

北京大学 22/23 学年第 1 学期

高数 B 期中试题

1. 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{ne}\right)^n. \quad (1)$$

2. 设 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数, 求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{[x]}. \quad (2)$$

3. 设 $x > 0$, 求函数

$$f(x) = \int_0^{\ln x} \sqrt{1 + e^t} dt \quad (3)$$

的导函数.

4. 求不定积分

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx. \quad (4)$$

5. 求欧氏平面直角坐标系中曲线

$$y = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (5)$$

在 $x = 1$ 到 $x = 2$ 之间的弧长.

6. 设欧氏空间中 V 是由曲线

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{2\pi}} \quad (1 \leq x \leq 2) \quad (6)$$

及直线 $x = 2, y = 0$ 所围成的曲边三角形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体, 求 V 的体积.

7. 给定正实数 $a_1 > 0, b_1 > 0$. 设 $a_1 > b_1$, 对于每个正整数 n , 有递归公式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad (7)$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在且有限.

8. 本题中每个小题都要求写出证明和计算过程.

(a) 证明: 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, 有 $-1 < \frac{4 \sin x}{3 + \sin^2 x} < 1$;

(b) 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, 求函数 $f(x) = \arcsin\left(\frac{4 \sin x}{3 + \sin^2 x}\right)$ 的导函数 $f'(x)$;

(c) 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}. \quad (8)$$

9. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续的实值函数, 满足

$$f(0) = g(0), \quad \sin f(1) = \sin g(1), \quad \cos f(1) = \cos g(1), \quad (9)$$

对于每个 $x \in [0, 1]$ 有

$$[\cos f(x) + \cos g(x)]^2 + [\sin f(x) + \sin g(x)]^2 \neq 0. \quad (10)$$

证明 $f(1) = g(1)$.