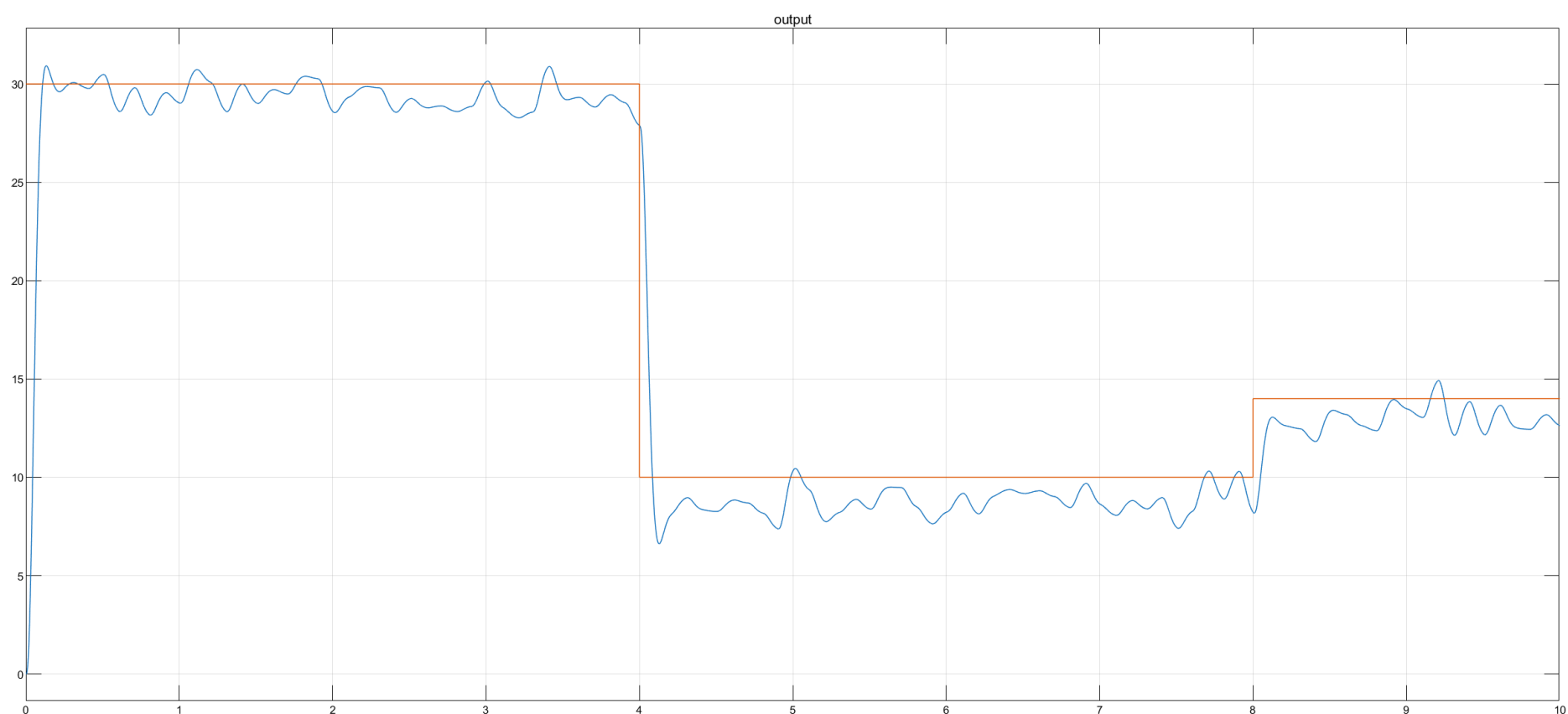
	Tuned	Block
P	17.5699	14.9957
I	2.6853	1.9906
D	25.5427	18.1191
N	2993.9443	2168.9209

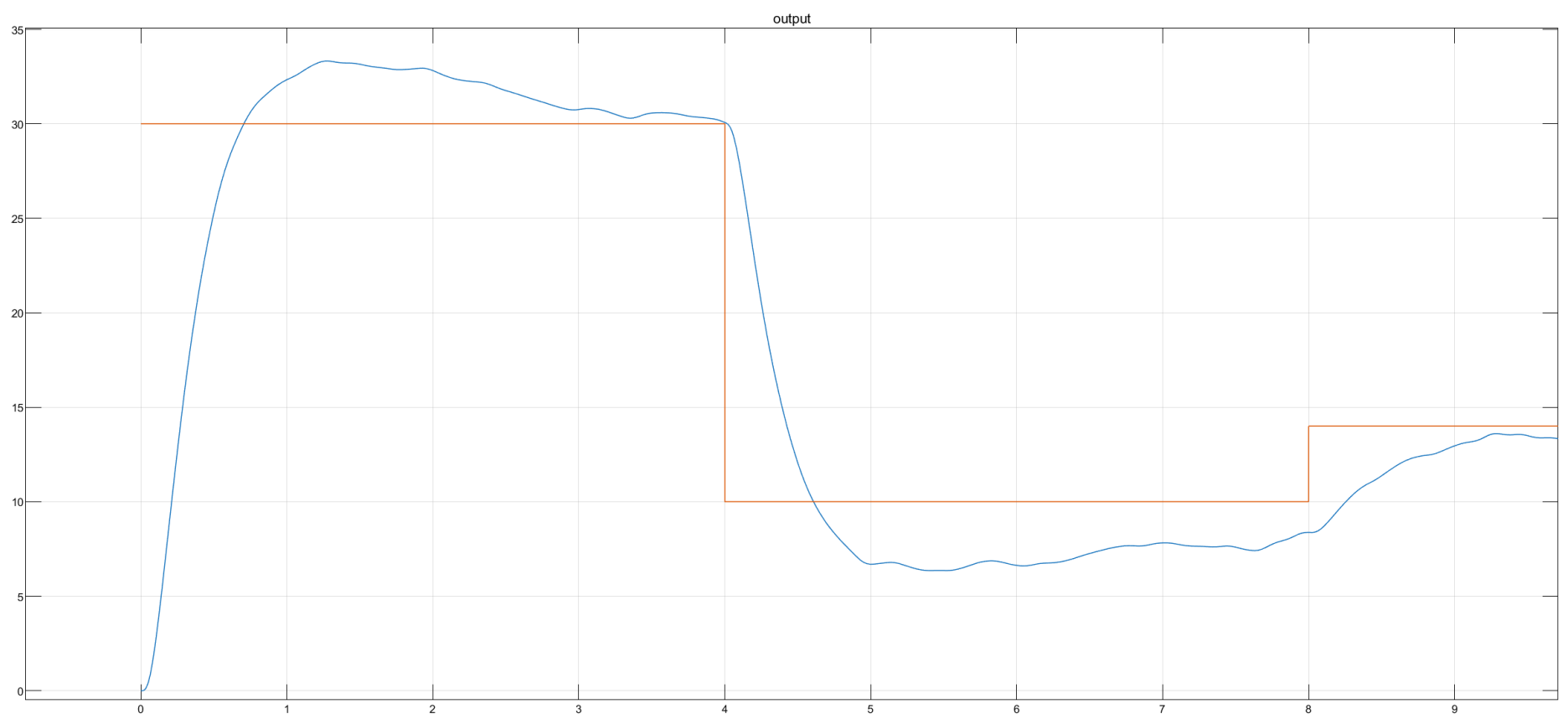
Performance and Robustness		
	Tuned	Block
Rise time	0.043 seconds	0.0582 seconds
Settling time	0.507 seconds	1.18 seconds
Overshoot	21.3 %	9.49 %
Peak	1.21	1.09
Gain margin	10.1 dB @ 59.9 rad/s	13 dB @ 59.5 rad/s
Phase margin	50.1 deg @ 26.2 rad/s	60 deg @ 19 rad/s
Closed-loop stability	Stable	Stable

مقایسه ۲ حالتی که زمان نشست کاهش یافت ( پارامتر های ستون انتخاب شده ) اما اورشوت مطلوب نبود

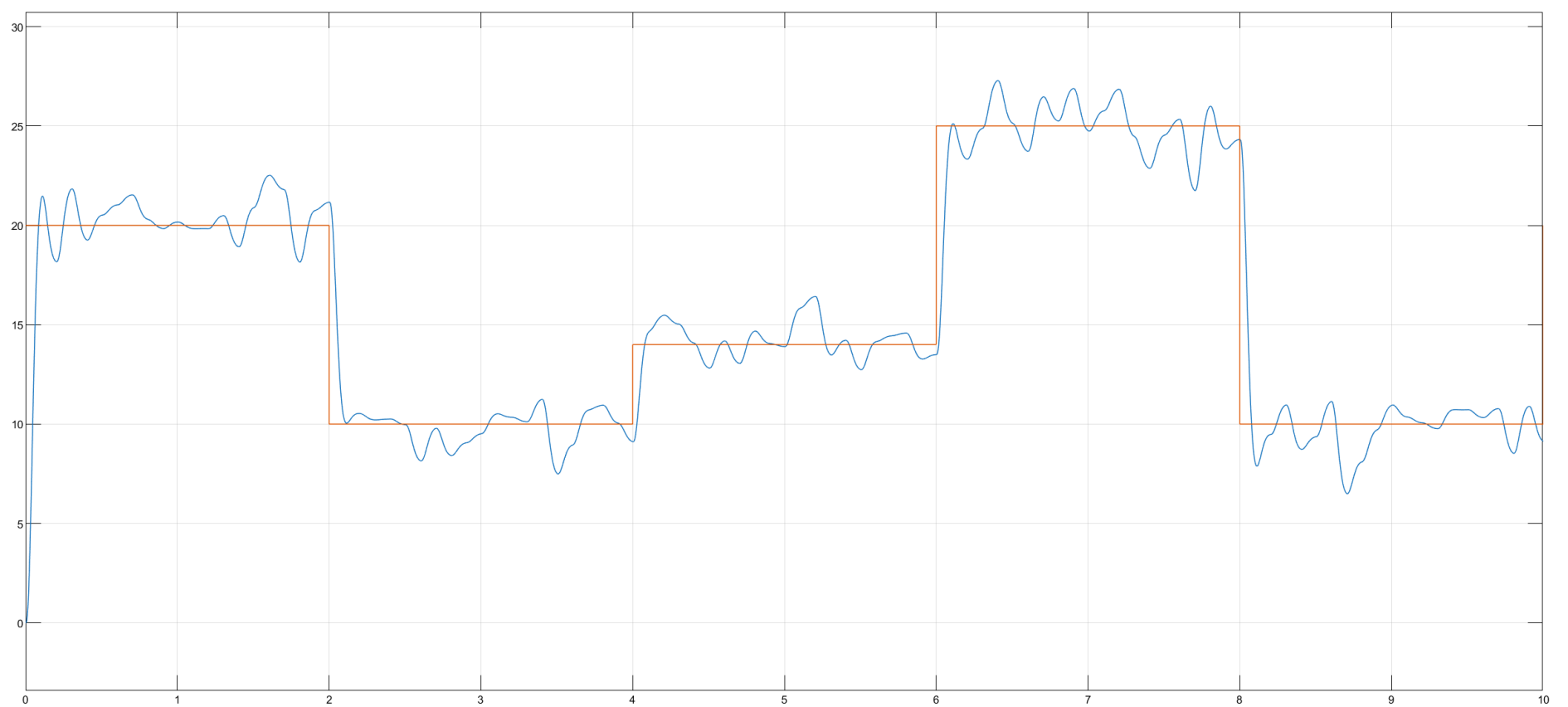
در صورتی که نویز ناشی از سنسور ultrasonic رو با یک نمودار گوسی  $\sigma = 0.5, m = 1$  مدل کنیم : خروجی سیستم به شکل زیر خواهد بود :



که با کاهش bandwidth میتوان سیستم را مقاوم تر کرد اما مشخصات حات دائمی و سرعت سیستم مطلوب نخواهد بود :



بهر حال با سیاست کمترین اورشوت و بهینه ترین سرعت ضرایب  $K_p = 21 / K_I = 3.34 / K_D = 21$  بسنده می کنیم





Show Parameters

Controller Parameters

	Tuned	
P	21.0848	
I	3.24	
D	21.0802	
N	2476.4126	

Performance and Robustness

	Tuned	
Rise time	0.0508 seconds	
Settling time	1.04 seconds	
Overshoot	9.58 %	
Peak	1.1	
Gain margin	12.9 dB @ 67.9 rad/s	
Phase margin	60 deg @ 21.7 rad/s	
Closed-loop stability	Stable	

Close

## جمع بندی :

در این پروژه، یک سیستم کنترل خطی برای مدل **Ball & Beam** طراحی و شبیه‌سازی شد. هدف اصلی این پروژه، حفظ تعادل توپ در موقعیت مورد نظر بر روی یک میله متحرک بود. برای رسیدن به این هدف، مراحل زیر انجام شد:

### مدل سازی سیستم :

ابتدا معادلات دینامیکی سیستم استخراج شد. این معادلات شامل نیروهای گرانشی و گشتاورها بودند که حرکت توپ روی میله را توصیف می‌کردند.

تابع تبدیل سیستم بدون سروو و با در نظر گرفتن سروو موتور SG90 محاسبه شد. این تابع تبدیل، رفتار دینامیکی سیستم را با ورودی زاویه و خروجی موقعیت توپ توصیف می‌کرد.

### کنترلر PID :

- یک کنترلر PID برای سیستم طراحی شد تا موقعیت توپ را به صورت پایدار به نقطه مطلوب هدایت کند.
- ضرایب کنترلر با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی بهینه‌سازی شدند.
- عملکرد کنترلر PID با استفاده از شبیه‌سازی پاسخ پله و بررسی مشخصاتی مانند زمان صعود (Rise Time)، زمان نشست (Settling Time)، و نوسانات (Overshoot) ارزیابی شد.

### شبیه سازی در Simulink

- سیستم کامل در محیط Simulink مدل‌سازی شد. این مدل شامل:
  - ورودی پله دلخواه (تغییرات موقعیت هدف توپ)
  - حلقه فیدبک با سنسور اولتراسونیک برای اندازه‌گیری موقعیت توپ
  - کنترلر PID

با تشکر از توجه شما