图像旋转矩阵推导

旋转矩阵的基本形式

在二维平面上，围绕原点 (0, 0) **顺时针**旋转角度 θ 的旋转矩阵 R 表示为：

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

为了围绕任意点 (x0, y0) 进行旋转，进行以下步骤：

1. 将图像平移，使得旋转中心 (x0, y0) 移动到原点 (0, 0)。
2. 围绕原点 (0, 0) 进行旋转。
3. 将图像平移回原来的位置。

平移矩阵

使得旋转中心 (x0, y0) 移动到原点 (0, 0)的平移矩阵 T_1 表示为：

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x0 \\ 0 & 1 & -y0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

移动回来的平移矩阵 T_2 表示为：

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x0 \\ 0 & 1 & y0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵

在齐次坐标系中，围绕原点 (0, 0) 旋转角度 θ 的旋转矩阵 R 表示为：

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

综合变换矩阵

将上述三个矩阵结合起来，得到围绕任意点 (x0, y0) 旋转角度 θ 的综合变换矩阵 T：

$$T = T_2 \cdot R \cdot T_1$$

即：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x0 \\ 0 & 1 & y0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x0 \\ 0 & 1 & -y0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过矩阵乘法计算得到：

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & x0 - x0\cos\theta - y0\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & y0 + x0\sin\theta - y0\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$