教材、成绩评定方法

- 教材：李忠, 周建莹,《高等数学》(上)，北大出版社
- 成绩评定方法：
- 答疑：智华楼 369.
- 电子邮件：liujm@math.pku.edu.cn. 微信群：
- 课件下载：教学网“内容”栏

习题课

- 每次习题课上交上周的作业

初等数学与高等数学

- 初等数学：初等数学 (古典数学) 是常量的、静态的数学，它以静止的方法研究客观世界的个别要素，它只能解决和解释常量的几何问题和物理问题，比如规则图形的长度、面积和体积，匀速直线运动，常力沿直线的作功，质点间的吸引力等。
- 高等数学：高等数学 (变量数学) 是变量的、动态的数学，它以变量和函数为主要概念，用运动的观点探索事物的变化和发展的过程，解释和解决那些变化的几何问题和物理过程，比如不规则图形的长度、面积和体积，一般运动问题，变力沿曲线作功等。
- 十七世纪中叶，解析几何 (由费马和笛卡尔创立)、微积分相继问世，数学进入变量数学时期. 解析几何的建立是变量数学的起点。

初等数学与高等数学

- 初等数学：初等数学 (古典数学) 是常量的、静态的数学，它以静止的方法研究客观世界的个别要素，它只能解决和解释常量的几何问题和物理问题，比如规则图形的长度、面积和体积，匀速直线运动，常力沿直线的作功，质点间的吸引力等。
- 高等数学: 高等数学 (变量数学) 是变量的、动态的数学，它以变量和函数为主要概念，用运动的观点探索事物的变化和发展的过程，解释和解决那些变化的几何问题和物理过程，比如不规则图形的长度、面积和体积，一般运动问题，变力沿曲线作功等。
- 十七世纪中叶，解析几何 (由费马和笛卡尔创立)、微积分相继问世，数学进入变量数学时期. 解析几何的建立是变量数学的起点。

初等数学与高等数学

- 初等数学：初等数学 (古典数学) 是常量的、静态的数学，它以静止的方法研究客观世界的个别要素, 它只能解决和解释常量的几何问题和物理问题，比如规则图形的长度、面积和体积，匀速直线运动，常力沿直线的作功，质点间的吸引力等。
- 高等数学: 高等数学 (变量数学) 是变量的、动态的数学，它以变量和函数为主要概念, 用运动的观点探索事物的变化和发展的过程, 解释和解决那些变化的几何问题和物理过程，比如不规则图形的长度、面积和体积，一般运动问题，变力沿曲线作功等。
- 十七世纪中叶, 解析几何 (由费马和笛卡尔创立)、微积分相继问世, 数学进入变量数学时期. 解析几何的建立是变量数学的起点。

课程内容介绍

- “数学分析、高等代数、解析几何”是现代数学的基石。
- 课程内容: 我们现在学习的高等数学是由极限理论，微积分学、级数理论，空间解析几何、微分方程组成，而微积分学是数学分析中主干部分，而微分方程在科学技术中应用非常广泛，无处不在。

课程内容介绍

- “数学分析、高等代数、解析几何”是现代数学的基石。
- 课程内容: 我们现在学习的高等数学是由极限理论，微积分学、级数理论，空间解析几何、微分方程组成，而微积分学是数学分析中主干部分，而微分方程在科学技术中应用非常广泛，无处不在。

课程简介

- 课程定位：高等数学 B 是面向对数学要求比较高的理工、经管、社科等专业的同学开设的一门重要的基础课。
- 教学目的和要求：高数 B 旨在对微积分体系有一个整体的了解，着重培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、基本的空间想象能力、一定的运算能力、应用所学知识分析问题和解决问题的能力。
- 高数 B 在同类课（微积分类课程）难度链中的位置（由难到易）：数学分析，高数 A，高数 B，高数 C，高数 D。
  高数 A 要求理解思想和概念、掌握方法、领悟本质、熟练应用，高数 C 要求了解概念、懂得方法、明白现象、知道几个重要公式和结论，能够进行基本的计算。
- 课时：高数 A 三个学期，高数 B（每周 4 大课 +2 习题）和高数 C 两个学期（每周 4 课时），高数 D 一个学期。

课程简介

- 课程定位：高等数学 B 是面向对数学要求比较高的理工、经管、社科等专业的同学开设的一门重要的基础课。
- 教学目的和要求：高数 B 旨在对微积分体系有一个整体的了解，着重培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、基本的空间想象能力、一定的运算能力、应用所学知识分析问题和解决问题的能力。
- 高数 B 在同类课（微积分类课程）难度链中的位置（由难到易）：数学分析，高数 A，高数 B，高数 C，高数 D。
  高数 A 要求理解思想和概念、掌握方法、领悟本质、熟练应用，高数 C 要求了解概念、懂得方法、明白现象、知道几个重要公式和结论，能够进行基本的计算。
- 课时：高数 A 三个学期，高数 B（每周 4 大课 +2 习题）和高数 C 两个学期（每周 4 课时），高数 D 一个学期。

课程简介

- 课程定位：高等数学 B 是面向对数学要求比较高的理工、经管、社科等专业的同学开设的一门重要的基础课。
- 教学目的和要求：高数 B 旨在对微积分体系有一个整体的了解，着重培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、基本的空间想象能力、一定的运算能力、应用所学知识分析问题和解决问题的能力。
- 高数 B 在同类课（微积分类课程）难度链中的位置（由难到易）：数学分析，高数 A，高数 B，高数 C，高数 D。
  高数 A 要求理解思想和概念、掌握方法、领悟本质、熟练应用，高数 C 要求了解概念、懂得方法、明白现象、知道几个重要公式和结论，能够进行基本的计算。
- 课时：高数 A 三个学期，高数 B（每周 4 大课 +2 习题）和高数 C 两个学期（每周 4 课时），高数 D 一个学期。

课程简介

- 课程定位：高等数学 B 是面向对数学要求比较高的理工、经管、社科等专业的同学开设的一门重要的基础课。
- 教学目的和要求：高数 B 旨在对微积分体系有一个整体的了解，着重培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、基本的空间想象能力、一定的运算能力、应用所学知识分析问题和解决问题的能力。
- 高数 B 在同类课（微积分类课程）难度链中的位置（由难到易）：数学分析，高数 A，高数 B，高数 C，高数 D。
  高数 A 要求理解思想和概念、掌握方法、领悟本质、熟练应用，高数 C 要求了解概念、懂得方法、明白现象、知道几个重要公式和结论，能够进行基本的计算。
- 课时：高数 A 三个学期，高数 B（每周 4 大课 +2 习题）和高数 C 两个学期（每周 4 课时），高数 D 一个学期。

课程简介

- 课程定位：高等数学 B 是面向对数学要求比较高的理工、经管、社科等专业的同学开设的一门重要的基础课。
- 教学目的和要求：高数 B 旨在对微积分体系有一个整体的了解，着重培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、基本的空间想象能力、一定的运算能力、应用所学知识分析问题和解决问题的能力。
- 高数 B 在同类课（微积分类课程）难度链中的位置（由难到易）：数学分析，高数 A，高数 B，高数 C，高数 D。
  高数 A 要求理解思想和概念、掌握方法、领悟本质、熟练应用，高数 C 要求了解概念、懂得方法、明白现象、知道几个重要公式和结论，能够进行基本的计算。
- 课时：高数 A 三个学期，高数 B（每周 4 大课 +2 习题）和高数 C 两个学期（每周 4 课时），高数 D 一个学期。

- 微积分是继 Euclid 几何之后，数学中的一个最大创造。冯 · 诺依曼：“微积分是现代数学取得的最高成就，对它的重要性怎样估计也是不会过分的。”
- 对于理工科学生：高等数学是工作的最基本工具，没有数学支撑，计算理论、软件开发、工程分析... 都将一筹莫展，只能拿别人的现成经验做事，永远没有创新可能！

课程的重要性

- 微积分是继 Euclid 几何之后，数学中的一个最大创造。冯 · 诺依曼：“微积分是现代数学取得的最高成就，对它的重要性怎样估计也是不会过分的。”
- 对于理工科学生：高等数学是工作的最基本工具，没有数学支撑，计算理论、软件开发、工程分析... 都将一筹莫展，只能拿别人的现成经验做事，永远没有创新可能！

几点建议 1

- 树立信心：数学具有很强的抽象性，对于每位刚踏入大学的同学来说，要从简单、基础的数学转到对高度抽象、复杂的高等数学的学习中确实有一定的难度。但是只要用心学习，不难学好。
- 学习要积极主动：与中学数学相比，大学数学的课堂教学有显著的差别。高等数学的内容十分丰富，但学时又有限，因此每堂课不仅教学内容多，而且是全新的，教师讲课主要是讲概念、讲思路，举例较少。要学好高等数学，自主性，自学能力很重要。

几点建议 1

- 树立信心：数学具有很强的抽象性，对于每位刚踏入大学的同学来说，要从简单、基础的数学转到对高度抽象、复杂的高等数学的学习中确实有一定的难度。但是只要用心学习，不难学好。
- 学习要积极主动：与中学数学相比，大学数学的课堂教学有显著的差别。高等数学的内容十分丰富，但学时又有限，因此每堂课不仅教学内容多，而且是全新的，教师讲课主要是讲概念、讲思路，举例较少。要学好高等数学，自主性，自学能力很重要。

几点建议 2

- 注意概念的理解: 数学教育本质上是一种素质教育。学习数学的目的，不仅仅在于学到一些数学的概念、公式和结论，更重要的是要了解数学的思想方法和精神实质，真正掌握数学这门学科的精髓。学习时，要注意概念、定理的理解. 注意条件，前后联系、相关概念和定理。可通过实例、看证明、应用来加深对概念和定理的理解。例如 $f(x)=x^3$ 的导数 $f'(x)=3x^2$. 问 $f(x)=|x|^3$ 的导数呢?
- 做题要独立完成: 做题的目的是掌握概念和定理，不用做太多。做题时一定要独立完成，尽量不要翻书。做题的思路要清晰。

几点建议 2

- 注意概念的理解: 数学教育本质上是一种素质教育。学习数学的目的，不仅仅在于学到一些数学的概念、公式和结论，更重要的是要了解数学的思想方法和精神实质，真正掌握数学这门学科的精髓。学习时，要注意概念、定理的理解. 注意条件，前后联系、相关概念和定理。可通过实例、看证明、应用来加深对概念和定理的理解。例如 $f(x)=x^3$ 的导数 $f'(x)=3x^2$. 问 $f(x)=|x|^3$ 的导数呢?
- 做题要独立完成: 做题的目的是掌握概念和定理，不用做太多。做题时一定要独立完成，尽量不要翻书。做题的思路要清晰。

几点建议 2

- 注意概念的理解: 数学教育本质上是一种素质教育。学习数学的目的，不仅仅在于学到一些数学的概念、公式和结论，更重要的是要了解数学的思想方法和精神实质，真正掌握数学这门学科的精髓。学习时，要注意概念、定理的理解. 注意条件，前后联系、相关概念和定理。可通过实例、看证明、应用来加深对概念和定理的理解。例如 $f(x) = x^3$ 的导数 $f'(x) = 3x^2$. 问 $f(x) = |x|^3$ 的导数呢?
- 做题要独立完成: 做题的目的是掌握概念和定理，不用做太多。做题时一定要独立完成，尽量不要翻书。做题的思路要清晰。

牛顿的“流数术”

- (I.Newton,1642-1727) 牛顿于 1664 年秋开始研究微积分问题，1666 年牛顿完成论文《流数简论》，这也是历史上第一篇系统的微积分文献。在简论中，牛顿以运动学为背景提出了微积分的基本问题，发明了“正流数术”(微分)；从确定面积的变化率入手通过反微分计算面积，又建立了“反流数术”；并将面积计算与求切线问题的互逆关系作为一般规律明确地揭示出来，将其作为微积分基础论述了“微积分基本定理”。
- 牛顿对于发表自己的科学著作持非常谨慎的态度. 1687 年，牛顿出版了他的力学巨著《自然哲学的数学原理》，这部著作中包含他的微积分学说，也是牛顿微积分学说的最早的公开表述，因此该巨著成为数学史上划时代的著作。而他的微积分论文直到 18 世纪初才在朋友的再三催促下相继发表。

牛顿的“流数术”

- (I.Newton,1642-1727) 牛顿于 1664 年秋开始研究微积分问题，1666 年牛顿完成论文《流数简论》，这也是历史上第一篇系统的微积分文献。在简论中，牛顿以运动学为背景提出了微积分的基本问题，发明了“正流数术”(微分)；从确定面积的变化率入手通过反微分计算面积，又建立了“反流数术”；并将面积计算与求切线问题的互逆关系作为一般规律明确地揭示出来，将其作为微积分基础论述了“微积分基本定理”。
- 牛顿对于发表自己的科学著作持非常谨慎的态度. 1687 年，牛顿出版了他的力学巨著《自然哲学的数学原理》，这部著作中包含他的微积分学说，也是牛顿微积分学说的最早的公开表述，因此该巨著成为数学史上划时代的著作。而他的微积分论文直到 18 世纪初才在朋友的再三催促下相继发表。

莱布尼茨的微积分工作

- 莱布尼茨 (W.Leibniz,1646-1716) 1672 年至 1676 年，莱布尼茨作为大使在巴黎工作，微积分的创立等许多重大的成就都是在这一时期完成或奠定了基础。
- 1684 年，莱布尼茨在《教师学报》上发表了第一篇微分学论文《一种求极大值与极小值以及求切线的新方法》，它包含了微分记号以及函数和、差、积、商、乘幂与方根的微分法则，还包含了微分法在求极值、拐点以及光学等方面的广泛应用。1686 年，莱布尼茨又发表了他的第一篇积分学论文，这篇论文初步论述了积分或求积问题与微分或切线问题的互逆关系，包含积分符号。
- 莱布尼茨对微积分学基础的解释和牛顿一样也是含混不清的。

莱布尼茨的微积分工作

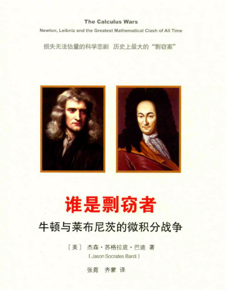
- 莱布尼茨 (W.Leibniz,1646-1716) 1672 年至 1676 年，莱布尼茨作为大使在巴黎工作，微积分的创立等许多重大的成就都是在这一时期完成或奠定了基础。
- 1684 年，莱布尼茨在《教师学报》上发表了第一篇微分学论文《一种求极大值与极小值以及求切线的新方法》，它包含了微分记号以及函数和、差、积、商、乘幂与方根的微分法则，还包含了微分法在求极值、拐点以及光学等方面的广泛应用。1686 年，莱布尼茨又发表了他的第一篇积分学论文，这篇论文初步论述了积分或求积问题与微分或切线问题的互逆关系，包含积分符号。
- 莱布尼茨对微积分学基础的解释和牛顿一样也是含混不清的。

莱布尼茨的微积分工作

- 莱布尼茨 (W.Leibniz,1646-1716) 1672 年至 1676 年，莱布尼茨作为大使在巴黎工作，微积分的创立等许多重大的成就都是在这一时期完成或奠定了基础。
- 1684 年，莱布尼茨在《教师学报》上发表了第一篇微分学论文《一种求极大值与极小值以及求切线的新方法》，它包含了微分记号以及函数和、差、积、商、乘幂与方根的微分法则，还包含了微分法在求极值、拐点以及光学等方面的广泛应用。1686 年，莱布尼茨又发表了他的第一篇积分学论文，这篇论文初步论述了积分或求积问题与微分或切线问题的互逆关系，包含积分符号。
- 莱布尼茨对微积分学基础的解释和牛顿一样也是含混不清的。

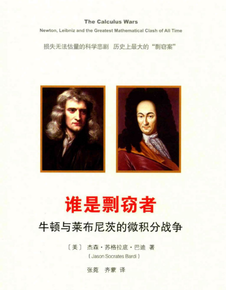
优先权之争

- 牛顿和莱布尼茨创立的微积分在背景、方法和形式上存在差异、各有特色。然而，瑞士数学家德丢勒 1699 在一本小册子中，说莱布尼茨的微积分工作从牛顿那里有所借鉴，进一步莱布尼茨又被英国数学家指责为剽窃者。这样就造成了支持莱布尼茨的欧陆数学家和支持牛顿的英国数学家两派的不和，甚至互相尖锐地攻击对方。这件事的结果，使得两派数学家在数学的发展上分道扬镳，停止了思想交换。
- 牛顿和莱布尼茨二人死后很久，事情终于得到澄清，调查证实两人确实是相互独立地完成了微积分的发明，就发明时间而言，牛顿早于莱布尼茨；就发表时间而言，莱布尼茨先于牛顿。



优先权之争

- 牛顿和莱布尼茨创立的微积分在背景、方法和形式上存在差异、各有特色。然而，瑞士数学家德丢勒 1699 在一本小册子中，说莱布尼茨的微积分工作从牛顿那里有所借鉴，进一步莱布尼茨又被英国数学家指责为剽窃者。这样就造成了支持莱布尼茨的欧陆数学家和支持牛顿的英国数学家两派的不和，甚至互相尖锐地攻击对方。这件事的结果，使得两派数学家在数学的发展上分道扬镳，停止了思想交换。
- 牛顿和莱布尼茨二人死后很久，事情终于得到澄清，调查证实两人确实是相互独立地完成了微积分的发明，就发明时间而言，牛顿早于莱布尼茨；就发表时间而言，莱布尼茨先于牛顿。



牛顿、莱布尼茨微积分的缺陷

- 微积分学创立以后，由于应用的广泛性，微积分学成了研究自然科学的有力工具。由此还产生了一些重要的数学分支，如微分方程和微分几何，并创立了一些新的分析方法。
- 许多概念都没有精确的定义，微积分的基础 - 无穷小概念的解释不明确，在运算中时而为零，时而非零，出现了逻辑上的困境。函数概念还不清楚，导数和积分的基本概念还没有恰当的定义。
  Abel: “高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明。人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法，而奇怪的是这种方法很少导致悖论”。

牛顿、莱布尼茨微积分的缺陷

- 微积分学创立以后，由于应用的广泛性，微积分学成了研究自然科学的有力工具。由此还产生了一些重要的数学分支，如微分方程和微分几何，并创立了一些新的分析方法。
- 许多概念都没有精确的定义，微积分的基础 -无穷小概念的解释不明确，在运算中时而为零，时而非零，出现了逻辑上的困境。函数概念还不清楚，导数和积分的基本概念还没有恰当的定义。

  Abel:“高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明。人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法，而奇怪的是这种方法很少导致悖论”。

牛顿、莱布尼茨微积分的缺陷

- 微积分学创立以后，由于应用的广泛性，微积分学成了研究自然科学的有力工具。由此还产生了一些重要的数学分支，如微分方程和微分几何，并创立了一些新的分析方法。
- 许多概念都没有精确的定义，微积分的基础 - 无穷小概念的解释不明确，在运算中时而为零，时而非零，出现了逻辑上的困境。函数概念还不清楚，导数和积分的基本概念还没有恰当的定义。
  Abel:“高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明。人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法，而奇怪的是这种方法很少导致悖论”。

极限是微积分的核心

- 牛顿和莱布尼茨试图以无穷小概念为基础建立微积分，在研究过程中却遇到了逻辑问题。
- 到了 18 世纪，许多科学家和数学家先后意识到必须将极限概念作为微积分的基础概念，并给出了多种关于极限的定义。第一个明确阐述极限概念的数学家是法国的达朗贝尔。他指出，“当第一个量以比人们能想出的任何细微给定量都更密切地逼近第二个量时，第二个量就是第一个量的极限。”
- 微积分中的最基本概念都是通过极限来定义的，每一部分都离不开极限，可以说没有极限就没有微积分。极限和极限思想在微积分中扮演着核心的地位。

极限是微积分的核心

- 牛顿和莱布尼茨试图以无穷小概念为基础建立微积分，在研究过程中却遇到了逻辑问题。
- 到了 18 世纪，许多科学家和数学家先后意识到必须将极限概念作为微积分的基础概念，并给出了多种关于极限的定义。第一个明确阐述极限概念的数学家是法国的达朗贝尔。他指出，“当第一个量以比人们能想出的任何细微给定量都更密切地逼近第二个量时，第二个量就是第一个量的极限。”
- 微积分中的最基本概念都是通过极限来定义的，每一部分都离不开极限，可以说没有极限就没有微积分。极限和极限思想在微积分中扮演着核心的地位。

极限是微积分的核心

- 牛顿和莱布尼茨试图以无穷小概念为基础建立微积分，在研究过程中却遇到了逻辑问题。
- 到了 18 世纪，许多科学家和数学家先后意识到必须将极限概念作为微积分的基础概念，并给出了多种关于极限的定义。第一个明确阐述极限概念的数学家是法国的达朗贝尔。他指出，“当第一个量以比人们能想出的任何细微给定量都更密切地逼近第二个量时，第二个量就是第一个量的极限。”
- 微积分中的最基本概念都是通过极限来定义的，每一部分都离不开极限，可以说没有极限就没有微积分。极限和极限思想在微积分中扮演着核心的地位。

柯西对严格微积分的贡献

- 法国数学家柯西 (A-L.Cauchy,1789-1857) 从 1821 年到 1829 年，柯西相继出版了《分析教程》、《无穷小计算教程》以及《微分计算教程》，对微积分的一系列基本概念给出了明确的定义。他的许多定义和论述已经非常接近于微积分的现代形式。
- 然而，柯西的理论也存在不足之处. 比如柯西定义极限为：“当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差可以随意小, 那么这个定值就称为所有其它值的极限”，其中“无限趋向于”、“可以随意小”等语言只是极限概念的直觉的、定性的描述，缺乏定量的分析，这种语言在其它概念和结论中也多次出现。
- 直到到 19 世纪中叶，实数仍没有明确的定义，对实数系仍缺乏充分的理解。

柯西对严格微积分的贡献

- 法国数学家柯西 (A-L.Cauchy,1789-1857) 从 1821 年到 1829 年，柯西相继出版了《分析教程》、《无穷小计算教程》以及《微分计算教程》，对微积分的一系列基本概念给出了明确的定义。他的许多定义和论述已经非常接近于微积分的现代形式。
- 然而，柯西的理论也存在不足之处. 比如柯西定义极限为：“当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差可以随意小, 那么这个定值就称为所有其它值的极限”，其中“无限趋向于”、“可以随意小”等语言只是极限概念的直觉的、定性的描述，缺乏定量的分析，这种语言在其它概念和结论中也多次出现。
- 直到到 19 世纪中叶，实数仍没有明确的定义，对实数系仍缺乏充分的理解。

柯西对严格微积分的贡献

- 法国数学家柯西 (A-L.Cauchy,1789-1857) 从 1821 年到 1829 年，柯西相继出版了《分析教程》、《无穷小计算教程》以及《微分计算教程》，对微积分的一系列基本概念给出了明确的定义。他的许多定义和论述已经非常接近于微积分的现代形式。
- 然而，柯西的理论也存在不足之处. 比如柯西定义极限为：“当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差可以随意小, 那么这个定值就称为所有其它值的极限”，其中“无限趋向于”、“可以随意小”等语言只是极限概念的直觉的、定性的描述，缺乏定量的分析，这种语言在其它概念和结论中也多次出现。
- 直到到 19 世纪中叶，实数仍没有明确的定义，对实数系仍缺乏充分的理解。

威尔斯特拉斯的严格微积分

- 魏尔斯特拉斯（K. W. Weierstrass，1815—1897）定量地给出了极限概念的定义，这就是今天极限论中的“$\epsilon-\delta$”方法。魏尔斯特拉斯用他创造的这一套语言重新定义了微积分中的一系列重要概念。
- 魏尔斯特拉斯认为实数是全部分析的本源，要使分析严格化，就先要使实数系本身严格化。而实数又可按照严密的推理归结为整数.
- 1857 年，魏尔斯特拉斯在课堂上给出了第一个严格的实数定义，但他没有发表. 1872 年，戴德金 (R. Dedekind, 1831-1916)、康托尔 (B. Cantor,1829-1920) 几乎同时发表了他们的实数理论，并用各自的实数定义严格地证明了实数系的完备性。这标志着由魏尔斯特拉斯倡导的分析算术化运动大致宣告完成。

威尔斯特拉斯的严格微积分

- 魏尔斯特拉斯（K. W. Weierstrass，1815—1897）定量地给出了极限概念的定义，这就是今天极限论中的“$\epsilon-\delta$”方法。魏尔斯特拉斯用他创造的这一套语言重新定义了微积分中的一系列重要概念。
- 魏尔斯特拉斯认为实数是全部分析的本源，要使分析严格化，就先要使实数系本身严格化。而实数又可按照严密的推理归结为整数.
- 1857 年，魏尔斯特拉斯在课堂上给出了第一个严格的实数定义，但他没有发表. 1872 年，戴德金 (R. Dedekind, 1831-1916)、康托尔 (B. Cantor,1829-1920) 几乎同时发表了他们的实数理论，并用各自的实数定义严格地证明了实数系的完备性。这标志着由魏尔斯特拉斯倡导的分析算术化运动大致宣告完成。

威尔斯特拉斯的严格微积分

- 魏尔斯特拉斯（K. W. Weierstrass，1815—1897）定量地给出了极限概念的定义，这就是今天极限论中的“$\epsilon - \delta$”方法。魏尔斯特拉斯用他创造的这一套语言重新定义了微积分中的一系列重要概念。
- 魏尔斯特拉斯认为实数是全部分析的本源，要使分析严格化，就先要使实数系本身严格化。而实数又可按照严密的推理归结为整数.
- 1857 年，魏尔斯特拉斯在课堂上给出了第一个严格的实数定义，但他没有发表. 1872 年，戴德金 (R. Dedekind, 1831-1916)、康托尔 (B. Cantor,1829-1920) 几乎同时发表了他们的实数理论，并用各自的实数定义严格地证明了实数系的完备性。这标志着由魏尔斯特拉斯倡导的分析算术化运动大致宣告完成。

有理数

- 克罗内克（L. Kronecker）：上帝创造了整数，其余一切是人造的.
- 自然数：$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$, 对加法和乘法运算封闭 (即任意两个自然数的和或积都是自然数).
- 整数：$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$, 对加法、减法和乘法运算封闭. 正整数：$\mathbb{Z}^{+}=\{1,2,\cdots\}$.
- 有理数：$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\}$, 这里 $\frac{m}{1}=m$, 两个有理数 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{p}{q}$ 相等当且仅当 $mq=np$. 有理数集对加法、减法、乘法和除法运算封闭.

有理数

- 克罗内克（L. Kronecker）：上帝创造了整数，其余一切是人造的.
- 自然数：$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$, 对加法和乘法运算封闭 (即任意两个自然数的和或积都是自然数).
- 整数：$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$, 对加法、减法和乘法运算封闭. 正整数：$\mathbb{Z}^+=\{1,2,\cdots\}$.
- 有理数：$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\}$, 这里 $\frac{m}{1}=m$, 两个有理数 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{p}{q}$ 相等当且仅当 $mq=np$. 有理数集对加法、减法、乘法和除法运算封闭.

有理数

- 克罗内克（L. Kronecker）：上帝创造了整数，其余一切是人造的.
- 自然数：$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, 对加法和乘法运算封闭 (即任意两个自然数的和或积都是自然数).
- 整数：$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, 对加法、减法和乘法运算封闭. 正整数：$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \cdots\}$.
- 有理数：$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, 这里 $\frac{m}{1} = m$, 两个有理数 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{p}{q}$ 相等当且仅当 $mq = np$. 有理数集对加法、减法、乘法和除法运算封闭.

有理数

- 克罗内克（L. Kronecker）：上帝创造了整数，其余一切是人造的.
- 自然数：$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, 对加法和乘法运算封闭 (即任意两个自然数的和或积都是自然数).
- 整数：$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, 对加法、减法和乘法运算封闭. 正整数：$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \cdots\}$.
- 有理数：$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, 这里 $\frac{m}{1} = m$, 两个有理数 $\frac{m}{n}$ 和 $\frac{p}{q}$ 相等当且仅当 $mq = np$. 有理数集对加法、减法、乘法和除法运算封闭.

有理数的四则运算

- 四则运算

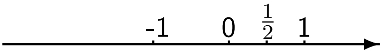
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}, \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

- 满足加（乘）法交换律，加（乘）法结合律，分配率.

数轴

- 取定原点、方向和单位长度，建立数轴.

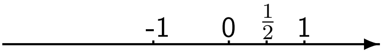


取单位长度为 1，单位长度 n 等分，得 $\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n}$ 的 m 倍即为 $\frac{m}{n}$.

- 有理数在数轴上稠密（由于任意两个有理数的中点都是有理数）。
- 存在不能用有理数度量的线段（不可公度线段）（Pythagoras，前584-500）。即数轴上存在一点，它到原点的距离不是有理数，从而有理数不能充满整个数轴。

数轴

- 取定原点、方向和单位长度，建立数轴.

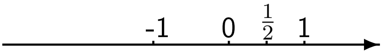


取单位长度为 1，单位长度 n 等分，得 $\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n}$ 的 m 倍即为 $\frac{m}{n}$.

- 有理数在数轴上稠密（由于任意两个有理数的中点都是有理数）。
- 存在不能用有理数度量的线段（不可公度线段）（Pythagoras，前584-500）。即数轴上存在一点，它到原点的距离不是有理数，从而有理数不能充满整个数轴。

数轴

- 取定原点、方向和单位长度，建立数轴.



取单位长度为 1，单位长度 n 等分，得 $\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n}$ 的 m 倍即为 $\frac{m}{n}$.

- 有理数在数轴上稠密（由于任意两个有理数的中点都是有理数）。
- 存在不能用有理数度量的线段（不可公度线段）（Pythagoras，前 584-500）。即数轴上存在一点，它到原点的距离不是有理数，从而有理数不能充满整个数轴。

- Pythagoras 定理：边长为 1 的正方形的对角线长度不是有理数。
  证明：若 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}, (m,n)=1$。则 $m^2=2n^2$，从而 m 必为偶数。设 $m=2l$，代入即得 $n^2=2l^2$，即 n 也是偶数，这与 m,n 互素矛盾。
- 有理数对应的点（有理点）没有充满数轴。Cantor 公理说的是实数对应的点布满整个数轴，数轴上有理点以外的点对应的数我们称为无理数。我们知道，有理数可以用十进制小数表示。下面用十进制小数来定义无理数。

有理数的性质

- Pythagoras 定理：边长为 1 的正方形的对角线长度不是有理数。
证明：若 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $(m, n) = 1$。则 $m^2 = 2n^2$，从而 m 必为偶数。设 $m = 2l$，代入即得 $n^2 = 2l^2$, 即 n 也是偶数，这与 m, n 互素矛盾。
- 有理数对应的点（有理点）没有充满数轴。Cantor 公理说的是实数对应的点布满整个数轴，数轴上有理点以外的点对应的数我们称为无理数。我们知道，有理数可以用十进制小数表示。下面用十进制小数来定义无理数。

- Pythagoras 定理：边长为 1 的正方形的对角线长度不是有理数。证明：若 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, $(m,n)=1$。则 $m^2=2n^2$，从而 m 必为偶数。设 $m=2l$，代入即得 $n^2=2l^2$, 即 n 也是偶数，这与 m,n 互素矛盾。
- 有理数对应的点（有理点）没有充满数轴。Cantor 公理说的是实数对应的点布满整个数轴，数轴上有理点以外的点对应的数我们称为无理数。我们知道，有理数可以用十进制小数表示。下面用十进制小数来定义无理数。

有理数的性质

- Pythagoras 定理：边长为 1 的正方形的对角线长度不是有理数。证明：若 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, $(m,n)=1$。则 $m^2=2n^2$，从而 m 必为偶数。设 $m=2l$，代入即得 $n^2=2l^2$, 即 n 也是偶数，这与 m,n 互素矛盾。
- 有理数对应的点（有理点）没有充满数轴。Cantor 公理说的是实数对应的点布满整个数轴，数轴上有理点以外的点对应的数我们称为无理数。我们知道，有理数可以用十进制小数表示。下面用十进制小数来定义无理数。

十进制小数

- 十进制小数：数轴上的点都可表示为 $x = m.a_1a_2a_3\cdots$，其中 $m \in \mathbb{Z}$，$a_k \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$。事实上，存在唯一的整数 m 使得 $x \in [m, m+1)$，存在唯一的 a_1，使得 $x \in [m.a_1, m.a_1 + 0.1)$，存在唯一的 a_2 使得 $x \in [m.a_1a_2, m.a_1a_2 + 0.01)\cdots$. 对有理数 $x = \frac{p}{q} = m + \frac{r}{q}$，$0 \leq r < q$，$a_1$ 为 $10r$ 除以 q 的商 (此时 $a_1q \leq 10r < a_1q + q$，$\frac{a_1}{10} \leq \frac{r}{q} < \frac{a_1}{10} + 0.1$)，设余数为 r_1，$10r_1$ 除以 q 的商为 $a_2, \cdots$)。
- 数轴上的有理点的十进制展开是有限小数或无限循环小数。该结论反过来也成立。事实上对有理数，由于余数只有 $0, 1, 2, \cdots, q-1$，必定重复出现，从而是循环小数；反过来，利用等比级数的和公式，任何循环小数必为有理数。

十进制小数

- 十进制小数：数轴上的点都可表示为 $x = m.a_1a_2a_3\cdots$，其中 $m \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$。事实上，存在唯一的整数 m 使得 $x \in [m, m+1)$, 存在唯一的 a_1, 使得 $x \in [m.a_1, m.a_1 + 0.1)$, 存在唯一的 a_2 使得 $x \in [m.a_1a_2, m.a_1a_2 + 0.01)\cdots$. 对有理数 $x = \frac{p}{q} = m + \frac{r}{q}$, $0 \le r < q$，a_1 为 $10r$ 除以 q 的商 (此时 $a_1q \le 10r < a_1q + q$, $\frac{a_1}{10} \le \frac{r}{q} < \frac{a_1}{10} + 0.1$), 设余数为 r_1, $10r_1$ 除以 q 的商为 $a_2, \cdots$)。
- 数轴上的有理点的十进制展开是有限小数或无限循环小数。该结论反过来也成立。事实上对有理数，由于余数只有 $0, 1, 2, \cdots, q-1$, 必定重复出现，从而是循环小数；反过来，利用等比级数的和公式，任何循环小数必为有理数。

无理数

- 无限不循环小数称为无理数 (实轴上有理点以外的点对应的数为无理数), 有理数和无理数统称为实数. 例如：$\sqrt{2}$ 是无理数，类似可证 $\sqrt[n]{p}(n > 1,\ p$ 是素数) 是无理数.
- 上面定义本质上用到了无穷求和或极限. 利用该定义也不方便定义四则运算. Dedekind 和 Cantor 从有理数出发给出了实数的构造，再定义了实数的运算，且与有理数的运算相容.
- 历史注记：无理数很早就被使用，但很多数学家（如 Pascal, Newton，...）还认为 $\sqrt{2}$ 等只能作为几何量来理解，不能认为是数. 即使无理数的逻辑基础建立起来以后，还有数学家反对.

无理数

- 无限不循环小数称为无理数 (实轴上有理点以外的点对应的数为无理数), 有理数和无理数统称为实数. 例如：$\sqrt{2}$ 是无理数，类似可证 $\sqrt[n]{p}(n > 1, p$ 是素数) 是无理数.
- 上面定义本质上用到了无穷求和或极限. 利用该定义也不方便定义四则运算. Dedekind 和 Cantor 从有理数出发给出了实数的构造，再定义了实数的运算，且与有理数的运算相容.
- 历史注记：无理数很早就被使用，但很多数学家（如 Pascal, Newton，...）还认为 $\sqrt{2}$ 等只能作为几何量来理解，不能认为是数. 即使无理数的逻辑基础建立起来以后，还有数学家反对.

无理数

- 无限不循环小数称为无理数 (实轴上有理点以外的点对应的数为无理数), 有理数和无理数统称为实数. 例如：$\sqrt{2}$ 是无理数，类似可证 $\sqrt[n]{p}(n>1,\ p$ 是素数) 是无理数.
- 上面定义本质上用到了无穷求和或极限. 利用该定义也不方便定义四则运算. Dedekind 和 Cantor 从有理数出发给出了实数的构造，再定义了实数的运算，且与有理数的运算相容.
- 历史注记：无理数很早就被使用，但很多数学家（如 Pascal，Newton，...）还认为 $\sqrt{2}$ 等只能作为几何量来理解，不能认为是数. 即使无理数的逻辑基础建立起来以后，还有数学家反对.

实数的绝对值

- 定义：$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$
- 设 a, b, c 是任意实数，$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$.

证明：要证的不等式有下面两个不等式得出，

$$a - b = a - c + c - b \leq |a-c| + |c-b|$$

$$b - a = c - a + b - c \leq |a-c| + |c-b|.$$

- 设 $r > 0$, x 满足 $|x-a| < r$ 的充分必要条件是 $a - r < x < a + r$.

证明：$|x-a| < r$ 的充分必要条件是 $-r < x - a < r$，即 $a - r < x < a + r$.

实数的绝对值

- 定义：$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$
- 设 a, b, c 是任意实数，$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$.

  证明：要证的不等式有下面两个不等式得出，

$$a-b = a-c+c-b \leq |a-c| + |c-b|$$
$$b-a = c-a+b-c \leq |a-c| + |c-b|.$$

- 设 $r > 0$, x 满足 $|x-a| < r$ 的充分必要条件是 $a-r < x < a+r$.

  证明：$|x-a| < r$ 的充分必要条件是 $-r < x-a < r$，即 $a-r < x < a+r$.

实数的绝对值

- 定义：$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$
- 设 a, b, c 是任意实数，$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$.

  证明：要证的不等式有下面两个不等式得出，

$$a - b = a - c + c - b \leq |a-c| + |c-b|$$
$$b - a = c - a + b - c \leq |a-c| + |c-b|.$$

- 设 $r > 0$, x 满足 $|x-a| < r$ 的充分必要条件是 $a - r < x < a + r$.

  证明：$|x-a| < r$ 的充分必要条件是 $-r < x - a < r$，即 $a - r < x < a + r$.

实数的绝对值

- 定义：$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$
- 设 a, b, c 是任意实数，$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$.

  证明：要证的不等式有下面两个不等式得出，

$$a - b = a - c + c - b \leq |a-c| + |c-b|$$
$$b - a = c - a + b - c \leq |a-c| + |c-b|.$$

- 设 $r > 0$, x 满足 $|x-a| < r$ 的充分必要条件是 $a - r < x < a + r$.

  证明：$|x-a| < r$ 的充分必要条件是 $-r < x - a < r$，即 $a - r < x < a + r$.

两个重要的无理数

- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 是无理数 (这里规定 $0! = 1$).

  证明: 若 e 是有理数， $e = \frac{p}{q}$, 两边同乘 $q!$ 得

  $$q!e = p \cdot (q-1)! = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$$

  由于 $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots = 1$, 右边不是整数.

- π 是无理数.

两个重要的无理数

- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 是无理数 (这里规定 $0! = 1$).

  证明: 若 e 是有理数, $e = \frac{p}{q}$, 两边同乘 $q!$ 得

$$q!e = p \cdot (q-1)! = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$$

  由于 $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots = 1$, 右边不是整数.

- π 是无理数.

两个重要的无理数

- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 是无理数 (这里规定 $0! = 1$).

  证明: 若 e 是有理数, $e = \frac{p}{q}$, 两边同乘 $q!$ 得

  $$q!e = p \cdot (q-1)! = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$$

  由于 $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots = 1$, 右边不是整数.

- π 是无理数.

实数的完备性 (Cantor 公理)：实数与数轴上的点一一对应（实数域布满整个数轴，没有空隙）. 实数完备性的刻画：

- 实数中的任意单调有界序列有极限. (单调递增序列 ($a_{n+1} \geq a_n$) 和单调递减序列 ($a_{n+1} \leq a_n$) 统称为单调序列，若存在 $M > 0$, 使得 $|a_n| \leq M$, 则称 a_n 有界).
  例：$3.1, 3.14, 3.141, \cdots$ 是递增有界序列，极限是 π.
- 区间套原理：区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$. 则区间列的交集非空, 即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \phi. \qquad (\text{这里} \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{表示区间列的交集})$$

实数的完备性 (Cantor 公理)：实数与数轴上的点一一对应（实数域布满整个数轴，没有空隙）. 实数完备性的刻画：

- 实数中的任意单调有界序列有极限. (单调递增序列 $(a_{n+1} \geq a_n)$ 和单调递减序列 $(a_{n+1} \leq a_n)$ 统称为单调序列，若存在 $M > 0$, 使得 $|a_n| \leq M$, 则称 a_n 有界).
  例：$3.1, 3.14, 3.141, \cdots$ 是递增有界序列，极限是 π.
- 区间套原理：区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$. 则区间列的交集非空, 即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \phi. \qquad (\text{这里} \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{表示区间列的交集})$$

实数的运算

- 实数的四则运算. 如 a, b 是实数，取有理数列 a_n, b_n，使得 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则以后我们可以证明 $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$，$\frac{a_n}{b_n}$ 也是收敛列 (即 Cauchy 列)，定义 $a \pm b, ab, \frac{a}{b}$ 分别是 $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$，$\frac{a_n}{b_n}$ 的极限 (且与 a_n, b_n 的选取无关)。利用有理数的四则运算规律, 可以得到实数的四则运算规律。
- $a > 0$, $a^{\frac{1}{n}}$ 的定义. $a^{\frac{1}{n}} = \sup\{x \geq 0 | x^n \leq a\}$。(参见《陶哲轩实分析》)
- $a > 0$, a^b 的定义: 取有理数列 b_n 使得 $b_n \to b$。则 a^{b_n} 是收敛列, a^b 定义为该序列的极限。
- a^b 满足的性质： $a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$, $(a_1 a_2)^b = (a_1)^b (a_2)^b$。

实数的运算

- 实数的四则运算. 如 a, b 是实数，取有理数列 a_n, b_n，使得 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则以后我们可以证明 $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$，$\frac{a_n}{b_n}$ 也是收敛列 (即 Cauchy 列)，定义 $a \pm b, ab, \frac{a}{b}$ 分别是 $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$，$\frac{a_n}{b_n}$ 的极限 (且与 a_n, b_n 的选取无关)。利用有理数的四则运算规律, 可以得到实数的四则运算规律。
- $a > 0$, $a^{\frac{1}{n}}$ 的定义. $a^{\frac{1}{n}} = \sup\{x \geq 0 | x^n \leq a\}$。(参见《陶哲轩实分析》)
- $a > 0$, a^b 的定义: 取有理数列 b_n 使得 $b_n \to b$。则 a^{b_n} 是收敛列, a^b 定义为该序列的极限。
- a^b 满足的性质：$a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$, $(a_1 a_2)^b = (a_1)^b (a_2)^b$。

实数的运算

- 实数的四则运算. 如 a, b 是实数，取有理数列 a_n, b_n，使得 $a_n \to a$, $b_n \to b$, 则以后我们可以证明 $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$，$\frac{a_n}{b_n}$ 也是收敛列 (即 Cauchy 列)，定义 $a \pm b, ab, \frac{a}{b}$ 分别是 $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$，$\frac{a_n}{b_n}$ 的极限 (且与 a_n, b_n 的选取无关)。利用有理数的四则运算规律, 可以得到实数的四则运算规律。
- $a > 0$, $a^{\frac{1}{n}}$ 的定义. $a^{\frac{1}{n}} = \sup\{x \geq 0 | x^n \leq a\}$。(参见《陶哲轩实分析》)
- $a > 0$, a^b 的定义: 取有理数列 b_n 使得 $b_n \to b$。则 a^{b_n} 是收敛列, a^b 定义为该序列的极限。
- a^b 满足的性质：$a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1 + b_2}$, $(a_1 a_2)^b = (a_1)^b (a_2)^b$。

函数的历史

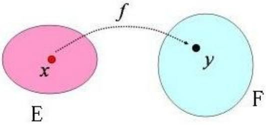
- 16 和 17 世纪，自然科学转向对各种“运动”进行研究，对运动规律的描述，开始是用语言和文字描述的。随着代数符号化的扩展，把对运动规律的文字叙述表述为符号形式，导致函数概念的产生。通过对各种运动的研究，引进了大量函数表示运动规律。
- Leibniz 于 1673 年最早用到”函数”一词，Euler 于 1734 年引进符号 $f(x)$。十八世纪以前数学家大多认为函数必须是由一个解析表达式给出，后来 Euler 和 Lagrange 允许函数在不同的区域有不同的表达式。1834 年，Dirichlet 给出沿用至今的函数定义：对任意 x，有完全确定的值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数。集合论产生以后，人们用集合之间的映射来定义函数。

函数的历史

- 16 和 17 世纪，自然科学转向对各种“运动”进行研究，对运动规律的描述，开始是用语言和文字描述的。随着代数符号化的扩展，把对运动规律的文字叙述表述为符号形式，导致函数概念的产生。通过对各种运动的研究，引进了大量函数表示运动规律。
- Leibniz 于 1673 年最早用到" 函数" 一词，Euler 于 1734 年引进符号 $f(x)$。十八世纪以前数学家大多认为函数必须是由一个解析表达式给出，后来 Euler 和 Lagrange 允许函数在不同的区域有不同的表达式。1834 年，Dirichlet 给出沿用至今的函数定义：对任意 x, 有完全确定的值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数。集合论产生以后，人们用集合之间的映射来定义函数。

变量与映射

- 变量：可以取不同值的量，用一个符号来表示。如："变量 x 在 X 中取值"，即 x 不是一个固定的值，在 X 中取值。
- 映射：E, F 是两个集合，如果对任意 $x \in E$, 都有唯一确定的 $y \in F$ 与之对应，记 $y = f(x)$。则称 f 是集合 E 到 F 的一个映射，记为 $f : E \to F$。记像集 $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$。

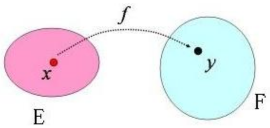


$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

- 注：上面定义中，x 是取值于 E 的变量，y 是取值于 F 的变量，y 的取值由 x 的取值决定，因此，x 称为自变量，y 称为因变量。

变量与映射

- 变量：可以取不同值的量，用一个符号来表示。如："变量 x 在 X 中取值"，即 x 不是一个固定的值，在 X 中取值。
- 映射：E, F 是两个集合，如果对任意 $x \in E$, 都有唯一确定的 $y \in F$ 与之对应，记 $y = f(x)$。则称 f 是集合 E 到 F 的一个映射，记为 $f: E \to F$。记像集 $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$。

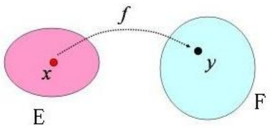


$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

- 注：上面定义中，x 是取值于 E 的变量，y 是取值于 F 的变量，y 的取值由 x 的取值决定，因此，x 称为自变量，y 称为因变量。

变量与映射

- 变量：可以取不同值的量，用一个符号来表示。如："变量 x 在 X 中取值"，即 x 不是一个固定的值，在 X 中取值。
- 映射：E, F 是两个集合，如果对任意 $x \in E$，都有唯一确定的 $y \in F$ 与之对应，记 $y = f(x)$。则称 f 是集合 E 到 F 的一个映射，记为 $f: E \to F$。记像集 $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$。

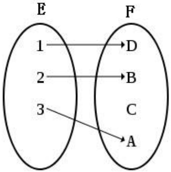


$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

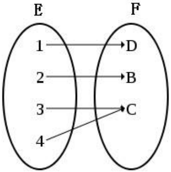
- 注：上面定义中，x 是取值于 E 的变量，y 是取值于 F 的变量，y 的取值由 x 的取值决定，因此，x 称为自变量，y 称为因变量。

单射和满射

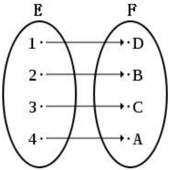
- 映射 $f\colon E \to F$. 若对 E 中的任意两个不同的元 x_1, x_2, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射; 若 $f(E) = F$, 则称 f 为满射; 若 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 是双射。



单射



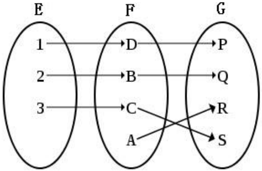
满射



双射

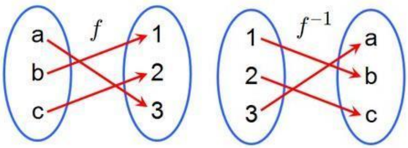
映射的复合

- 映射的复合：有两个映射 $f\colon E\to F$，$g: F_1\to G$, 其中 $f(E)\subset F_1$，对任意 $x\in E$，存在唯一的 $z=g(f(x))\in G$ 与之对应，这样建立了一个从 E 到 G 的映射，该映射记为 $g\circ f$, 称为映射 f 与 g 的复合。



映射的复合

- 逆映射：设映射 $f: E \to F$ 是一个双射，则对任意 $y \in F$，存在唯一的 $x \in E$，使得 $f(x) = y$。记 $x = f^{-1}(y)$，则 f^{-1} 是 F 到 E 的映射，称该映射为 f 的逆映射。



映射f和它的逆映射

函数的定义

- 定义：设 $X\subset\mathbb{R}$, $f: X\to\mathbb{R}, x\to y$ 是一个映射，则称 $y=f(x)$ 是一个（一元）函数，X 称为 f 的定义域，$f(X)$ 称为 f 的值域，x 称为自变量，y 称为因变量。
- 注 (书上的定义): 设 $X, Y\subset\mathbb{R}$, $f: X\to Y, x\to y$ 是一个映射，则称 $y=f(x)$ 是一个（一元）函数。
- 函数定义域的确定：如果函数 f 由数学表达式给出，它的定义域一般规定为使表达式有意义的 x 的全体。如果函数是从实际问题中提出，则定义域由实际问题决定。
- 平面中的点集 $\{(x, f(x))|x\in X\}$ 称为 f 的图像。

函数的定义

- 定义：设 $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}, x \to y$ 是一个映射，则称 $y = f(x)$ 是一个（一元）函数，X 称为 f 的定义域，$f(X)$ 称为 f 的值域，x 称为自变量，y 称为因变量。
- 注 (书上的定义): 设 $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \to Y, x \to y$ 是一个映射，则称 $y = f(x)$ 是一个（一元）函数。
- 函数定义域的确定：如果函数 f 由数学表达式给出，它的定义域一般规定为使表达式有意义的 x 的全体。如果函数是从实际问题中提出，则定义域由实际问题决定。
- 平面中的点集 $\{(x, f(x)) | x \in X\}$ 称为 f 的图像。

函数的定义

- 定义：设 $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}, x \to y$ 是一个映射，则称 $y = f(x)$ 是一个（一元）函数，X 称为 f 的定义域，$f(X)$ 称为 f 的值域，x 称为自变量，y 称为因变量。
- 注 (书上的定义): 设 $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \to Y, x \to y$ 是一个映射，则称 $y = f(x)$ 是一个（一元）函数。
- 函数定义域的确定：如果函数 f 由数学表达式给出，它的定义域一般规定为使表达式有意义的 x 的全体。如果函数是从实际问题中提出，则定义域由实际问题决定。
- 平面中的点集 $\{(x, f(x)) | x \in X\}$ 称为 f 的图像。

函数的定义

- 定义：设 $X\subset\mathbb{R}$, $f\colon X\to\mathbb{R}, x\to y$ 是一个映射，则称 $y=f(x)$ 是一个（一元）函数，X 称为 f 的定义域，$f(X)$ 称为 f 的值域，x 称为自变量，y 称为因变量。
- 注 (书上的定义): 设 $X,Y\subset\mathbb{R}$, $f\colon X\to Y, x\to y$ 是一个映射，则称 $y=f(x)$ 是一个（一元）函数。
- 函数定义域的确定：如果函数 f 由数学表达式给出，它的定义域一般规定为使表达式有意义的 x 的全体。如果函数是从实际问题中提出，则定义域由实际问题决定。
- 平面中的点集 $\{(x,f(x))|x\in X\}$ 称为 f 的图像。

复合函数与反函数

- 函数的复合：函数 f 的值域是 g 的定义域的子集，f 与 g 的复合即为它们作为映射的复合。例：$y=|x|$ 是 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2$ 的复合。
- 反函数：函数 f 作为映射是单射，则 $f:X\to f(X)$ 是双射，它的逆映射 $f^{-1}:f(X)\to X$ 称为 f 的反函数。
  例：$y=\sqrt{x}$ 是 $y=x^2,\ x\in[0,+\infty)$ 的反函数；$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x,\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数。

复合函数与反函数

- 函数的复合：函数 f 的值域是 g 的定义域的子集，f 与 g 的复合即为它们作为映射的复合。例：$y = |x|$ 是 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x^2$ 的复合。
- 反函数：函数 f 作为映射是单射，则 $f : X \to f(X)$ 是双射，它的逆映射 $f^{-1} : f(X) \to X$ 称为 f 的反函数。

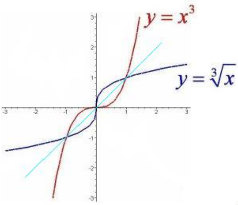
例：$y = \sqrt{x}$ 是 $y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 的反函数；$y = \arcsin x$ 是 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数。

复合函数与反函数

- 函数的复合：函数 f 的值域是 g 的定义域的子集，f 与 g 的复合即为它们作为映射的复合。例：$y=|x|$ 是 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2$ 的复合。
- 反函数：函数 f 作为映射是单射，则 $f: X \to f(X)$ 是双射，它的逆映射 $f^{-1}: f(X) \to X$ 称为 f 的反函数。
  例：$y=\sqrt{x}$ 是 $y=x^2$, $x \in [0,+\infty)$ 的反函数；$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数。

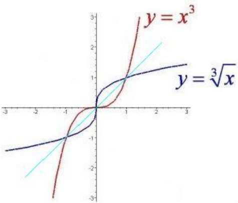
反函数的图像

- 函数 f 的反函数 f^{-1} 存在，则 f 与 f^{-1} 的图像关于直线 $y=x$ 对称。
- 证明：若 (a,b) 是 f 的图像中的点，则 $b=f(a)$，即 $a=f^{-1}(b)$，则 (b,a) 是 f^{-1} 的图像中的点。



反函数的图像

- 函数 f 的反函数 f^{-1} 存在，则 f 与 f^{-1} 的图像关于直线 $y=x$ 对称。
- 证明：若 (a,b) 是 f 的图像中的点，则 $b=f(a)$，即 $a=f^{-1}(b)$，则 (b,a) 是 f^{-1} 的图像中的点。



函数定义的注记

- 函数可以由一个或多个公式表示，也可以没有公式。例如
  - $E \subset \mathbb{R}$, E 的特征函数：$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$。特别的, Dirichlet 函数为 $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$。
  - 符号函数：$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
  - 股票价格随时间的变化函数。
  - 序列（数列）是被排成一列的实数. 设 a_n 是任意序列，定义映射 $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$. 因此序列可看成 $\mathbb{Z}^+$ 上的函数。

函数定义的注记

- 函数可以由一个或多个公式表示，也可以没有公式。例如
  - $E\subset\mathbb{R}$, E 的特征函数：$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$。特别的, Dirichlet 函数为 $D(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$。
  - 符号函数：$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$
  - 股票价格随时间的变化函数。
  - 序列（数列）是被排成一列的实数. 设 a_n 是任意序列，定义映射 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$, $f(n)=a_n$. 因此序列可看成 $\mathbb{Z}^+$ 上的函数。

函数定义的注记

- 函数可以由一个或多个公式表示，也可以没有公式。例如
  - $E \subset \mathbb{R}$, E 的特征函数：$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$。特别的, Dirichlet 函数为 $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$。
  - 符号函数：$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
  - 股票价格随时间的变化函数。
  - 序列（数列）是被排成一列的实数. 设 a_n 是任意序列，定义映射 $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$. 因此序列可看成 $\mathbb{Z}^+$ 上的函数。

函数定义的注记

- 函数可以由一个或多个公式表示，也可以没有公式。例如
  - $E \subset \mathbb{R}$, E 的特征函数：$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$。特别的, Dirichlet 函数为 $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$。
  - 符号函数：$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
  - 股票价格随时间的变化函数。
  - 序列（数列）是被排成一列的实数. 设 a_n 是任意序列，定义映射 $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$. 因此序列可看成 $\mathbb{Z}^+$ 上的函数。

- 有界函数

  函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$, 存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \le M$ 对所有 $x \in X$ 成立 (或者：存在 M, N, 使得 $N \le f(x) \le M$ 对所有 $x \in X$ 成立)，则称 f 是 X 上的有界函数。

- 单调函数

  函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 满足：若对 X 中任意 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \le f(x_2)$ 则称 f 是单调增函数；

  若对 X 中任意 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 f 是严格单调增函数。

  单调减函数和严格单调减函数可类似定义。单调增函数和单调减函数统称为单调函数。

有界函数与单调函数

- 有界函数
  函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$, 存在 $M>0$ 使得 $|f(x)|\le M$ 对所有 $x\in X$ 成立 (或者：存在 M, N, 使得 $N\le f(x)\le M$ 对所有 $x\in X$ 成立)，则称 f 是 X 上的有界函数。
- 单调函数
  函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 满足：若对 X 中任意 $x_1<x_2$, 有 $f(x_1)\le f(x_2)$ 则称 f 是单调增函数；
  若对 X 中任意 $x_1<x_2$, 有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 f 是严格单调增函数。
  单调减函数和严格单调减函数可类似定义。单调增函数和单调减函数统称为单调函数。

函数的奇偶性与周期性

- 函数的奇偶性：若 f 的定义域关于 0 对称. 若对任意的 $x \in X$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 f 是偶函数；若对任意的 $x \in X$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 f 是奇函数。
- 函数的周期性：设 f 是 $\mathbb{R}$ 上定义的函数. 若存在 $T > 0$, 使得对任意 x, 有 $f(x + T) = f(x)$，则称 f 是以 T 为周期的函数. (若 T 是 f 的周期，则 nT 也是 f 的周期. 若 f 有最小正周期，有时称最小正周期为 f 的周期)。
- 例：$\sin 2x$ 是周期函数，最小正周期是 π. $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 以有理数为周期。

函数的奇偶性与周期性

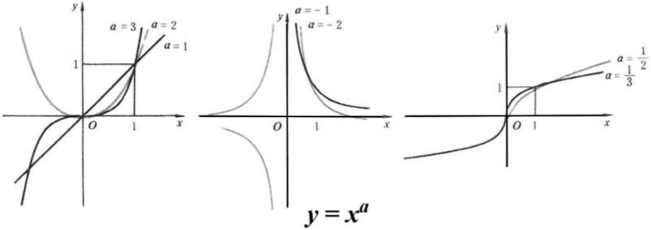
- 函数的奇偶性：若 f 的定义域关于 0 对称. 若对任意的 $x \in X$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 f 是偶函数；若对任意的 $x \in X$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 f 是奇函数。
- 函数的周期性：设 f 是 $\mathbb{R}$ 上定义的函数. 若存在 $T > 0$, 使得对任意 x, 有 $f(x+T) = f(x)$，则称 f 是以 T 为周期的函数. (若 T 是 f 的周期，则 nT 也是 f 的周期. 若 f 有最小正周期，有时称最小正周期为 f 的周期)。
- 例：$\sin 2x$ 是周期函数，最小正周期是 π. $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 以有理数为周期。

函数的奇偶性与周期性

- 函数的奇偶性：若 f 的定义域关于 0 对称. 若对任意的 $x \in X$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 f 是偶函数；若对任意的 $x \in X$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 f 是奇函数。
- 函数的周期性：设 f 是 $\mathbb{R}$ 上定义的函数. 若存在 $T > 0$, 使得对任意 x, 有 $f(x+T) = f(x)$，则称 f 是以 T 为周期的函数. (若 T 是 f 的周期，则 nT 也是 f 的周期. 若 f 有最小正周期，有时称最小正周期为 f 的周期)。
- 例：$\sin 2x$ 是周期函数，最小正周期是 π. $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 以有理数为周期。

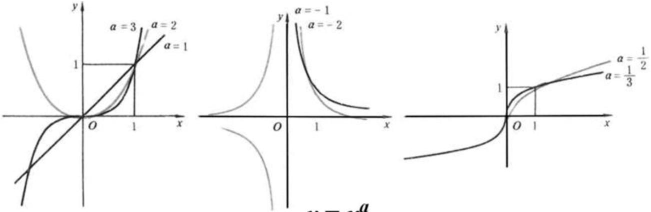
基本初等函数 1

- 常数函数：$y = c$
- 幂函数：$y = x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.



基本初等函数 1

- 常数函数：$y = c$
- 幂函数：$y = x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$.



$y = x^a$

幂函数的性质

- $\alpha > 0$ 时，$y = x^\alpha$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增；$\alpha < 0$ 时，$y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减.
- $\alpha > 0$ 时，$y = x^\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是双射；$\alpha < 0$ 时，$y = x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是双射.
- $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$.

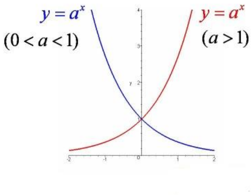
幂函数的性质

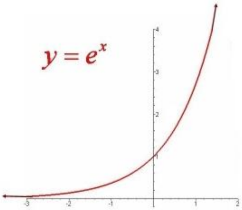
- $\alpha > 0$ 时，$y = x^\alpha$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增；$\alpha < 0$ 时，$y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减.
- $\alpha > 0$ 时，$y = x^\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是双射；$\alpha < 0$ 时，$y = x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是双射.
- $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$.

幂函数的性质

- $\alpha > 0$ 时，$y = x^\alpha$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调增；$\alpha < 0$ 时，$y = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减.
- $\alpha > 0$ 时，$y = x^\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是双射；$\alpha < 0$ 时，$y = x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是双射.
- $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$.

- 指数函数：$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

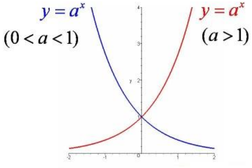


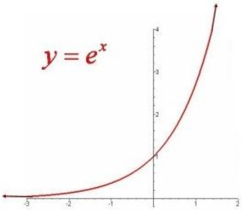


- 性质：严格单调，$\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 的双射.
  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

指数函数

- 指数函数：$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

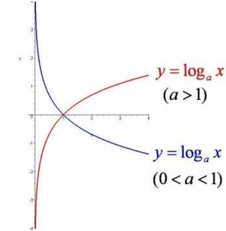


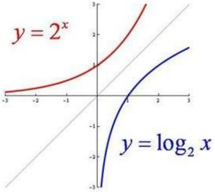


- 性质：严格单调，$\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 的双射.
  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

对数函数

- 对数函数：$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

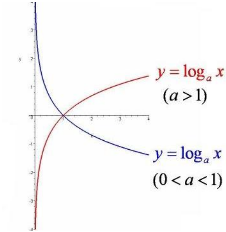


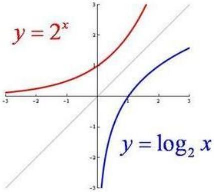


- 性质：是 $y = a^x$ 的反函数；$a = e$ 时，记为

$$\ln x = \log_e x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

- 对数函数：$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$



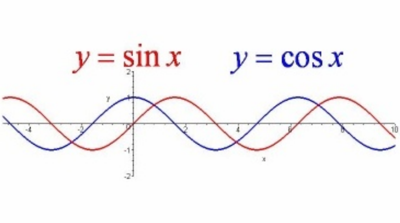


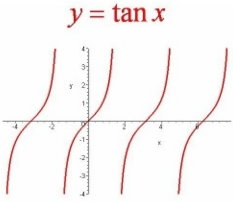
- 性质：是 $y = a^x$ 的反函数；$a = e$ 时，记为

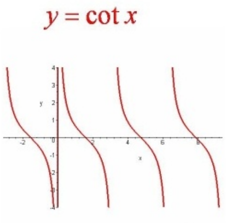
$$\ln x = \log_e x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

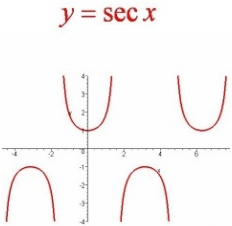
三角函数

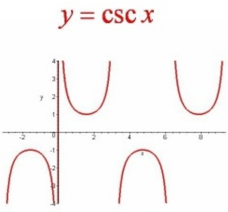
- 三角函数：$\sin x, \cos x$， $\tan x, \cot x$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.



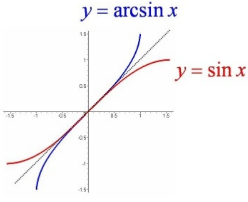


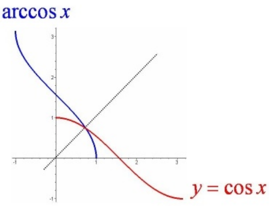


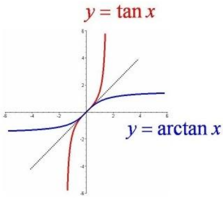


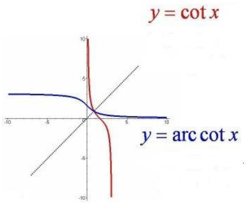


- 反三角函数：$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.









初等函数 1

- 定义：基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算所得的函数称为初等函数。
- 例：多项式函数：$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.
- 例：有理函数：$y = \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$.
- 双曲函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

则有 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

- 定义：基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算所得的函数称为初等函数。
- 例：多项式函数：$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.
- 例：有理函数：$y = \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$.
- 双曲函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

则有 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

- 定义: 基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算所得的函数称为初等函数。
- 例：多项式函数：$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.
- 例：有理函数：$y = \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$.
- 双曲函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

则有 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

初等函数 1

- 定义：基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算所得的函数称为初等函数。
- 例：多项式函数：$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.
- 例：有理函数：$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$.
- 双曲函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

则有 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

初等函数 2

- 例：$|x| = \sqrt{x^2}$ 是初等函数.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ 是初等函数。
- 例：符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数。
- 例：Dirichlet 函数 $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ 不是初等函数。

初等函数 2

- 例：$|x| = \sqrt{x^2}$ 是初等函数.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 是初等函数。
- 例：符号函数 $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数。
- 例：Dirichlet 函数 $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ 不是初等函数。

初等函数 2

- 例：$|x| = \sqrt{x^2}$ 是初等函数.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 是初等函数。
- 例：符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数。
- 例：Dirichlet 函数 $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ 不是初等函数。

序列

- 序列（数列）和子序列：序列是被排成一列的实数。设 a_n 是一个序列，从中依次抽取无穷项组成的新序列称为 $\{a_n\}$ 的子序列（或子列）。一般子列可记为 a_{n_k}，其中 $n_1 < n_2 < \cdots$，如：a_{2k-1} 表示子序列 $a_1, a_3, a_5, \cdots$。
- 有界序列：若存在 M，使得 $|a_n| \leq M$，则称 a_n 有界。
- 单调序列：若 $a_{n+1} \geq a_n$ 对任意的 n 成立，则称 a_n 是递增序列，类似可定义递减序列。递增序列和递减序列统称为单调序列。
- 例：$\{\frac{1}{n}\}$，$\{(-1)^n\frac{1}{n}\}$，$\{\cos n\pi\}$，$\{2^n\}$。

序列

- 序列（数列）和子序列: 序列是被排成一列的实数。设 a_n 是一个序列, 从中依次抽取无穷项组成的新序列称为 $\{a_n\}$ 的子序列（或子列）。一般子列可记为 a_{n_k}, 其中 $n_1 < n_2 < \cdots$，如：a_{2k-1} 表示子序列 $a_1, a_3, a_5, \cdots$。
- 有界序列：若存在 M, 使得 $|a_n| \leq M$, 则称 a_n 有界。
- 单调序列：若 $a_{n+1} \geq a_n$ 对任意的 n 成立，则称 a_n 是递增序列，类似可定义递减序列。递增序列和递减序列统称为单调序列。
- 例：$\{\frac{1}{n}\}$, $\{(-1)^n\frac{1}{n}\}$, $\{\cos n\pi\}$, $\{2^n\}$。

序列

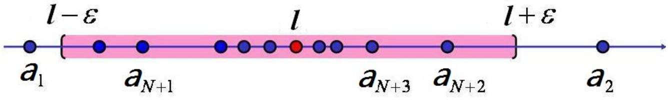
- 序列（数列）和子序列: 序列是被排成一列的实数。设 a_n 是一个序列, 从中依次抽取无穷项组成的新序列称为 $\{a_n\}$ 的子序列（或子列）。一般子列可记为 a_{n_k}, 其中 $n_1 < n_2 < \cdots$，如：a_{2k-1} 表示子序列 $a_1, a_3, a_5, \cdots$。
- 有界序列：若存在 M, 使得 $|a_n| \le M$, 则称 a_n 有界。
- 单调序列：若 $a_{n+1} \ge a_n$ 对任意的 n 成立，则称 a_n 是递增序列，类似可定义递减序列。递增序列和递减序列统称为单调序列。
- 例：$\{\frac{1}{n}\}, \{(-1)^n\frac{1}{n}\}, \{\cos n\pi\}, \{2^n\}$。

序列

- 序列（数列）和子序列：序列是被排成一列的实数。设 a_n 是一个序列，从中依次抽取无穷项组成的新序列称为 $\{a_n\}$ 的子序列（或子列）。一般子列可记为 a_{n_k}，其中 $n_1 < n_2 < \cdots$，如：a_{2k-1} 表示子序列 $a_1, a_3, a_5, \cdots$。
- 有界序列：若存在 M，使得 $|a_n| \leq M$，则称 a_n 有界。
- 单调序列：若 $a_{n+1} \geq a_n$ 对任意的 n 成立，则称 a_n 是递增序列，类似可定义递减序列。递增序列和递减序列统称为单调序列。
- 例：$\{\frac{1}{n}\}$，$\{(-1)^n\frac{1}{n}\}$，$\{\cos n\pi\}$，$\{2^n\}$。

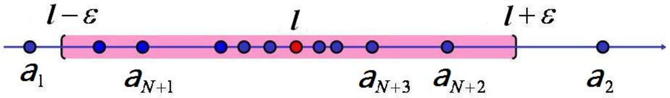
序列极限定义 1

- a_n 是给定数列, "l 为数列 a_n 的极限" 描述性定义:
  当 n 无限增大时，a_n 无限接近某个数 l
  $\rightarrow$ 当 n 足够大时，a_n 任意接近某个数 l
  $\rightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 当 n 足够大时，$|a_n - l| < \epsilon$
  $\rightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$
- 极限的 $\epsilon - N$ 语言定义：a_n 是给定数列. 存在一个实数 l, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$, 则称 a_n 以 l 为极限，或 "当 n 趋向无穷时，a_n 趋于 l"，或 "a_n 收敛到 l"。记着 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 此时称 a_n 的极限存在，或称 a_n 收敛。



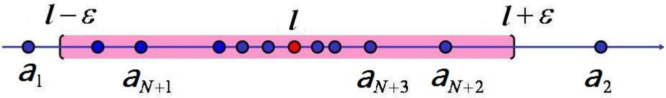
序列极限定义 1

- a_n 是给定数列, "l 为数列 a_n 的极限" 描述性定义:
  当 n 无限增大时，a_n 无限接近某个数 l
  $\rightarrow$ 当 n 足够大时，a_n 任意接近某个数 l
  $\rightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 当 n 足够大时，$|a_n - l| < \epsilon$
  $\rightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$
- 极限的 $\epsilon - N$ 语言定义：a_n 是给定数列. 存在一个实数 l, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$, 则称 a_n 以 l 为极限，或 "当 n 趋向无穷时，a_n 趋于 l"，或 "a_n 收敛到 l"。记着 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 此时称 a_n 的极限存在，或称 a_n 收敛。



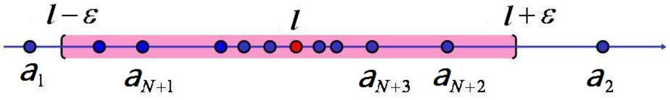
序列极限定义 1

- a_n 是给定数列, "l 为数列 a_n 的极限" 描述性定义:
  当 n 无限增大时，a_n 无限接近某个数 l
  $\to$ 当 n 足够大时，a_n 任意接近某个数 l
  $\to$ 对任意 $\epsilon > 0$, 当 n 足够大时，$|a_n - l| < \epsilon$
  $\to$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$
- 极限的 $\epsilon - N$ 语言定义：a_n 是给定数列. 存在一个实数 l, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$, 则称 a_n 以 l 为极限，或 “当 n 趋向无穷时，a_n 趋于 l”，或 “a_n 收敛到 l”。记着 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 此时称 a_n 的极限存在，或称 a_n 收敛。



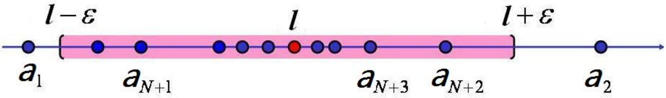
序列极限定义 1

- a_n 是给定数列，"l 为数列 a_n 的极限" 描述性定义：
  当 n 无限增大时，a_n 无限接近某个数 l
  $\to$ 当 n 足够大时，a_n 任意接近某个数 l
  $\to$ 对任意 $\epsilon > 0$，当 n 足够大时，$|a_n - l| < \epsilon$
  $\to$ 对任意 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$
- 极限的 $\epsilon - N$ 语言定义：a_n 是给定数列．存在一个实数 l，对任意 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$，则称 a_n 以 l 为极限，或 "当 n 趋向无穷时，a_n 趋于 l"，或 "a_n 收敛到 l"。记着 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$，此时称 a_n 的极限存在，或称 a_n 收敛。



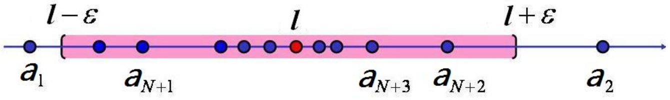
序列极限定义 1

- a_n 是给定数列, "l 为数列 a_n 的极限" 描述性定义:
  当 n 无限增大时, a_n 无限接近某个数 l
  $\to$ 当 n 足够大时, a_n 任意接近某个数 l
  $\to$ 对任意 $\epsilon > 0$, 当 n 足够大时, $|a_n - l| < \epsilon$
  $\to$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - l| < \epsilon$
- 极限的 $\epsilon - N$ 语言定义: a_n 是给定数列. 存在一个实数 l, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - l| < \epsilon$, 则称 a_n 以 l 为极限, 或"当 n 趋向无穷时, a_n 趋于 l", 或"a_n 收敛到 l"。记着 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 此时称 a_n 的极限存在, 或称 a_n 收敛。



序列极限定义 1

- a_n 是给定数列, "l 为数列 a_n 的极限" 描述性定义:
  当 n 无限增大时, a_n 无限接近某个数 l
  $\to$ 当 n 足够大时, a_n 任意接近某个数 l
  $\to$ 对任意 $\epsilon > 0$, 当 n 足够大时, $|a_n - l| < \epsilon$
  $\to$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - l| < \epsilon$
- 极限的 $\epsilon - N$ 语言定义: a_n 是给定数列. 存在一个实数 l, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - l| < \epsilon$, 则称 a_n 以 l 为极限, 或 "当 n 趋向无穷时, a_n 趋于 l", 或 "a_n 收敛到 l"。记着 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 此时称 a_n 的极限存在, 或称 a_n 收敛。



序列极限定义 2

- 注: a_n 趋于 $l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 序列 a_n 只有有限项落在区间 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 外。
- 例: $a_n = \frac{1}{n}$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N(可取 $[\frac{1}{\epsilon}]+1$), 当 $n > N$ 时, $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$。
- 此定义用来验证, l 由观察得出. 若 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 用定义没法判断收敛性。
- 要验证 a_n 以 l 为极限, 只要对任意 $\epsilon > 0$, 找出满足条件 "$n > N$ 时 $|a_n - l| < \epsilon$" 的 N。
- ϵ 首先任意给定（可以限制 ϵ 比较小, 如 $0 < \epsilon < 1$）, N 随后给出, 它一般和 ϵ 有关, 也不是唯一的, 一般 ϵ 越小, N 越大。

序列极限定义 2

- 注: a_n 趋于 $l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 序列 a_n 只有有限项落在区间 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 外。
- 例: $a_n = \frac{1}{n}$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N(可取 $[\frac{1}{\epsilon}]+1$), 当 $n > N$ 时, $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$。
- 此定义用来验证, l 由观察得出. 若 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 用定义没法判断收敛性。
- 要验证 a_n 以 l 为极限, 只要对任意 $\epsilon > 0$, 找出满足条件 "$n > N$ 时 $|a_n - l| < \epsilon$" 的 N。
- ϵ 首先任意给定（可以限制 ϵ 比较小, 如 $0 < \epsilon < 1$）, N 随后给出, 它一般和 ϵ 有关, 也不是唯一的, 一般 ϵ 越小, N 越大。

序列极限定义 2

- 注: a_n 趋于 $l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 序列 a_n 只有有限项落在区间 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 外。
- 例: $a_n = \frac{1}{n}$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N(可取 $[\frac{1}{\epsilon}]+1$), 当 $n > N$ 时, $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$。
- 此定义用来验证, l 由观察得出. 若 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 用定义没法判断收敛性。
- 要验证 a_n 以 l 为极限, 只要对任意 $\epsilon > 0$, 找出满足条件“$n > N$ 时 $|a_n - l| < \epsilon$”的 N。
- ϵ 首先任意给定（可以限制 ϵ 比较小, 如 $0 < \epsilon < 1$）, N 随后给出, 它一般和 ϵ 有关, 也不是唯一的, 一般 ϵ 越小, N 越大。

序列极限定义 2

- 注: a_n 趋于 $l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 序列 a_n 只有有限项落在区间 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 外。
- 例: $a_n = \frac{1}{n}$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N(可取 $[\frac{1}{\epsilon}] + 1$), 当 $n > N$ 时, $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$。
- 此定义用来验证, l 由观察得出. 若 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 用定义没法判断收敛性。
- 要验证 a_n 以 l 为极限, 只要对任意 $\epsilon > 0$, 找出满足条件"$n > N$ 时 $|a_n - l| < \epsilon$"的 N。
- ϵ 首先任意给定（可以限制 ϵ 比较小, 如 $0 < \epsilon < 1$）, N 随后给出, 它一般和 ϵ 有关, 也不是唯一的, 一般 ϵ 越小, N 越大。

序列极限定义 2

- 注: a_n 趋于 $l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 序列 a_n 只有有限项落在区间 $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ 外。
- 例: $a_n = \frac{1}{n}$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N(可取 $[\frac{1}{\epsilon}] + 1$), 当 $n > N$ 时, $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$。
- 此定义用来验证, l 由观察得出. 若 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 用定义没法判断收敛性。
- 要验证 a_n 以 l 为极限, 只要对任意 $\epsilon > 0$, 找出满足条件 "$n > N$ 时 $|a_n - l| < \epsilon$" 的 N。
- ϵ 首先任意给定（可以限制 ϵ 比较小, 如 $0 < \epsilon < 1$）, N 随后给出, 它一般和 ϵ 有关, 也不是唯一的, 一般 ϵ 越小, N 越大。

序列极限定义 3

- $a_n \to l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < K\epsilon$（K 为任意固定正实数）$\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| \le K\epsilon$（K 为任意固定正实数）.
- 序列 $a_n \to l$ 的充分必要条件是: 对任意正整数 k, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \frac{1}{k}$.

序列极限定义 3

- $a_n \to l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < K\epsilon$（K 为任意固定正实数）$\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| \leq K\epsilon$（K 为任意固定正实数）.
- 序列 $a_n \to l$ 的充分必要条件是: 对任意正整数 k, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \frac{1}{k}$.

序列极限定义 4

- $a_n \to l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$.
  $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 序列 a_n 只有有限项落在区间 $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ 外.
- $a_n \not\to l \Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意 N, 存在 $n > N$, $|a_n - l| \geq \epsilon_0$
  $\Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$, 序列 a_n 有无穷项落在区间 $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ 外
  $\Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$ 和子列 a_{n_k}，使得 $|a_{n_k} - l| \geq \epsilon_0$.
- 证明: 只要证明序列 a_n 的无穷项一定含有一个子列. 事实上可以在这无穷项中任取 a_{n_1}, 则一定还有 a_{n_2}, $n_2 > n_1$, $\cdots$

序列极限定义 4

- $a_n \to l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$.
  $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 序列 a_n 只有有限项落在区间 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 外.
- $a_n \nrightarrow l \Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意 N, 存在 $n > N$, $|a_n - l| \geq \epsilon_0$
  $\Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$, 序列 a_n 有无穷项落在区间 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 外
  $\Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$ 和子列 a_{n_k}，使得 $|a_{n_k} - l| \geq \epsilon_0$.
- 证明: 只要证明序列 a_n 的无穷项一定含有一个子列. 事实上可以在这无穷项中任取 a_{n_1}, 则一定还有 a_{n_2}, $n_2 > n_1$, $\cdots$

序列极限定义 4

- $a_n \to l \Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$.
  $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 序列 a_n 只有有限项落在区间 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 外.
- $a_n \not\to l \Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意 N, 存在 $n > N$，$|a_n - l| \geq \epsilon_0$
  $\Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$, 序列 a_n 有无穷项落在区间 $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 外
  $\Leftrightarrow$ 存在 $\epsilon_0 > 0$ 和子列 a_{n_k}，使得 $|a_{n_k} - l| \geq \epsilon_0$.
- 证明: 只要证明序列 a_n 的无穷项一定含有一个子列. 事实上可以在这无穷项中任取 a_{n_1}, 则一定还有 a_{n_2}, $n_2 > n_1$, $\cdots$

序列极限的性质 1

- 极限存在时，必定唯一.

  证明：若有两个极限 l_1, l_2, 则对任意的 ϵ, 存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l_1| < \epsilon$, $|a_n - l_2| < \epsilon$. 因此 $|l_1 - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$. 则有 $l_1 = l_2$.

- 收敛序列有界.

  证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l| < 1$. 则有 $n > N$ 时 $|a_n| \leq |l| + 1$, $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |l| + 1\}$.

- 极限存在与否与序列前面有限项无关.

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

序列极限的性质 1

- 极限存在时，必定唯一.
  证明：若有两个极限 l_1, l_2, 则对任意的 ϵ, 存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l_1| < \epsilon$, $|a_n - l_2| < \epsilon$. 因此 $|l_1 - l_2| \le |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$. 则有 $l_1 = l_2$.
- 收敛序列有界.
  证明：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, 则存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l| < 1$. 则有 $n > N$ 时 $|a_n| \le |l| + 1$, $|a_n| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |l| + 1\}$.
- 极限存在与否与序列前面有限项无关.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

序列极限的性质 1

- 极限存在时，必定唯一.
  证明：若有两个极限 l_1, l_2, 则对任意的 ϵ, 存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l_1| < \epsilon$, $|a_n - l_2| < \epsilon$. 因此 $|l_1 - l_2| \le |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$. 则有 $l_1 = l_2$.
- 收敛序列有界.
  证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l| < 1$. 则有 $n > N$ 时 $|a_n| \le |l| + 1$, $|a_n| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |l| + 1\}$.
- 极限存在与否与序列前面有限项无关.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

序列极限的性质 1

- 极限存在时，必定唯一.
  证明：若有两个极限 l_1, l_2, 则对任意的 ϵ, 存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l_1| < \epsilon$, $|a_n - l_2| < \epsilon$. 因此 $|l_1 - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$. 则有 $l_1 = l_2$.
- 收敛序列有界.
  证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l| < 1$. 则有 $n > N$ 时 $|a_n| \leq |l| + 1$, $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |l| + 1\}$.
- 极限存在与否与序列前面有限项无关.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

序列极限的性质 1

- 极限存在时，必定唯一.
  证明：若有两个极限 l_1, l_2, 则对任意的 ϵ, 存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l_1| < \epsilon$, $|a_n - l_2| < \epsilon$. 因此 $|l_1 - l_2| \le |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$. 则有 $l_1 = l_2$.
- 收敛序列有界.
  证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l| < 1$. 则有 $n > N$ 时 $|a_n| \le |l| + 1$, $|a_n| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |l| + 1\}$.
- 极限存在与否与序列前面有限项无关.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

序列极限的性质 1

- 极限存在时，必定唯一.
  证明：若有两个极限 l_1, l_2, 则对任意的 ϵ, 存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l_1| < \epsilon$, $|a_n - l_2| < \epsilon$. 因此 $|l_1 - l_2| \le |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$. 则有 $l_1 = l_2$.
- 收敛序列有界.
  证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则存在 N, $n > N$ 时 $|a_n - l| < 1$. 则有 $n > N$ 时 $|a_n| \le |l| + 1$, $|a_n| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |l| + 1\}$.
- 极限存在与否与序列前面有限项无关.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

序列极限的性质 2

- $a_n \to 0$, 则有 $ca_n \to 0$.
- $a_n \to l$, 若 $l \in (p, q)$, 则存在 N, $n > N$ 时, 有 $a_n \in (p, q)$; 若 $l > p$, 则存在 N, $n > N$ 时, 有 $a_n > p$.
  证明: 取 $\epsilon < \min\{l - p, q - l\}$, 则存在 N, $n > N$ 时,
  $p < l - \epsilon < a_n < l + \epsilon < q$.
- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$

- 问题: $a_n > 0, a_n \to 0$, 是否有 a_n 单调递减?

序列极限的性质 2

- $a_n \to 0$, 则有 $ca_n \to 0$.
- $a_n \to l$, 若 $l \in (p, q)$, 则存在 N, $n > N$ 时，有 $a_n \in (p, q)$; 若 $l > p$, 则存在 N, $n > N$ 时，有 $a_n > p$.

  证明：取 $\epsilon < \min\{l - p, q - l\}$, 则存在 N, $n > N$ 时，
  $p < l - \epsilon < a_n < l + \epsilon < q$.
- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|.$$

- 问题：$a_n > 0, a_n \to 0$, 是否有 a_n 单调递减？

序列极限的性质 2

- $a_n \to 0$, 则有 $ca_n \to 0$.
- $a_n \to l$, 若 $l \in (p,q)$, 则存在 N, $n > N$ 时，有 $a_n \in (p,q)$; 若 $l > p$, 则存在 N, $n > N$ 时，有 $a_n > p$.
  证明：取 $\epsilon < \min\{l-p, q-l\}$, 则存在 N, $n > N$ 时，
  $p < l - \epsilon < a_n < l + \epsilon < q$.
- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ 存在，且
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right|.$$
- 问题：$a_n > 0, a_n \to 0$, 是否有 a_n 单调递减？

序列极限的性质 2

- $a_n \to 0$, 则有 $ca_n \to 0$.
- $a_n \to l$, 若 $l \in (p, q)$, 则存在 N, $n > N$ 时, 有 $a_n \in (p, q)$; 若 $l > p$, 则存在 N, $n > N$ 时, 有 $a_n > p$.
  证明: 取 $\epsilon < \min\{l - p, q - l\}$, 则存在 N, $n > N$ 时,
  $p < l - \epsilon < a_n < l + \epsilon < q$.
- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$

- 问题: $a_n > 0, a_n \to 0$, 是否有 a_n 单调递减?

序列极限的性质 2

- $a_n \to 0$, 则有 $ca_n \to 0$.
- $a_n \to l$, 若 $l \in (p,q)$, 则存在 N, $n > N$ 时，有 $a_n \in (p,q)$; 若 $l > p$, 则存在 N, $n > N$ 时，有 $a_n > p$.
  证明：取 $\epsilon < \min\{l-p, q-l\}$, 则存在 N, $n > N$ 时，
  $p < l-\epsilon < a_n < l+\epsilon < q$.
- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$ 存在，且
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|.$$
- 问题：$a_n > 0, a_n \to 0$, 是否有 a_n 单调递减？

序列极限的例子 1

- $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 要使 $\frac{1}{n^p} < \epsilon$, 只要 $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}$.
  可取 $N = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}] + 1$. 则有当 $n > N$ 时，$\frac{1}{n^p} < \epsilon$,

- $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

  证明：不妨设 $|q| > 0$, 对任意 $1 > \epsilon > 0$, 要使 $|q^n| < \epsilon$, 只要 $n > \log_{|q|} \epsilon$.
  可取 $N = [\log_{|q|} \epsilon] + 1$, 则有当 $n > N$ 时，$|q^n| < \epsilon$.

序列极限的例子 1

- $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 要使 $\frac{1}{n^p} < \epsilon$, 只要 $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}$.

  可取 $N = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}] + 1$. 则有当 $n > N$ 时，$\frac{1}{n^p} < \epsilon$,

- $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

  证明：不妨设 $|q| > 0$, 对任意 $1 > \epsilon > 0$, 要使 $|q^n| < \epsilon$, 只要 $n > \log_{|q|} \epsilon$.

  可取 $N = [\log_{|q|} \epsilon] + 1$, 则有当 $n > N$ 时，$|q^n| < \epsilon$.

序列极限的例子 1

- $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.
  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 要使 $\frac{1}{n^p} < \epsilon$, 只要 $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}$.
  可取 $N = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}] + 1$. 则有当 $n > N$ 时，$\frac{1}{n^p} < \epsilon$,
- $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
  证明：不妨设 $|q| > 0$, 对任意 $1 > \epsilon > 0$, 要使 $|q^n| < \epsilon$, 只要 $n > \log_{|q|} \epsilon$.
  可取 $N = [\log_{|q|} \epsilon] + 1$, 则有当 $n > N$ 时，$|q^n| < \epsilon$.

序列极限的例子 1

- $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.
  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 要使 $\frac{1}{n^p} < \epsilon$, 只要 $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}$.
  可取 $N = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}] + 1$. 则有当 $n > N$ 时， $\frac{1}{n^p} < \epsilon$,
- $|q| < 1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
  证明：不妨设 $|q| > 0$, 对任意 $1 > \epsilon > 0$, 要使 $|q^n| < \epsilon$, 只要
  $n > \log_{|q|} \epsilon$.
  可取 $N = [\log_{|q|} \epsilon] + 1$, 则有当 $n > N$ 时， $|q^n| < \epsilon$.

序列极限的例子 1

- $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 要使 $\frac{1}{n^p} < \epsilon$, 只要 $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}$.

  可取 $N = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}] + 1$. 则有当 $n > N$ 时，$\frac{1}{n^p} < \epsilon$,

- $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

  证明：不妨设 $|q| > 0$, 对任意 $1 > \epsilon > 0$, 要使 $|q^n| < \epsilon$, 只要 $n > \log_{|q|} \epsilon$.

  可取 $N = [\log_{|q|} \epsilon] + 1$, 则有当 $n > N$ 时，$|q^n| < \epsilon$.

序列极限的例子 1

- $p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.
  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 要使 $\frac{1}{n^p} < \epsilon$, 只要 $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}$.
  可取 $N = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}}] + 1$. 则有当 $n > N$ 时，$\frac{1}{n^p} < \epsilon$,
- $|q| < 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
  证明：不妨设 $|q| > 0$, 对任意 $1 > \epsilon > 0$, 要使 $|q^n| < \epsilon$, 只要 $n > \log_{|q|} \epsilon$.
  可取 $N = [\log_{|q|} \epsilon] + 1$, 则有当 $n > N$ 时，$|q^n| < \epsilon$.

- $a > 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

  证明：$a > 1$ 时，对任意 $\epsilon > 0$, 要使 $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\log_a^{1+\epsilon}}$.

  取 $N = [\frac{1}{\log_a^{1+\epsilon}}] + 1$，则有当 $n > N$ 时，$|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$.

  $a < 1$ 时，对任意 $1 > \epsilon > 0$, 要使 $1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\log_a^{1-\epsilon}}$.

  可取 $N = [\frac{1}{\log_a^{1-\epsilon}}] + 1$. $n > N$ 时，$|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$.

- $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$.

  证明：$a>1$ 时，对任意 $\epsilon>0$, 要使 $a^{\frac{1}{n}}-1<\epsilon$, 只要 $n>\frac{1}{\log_a^{1+\epsilon}}$.

  取 $N=[\frac{1}{\log_a^{1+\epsilon}}]+1$，则有当 $n>N$ 时，$|a^{\frac{1}{n}}-1|<\epsilon$.

  $a<1$ 时，对任意 $1>\epsilon>0$, 要使 $1-a^{\frac{1}{n}}<\epsilon$, 只要 $n>\frac{1}{\log_a^{1-\epsilon}}$.

  可取 $N=[\frac{1}{\log_a^{1-\epsilon}}]+1$. $n>N$ 时，$|a^{\frac{1}{n}}-1|<\epsilon$.

序列极限的例子 2

- $a > 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

  证明：$a > 1$ 时，对任意 $\epsilon > 0$, 要使 $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\log_a^{1+\epsilon}}$.

  取 $N = [\frac{1}{\log_a^{1+\epsilon}}] + 1$，则有当 $n > N$ 时，$|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$.

  $a < 1$ 时，对任意 $1 > \epsilon > 0$, 要使 $1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\log_a^{1-\epsilon}}$.

  可取 $N = [\frac{1}{\log_a^{1-\epsilon}}] + 1$. $n > N$ 时，$|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$.

极限不等式

- 定理: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n > b_n$.

  证明: 存在 N, 使得 $n > N$ 时, $|a_n - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, $|b_n - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, 从而有 $a_n > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} > b_n$.

- 定理: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, 且存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n \geq b_n$. 则有 $l_1 \geq l_2$.

  证明: 反设 $l_1 < l_2$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, $a_n < b_n$, 矛盾.

- 注: 由 $a_n > b_n$ 得不到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 如: $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

极限不等式

- 定理: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n > b_n$.
  证明: 存在 N, 使得 $n > N$ 时, $|a_n - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, $|b_n - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, 从而有 $a_n > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} > b_n$.
- 定理: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, 且存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n \geq b_n$. 则有 $l_1 \geq l_2$.
  证明: 反设 $l_1 < l_2$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, $a_n < b_n$, 矛盾.
- 注: 由 $a_n > b_n$ 得不到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 如: $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

极限不等式

- 定理: $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n > b_n$.
  证明: 存在 N, 使得 $n > N$ 时, $|a_n - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, $|b_n - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, 从而有 $a_n > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} > b_n$.
- 定理: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, 且存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n \geq b_n$. 则有 $l_1 \geq l_2$.
  证明: 反设 $l_1 < l_2$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, $a_n < b_n$, 矛盾.
- 注: 由 $a_n > b_n$ 得不到 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$. 如: $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

极限不等式

- 定理: $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n > b_n$.
  证明: 存在 N, 使得 $n > N$ 时, $|a_n - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, $|b_n - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, 从而有 $a_n > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} > b_n$.
- 定理: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, 且存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n \geq b_n$. 则有 $l_1 \geq l_2$.
  证明: 反设 $l_1 < l_2$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, $a_n < b_n$, 矛盾.
- 注: 由 $a_n > b_n$ 得不到 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$. 如: $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

- 定理: $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n > b_n$.

  证明: 存在 N, 使得 $n > N$ 时, $|a_n - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, $|b_n - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, 从而有 $a_n > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} > b_n$.
- 定理: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, 且存在 N, 使得 $n > N$ 时, $a_n \geq b_n$. 则有 $l_1 \geq l_2$.

  证明: 反设 $l_1 < l_2$, 则存在 N, 当 $n > N$ 时, $a_n < b_n$, 矛盾.
- 注: 由 $a_n > b_n$ 得不到 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$. 如: $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

序列极限存在定理

- 定理：单调有界序列有极限（单调递增有上界的序列或者单调递减有下界的序列均有极限）。
- 例：$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$，则 $\lim a_n$ 存在。
  证明：$a_1 < 2$, $a_1 < a_2 < (\sqrt{2})^2 = 2$，若 $a_{n-1} < a_n < 2$，
  $a_n = \sqrt{2}^{a_{n-1}} < a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^2 = 2$.
- 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.
  解：$x_{n+1} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(\frac{2}{x_n} - x_n) = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

因此 a_n 单调有界，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

序列极限存在定理

- 定理：单调有界序列有极限（单调递增有上界的序列或者单调递减有下界的序列均有极限）。
- 例：$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$, 则 $\lim a_n$ 存在。
  证明：$a_1 < 2$, $a_1 < a_2 < (\sqrt{2})^2 = 2$, 若 $a_{n-1} < a_n < 2$,
  $a_n = \sqrt{2}^{a_{n-1}} < a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^2 = 2$.
- 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.
  解：$x_{n+1} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$,
  $$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} - x_n\right) = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$
  因此 a_n 单调有界，$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在。

序列极限存在定理

- 定理：单调有界序列有极限（单调递增有上界的序列或者单调递减有下界的序列均有极限）。
- 例：$a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$，则 $\lim a_n$ 存在。
  证明：$a_1 < 2$, $a_1 < a_2 < (\sqrt{2})^2 = 2$, 若 $a_{n-1} < a_n < 2$,
  $a_n = \sqrt{2}^{a_{n-1}} < a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^2 = 2$.
- 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.
  解：$x_{n+1} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(\frac{2}{x_n} - x_n) = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$$

因此 a_n 单调有界，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

夹逼定理

- 定理: 设有三个序列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$. 存在 N_0, 使得 $n \geq N_0$ 时, $c_n \leq a_n \leq b_n$, 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

  证明: 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N > N_0$, 使得 $n > N$ 时 $|b_n - l| < \epsilon$, $|c_n - l| < \epsilon$, 从而有 $l - \epsilon < c_n \leq a_n \leq b_n < l + \epsilon$, 即得 $|a_n - l| < \epsilon$.
- 注：上面定理可否如下证明？由于 $c_n \leq a_n$，利用极限不等式，有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，同样可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- 推论：若 $0 \leq a_n \leq b_n \to 0$, 则有 $a_n \to 0$.

夹逼定理

- 定理: 设有三个序列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$. 存在 N_0, 使得 $n \geq N_0$ 时, $c_n \leq a_n \leq b_n$, 若有 $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l$, 则有 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.
  证明: 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N > N_0$, 使得 $n > N$ 时 $|b_n - l| < \epsilon$, $|c_n - l| < \epsilon$, 从而有 $l - \epsilon < c_n \leq a_n \leq b_n < l + \epsilon$, 即得 $|a_n - l| < \epsilon$.
- 注: 上面定理可否如下证明? 由于 $c_n \leq a_n$, 利用极限不等式, 有 $\lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n$, 同样可得 $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.
- 推论: 若 $0 \leq a_n \leq b_n \to 0$, 则有 $a_n \to 0$.

夹逼定理

- 定理: 设有三个序列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$. 存在 N_0, 使得 $n \geq N_0$ 时, $c_n \leq a_n \leq b_n$, 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.
  证明: 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N > N_0$, 使得 $n > N$ 时 $|b_n - l| < \epsilon$, $|c_n - l| < \epsilon$, 从而有 $l - \epsilon < c_n \leq a_n \leq b_n < l + \epsilon$, 即得 $|a_n - l| < \epsilon$.
- 注：上面定理可否如下证明？由于 $c_n \leq a_n$，利用极限不等式，有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，同样可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- 推论：若 $0 \leq a_n \leq b_n \to 0$, 则有 $a_n \to 0$.

夹逼定理

- 定理: 设有三个序列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$. 存在 N_0, 使得 $n \geq N_0$ 时，$c_n \leq a_n \leq b_n$, 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.
  证明: 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N > N_0$, 使得 $n > N$ 时 $|b_n - l| < \epsilon$, $|c_n - l| < \epsilon$, 从而有 $l - \epsilon < c_n \leq a_n \leq b_n < l + \epsilon$, 即得 $|a_n - l| < \epsilon$.
- 注：上面定理可否如下证明？由于 $c_n \leq a_n$，利用极限不等式，有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，同样可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- 推论：若 $0 \leq a_n \leq b_n \to 0$, 则有 $a_n \to 0$.

夹逼定理的例子 1

- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$
  证明: 令 $n^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$, $n \geq 2$, 则有

$$n = (1+a_n)^n \geq \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2 \Longrightarrow a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0.$$

夹逼定理的例子 2

- 例：设 $a_n > 0$, 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1$(或者存在 N, $n > N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$), 则 $a_n \to 0$.

  证明 1：取 $l < q < 1$, 则存在 N, 使得 $n \geq N$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. 因此 $n \geq N$ 时，

  $$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < q^{n-N},$$

  从而有 $a_n < a_N q^{n-N} = a_N q^{-N} q^n \to 0$.

  证明 2: 存在 N, 使得 $n \geq N$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. 因此 $n \geq N$ 时 a_n 单调有界，极限存在. 设极限为 A, 等式 $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n$ 两边求极限得 $A = l \cdot A$, 因此 $A = 0$.

夹逼定理的例子 2

- 例：设 $a_n > 0$, 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1$(或者存在 N, $n > N$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$), 则 $a_n \to 0$.

  证明 1：取 $l < q < 1$, 则存在 N, 使得 $n \geq N$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. 因此 $n \geq N$ 时，

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < q^{n-N},$$

  从而有 $a_n < a_N q^{n-N} = a_N q^{-N} q^n \to 0$.

  证明 2: 存在 N, 使得 $n \geq N$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. 因此 $n \geq N$ 时 a_n 单调有界，极限存在. 设极限为 A, 等式 $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n$ 两边求极限得 $A = l \cdot A$, 因此 $A = 0$.

夹逼定理的例子 2

- 例：设 $a_n > 0$, 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1$(或者存在 N, $n > N$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$), 则 $a_n \to 0$.
  证明 1：取 $l < q < 1$, 则存在 N, 使得 $n \geq N$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. 因此 $n \geq N$ 时,
  $$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < q^{n-N},$$
  从而有 $a_n < a_N q^{n-N} = a_N q^{-N} q^n \to 0$.
  证明 2: 存在 N, 使得 $n \geq N$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. 因此 $n \geq N$ 时 a_n 单调有界, 极限存在. 设极限为 A, 等式 $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n$ 两边求极限得 $A = l \cdot A$, 因此 $A = 0$.

夹逼定理的例子 3

- 设 $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
  证明：设 $a_n = \frac{a^n}{n!}$, 则有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0$.
- $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.
  证明：设 $a_n = \frac{n}{a^n}$, 则有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{na} \to \frac{1}{a}$.

夹逼定理的例子 3

- 设 $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
  证明：设 $a_n = \frac{a^n}{n!}$, 则有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0$.
- $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.
  证明：设 $a_n = \frac{n}{a^n}$, 则有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{na} \to \frac{1}{a}$.

夹逼定理的例子 3

- 设 $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
  证明：设 $a_n = \frac{a^n}{n!}$, 则有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0$.
- $a > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.
  证明：设 $a_n = \frac{n}{a^n}$, 则有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{na} \to \frac{1}{a}$.

极限的四则运算 1

- 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$，则有：$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = l_1 \pm l_2$.
- 证明：由条件 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$，对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |b_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此当 $n > N$ 时有

$$|a_n \pm b_n - (l_1 \pm l_2)| \leq |a_n - l_1| + |b_n - l_2| < \epsilon.$$

极限的四则运算 1

- 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$，则有：$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = l_1 \pm l_2$.
- 证明：由条件 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$，对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |b_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此当 $n > N$ 时有

$$|a_n \pm b_n - (l_1 \pm l_2)| \leq |a_n - l_1| + |b_n - l_2| < \epsilon.$$

极限的四则运算 2

- 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$，则有：$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l_1 \cdot l_2$.
- 证明：由于极限 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在，因此有界，即存在 M, 使得 $|b_n| \leq M$,

$$|a_nb_n - l_1l_2| \leq |b_n| \cdot |a_n - l_1| + |l_1||b_n - l_2| \leq M \cdot |a_n - l_1| + |l_1||b_n - l_2|.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$，对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - l_1| < \epsilon, \quad |b_n - l_2| < \epsilon.$$

从而得 $|a_nb_n - (l_1l_2)| < (M + |l_1|)\epsilon$.

极限的四则运算 2

- 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$，则有：$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l_1 \cdot l_2$.
- 证明：由于极限 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在，因此有界，即存在 M, 使得 $|b_n| \le M$,

$$|a_n b_n - l_1 l_2| \le |b_n| \cdot |a_n - l_1| + |l_1||b_n - l_2| \le M \cdot |a_n - l_1| + |l_1||b_n - l_2|.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$，对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - l_1| < \epsilon, \quad |b_n - l_2| < \epsilon.$$

从而得 $|a_n b_n - (l_1 l_2)| < (M + |l_1|)\epsilon$.

- 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 \neq 0$, 则有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$.
- 证明：不妨设 $l_2 > 0$. 由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 > \frac{l_2}{2}$, 存在 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时，$b_n > \frac{l_2}{2}$, 则有当 $n > N_1$ 时，

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l_1}{l_2}\right| = \frac{|(a_n - l_1)l_2 - l_1(b_n - l_2)|}{|b_n l_2|} \leq \frac{|a_n - l_1||l_2| + |l_1||b_n - l_2|}{\frac{1}{2}(l_2)^2}.$$

对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N > N_1$, 使得当 $n > N$ 时 $|a_n - l_1| < \epsilon, |b_n - l_2| < \epsilon$.

- 注：当 $l_2 \neq 0$ 时，存在 N, $n > N$ 时，$b_n \neq 0$.

极限的四则运算 3

- 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 \neq 0$，则有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$.
- 证明：不妨设 $l_2 > 0$. 由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 > \frac{l_2}{2}$, 存在 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时，$b_n > \frac{l_2}{2}$, 则有当 $n > N_1$ 时，

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l_1}{l_2}\right| = \frac{|(a_n - l_1)l_2 - l_1(b_n - l_2)|}{|b_n l_2|} \leq \frac{|a_n - l_1||l_2| + |l_1||b_n - l_2|}{\frac{1}{2}(l_2)^2}.$$

  对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N > N_1$, 使得当 $n > N$ 时 $|a_n - l_1| < \epsilon, |b_n - l_2| < \epsilon$.
- 注：当 $l_2 \neq 0$ 时，存在 N, $n > N$ 时，$b_n \neq 0$.

- 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 \neq 0$，则有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$.
- 证明：不妨设 $l_2 > 0$. 由于 $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2 > \frac{l_2}{2}$, 存在 N_1, 使得当 $n > N_1$ 时，$b_n > \frac{l_2}{2}$, 则有当 $n > N_1$ 时，

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l_1}{l_2}\right| = \frac{|(a_n - l_1)l_2 - l_1(b_n - l_2)|}{|b_n l_2|} \leq \frac{|a_n - l_1||l_2| + |l_1||b_n - l_2|}{\frac{1}{2}(l_2)^2}.$$

对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $N > N_1$, 使得当 $n > N$ 时

$|a_n - l_1| < \epsilon, |b_n - l_2| < \epsilon$.

- 注：当 $l_2 \neq 0$ 时，存在 N, $n > N$ 时，$b_n \neq 0$.

应用极限四则运算求极限 1

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = k \\ 0, & m < k \end{cases}.$$

证明：$m \leq k$ 时，

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \cdots + b_k} \\ =& \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \cdots + a_m n^{-m}}{b_0 + b_1 n^{-1} + \cdots + b_k n^{-k}} n^{m-k} \\ =& \frac{a_0}{b_0} \lim_{n\to\infty} \cdot n^{m-k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = k \\ 0, & m < k \end{cases}. \end{aligned}$$

应用极限四则运算求极限 1

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=k\\ 0, & m<k\end{cases}.$$

  证明：$m\le k$ 时，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_k}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1n^{-1}+\cdots+a_mn^{-m}}{b_0+b_1n^{-1}+\cdots+b_kn^{-k}}n^{m-k}\\
=&\frac{a_0}{b_0}\lim_{n\to\infty}\cdot n^{m-k}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=k\\ 0, & m<k\end{cases}.
\end{aligned}$$

应用极限四则运算求极限 2

- $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+n}$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且大于 0.

证明：由：$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}$，有 a_n 单调递增，且 $a_n < \frac{n}{n+1} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，但是

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+n} = 0.$$

- 注：由于 $a_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}})$, 利用定积分的定义，可知 $a_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$.

应用极限四则运算求极限 2

- $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+n}$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且大于 0.
  证明：由：$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}$，有 a_n 单调递增，且 $a_n < \frac{n}{n+1} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，但是

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+n} = 0.$$

- 注：由于 $a_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}})$, 利用定积分的定义，可知 $a_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2$.

应用极限四则运算求极限 2

- $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+n}$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且大于 0.
  证明：由：$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}$，有 a_n 单调递增，且 $a_n < \frac{n}{n+1} < 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，但是

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+n} = 0.$$

- 注：由于 $a_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}})$, 利用定积分的定义，可知 $a_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$.

应用极限四则运算求极限 3

- $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

  解:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

- 上面用到

$$1 < \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} < 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$$

- 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求该极限.

  解: a_n 单调有界, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设极限为 A, 等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ 两边求极限, 得 $A = \frac{1}{2}(A + \frac{2}{A})$, 解得 $A = \sqrt{2}$.

应用极限四则运算求极限 3

- $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.

  解:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

- 上面用到

$$1 < \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} < 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$$

- 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求该极限.

  解: a_n 单调有界, $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设极限为 A, 等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ 两边求极限, 得 $A = \frac{1}{2}(A + \frac{2}{A})$, 解得 $A = \sqrt{2}$.

- $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n$.
  解:
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{2}.$$
- 上面用到
  $$1 < \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} < 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$$
- 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$. 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求该极限.
  解: a_n 单调有界, $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设极限为 A, 等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ 两边求极限, 得 $A = \frac{1}{2}(A + \frac{2}{A})$, 解得 $A = \sqrt{2}$.

- 定理: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, 则它的任意子序列 a_{n_k} 也以 l 为极限.

  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$. 取 K，使得 $n_K > N$, 则当 $k > K$ 时，$|a_{n_k} - l| < \epsilon$.
- 推论：若序列 a_n 存在两个极限不同的子序列 (或存在不收敛的子列)，则原序列的极限不存在. 例：$0, 1, 0, 1, \cdots$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ 的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = l = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$.

- 定理: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, 则它的任意子序列 a_{n_k} 也以 l 为极限.
  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$. 取 K，使得 $n_K > N$, 则当 $k > K$ 时，$|a_{n_k} - l| < \epsilon$.
- 推论：若序列 a_n 存在两个极限不同的子序列 (或存在不收敛的子列)，则原序列的极限不存在. 例：$0, 1, 0, 1, \cdots$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ 的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = l = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$.

子序列的极限

- 定理: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, 则它的任意子序列 a_{n_k} 也以 l 为极限.
  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$. 取 K，使得 $n_K > N$, 则当 $k > K$ 时，$|a_{n_k} - l| < \epsilon$.
- 推论：若序列 a_n 存在两个极限不同的子序列 (或存在不收敛的子列)，则原序列的极限不存在. 例：$0, 1, 0, 1, \cdots$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ 的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = l = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$.

子序列的极限

- 定理: 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, 则它的任意子序列 a_{n_k} 也以 l 为极限.
  证明：对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 使得 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$. 取 K，使得 $n_K > N$, 则当 $k > K$ 时，$|a_{n_k} - l| < \epsilon$.
- 推论：若序列 a_n 存在两个极限不同的子序列 (或存在不收敛的子列)，则原序列的极限不存在. 例：$0, 1, 0, 1, \cdots$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ 的充分必要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = l = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$.

一个重要的极限 1

设 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 则有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均存在，设该极限为 e.

证明如下：

- 1. a_n, 和 b_n 是有界序列. 利用二项式展开公式：

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n$$

我们有 $n > 1$ 时,

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &< b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\le 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3\end{aligned}$$

一个重要的极限 1

设 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 则有极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 均存在，设该极限为 e.

证明如下：

- 1. a_n, 和 b_n 是有界序列. 利用二项式展开公式：

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n$$

我们有 $n > 1$ 时,

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &< b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3\end{aligned}$$

- 2. a_n 和 b_n 是递增序列，从而 a_n, b_n 极限存在.

证明：b_n 显然是递增序列.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$\geq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

也可如下证明：

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1$$

一个重要的极限 2

- 2. a_n 和 b_n 是递增序列，从而 a_n, b_n 极限存在.

  证明：b_n 显然是递增序列.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\geq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

  也可如下证明：

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1$$

- 3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty} b_m$.

证明：由 $a_n < b_n$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{m\to\infty} b_m$. 又对任意 m, 当 $n > m$ 时，由二项式展开公式，

$$(1+\frac{1}{n})^n \ge 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+ \\ \cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\frac{1}{n^m}$$

从而得对任意固定 m,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge b_m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{m\to\infty} b_m.$$

- 3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty} b_m$.

  证明：由 $a_n < b_n$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{m\to\infty} b_m$. 又对任意 m，当 $n > m$ 时，由二项式展开公式，

$$(1+\frac{1}{n})^n \ge 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\frac{1}{n^m}$$

  从而得对任意固定 m，

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge b_m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{m\to\infty} b_m.$$

一个重要的极限 4

- 注：$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 单调递减趋向于 e.

证明：利用 Bernoulli 不等式 $(1+x)^n \geq 1+nx,\ x>0$(事实上对 $x>-1$ 成立),

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Big/ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \geq \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{n(n+2)^2}+1>1.$$

- 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.
- 解：

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{e}$$

- 注：$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 单调递减趋向于 e.

  证明：利用 Bernoulli 不等式 $(1+x)^n \geq 1+nx,\ x>0$(事实上对 $x>-1$ 成立),

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Big/ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \geq \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{n(n+2)^2}+1>1.$$

- 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

- 解：

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{e}$$

一个重要的极限 4

- 注：$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 单调递减趋向于 e.
  证明：利用 Bernoulli 不等式 $(1+x)^n \geq 1+nx,\ x>0$(事实上对 $x>-1$ 成立),

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Big/ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \geq \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{n(n+2)^2}+1>1.$$

- 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.
- 解：

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{e}$$

以无穷为极限

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时， $a_n > M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给 $M < 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时， $a_n < M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时， $|a_n| > M$. 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$， 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例： $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

以无穷为极限

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$a_n > M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给 $M < 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$a_n < M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n| > M$. 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例：$\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

以无穷为极限

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$a_n > M$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给 $M < 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$a_n < M$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n| > M$. 则有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 或者 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$，则有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例：$\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

以无穷为极限

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$a_n > M$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给 $M < 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$a_n < M$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n| > M$. 则有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 或者 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$，则有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例：$\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

以无穷为极限

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$a_n > M$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给 $M < 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$a_n < M$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给 $M > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n| > M$. 则有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 或者 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$，则有 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例：$\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

Stolz 定理 1

- (Stolz) 设 b_n 严格单调增且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} = l$ (l 是有限数或 $+\infty, -\infty$), 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

  证明: 对任给 $\epsilon > 0$, 存在 K, 当 $k > K$ 时, $-\epsilon < \frac{a_k-a_{k-1}}{b_k-b_{k-1}} - l < \epsilon$,

$$-\epsilon(b_k - b_{k-1}) < a_k - a_{k-1} - l(b_k - b_{k-1}) < \epsilon(b_k - b_{k-1})$$

  $n > K$ 时, 上式中 k 从 $K+1$ 到 n, 得到的 $n-K$ 个式子求和得到

$$-\epsilon < \frac{a_n - a_K - l(b_n - b_K)}{b_n - b_K} < \epsilon$$

$$\frac{a_n}{b_n} - l = \frac{a_n - lb_n}{b_n} = \left(\frac{a_n - a_K - l(b_n - b_K)}{b_n - b_K} + \frac{a_K - lb_K}{b_n - b_K}\right)\frac{b_n - b_K}{b_n}$$

Stolz 定理 2

- 证明 (续): 存在 $N > K$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{a_K - lb_K}{b_n - b_K}\right| < \epsilon, \quad \left|\frac{b_n - b_K}{b_n}\right| < 2 \Longrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < 4\epsilon.$$

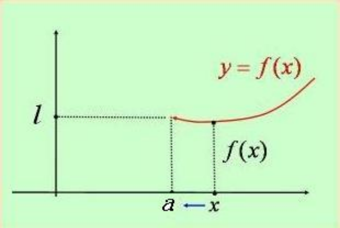
若 $l = +\infty$, 对任意 $M > 0$, 存在 K, 当 $k > K$ 时, $\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} > M$, $n > K$ 时, $a_n - a_K > M(b_k - b_K)$,

$$\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{a_n - a_K}{b_n - b_K} + \frac{a_K}{b_n - b_K}\right)\frac{b_n - b_K}{b_n}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = l$.

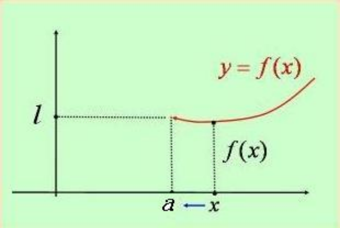
右极限 1

- $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限是 x 从 a 的右侧趋于 a 时 $f(x)$ 的极限。$f(x)$ 以 l 为右极限，即 $x>a$, x 足够靠近 a 时，$f(x)$ 任意接近 l.
  $\to$ 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<x-a<\delta$ 时，有 $|f(x)-l|<\epsilon$



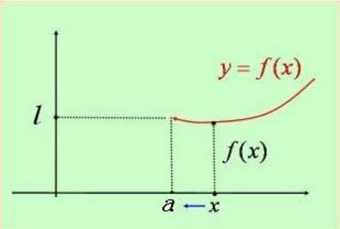
右极限 1

- $f(x)$ 在 $x = a$ 处的右极限是 x 从 a 的右侧趋于 a 时 $f(x)$ 的极限。
  $f(x)$ 以 l 为右极限，即 $x > a$, x 足够靠近 a 时，$f(x)$ 任意接近 l.
  $\rightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < x - a < \delta$ 时，有 $|f(x) - l| < \epsilon$



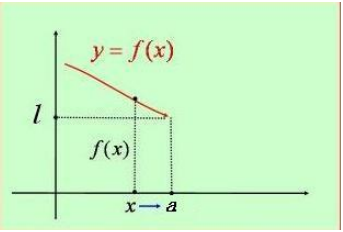
右极限 2

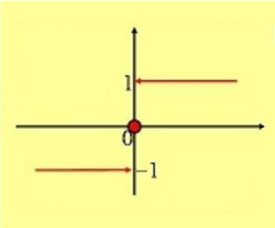
- 右极限的定义 ($\epsilon-\delta$ 语言)：$f(x)$ 在 a 的右侧附近有定义，即存在 $r>0$，使得 $f(x)$ 在 $(a,a+r)$ 上有定义．对任意 $\epsilon>0$，存在 $0<\delta<r$，使得当 $0<x-a<\delta$ 时，$|f(x)-l|<\epsilon$，则称 $x\to a+0$ 时，$f(x)$ 以 l 为右极限，记为 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=l$.



左极限

- 左极限的定义 ($\epsilon - \delta$ 语言)：$f(x)$ 在 a 的左侧附近有定义，即存在 $r > 0$，使得 $f(x)$ 在 $(a-r, a)$ 上有定义. 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $0 < \delta < r$，使得当 $-\delta < x - a < 0$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$，则称 $x \to a - 0$ 时，$f(x)$ 以 l 为左极限，记为 $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = l$.

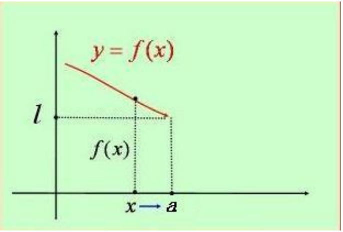


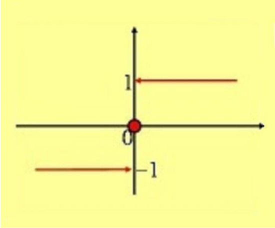


- 例：$f(x) = \mathrm{sgn}\,(x)$，$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 1$，$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -1$.
- 注记：有些书上采用记号 $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 表示左右极限

左极限

- 左极限的定义 ($\epsilon-\delta$ 语言)：$f(x)$ 在 a 的左侧附近有定义，即存在 $r>0$，使得 $f(x)$ 在 $(a-r,a)$ 上有定义. 对任意 $\epsilon>0$，存在 $0<\delta<r$，使得当 $-\delta<x-a<0$ 时，$|f(x)-l|<\epsilon$，则称 $x\to a-0$ 时，$f(x)$ 以 l 为左极限，记为 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=l$.

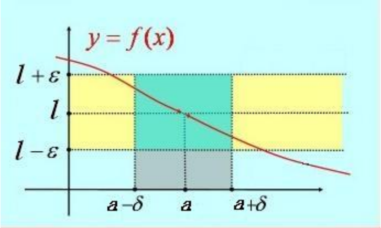




- 例：$f(x)=\operatorname{sgn}(x)$，$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-1$.
- 注记：有些书上采用记号 $f(x_0^-),f(x_0^+)$ 表示左右极限

(双侧) 极限的定义

- (双侧) 极限的定义 ($\epsilon-\delta$ 语言)：$y=f(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，若存在 l, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta\in(0,r)$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-l|<\epsilon$, 则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 以 l 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.



利用定义求极限 1

- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0$.

证明：$a>0$ 时，对任意给定 $\epsilon>0$,

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\le\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

取 $\delta=\min\{\sqrt{a}\epsilon,a\}$, 则有当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\epsilon$.
对于第二个极限，要使 $\sqrt{x}<\epsilon$ 成立, 可取 $\delta=\epsilon^2$, 当 $0<x<\delta$ 时, $|\sqrt{x}-0|<\epsilon$.

- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0$.

  证明：$a>0$ 时，对任意给定 $\epsilon>0$,

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\le\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

  取 $\delta=\min\{\sqrt{a}\epsilon,a\}$, 则有当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\epsilon$.

  对于第二个极限，要使 $\sqrt{x}<\epsilon$ 成立, 可取 $\delta=\epsilon^2$, 当 $0<x<\delta$ 时, $|\sqrt{x}-0|<\epsilon$.

- $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}\ (a > 0)$, $\lim_{x \to 0+0} \sqrt{x} = 0$.

  证明：$a > 0$ 时，对任意给定 $\epsilon > 0$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \le \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

  取 $\delta = \min\{\sqrt{a}\epsilon, a\}$, 则有当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$.
  对于第二个极限，要使 $\sqrt{x} < \epsilon$ 成立, 可取 $\delta = \epsilon^2$, 当 $0 < x < \delta$ 时, $|\sqrt{x} - 0| < \epsilon$.

- $\lim\limits_{x \to a} \sin(x) = \sin a$, $\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos a$.

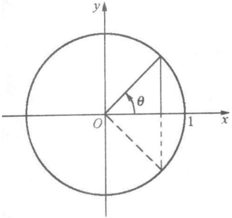
证明：

对任意的 $\epsilon > 0$, 要使 $|\sin(x) - \sin a| < \epsilon$, 利用

$$|\sin(x) - \sin a| = \left|2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}\right|$$

$$\le 2\left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \le |x-a|$$

只要取 $\delta = \epsilon$, $|x-a| < \delta$ 时，$|\sin(x) - \sin a| < \epsilon$.



$|\sin\theta| \le |\theta|$

利用定义求极限 2

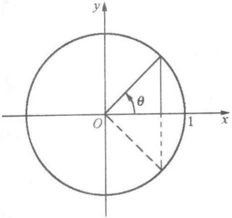
- $\lim\limits_{x\to a}\sin(x)=\sin a$, $\lim\limits_{x\to a}\cos(x)=\cos a$.

  证明：

  对任意的 $\epsilon>0$, 要使 $|\sin(x)-\sin a|<\epsilon$, 利用

$$|\sin(x)-\sin a|=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|$$

$$\le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\le|x-a|$$



$|\sin\theta|\le|\theta|$

只要取 $\delta=\epsilon$, $|x-a|<\delta$ 时，$|\sin(x)-\sin a|<\epsilon$.

利用定义求极限 2

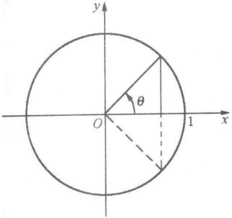
- $\lim_{x\to a}\sin(x)=\sin a$, $\lim_{x\to a}\cos(x)=\cos a$.

  证明：

  对任意的 $\epsilon>0$, 要使 $|\sin(x)-\sin a|<\epsilon$, 利用

  $$|\sin(x)-\sin a|=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|$$
  $$\le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\le|x-a|$$

  只要取 $\delta=\epsilon$, $|x-a|<\delta$ 时，$|\sin(x)-\sin a|<\epsilon$.



$|\sin\theta|\le|\theta|$

利用定义求极限 3

- $\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$(这里 $x_0 > 0$). $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

证明: 由于 $|\ln x - \ln x_0| = |\ln \frac{x}{x_0}|$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 要使 $|\ln x - \ln x_0| < \epsilon$, 即

$$e^{-\epsilon} < \frac{x}{x_0} < e^{\epsilon} \iff -x_0(1 - e^{-\epsilon}) < x - x_0 < x_0(e^{\epsilon} - 1),$$

取 $\delta = \min\{x_0(1 - e^{-\epsilon}), x_0(e^{\epsilon} - 1)\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|\ln x - \ln x_0| < \epsilon$.

利用定义求极限 3

- $\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$(这里 $x_0 > 0$). $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.
  证明: 由于 $|\ln x - \ln x_0| = |\ln \frac{x}{x_0}|$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 要使 $|\ln x - \ln x_0| < \epsilon$, 即

$$e^{-\epsilon} < \frac{x}{x_0} < e^{\epsilon} \iff -x_0(1 - e^{-\epsilon}) < x - x_0 < x_0(e^{\epsilon} - 1),$$

取 $\delta = \min\{x_0(1 - e^{-\epsilon}), x_0(e^{\epsilon} - 1)\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|\ln x - \ln x_0| < \epsilon$.

利用定义求极限 3

- $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$(这里 $x_0>0$). $\lim\limits_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$.
  证明: 由于 $|\ln x-\ln x_0|=|\ln\frac{x}{x_0}|$, 对任意的 $\epsilon>0$, 要使 $|\ln x-\ln x_0|<\epsilon$, 即
  $$e^{-\epsilon}<\frac{x}{x_0}<e^{\epsilon} \iff -x_0(1-e^{-\epsilon})<x-x_0<x_0(e^{\epsilon}-1),$$
  取 $\delta=\min\{x_0(1-e^{-\epsilon}),x_0(e^{\epsilon}-1)\}$, 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|\ln x-\ln x_0|<\epsilon$.

极限的性质 1

- 性质：$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ 存在且相等.
- 性质：若 $p < \lim\limits_{x\to a} f(x) < q$, 则存在 δ, 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $p < f(x) < q$ (p 可以是 $-\infty$, q 可以是 $+\infty$).
  证明：设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, 取 $\epsilon = \min\{l-p, q-l\}$. $|f(x)-l| < \epsilon$ 时, $p < f(x) < q$.
- 性质：$\lim\limits_{x\to 0} f(kx) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) (k \neq 0)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x+a)$.

极限的性质 1

- 性质：$\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a\pm 0} f(x)$ 存在且相等.
- 性质：若 $p < \lim_{x\to a} f(x) < q$, 则存在 δ, 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $p < f(x) < q$ (p 可以是 $-\infty$, q 可以是 $+\infty$).

  证明：设 $\lim_{x\to a} f(x) = l$, 取 $\epsilon = \min\{l-p, q-l\}$. $|f(x)-l| < \epsilon$ 时, $p < f(x) < q$.
- 性质：$\lim_{x\to 0} f(kx) = \lim_{x\to 0} f(x)(k \neq 0)$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+a)$.

极限的性质 1

- 性质：$\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a\pm 0} f(x)$ 存在且相等.
- 性质：若 $p < \lim_{x\to a} f(x) < q$, 则存在 δ, 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $p < f(x) < q$ (p 可以是 $-\infty$, q 可以是 $+\infty$).
  证明：设 $\lim_{x\to a} f(x) = l$, 取 $\epsilon = \min\{l-p, q-l\}$. $|f(x)-l| < \epsilon$ 时, $p < f(x) < q$.
- 性质：$\lim_{x\to 0} f(kx) = \lim_{x\to 0} f(x)(k \neq 0)$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+a)$.

- 性质：$\lim_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x\to a\pm 0} f(x)$ 存在且相等.
- 性质：若 $p < \lim_{x\to a} f(x) < q$, 则存在 δ, 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $p < f(x) < q$ (p 可以是 $-\infty$, q 可以是 $+\infty$).
  证明：设 $\lim_{x\to a} f(x) = l$, 取 $\epsilon = \min\{l-p, q-l\}$. $|f(x)-l| < \epsilon$ 时, $p < f(x) < q$.
- 性质：$\lim_{x\to 0} f(kx) = \lim_{x\to 0} f(x) (k \neq 0)$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+a)$.

极限的性质 2

- 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则有 $\lim_{x\to a} |f(x)|$ 存在，且

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|.$$

证明：若设 $\lim_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 则有 $\big||f(x)| - |l|\big| < \epsilon$.

- 例：$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}\,(x)$ 不存在，$\lim_{x\to 0} |\mathrm{sgn}\,(x)| = 1$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ 的充分必要条件是 $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.
  证明：$|f(x) - 0| \le \epsilon \Leftrightarrow \big||f(x)| - 0\big| \le \epsilon$.

极限的性质 2

- 若极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，则有 $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ 存在，且

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|.$$

证明：若设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 则有 $\big||f(x)| - |l|\big| < \epsilon$.

- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

  证明：$|f(x) - 0| \le \epsilon \Leftrightarrow \big||f(x)| - 0\big| \le \epsilon$.

极限的性质 2

- 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，则有 $\lim_{x\to a} |f(x)|$ 存在，且

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|.$$

证明：若设 $\lim_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 则有 $\big||f(x)| - |l|\big| < \epsilon$.

- 例：$\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}\,(x)$ 不存在，$\lim_{x\to 0} |\mathrm{sgn}\,(x)| = 1$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ 的充分必要条件是 $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$.

证明：$|f(x) - 0| \le \epsilon \Leftrightarrow \big||f(x)| - 0\big| \le \epsilon$.

极限的性质 2

- 若极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，则有 $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ 存在，且

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|.$$

证明：若设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 则有 $\big||f(x)| - |l|\big| < \epsilon$.

- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

证明：$|f(x) - 0| \le \epsilon \Leftrightarrow \big||f(x)| - 0\big| \le \epsilon$.

极限的性质 2

- 若极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，则有 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$ 存在，且

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|.$$

证明：若设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x)-l| < \epsilon$, 则有 $\big||f(x)|-|l|\big| < \epsilon$.

- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to 0}|\operatorname{sgn}(x)| = 1$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = 0$.

证明：$|f(x)-0| \le \epsilon \Leftrightarrow \big||f(x)|-0\big| \le \epsilon$.

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$,

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=l_1\pm l_2$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=l_1\cdot l_2$.
- $l_2\neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$.

证明: $l_2\neq 0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, $|g(x)|>\frac{|l_2|}{2}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l_1}{l_2}\right| &= \frac{|(f(x)-l_1)l_2-l_1(g(x)-l_2)|}{|g(x)l_2|}\\ &\leq \frac{2}{|l_2|}|f(x)-l_1|+\frac{2|l_1|}{|l_2|^2}|g(x)-l_2|\end{aligned}$$

注: 对单边极限, 也有类似结论

函数极限的四则运算

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义. 若 $\lim_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim_{x\to a} g(x)=l_2$,

- $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=l_1\pm l_2$.
- $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=l_1\cdot l_2$.
- $l_2\neq 0$ 时, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$.

证明: $l_2\neq 0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, $|g(x)|>\frac{|l_2|}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l_1}{l_2}\right| &= \frac{|(f(x)-l_1)l_2-l_1(g(x)-l_2)|}{|g(x)l_2|}\\
&\le \frac{2}{|l_2|}|f(x)-l_1|+\frac{2|l_1|}{|l_2|^2}|g(x)-l_2|
\end{aligned}
$$

注: 对单边极限, 也有类似结论

函数极限的四则运算

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$,

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.
- $l_2 \neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

证明: $l_2 \neq 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, $|g(x)| > \frac{|l_2|}{2}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2}\right| &= \frac{|(f(x)-l_1)l_2 - l_1(g(x)-l_2)|}{|g(x)l_2|} \\ &\le \frac{2}{|l_2|}|f(x)-l_1| + \frac{2|l_1|}{|l_2|^2}|g(x)-l_2|\end{aligned}$$

注: 对单边极限, 也有类似结论

函数极限的四则运算

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$,

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=l_1\pm l_2$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=l_1\cdot l_2$.
- $l_2\neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$.

  证明: $l_2\neq 0$, 存在 $\delta_1>0$, 使得 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, $|g(x)|>\frac{|l_2|}{2}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l_1}{l_2}\right| &= \frac{|(f(x)-l_1)l_2-l_1(g(x)-l_2)|}{|g(x)l_2|}\\ &\leq \frac{2}{|l_2|}|f(x)-l_1|+\frac{2|l_1|}{|l_2|^2}|g(x)-l_2|\end{aligned}$$

注: 对单边极限, 也有类似结论

- 设 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 若 $\{x_n\}$ 是在 $f(x)$ 定义域中的序列，且 $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

  证明：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $x_n \neq a$, 存在 N, $n > N$ 时，$0 < |x_n - a| < \delta$, 从而 $|f(x_n) - l| < \epsilon$.
- 注：当 $f(x)$ 在 a 处有定义，且 $f(a) = l$ 时．则对定义域内满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的序列 x_n(这里 x_n 可以取 a), 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- 若对任意的 $x_n \to a(x_n \neq a)$, 有 $f(x_n) \to l$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
- 若 $f(x) = |\mathrm{sgn}\,(x)|$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. 取 $x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} \to 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在.

复合函数的极限

函数极限与序列极限 1

- 设 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 若 $\{x_n\}$ 是在 $f(x)$ 定义域中的序列，且 $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
证明：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x)-l| < \epsilon$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $x_n \neq a$, 存在 N, $n > N$ 时，$0 < |x_n - a| < \delta$, 从而 $|f(x_n) - l| < \epsilon$.
- 注：当 $f(x)$ 在 a 处有定义，且 $f(a) = l$ 时．则对定义域内满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的序列 x_n(这里 x_n 可以取 a), 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- 若对任意的 $x_n \to a(x_n \neq a)$, 有 $f(x_n) \to l$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
- 若 $f(x) = |\mathrm{sgn}\,(x)|$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. 取 $x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} \to 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在.

- 设 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 若 $\{x_n\}$ 是在 $f(x)$ 定义域中的序列，且 $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

证明：由 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $x_n \neq a$, 存在 N, $n > N$ 时，$0 < |x_n - a| < \delta$, 从而 $|f(x_n) - l| < \epsilon$.

- 注：当 $f(x)$ 在 a 处有定义，且 $f(a) = l$ 时．则对定义域内满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的序列 x_n(这里 x_n 可以取 a), 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- 若对任意的 $x_n \to a (x_n \neq a)$, 有 $f(x_n) \to l$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
- 若 $f(x) = |\mathrm{sgn}\,(x)|$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. 取 $x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} \to 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在.

复合函数的极限

函数极限与序列极限 1

- 设 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，且 $\lim_{x\to a} f(x)=l$. 若 $\{x_n\}$ 是在 $f(x)$ 定义域中的序列，且 $x_n\neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, 则有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
证明：由 $\lim_{x\to a} f(x)=l$, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-l|<\epsilon$. 由于 $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, 且 $x_n\neq a$, 存在 N, $n>N$ 时，$0<|x_n-a|<\delta$, 从而 $|f(x_n)-l|<\epsilon$.
- 注：当 $f(x)$ 在 a 处有定义，且 $f(a)=l$ 时. 则对定义域内满足 $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ 的序列 x_n(这里 x_n 可以取 a), 有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
- 若对任意的 $x_n\to a(x_n\neq a)$, 有 $f(x_n)\to l$, 则有 $\lim_{x\to a} f(x)=l$.
- 若 $f(x)=|\mathrm{sgn}\,(x)|$, $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. 取 $x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\to 0$, 但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在.

复合函数的极限

函数极限与序列极限 1

- 设 $f(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，且 $\lim_{x\to a} f(x)=l$. 若 $\{x_n\}$ 是在 $f(x)$ 定义域中的序列，且 $x_n\neq a$, $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, 则有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
  证明：由 $\lim_{x\to a} f(x)=l$, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-l|<\epsilon$. 由于 $\lim_{n\to\infty} x_n=a$，且 $x_n\neq a$, 存在 N, $n>N$ 时，$0<|x_n-a|<\delta$, 从而 $|f(x_n)-l|<\epsilon$.
- 注：当 $f(x)$ 在 a 处有定义，且 $f(a)=l$ 时. 则对定义域内满足 $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ 的序列 x_n(这里 x_n 可以取 a), 有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
- 若对任意的 $x_n\to a(x_n\neq a)$, 有 $f(x_n)\to l$, 则有 $\lim_{x\to a} f(x)=l$.
- 若 $f(x)=|\mathrm{sgn}\,(x)|$, $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. 取 $x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\to 0$, 但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在.

复合函数的极限

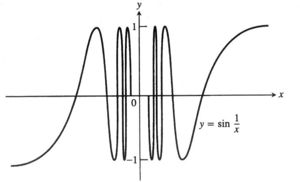
函数极限与序列极限 2

- 推论：1. 若存在 $a \neq x_n \to a$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在；

  2. 若存在 $x_n \to a$, $x_n' \to a$，且 x_n, x_n' 都不取 a，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ 都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.

- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在. 设 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x_n' = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在.

- 例：$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$，
  对任意 a，极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.

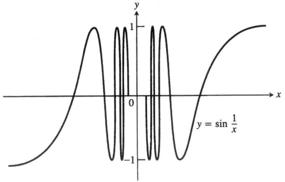


- 推论：1. 若存在 $a \neq x_n \to a$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在；

  2. 若存在 $x_n \to a$, $x_n' \to a$，且 x_n, x_n' 都不取 a，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ 都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.

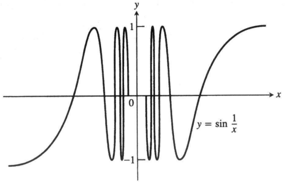
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在. 设 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x_n' = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在.

- 例：$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$，
  对任意 a，极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.



- 推论：1. 若存在 $a \neq x_n \to a$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在；

  2. 若存在 $x_n \to a$, $x_n' \to a$，且 x_n, x_n' 都不取 a，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ 都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在. 设 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x_n' = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在.
- 例：$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$，
  对任意 a，极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.

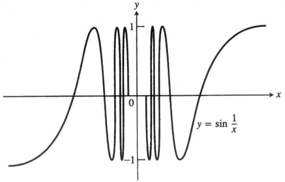


函数极限与序列极限 2

- 推论：1. 若存在 $a \neq x_n \to a$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在；

  2. 若存在 $x_n \to a$, $x_n' \to a$, 且 x_n, x_n' 都不取 a, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ 都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在. 设 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x_n' = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在.
- 例：$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$,

  对任意 a, 极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在.



利用函数极限求序列极限

- $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $x_n \to a$, 且 $x_n \neq a$（或者 $f(a) = l$），则有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- 例：若极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ 均存在，则有 $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

  证明：$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$，设 $c_n = b_n \ln a_n$，则 $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$, 因此 $\lim_{n\to\infty} c_n = b \ln a$, 由于 $\lim_{x\to b\ln a} e^x = e^{b\ln a} = a^b$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{c_n} = \lim_{x\to b\ln a} e^x = a^b.$$

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $x_n \to a$, 且 $x_n \neq a$（或者 $f(a) = l$），则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- 例：若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 均存在，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

证明：$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$, 设 $c_n = b_n \ln a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = b \ln a$, 由于 $\lim\limits_{x\to b\ln a} e^x = e^{b\ln a} = a^b$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{c_n} = \lim_{x\to b\ln a} e^x = a^b.$$

利用函数极限求序列极限

- $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $x_n \to a$, 且 $x_n \neq a$（或者 $f(a) = l$），则有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- 例：若极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ 均存在，则有 $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

  证明：$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$, 设 $c_n = b_n \ln a_n$，则 $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$, 因此 $\lim_{n\to\infty} c_n = b \ln a$, 由于 $\lim_{x\to b\ln a} e^x = e^{b\ln a} = a^b$, 从而有

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{c_n} = \lim_{x\to b\ln a} e^x = a^b.$$

夹逼定理

- 定理：设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，且 $h(x)\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=l$, 则有 $\lim_{x\to a} f(x)=l$.
  证明：对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $0<|x-a|<\delta$ 时，
  $l-\epsilon<h(x)\le f(x)\le g(x)<l+\epsilon$.
- 推论：$0\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim_{x\to a} g(x)=0$, 则有 $\lim_{x\to a} f(x)=0$.
- 注: 对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.
  证明：$0\le |x\sin\frac{1}{x}|\le |x|\to 0$.

夹逼定理

- 定理：设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，且 $h(x)\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.
  证明：对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $0<|x-a|<\delta$ 时，
  $l-\epsilon<h(x)\le f(x)\le g(x)<l+\epsilon$.
- 推论：$0\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.
- 注: 对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.
  证明：$0\le |x\sin\frac{1}{x}|\le |x|\to 0$.

夹逼定理

- 定理：设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，且 $h(x)\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=l$, 则有 $\lim_{x\to a} f(x)=l$.
  证明：对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $0<|x-a|<\delta$ 时，
  $l-\epsilon<h(x)\le f(x)\le g(x)<l+\epsilon$.
- 推论：$0\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim_{x\to a} g(x)=0$, 则有 $\lim_{x\to a} f(x)=0$.
- 注: 对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例： $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.
  证明：$0\le |x\sin\frac{1}{x}|\le |x|\to 0$.

夹逼定理

- 定理：设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，且 $h(x)\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.
  证明：对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $0<|x-a|<\delta$ 时，
  $l-\epsilon<h(x)\le f(x)\le g(x)<l+\epsilon$.
- 推论：$0\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.
- 注: 对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.
  证明：$0\le|x\sin\frac{1}{x}|\le|x|\to 0$.

夹逼定理

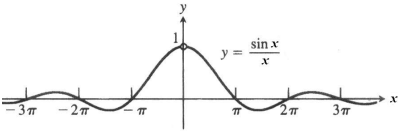
- 定理：设 $f(x), g(x), h(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r, a) \cup (a, a+r)$ 上有定义，且 $h(x) \le f(x) \le g(x)$. 若 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$，则有 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
  证明：对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，$0 < |x-a| < \delta$ 时，
  $l - \epsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < l + \epsilon$.
- 推论：$0 \le f(x) \le g(x)$. 若 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$，则有 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
- 注: 对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.
  证明：$0 \le |x \sin \frac{1}{x}| \le |x| \to 0$.

夹逼定理

- 定理：设 $f(x), g(x), h(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，且 $h(x)\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.
  证明：对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $0<|x-a|<\delta$ 时，
  $l-\epsilon<h(x)\le f(x)\le g(x)<l+\epsilon$.
- 推论：$0\le f(x)\le g(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, 则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.
- 注: 对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.
  证明：$0\le |x\sin\frac{1}{x}|\le |x|\to 0$.

一个重要极限

- 一个重要极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

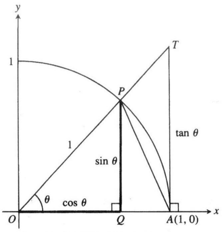


证明：

从几何意义 (面积大小) 可知，当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x < x < \tan x$, 从而当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时，

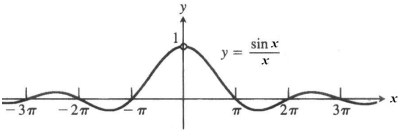
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

由 $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$ 及夹逼定理即得.



一个重要极限

- 一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

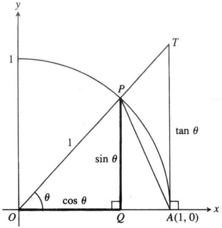


证明：

从几何意义 (面积大小) 可知，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x<\tan x$, 从而当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1$ 及夹逼定理即得.



一个重要极限 –例 1

- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1.$

  证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ x_n = \frac{1}{n}\to 0.$

- 例: 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}.$

  解: $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x} = \frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})}\to\frac{1}{4}.$

- 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}.$

  解:

$$\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x} = \frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\to 1$$

一个重要极限 –例 1

- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1.$

  证明: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0.$

- 例: 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}.$

  解: $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x} = \frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})} \to \frac{1}{4}.$

- 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}.$

  解:
$$\frac{\sin 5x - \tan 3x}{2x} = \frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2} - \frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2} \to 1$$

一个重要极限 –例 1

- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1.$

  证明： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ x_n = \frac{1}{n} \to 0.$

- 例： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}.$

  解： $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x} = \frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})} \to \frac{1}{4}.$

- 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}.$

  解：

$$\frac{\sin 5x - \tan 3x}{2x} = \frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2} - \frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2} \to 1$$

一个重要极限 –例 1

- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1.$

  证明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ x_n = \frac{1}{n} \to 0.$

- 例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}.$

  解：$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x} = \frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})} \to \frac{1}{4}.$

- 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}.$

  解：

$$\frac{\sin 5x - \tan 3x}{2x} = \frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2} - \frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2} \to 1$$

- 例: $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1.$

  证明: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0.$

- 例: 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}$.

  解: $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x} = \frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})} \to \frac{1}{4}.$

- 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}$.

  解:

$$\frac{\sin 5x - \tan 3x}{2x} = \frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2} - \frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2} \to 1$$

一个重要极限 –例 1

- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1.$

  证明： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ x_n = \frac{1}{n} \to 0.$

- 例： 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}.$

  解： $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x} = \frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})} \to \frac{1}{4}.$

- 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}.$

  解：

$$\frac{\sin 5x - \tan 3x}{2x} = \frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2} - \frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2} \to 1$$

极限不等式

- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，$\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$f(x) > g(x)$.
- 推论：若 $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$f(x) > 0$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，且在这个空心邻域上有 $f(x) \geq g(x)$. 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在，则有 $\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$.

极限不等式

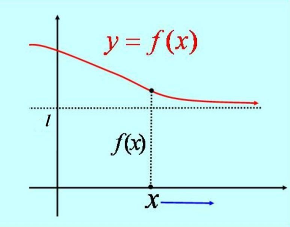
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $f(x) > g(x)$.
- 推论：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $f(x) > 0$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，且在这个空心邻域上有 $f(x) \geq g(x)$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 存在，则有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

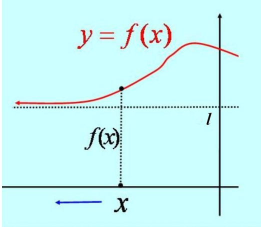
极限不等式

- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，$\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$f(x) > g(x)$.
- 推论：若 $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$f(x) > 0$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上有定义，且在这个空心邻域上有 $f(x) \geq g(x)$. 若极限 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ 存在，则有 $\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x)$.

极限的推广 1

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$: 存在 a, $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有定义. 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得当 $x>M$ 时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 则称 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 以 l 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

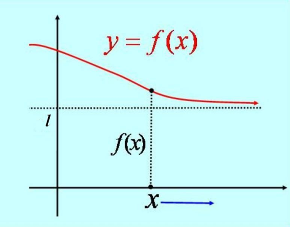


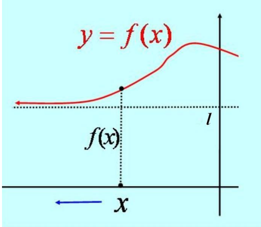


- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$: 存在 a, $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上有定义. 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $M<a$, 使得当 $x<M$ 时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 则称 $x\to-\infty$ 时, $f(x)$ 以 l 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

极限的推广 1

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$: 存在 a, $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有定义. 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $M>a$, 使得当 $x>M$ 时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 则称 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 以 l 为极限, 记为 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$.

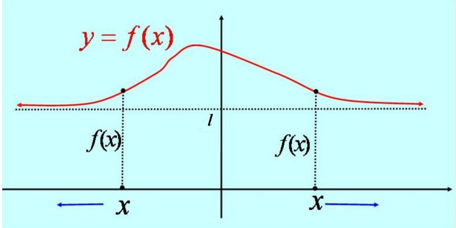




- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$: 存在 a, $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上有定义. 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $M<a$, 使得当 $x<M$ 时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 则称 $x\to-\infty$ 时, $f(x)$ 以 l 为极限, 记为 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$.

极限的推广 2

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$: 存在 $a > 0$, $f(x)$ 在 $\{x : |x| > a\}$ 上有定义. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $M > a$, 使得当 $|x| > M$ 时, $|f(x) - l| < \epsilon$, 则称 $x \to \infty$ 时, $f(x)$ 以 l 为极限, 记为 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$.



极限的推广 3

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: 对任意 M, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $f(x) > M$, 则称 $x \to a$ 时，$f(x)$ 趋向于 $+\infty$. （此时极限不存在）
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$: 对任意 M, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x)| > M$, 则称 $x \to a$ 时，$f(x)$ 趋向于 ∞.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$: 对任意 M, 存在 $A > 0$, 使得当 $x > A$ 时, $f(x) > M$, 则称 $x \to +\infty$ 时，$f(x)$ 趋向于 $+\infty$.
- 类似可定义 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$, $\cdots$.

极限的推广 3

- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$: 对任意 M, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $f(x) > M$, 则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 趋向于 $+\infty$. （此时极限不存在）
- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$: 对任意 M, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x)| > M$, 则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 趋向于 ∞.
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$: 对任意 M, 存在 $A > 0$, 使得当 $x > A$ 时, $f(x) > M$, 则称 $x \to +\infty$ 时, $f(x)$ 趋向于 $+\infty$.
- 类似可定义 $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to \infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$, $\cdots$.

极限的推广 3

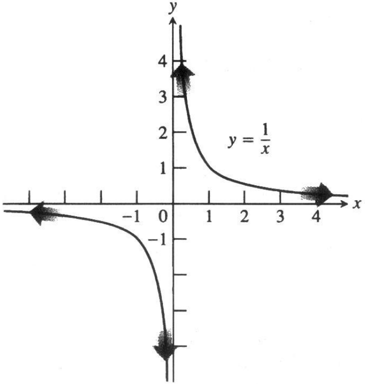
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: 对任意 M, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $f(x) > M$, 则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 趋向于 $+\infty$. (此时极限不存在)
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$: 对任意 M, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x)| > M$, 则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 趋向于 ∞.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$: 对任意 M, 存在 $A > 0$, 使得当 $x > A$ 时, $f(x) > M$, 则称 $x \to +\infty$ 时, $f(x)$ 趋向于 $+\infty$.
- 类似可定义 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$, $\cdots$.

极限的推广 3

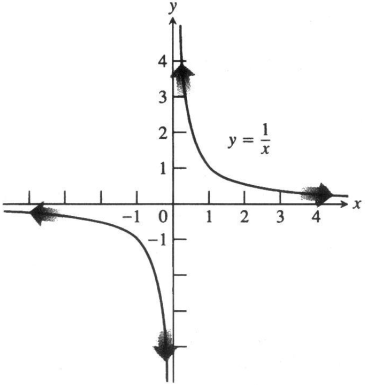
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: 对任意 M, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $f(x) > M$, 则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 趋向于 $+\infty$. (此时极限不存在)
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$: 对任意 M, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $|f(x)| > M$, 则称 $x \to a$ 时, $f(x)$ 趋向于 ∞.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: 对任意 M, 存在 $A > 0$, 使得当 $x > A$ 时, $f(x) > M$, 则称 $x \to +\infty$ 时, $f(x)$ 趋向于 $+\infty$.
- 类似可定义 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm0} f(x) = \infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\cdots$.

极限的推广 -例

- $\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim_{x \to 0\pm 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$

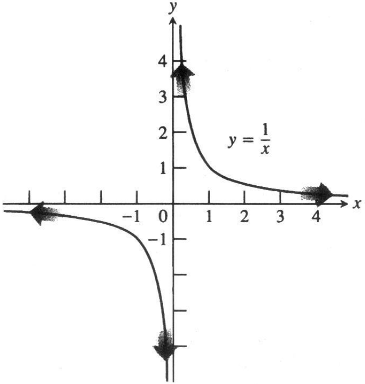


- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0.$



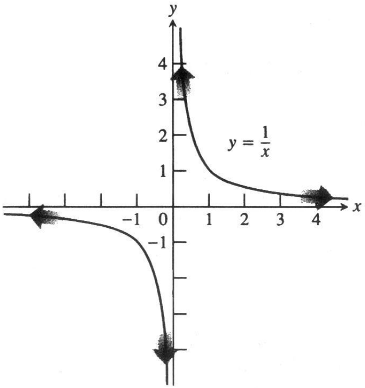
极限的推广 -例

- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0.$



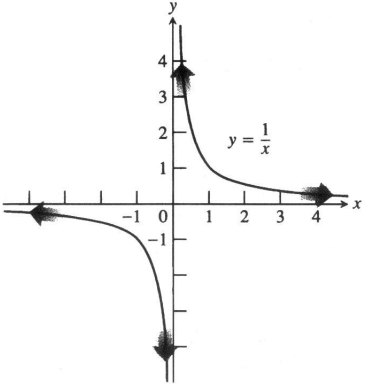
极限的推广 -例

- $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{1}{x}=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x}=0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=0.$



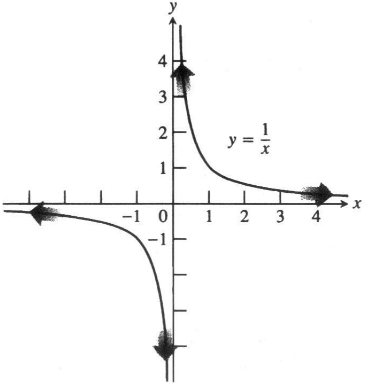
极限的推广 -例

- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0.$



极限的推广 -例

- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{1}{x} = \infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$.



- $x \to \pm\infty$ 或 ∞，极限有限时，相应的夹逼定理，四则运算定理，函数极限与序列极限的关系均成立. 如：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $x_n \to +\infty$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在有限, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, 则

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = -\infty.$$

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, 则

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty.$$

推广的极限的性质 1

- $x \to \pm\infty$ 或 ∞，极限有限时，相应的夹逼定理，四则运算定理，函数极限与序列极限的关系均成立. 如：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $x_n \to +\infty$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在有限，$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, 则

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = -\infty.$$

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, 则

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty.$$

推广的极限的性质 2

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, 这里 l 可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, 这里 a 可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(a + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(a - x)$,
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0 \pm 0} f(\frac{1}{x})$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(\frac{1}{x})$.
  证明：若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 则存在 M, 使得当 $|x| > M$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 即 $0 < |x| < \frac{1}{M}$ 时，$|f(\frac{1}{x}) - l| < \epsilon$.

推广的极限的性质 2

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, 这里 l 可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, 这里 a 可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(a+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(a-x)$,
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(\frac{1}{x})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$.
  证明：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 则存在 M, 使得当 $|x| > M$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 即 $0 < |x| < \frac{1}{M}$ 时，$|f(\frac{1}{x}) - l| < \epsilon$.

推广的极限的性质 2

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, 这里 l 可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, 这里 a 可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(a+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(a-x)$,
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(\frac{1}{x})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$.

  证明：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 则存在 M, 使得当 $|x| > M$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 即 $0 < |x| < \frac{1}{M}$ 时，$|f(\frac{1}{x}) - l| < \epsilon$.

推广的极限的性质 2

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, 这里 l 可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, 这里 a 可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(a+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(a-x)$,
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to0\pm0} f(\frac{1}{x})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to0} f(\frac{1}{x})$.
  证明：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 则存在 M, 使得当 $|x| > M$ 时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 即 $0 < |x| < \frac{1}{M}$ 时，$|f(\frac{1}{x}) - l| < \epsilon$.

无穷大量

- 定义：若 $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, 则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 为正（负）无穷大量；若 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, 则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 为无穷大量.（这里 a 可以是有限或无穷）
- 类似可定义序列的无穷大量：若 $\lim_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$, 则称 a_n 为正（负）无穷大量；若 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, 则称 a_n 为无穷大量.
- 注：无穷大量是变量，不是一个数.

无穷大量

- 定义：若 $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, 则称 $x \to a$ 时，$f(x)$ 为正（负）无穷大量；若 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, 则称 $x \to a$ 时，$f(x)$ 为无穷大量.（这里 a 可以是有限或无穷）
- 类似可定义序列的无穷大量：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, 则称 a_n 为正（负）无穷大量；若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, 则称 a_n 为无穷大量.
- 注：无穷大量是变量，不是一个数.

无穷大量

- 定义：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, 则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 为正（负）无穷大量；若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, 则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 为无穷大量.（这里 a 可以是有限或无穷）
- 类似可定义序列的无穷大量：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$, 则称 a_n 为正（负）无穷大量；若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, 则称 a_n 为无穷大量.
- 注：无穷大量是变量，不是一个数.

极限的推广 –例子 1

- 设 $n \le x < n+1$ 时 (即 $n = [x]$), $a_n \le f(x) \le b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, 则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
  证明: 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$|a_n - l| < \epsilon$, $|b_n - l| < \epsilon$. 当 $x > N+1$ 时，$x \ge [x] > N$, $f(x) \le b_{[x]} < l + \epsilon$, $f(x) \ge a_{[x]} > l - \epsilon$.
- 若存在 M, $f(x)$ 在 $[M, +\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = l$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
  证明: 不妨设 $f(x)$ 单调递增，$n \le x < n+1$ 时,
  $f(n) \le f(x) \le f(n+1)$,

极限的推广 –例子 1

- 设 $n \le x < n+1$ 时 (即 $n=[x]$), $a_n \le f(x) \le b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, 则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
  证明: 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - l| < \epsilon$, $|b_n - l| < \epsilon$. 当 $x > N+1$ 时, $x \ge [x] > N$, $f(x) \le b_{[x]} < l + \epsilon$, $f(x) \ge a_{[x]} > l - \epsilon$.
- 若存在 M, $f(x)$ 在 $[M, +\infty)$ 上单调, $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = l$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
  证明: 不妨设 $f(x)$ 单调递增, $n \le x < n+1$ 时,
  $f(n) \le f(x) \le f(n+1)$,

- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

  证明：当 $n \le x < n+1$ 时，$(1+\frac{1}{n+1})^n \le f(x) \le (1+\frac{1}{n})^{n+1}$，
  $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e.$

  对于 $x \to -\infty$，令 $t = -x-1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.$$

- 注：$\lim\limits_{x\to 0+0}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$

  证明: $x > 1$ 时，

$$x^{\frac{1}{x}} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \le (2x)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot x^{\frac{1}{x}}.$$

- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

  证明：当 $n\le x<n+1$ 时，$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le f(x)\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，
  $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=e.$

  对于 $x\to-\infty$，令 $t=-x-1$.

  $$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)=e.$$

- 注：$\lim\limits_{x\to 0+0}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1.$

  证明：$x>1$ 时，

  $$x^{\frac{1}{x}}\le(1+x)^{\frac{1}{x}}\le(2x)^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{x}}\cdot x^{\frac{1}{x}}.$$

极限的推广 –例子 2

- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

  证明：当 $n \le x < n+1$ 时，$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le f(x) \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，

  $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e.$

  对于 $x\to-\infty$，令 $t=-x-1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.$$

- 注：$\lim\limits_{x\to 0+0}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$

  证明：$x>1$ 时，

$$x^{\frac{1}{x}} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \le (2x)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}}\cdot x^{\frac{1}{x}}.$$

极限的推广 –例子 2

- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

  证明：当 $n \le x < n+1$ 时，$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le f(x) \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，

  $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e.$

  对于 $x \to -\infty$，令 $t = -x-1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.$$

- 注：$\lim\limits_{x\to 0+0}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$

  证明：$x > 1$ 时，

$$x^{\frac{1}{x}} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \le (2x)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot x^{\frac{1}{x}}.$$

- $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

  证明：当 $n \le x < n+1$ 时，$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le f(x) \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，

  $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e$.

  对于 $x\to -\infty$，令 $t = -x-1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.$$

- 注: $\lim_{x\to 0+0}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

  证明: $x > 1$ 时,

$$x^{\frac{1}{x}} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \le (2x)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} \cdot x^{\frac{1}{x}}.$$

极限的推广 –例子 3

- $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

  证明：$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$. $n \le x < n+1$ 时，

$$\frac{x}{e^x} \le \frac{n+1}{e^n} \le \frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n} \to 0.$$

- $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

  证明：利用 $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = 1$. 结论由下面的不等式得出 (设 $x > 1$):

$$1 \le x^{\frac{1}{x}} \le ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1.$$

极限

极限的推广 –例子 3

- $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

  证明：$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0.$ $n \le x < n+1$ 时，

$$\frac{x}{e^x} \le \frac{n+1}{e^n} \le \frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n} \to 0.$$

- $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

  证明：利用 $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = 1.$ 结论由下面的不等式得出 (设 $x > 1$):

$$1 \le x^{\frac{1}{x}} \le ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1.$$

极限

极限的推广 –例子 3

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$
  证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0.$ $n \le x < n+1$ 时，
  $$\frac{x}{e^x} \le \frac{n+1}{e^n} \le \frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n} \to 0.$$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$
  证明：利用 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = 1.$ 结论由下面的不等式得出 (设 $x > 1$)：
  $$1 \le x^{\frac{1}{x}} \le ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1.$$

极限

极限的推广 –例子 3

- $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$
  证明：$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0.$ $n \le x < n+1$ 时，
  $$\frac{x}{e^x} \le \frac{n+1}{e^n} \le \frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n} \to 0.$$
- $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$
  证明：利用 $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = 1.$ 结论由下面的不等式得出 (设 $x > 1$)：
  $$1 \le x^{\frac{1}{x}} \le ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1.$$

极限的推广 –例子 3

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$
  证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0.$ $n \le x < n+1$ 时，

$$\frac{x}{e^x} \le \frac{n+1}{e^n} \le \frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n} \to 0.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$
  证明：利用 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = 1.$ 结论由下面的不等式得出 (设 $x > 1$)：

$$1 \le x^{\frac{1}{x}} \le ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1.$$

- 例

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+(\cos\frac{1}{n}-1)\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{n}-1}}\right]^{\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

这里用到：若极限 $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=b$, 则有 $\lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=a^b$, 以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\sin^2\frac{1}{2n}}{4\frac{1}{(2n)^2}}=-\frac{1}{2}.$$

连续函数

- 连续函数是指函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 的变化很小时，所引起的因变量 y 的变化也很小。例如，气温随时间变化，只要时间变化很小，气温的变化也是很小的；又如，自由落体的位移随时间变化，只要时间变化足够短，位移的变化也是很小的。对于这种现象，因变量关于自变量是连续变化的，连续函数在直角坐标系中的图像是一条没有断裂的连续曲线。
- $y=f(x)$ 在 x_0 点连续：对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

- 连续函数是指函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 的变化很小时，所引起的因变量 y 的变化也很小。例如，气温随时间变化，只要时间变化很小，气温的变化也是很小的；又如，自由落体的位移随时间变化，只要时间变化足够短，位移的变化也是很小的。对于这种现象，因变量关于自变量是连续变化的，连续函数在直角坐标系中的图像是一条没有断裂的连续曲线。
- $y=f(x)$ 在 x_0 点连续：对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

连续函数的定义 1

- 定义：$y=f(x)$ 在 x_0 某个邻域 (x_0-r,x_0+r) 有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.
- 定义：$y=f(x)$ 在 (a,b) 上有定义，若 $f(x)$ 在 (a,b) 上处处连续，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上连续.
- 注：连续是一个局部概念，每点处的连续性只与该点附近的取值有关.
- 例：$f(x)=x\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. 0 是唯一的连续点.

连续函数的定义 1

- 定义：$y = f(x)$ 在 x_0 某个邻域 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 有定义. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
- 定义：$y = f(x)$ 在 (a, b) 上有定义，若 $f(x)$ 在 (a, b) 上处处连续，则称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上连续.
- 注：连续是一个局部概念，每点处的连续性只与该点附近的取值有关.
- 例：$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 0 是唯一的连续点.

连续函数的定义 1

- 定义：$y=f(x)$ 在 x_0 某个邻域 (x_0-r,x_0+r) 有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.
- 定义：$y=f(x)$ 在 (a,b) 上有定义，若 $f(x)$ 在 (a,b) 上处处连续，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上连续.
- 注：连续是一个局部概念，每点处的连续性只与该点附近的取值有关.
- 例：$f(x)=x\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. 0 是唯一的连续点.

连续函数的定义 1

- 定义：$y = f(x)$ 在 x_0 某个邻域 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 有定义. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
- 定义：$y = f(x)$ 在 (a, b) 上有定义，若 $f(x)$ 在 (a, b) 上处处连续，则称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上连续.
- 注：连续是一个局部概念，每点处的连续性只与该点附近的取值有关.
- 例：$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 0 是唯一的连续点.

- 定义：$y = f(x)$ 在 $[x_0, b]$ 上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续. 类似可定义左连续.
- 定义：$y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，若 $f(x)$ 在 (a, b) 上处处连续，而且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称 $y = f(x)$在 $[a, b]$ 上连续.
- 注：类似可定义 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, a]$ 上的连续函数.
- 例：$\sqrt{x}$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数，$\sqrt{x(1-x)}$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数.

连续函数的定义 2

- 定义：$y=f(x)$ 在 $[x_0,b]$ 上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续. 类似可定义左连续.
- 定义：$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，若 $f(x)$ 在 (a,b) 上处处连续，而且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称 $y=f(x)$在 $[a,b]$ 上连续.
- 注：类似可定义 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,a]$ 上的连续函数.
- 例：$\sqrt{x}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，$\sqrt{x(1-x)}$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

连续函数的定义 2

- 定义：$y = f(x)$ 在 $[x_0, b]$ 上有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续. 类似可定义左连续.
- 定义：$y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，若 $f(x)$ 在 (a, b) 上处处连续，而且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称 $y = f(x)$在 $[a, b]$ 上连续.
- 注：类似可定义 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, a]$ 上的连续函数.
- 例：$\sqrt{x}$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数，$\sqrt{x(1-x)}$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数.

连续函数的定义 2

- 定义：$y = f(x)$ 在 $[x_0, b]$ 上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续. 类似可定义左连续.
- 定义：$y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义，若 $f(x)$ 在 (a, b) 上处处连续，而且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称 $y = f(x)$在 $[a, b]$ 上连续.
- 注：类似可定义 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, a]$ 上的连续函数.
- 例：$\sqrt{x}$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数，$\sqrt{x(1-x)}$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数.

连续函数 –例

- $\sin x$, $\cos x$, a^x, x^n 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.
- $\ln x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 上在 0 处不连续.
- 例: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 已知 $f(1) = 2$, 且对任意有理数 x, y, 有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 证明 $f(x) = 2^x$.
  证明: $f(1) = f(1)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$, $f(1) = f^n(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = 2^{\frac{1}{n}}$,
  $f(\frac{m}{n}) = f^m(\frac{1}{n}) = 2^{\frac{m}{n}}$, $f(0) = f(\frac{m}{n})f(-\frac{m}{n}) \Rightarrow f(-\frac{m}{n}) = 2^{-\frac{m}{n}}$,
  对无理数 x, 存在有理数列 $r_n \to x$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{r_n} = 2^x$.

连续函数 –例

- $\sin x$, $\cos x$, a^x, x^n 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.
- $\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 上在 0 处不连续.
- 例: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 已知 $f(1)=2$, 且对任意有理数 x,y, 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 证明 $f(x)=2^x$.

  证明: $f(1)=f(1)f(0)\Rightarrow f(0)=1$, $f(1)=f^n(\frac{1}{n})\Rightarrow f(\frac{1}{n})=2^{\frac{1}{n}}$,
  $f(\frac{m}{n})=f^m(\frac{1}{n})=2^{\frac{m}{n}}$, $f(0)=f(\frac{m}{n})f(-\frac{m}{n})\Rightarrow f(-\frac{m}{n})=2^{-\frac{m}{n}}$,
  对无理数 x, 存在有理数列 $r_n\to x$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{r_n}=2^x$.

连续函数 –例

- $\sin x$, $\cos x$, a^x, x^n 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.
- $\ln x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 上在 0 处不连续.
- 例: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 已知 $f(1) = 2$, 且对任意有理数 x, y, 有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 证明 $f(x) = 2^x$.

  证明: $f(1) = f(1)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$, $f(1) = f^n(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = 2^{\frac{1}{n}}$,
  $f(\frac{m}{n}) = f^m(\frac{1}{n}) = 2^{\frac{m}{n}}$, $f(0) = f(\frac{m}{n})f(-\frac{m}{n}) \Rightarrow f(-\frac{m}{n}) = 2^{-\frac{m}{n}}$,
  对无理数 x, 存在有理数列 $r_n \to x$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{r_n} = 2^x$.

连续函数 –例

- $\sin x$, $\cos x$, a^x, x^n 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.
- $\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 上在 0 处不连续.
- 例: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 已知 $f(1)=2$, 且对任意有理数 x,y, 有 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 证明 $f(x)=2^x$.

  证明: $f(1)=f(1)f(0)\Rightarrow f(0)=1$, $f(1)=f^n(\frac{1}{n})\Rightarrow f(\frac{1}{n})=2^{\frac{1}{n}}$, $f(\frac{m}{n})=f^m(\frac{1}{n})=2^{\frac{m}{n}}$, $f(0)=f(\frac{m}{n})f(-\frac{m}{n})\Rightarrow f(-\frac{m}{n})=2^{-\frac{m}{n}}$,
  对无理数 x, 存在有理数列 $r_n\to x$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{r_n}=2^x$.

连续函数 –例

- $\sin x$, $\cos x$, a^x, x^n 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.
- $\ln x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 上在 0 处不连续.
- 例: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 已知 $f(1) = 2$, 且对任意有理数 x, y, 有 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 证明 $f(x) = 2^x$.
  证明: $f(1) = f(1)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$, $f(1) = f^n(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = 2^{\frac{1}{n}}$,
  $f(\frac{m}{n}) = f^m(\frac{1}{n}) = 2^{\frac{m}{n}}$, $f(0) = f(\frac{m}{n})f(-\frac{m}{n}) \Rightarrow f(-\frac{m}{n}) = 2^{-\frac{m}{n}}$,
  对无理数 x, 存在有理数列 $r_n \to x$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{r_n} = 2^x$.

连续的四则运算

- 定理：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则有 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 处连续.
- 注：对于左（右）连续，区间上连续也有相应四则运算定理.
- 例：$y = \tan x$, $\cot x$ 在各自定义域内连续.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

连续的四则运算

- 定理：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则有 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 处连续.
- 注：对于左（右）连续，区间上连续也有相应四则运算定理.
- 例：$y = \tan x$, $\cot x$ 在各自定义域内连续.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

连续的四则运算

- 定理：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则有 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 处连续.
- 注：对于左（右）连续，区间上连续也有相应四则运算定理.
- 例：$y = \tan x$, $\cot x$ 在各自定义域内连续.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

连续的四则运算

- 定理：设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则有 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 处连续.
- 注：对于左（右）连续，区间上连续也有相应四则运算定理.
- 例：$y = \tan x$, $\cot x$ 在各自定义域内连续.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

复合函数的极限 1

- 设 $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, $f(x):(a,b)\backslash\{x_0\} \to (c,d)\backslash\{y_0\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. $g(y):(c,d)\backslash\{y_0\} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$. 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = l = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$.
- 证明：$\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 δ_1, 使得当 $0 < |y - y_0| < \delta_1$ 时，$|g(y) - l| < \epsilon$. 又由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ 及 $f(x) \neq y_0$，存在 $\delta < r$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $0 < |f(x) - y_0| < \delta_1$. 因此当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|g(f(x)) - l)| < \epsilon$.

$$\boxed{0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow 0 < |f(x) - y_0| < \delta_1 \longrightarrow |g(f(x)) - l| < \epsilon}$$

复合函数的极限 1

- 设 $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, $f(x):(a,b)\backslash\{x_0\} \to (c,d)\backslash\{y_0\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. $g(y):(c,d)\backslash\{y_0\} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$. 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = l = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$.
- 证明：$\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 δ_1, 使得当 $0 < |y - y_0| < \delta_1$ 时，$|g(y) - l| < \epsilon$. 又由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ 及 $f(x) \neq y_0$，存在 $\delta < r$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $0 < |f(x) - y_0| < \delta_1$. 因此当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|g(f(x)) - l)| < \epsilon$.

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow 0 < |f(x) - y_0| < \delta_1 \\ \longrightarrow |g(f(x)) - l| < \epsilon \end{array}}$$

复合函数的极限 2

- 注：上面定理中，$g(y)$ 在 y_0 处可以没有定义. 即使 $g(y)$ 在 y_0 处有定义，由于 $g(y_0)$ 与极限无关，$f(x)$ 也不能等于 y_0. 如 $g(y) = |\operatorname{sgn} y|$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 取 $x_0 = y_0 = 0$.
- 注：若 $f(x) : (a, b) \to (c, d)$, 若 $x_0 \in (a, b)$，$c = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. $g(y) : (c, d) \to \mathbb{R}$. $\lim\limits_{y \to c+0} g(y) = l$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.
- 注：$x_0, y_0 = \pm\infty, \infty$, 或 $l = \pm\infty, \infty$ 时，也有类似的结论成立. 如：若 $g(y)$ 与 $f(x)$ 的复合 $g(f(x))$ 在 x_0 的某个空心邻域上有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = l$, 则有 $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.

函数极限与序列极限

复合函数的极限 2

- 注：上面定理中，$g(y)$ 在 y_0 处可以没有定义. 即使 $g(y)$ 在 y_0 处有定义，由于 $g(y_0)$ 与极限无关，$f(x)$ 也不能等于 y_0. 如 $g(y)=|\operatorname{sgn} y|$, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, 取 $x_0=y_0=0$.
- 注：若 $f(x):(a,b)\to(c,d)$, 若 $x_0\in(a,b)$，$c=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. $g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. $\lim\limits_{y\to c+0}g(y)=l$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=l$.
- 注：$x_0,y_0=\pm\infty,\infty$, 或 $l=\pm\infty,\infty$ 时，也有类似的结论成立. 如：若 $g(y)$ 与 $f(x)$ 的复合 $g(f(x))$ 在 x_0 的某个空心邻域上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)=l$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=l$.

函数极限与序列极限

复合函数的极限 2

- 注：上面定理中，$g(y)$ 在 y_0 处可以没有定义. 即使 $g(y)$ 在 y_0 处有定义，由于 $g(y_0)$ 与极限无关，$f(x)$ 也不能等于 y_0. 如 $g(y)=|\operatorname{sgn} y|$, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, 取 $x_0=y_0=0$.
- 注：若 $f(x):(a,b)\to(c,d)$, 若 $x_0\in(a,b)$，$c=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. $g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. $\lim\limits_{y\to c+0}g(y)=l$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=l$.
- 注：$x_0,y_0=\pm\infty,\infty$, 或 $l=\pm\infty,\infty$ 时，也有类似的结论成立. 如：若 $g(y)$ 与 $f(x)$ 的复合 $g(f(x))$ 在 x_0 的某个空心邻域上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)=l$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=l$.

函数极限与序列极限

复合函数的极限 3

- 定理：设 $x_0 \in (a,b)$，$f(x):(a,b)\backslash\{x_0\} \to (c,d)$，$g(y):(c,d) \to \mathbb{R}$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$，而 $g(y)$ 在 y_0 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = g(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$.
- 证明：由于 $g(y)$ 在 y_0 处连续，对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $|y - y_0| < \delta_1$ 时，$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$. 又由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - y_0| < \delta_1$，从而有 $|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$.

$$\boxed{0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - y_0| < \delta_1 \longrightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon}$$

- 注：若 $g(y)$ 在 y_0 处没定义，可定义 $g(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$ 使得 $g(y)$ 在 y_0 处连续.

复合函数的极限 3

- 定理：设 $x_0 \in (a,b)$，$f(x):(a,b)\backslash\{x_0\} \to (c,d)$，$g(y):(c,d) \to \mathbb{R}$. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$，而 $g(y)$ 在 y_0 处连续，则有
  $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g(\lim\limits_{x \to x_0} f(x))$.
- 证明：由于 $g(y)$ 在 y_0 处连续，对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $|y - y_0| < \delta_1$ 时，$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$. 又由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - y_0| < \delta_1$，从而有 $|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$.

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - y_0| < \delta_1 \\ \longrightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon \end{array}}$$

- 注：若 $g(y)$ 在 y_0 处没定义，可定义 $g(y_0) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y)$ 使得 $g(y)$ 在 y_0 处连续.

复合函数的极限 3

- 定理：设 $x_0 \in (a,b)$，$f(x):(a,b)\backslash\{x_0\} \to (c,d)$，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$。若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$，而 $g(y)$ 在 y_0 处连续，则有
$\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = g(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$.
- 证明：由于 $g(y)$ 在 y_0 处连续，对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $|y-y_0| < \delta_1$ 时，$|g(y)-g(y_0)| < \epsilon$. 又由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时，$|f(x)-y_0| < \delta_1$，从而有 $|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$.

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < |x-x_0| < \delta \longrightarrow |f(x)-y_0| < \delta_1 \\ \longrightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon \end{array}}$$

- 注：若 $g(y)$ 在 y_0 处没定义，可定义 $g(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$ 使得 $g(y)$ 在 y_0 处连续.

复合函数的连续性

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 在 x_0 处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续。

  证明：由于 $g(y)$ 在 y_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，利用复合函数的极限定理有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(f(x_0))$，因此 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.

- 注：若 $f(x):(a,b)\to[c,d)$，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若 $x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(y)$ 在 c 处右连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.

  例：$f(x)=x^2$, $g(y)=\sqrt{y}$, $g\circ f=|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

- 注：若 $f(x):[a,b)\to(c,d)$ 在 $x=a$ 处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在 $y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 a 处右连续.

复合函数的连续性

- 定理: 设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 在 x_0 处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
  证明：由于 $g(y)$ 在 y_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 利用复合函数的极限定理有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(f(x_0))$, 因此 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
- 注：若 $f(x):(a,b)\to[c,d)$，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若 $x_0\in(a,b)$, $c=f(x_0)$. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(y)$ 在 c 处右连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
  例：$f(x)=x^2$, $g(y)=\sqrt{y}$, $g\circ f=|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.
- 注：若 $f(x):[a,b)\to(c,d)$ 在 $x=a$ 处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在 $y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 a 处右连续.

复合函数的连续性

- 定理: 设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 在 x_0 处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
  证明：由于 $g(y)$ 在 y_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 利用复合函数的极限定理有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(f(x_0))$, 因此 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
- 注：若 $f(x):(a,b)\to[c,d)$，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若 $x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(y)$ 在 c 处右连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
  例：$f(x)=x^2$, $g(y)=\sqrt{y}$, $g\circ f=|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.
- 注：若 $f(x):[a,b)\to(c,d)$ 在 $x=a$ 处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在 $y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 a 处右连续.

复合函数的连续性

- 定理: 设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 在 x_0 处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
  证明：由于 $g(y)$ 在 y_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 利用复合函数的极限定理有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(f(x_0))$, 因此 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
- 注：若 $f(x):(a,b)\to[c,d)$，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若 $x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(y)$ 在 c 处右连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
  例：$f(x)=x^2$, $g(y)=\sqrt{y}$, $g\circ f=|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.
- 注：若 $f(x):[a,b)\to(c,d)$ 在 $x=a$ 处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在 $y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 a 处右连续.

复合函数的连续性

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 在 x_0 处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
  证明：由于 $g(y)$ 在 y_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，利用复合函数的极限定理有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(f(x_0))$，因此 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
- 注：若 $f(x):(a,b)\to[c,d)$，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若 $x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(y)$ 在 c 处右连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 x_0 处连续.
  例：$f(x)=x^2$, $g(y)=\sqrt{y}$, $g\circ f=|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.
- 注：若 $f(x):[a,b)\to(c,d)$ 在 $x=a$ 处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在 $y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数 $g\circ f$ 在 a 处右连续.

复合函数的连续性 –例子 1

- $k \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{k}{kx}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = e^k$.
- $x^a = e^{a\ln x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. 当 $a>0$ 时在 $[0,+\infty)$ 上连续.
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.
- $I = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$.

  证明:

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-1+1)}{e^x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y} = 1.$$

  这里用变换 $y=e^x-1$, $x\neq 0$ 时, $f(x)\neq 0$.

复合函数的连续性 –例子 1

- $k \neq 0$, $\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{k}{kx}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = e^k$.
- $x^a = e^{a\ln x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. 当 $a>0$ 时在 $[0,+\infty)$ 上连续.
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.
- $I = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$.

  证明:
  $$I = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-1+1)}{e^x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y} = 1.$$
  这里用变换 $y = e^x - 1$, $x \neq 0$ 时, $f(x) \neq 0$.

复合函数的连续性 –例子 1

- $k \neq 0$, $\lim\limits_{x \to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0}(1+kx)^{\frac{k}{kx}} = \lim\limits_{y \to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = e^k$.
- $x^a = e^{a \ln x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续. 当 $a > 0$ 时在 $[0, +\infty)$ 上连续.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.
- $I = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1}$.

  证明:
  $$I = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x - 1 + 1)}{e^x - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1.$$
  这里用变换 $y = e^x - 1$, $x \neq 0$ 时, $f(x) \neq 0$.

复合函数的连续性 –例子 1

- $k \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{k}{kx}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = e^k$.
- $x^a = e^{a\ln x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. 当 $a>0$ 时在 $[0,+\infty)$ 上连续.
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.
- $I = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$.

  证明:
  $$I = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-1+1)}{e^x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y} = 1.$$
  这里用变换 $y=e^x-1$, $x\neq 0$ 时, $f(x)\neq 0$.

复合函数的连续性 –例子 2

- $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续，而且 $f(x_0) > 0$, 则有 $f(x)^{g(x)}$ 在 x_0 处连续.

  证明：$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = 0.$ 极限
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0.$
- 例

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

复合函数的连续性 –例子 2

- $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续，而且 $f(x_0) > 0$, 则有 $f(x)^{g(x)}$ 在 x_0 处连续.
  证明：$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = 0.$ 极限
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0.$
- 例

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

复合函数的连续性 –例子 2

- $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续，而且 $f(x_0) > 0$, 则有 $f(x)^{g(x)}$ 在 x_0 处连续.
  证明：$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = 0.$ 极限
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0.$
- 例

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

复合函数的连续性 –例子 2

- $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续，而且 $f(x_0) > 0$，则有 $f(x)^{g(x)}$ 在 x_0 处连续. 证明：$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = 0.$ 极限
- $\lim\limits_{x\to0+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0+0} x^x = \lim\limits_{x\to0+0} e^{x\ln x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0.$
- 例

$$\lim_{x\to0}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

复合函数的连续性 –例子 2

- $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续，而且 $f(x_0) > 0$, 则有 $f(x)^{g(x)}$ 在 x_0 处连续. 证明：$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = 0$. 极限
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$.
- 例

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

复合函数的连续性 –例子 2

- $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续，而且 $f(x_0) > 0$, 则有 $f(x)^{g(x)}$ 在 x_0 处连续. 证明：$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = 0.$ 极限
- $\lim\limits_{x\to0+0} x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0+0} x^x = \lim\limits_{x\to0+0} e^{x\ln x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0.$
- 例

$$\lim_{x\to0}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\left(1+\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}-2\sin^2 x}{x}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

反函数的连续性 1

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，并且是严格单调函数. 则 f 是 (a,b) 上连续函数，且 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数.
- 引理: 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的单调函数, 则对任意 $x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在。
证明: 取 $x_n\in(a,b)$ 严格单调递增趋向于 x_0, 则 $f(x_n)$ 有极限 A, 下面证明 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$. 事实上对任意 $\epsilon>0$, 存在 N, $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<\epsilon$. 当 $x_{N+1}<x<x_0$, 即 $-(x_0-x_{N+1})<x-x_0<0$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon$.
- 定理证明: 设 f 在 x_0 处不连续, 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=B$, 则 $A\neq B$, 若 y 在 A,B 之间, 且 $y\neq f(x_0)$, 则 y 没有原像.
- 注：上面定理中 a,c 可以取 $-\infty$, b, d 可以取 $+\infty$. 开区间也可以换成闭区间.

反函数的连续性 1

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，并且是严格单调函数. 则 f 是 (a,b) 上连续函数，且 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数.
- 引理: 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的单调函数, 则对任意 $x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在。
  证明: 取 $x_n\in(a,b)$ 严格单调递增趋向于 x_0, 则 $f(x_n)$ 有极限 A, 下面证明 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$. 事实上对任意 $\epsilon>0$, 存在 N, $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<\epsilon$. 当 $x_{N+1}<x<x_0$, 即 $-(x_0-x_{N+1})<x-x_0<0$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon$.
- 定理证明: 设 f 在 x_0 处不连续, 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=B$, 则 $A\neq B$, 若 y 在 A,B 之间, 且 $y\neq f(x_0)$, 则 y 没有原像.
- 注：上面定理中 a,c 可以取 $-\infty$, b, d 可以取 $+\infty$. 开区间也可以换成闭区间.

反函数的连续性 1

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，并且是严格单调函数. 则 f 是 (a,b) 上连续函数，且 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数.
- 引理: 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的单调函数, 则对任意 $x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在。
  证明: 取 $x_n\in(a,b)$ 严格单调递增趋向于 x_0, 则 $f(x_n)$ 有极限 A, 下面证明 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$. 事实上对任意 $\epsilon>0$, 存在 N, $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<\epsilon$. 当 $x_{N+1}<x<x_0$, 即 $-(x_0-x_{N+1})<x-x_0<0$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon$.
- 定理证明: 设 f 在 x_0 处不连续, 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=B$, 则 $A\neq B$, 若 y 在 A,B 之间, 且 $y\neq f(x_0)$, 则 y 没有原像.
- 注：上面定理中 a,c 可以取 $-\infty$, b, d 可以取 $+\infty$. 开区间也可以换成闭区间.

反函数的连续性 1

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，并且是严格单调函数. 则 f 是 (a,b) 上连续函数，且 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数.
- 引理: 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的单调函数, 则对任意 $x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在。
  证明: 取 $x_n\in(a,b)$ 严格单调递增趋向于 x_0, 则 $f(x_n)$ 有极限 A, 下面证明 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$. 事实上对任意 $\epsilon>0$, 存在 N, $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<\epsilon$. 当 $x_{N+1}<x<x_0$, 即 $-(x_0-x_{N+1})<x-x_0<0$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon$.
- 定理证明: 设 f 在 x_0 处不连续, 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=B$, 则 $A\neq B$, 若 y 在 A,B 之间, 且 $y\neq f(x_0)$, 则 y 没有原像.
- 注：上面定理中 a,c 可以取 $-\infty$, b, d 可以取 $+\infty$. 开区间也可以换成闭区间.

反函数的连续性 1

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，并且是严格单调函数. 则 f 是 (a,b) 上连续函数，且 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数.
- 引理: 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的单调函数, 则对任意 $x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在。
  证明: 取 $x_n\in(a,b)$ 严格单调递增趋向于 x_0, 则 $f(x_n)$ 有极限 A, 下面证明 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$. 事实上对任意 $\epsilon>0$, 存在 N, $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<\epsilon$. 当 $x_{N+1}<x<x_0$, 即 $-(x_0-x_{N+1})<x-x_0<0$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon$.
- 定理证明: 设 f 在 x_0 处不连续, 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=B$, 则 $A\neq B$, 若 y 在 A,B 之间, 且 $y\neq f(x_0)$, 则 y 没有原像.
- 注：上面定理中 a,c 可以取 $-\infty$, b, d 可以取 $+\infty$. 开区间也可以换成闭区间.

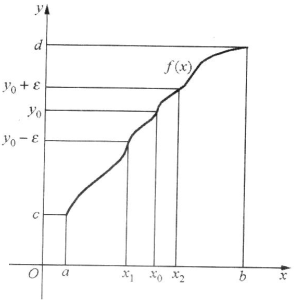
反函数的连续性 2

- 定理证明：不妨设 f 是严格增函数. 对任意 $x_0 \in (a,b)$, 设 $y_0 = f(x_0)$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 不妨设 $\epsilon < \min\{y_0 - c, d - y_0\}$, 则有 $c < y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon < d$. 令 $x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon)$, $x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon)$, $\delta = \min(x_2 - x_0, x_0 - x_1)$, 则有当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $x_1 < x < x_2$, 即得

$$y_0 - \epsilon < f(x) < y_0 + \epsilon.$$

$f(x)$ 在 x_0 处连续.
f^{-1} 和 f 满足同样的条件, 故同样连续.

$$y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon \longleftrightarrow$$
$$x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon) < x < x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon)$$



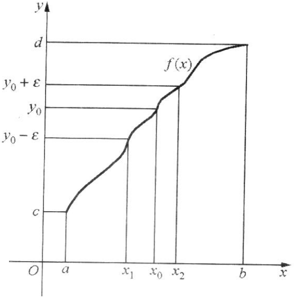
- 定理证明：不妨设 f 是严格增函数. 对任意 $x_0 \in (a, b)$, 设 $y_0 = f(x_0)$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 不妨设 $\epsilon < \min\{y_0 - c, d - y_0\}$, 则有 $c < y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon < d$. 令 $x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon)$, $x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon)$, $\delta = \min(x_2 - x_0, x_0 - x_1)$, 则有当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$x_1 < x < x_2$, 即得

$$y_0 - \epsilon < f(x) < y_0 + \epsilon.$$

$f(x)$ 在 x_0 处连续.

f^{-1} 和 f 满足同样的条件，故同样连续.

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon \longleftrightarrow \\ x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon) < x < x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon) \end{array}}$$



反函数的连续性 2

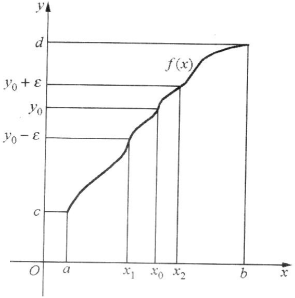
- 定理证明：不妨设 f 是严格增函数. 对任意 $x_0 \in (a, b)$, 设 $y_0 = f(x_0)$. 对任意的 $\epsilon > 0$, 不妨设 $\epsilon < \min\{y_0 - c, d - y_0\}$, 则有 $c < y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon < d$. 令 $x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon)$, $x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon)$, $\delta = \min(x_2 - x_0, x_0 - x_1)$, 则有当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$x_1 < x < x_2$, 即得

$$y_0 - \epsilon < f(x) < y_0 + \epsilon.$$

$f(x)$ 在 x_0 处连续.

f^{-1} 和 f 满足同样的条件，故同样连续.

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0 - \epsilon < y < y_0 + \epsilon \longleftrightarrow \\ x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon) < x < x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon) \end{array}}$$



初等函数的连续性 1

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$,
  $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.

初等函数的连续性 1

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$,
  $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\text{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.

初等函数的连续性 1

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$,
  $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.

初等函数的连续性 1

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$,
  $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\text{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.

初等函数的连续性 1

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$,
  $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.

初等函数的连续性 1

- $\cos x : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty,+\infty) \to (0,+\infty)$,
  $\log_a : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to (-\infty,+\infty)$, $\arctan : (-\infty,+\infty) \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0,\pi) \to (-\infty,+\infty)$, $\operatorname{arccot} : (-\infty,+\infty) \to (0,\pi)$.

初等函数的连续性 2

- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 是初等函数，在定义域 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上连续.
- 符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数，点 0 处不连续.

初等函数的连续性 2

- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 是初等函数，在定义域 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上连续.
- 符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数，点 0 处不连续.

初等函数的连续性 2

- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.
- 例：$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 是初等函数，在定义域 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 上连续.
- 符号函数 $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数，点 0 处不连续.

间断点的分类

- 间断点：$f(x)$ 在 x_0 附近有定义，$f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 是 f 的间断点.
- x_0 是 f 的间断点 $\Leftrightarrow$ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，或者极限存在但不等于 $f(x_0)$.
- 第一类间断点：设 x_0 是 f 的间断点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 都存在，则称 x_0 是 f 的第一类间断点.
- 第二类间断点：若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是 f 的第二类间断点.

间断点的分类

- 间断点：$f(x)$ 在 x_0 附近有定义，$f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 是 f 的间断点.
- x_0 是 f 的间断点 $\Leftrightarrow$ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，或者极限存在但不等于 $f(x_0)$.
- 第一类间断点：设 x_0 是 f 的间断点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 都存在，则称 x_0 是 f 的第一类间断点.
- 第二类间断点：若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是 f 的第二类间断点.

间断点的分类

- 间断点：$f(x)$ 在 x_0 附近有定义，$f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 是 f 的间断点.
- x_0 是 f 的间断点 $\Leftrightarrow$ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，或者极限存在但不等于 $f(x_0)$.
- 第一类间断点: 设 x_0 是 f 的间断点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 都存在，则称 x_0 是 f 的第一类间断点.
- 第二类间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是 f 的第二类间断点.

间断点的分类

- 间断点：$f(x)$ 在 x_0 附近有定义，$f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 是 f 的间断点.
- x_0 是 f 的间断点 $\Leftrightarrow$ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，或者极限存在但不等于 $f(x_0)$.
- 第一类间断点: 设 x_0 是 f 的间断点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 都存在，则称 x_0 是 f 的第一类间断点.
- 第二类间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是 f 的第二类间断点.

间断点的例子

- 注：第一类间断点有两种，一是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$，此时称 x_0 是 f 的可去间断点；另一种是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$ 是第一类间断点.
- $y = |\operatorname{sgn} x|$, $x = 0$ 是第一类间断点 (可去间断点).
- Dirichlet 函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，0 是第二类间断点.

间断点的例子

- 注：第一类间断点有两种，一是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$，此时称 x_0 是 f 的可去间断点；另一种是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$ 是第一类间断点.
- $y = |\operatorname{sgn} x|$, $x = 0$ 是第一类间断点 (可去间断点).
- Dirichlet 函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，0 是第二类间断点.

间断点的例子

- 注：第一类间断点有两种，一是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$，此时称 x_0 是 f 的可去间断点；另一种是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$ 是第一类间断点.
- $y = |\operatorname{sgn} x|$, $x = 0$ 是第一类间断点 (可去间断点).
- Dirichlet 函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，$0$ 是第二类间断点.

间断点的例子

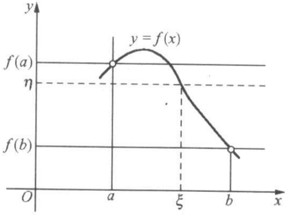
- 注：第一类间断点有两种，一是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$，此时称 x_0 是 f 的可去间断点；另一种是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$ 是第一类间断点.
- $y = |\operatorname{sgn} x|$, $x = 0$ 是第一类间断点 (可去间断点).
- Dirichlet 函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，$0$ 是第二类间断点.

间断点的例子

- 注：第一类间断点有两种，一是 $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$，此时称 x_0 是 f 的可去间断点；另一种是 $\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$ 是第一类间断点.
- $y = |\operatorname{sgn} x|$, $x = 0$ 是第一类间断点 (可去间断点).
- Dirichlet 函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，0 是第二类间断点.

介值定理

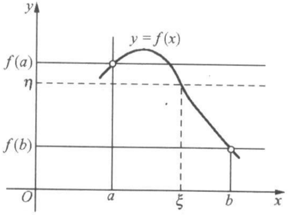
- 定理：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值 η (η 不等于 $f(a), f(b)$), 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.
- 注：定理证明要用到实数的连续性，如可用区间套定理.
- 推论：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 的的值域是一个区间 (这里把单点集合看着一个特殊的区间). 事实上任意区间上的连续函数的值域是一个区间.



介值定理

介值定理

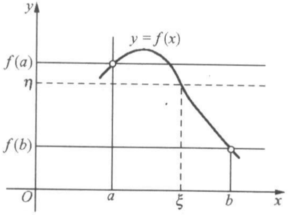
- 定理：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值 η (η 不等于 $f(a), f(b)$), 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.
- 注：定理证明要用到实数的连续性，如可用区间套定理.
- 推论：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 的的值域是一个区间 (这里把单点集合看着一个特殊的区间). 事实上任意区间上的连续函数的值域是一个区间.



介值定理

介值定理

- 定理：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值 η (η 不等于 $f(a), f(b)$), 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.
- 注：定理证明要用到实数的连续性，如可用区间套定理.
- 推论：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 的的值域是一个区间 (这里把单点集合看着一个特殊的区间). 事实上任意区间上的连续函数的值域是一个区间.



介值定理

介值定理的推广

- 例：设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的连续函数，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$ 存在，则对于 $f(a)$ 与 B 之间的任意值 η（η 不等于 $f(a), B$），存在 $\xi \in (a,+\infty)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.

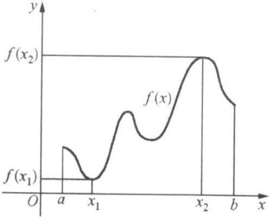
证明：不妨设 $f(a) < \eta < B$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > \eta$, 存在 $b > a$ 使得 $f(b) > \eta > f(a)$. 由介值定理，存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.

介值定理的推广

- 例：设 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上的连续函数，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$ 存在，则对于 $f(a)$ 与 B 之间的任意值 η（η 不等于 $f(a), B$），存在 $\xi \in (a, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.
  证明：不妨设 $f(a) < \eta < B$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > \eta$, 存在 $b > a$ 使得 $f(b) > \eta > f(a)$. 由介值定理，存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.

最值定理

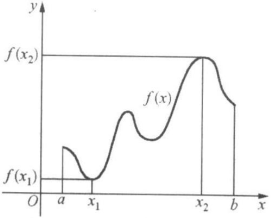
- 定理：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值. 即存在 x_1 和 x_2 使得对任意性 $x \in [a,b]$ 有 $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.
- 推论：$f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 的值域是一个闭区间. 设 M, m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的最大和最小值, 则对任意 $\eta \in [m,M]$, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \eta$.
- 推论：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.
- 注：上面定理和推论中的区间若不是闭区间，则结论不成立. 如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.



最大（小）定理

最值定理

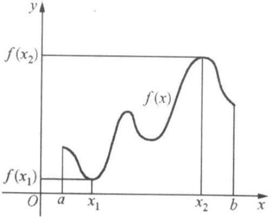
- 定理：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值. 即存在 x_1 和 x_2 使得对任意性 $x\in[a,b]$ 有 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.
- 推论：$f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 的值域是一个闭区间. 设 M,m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的最大和最小值, 则对任意 $\eta\in[m,M]$, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=\eta$.
- 推论：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.
- 注：上面定理和推论中的区间若不是闭区间，则结论不成立. 如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.



最大（小）定理

最值定理

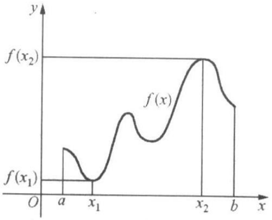
- 定理：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值. 即存在 x_1 和 x_2 使得对任意性 $x \in [a,b]$ 有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.
- 推论：$f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 的值域是一个闭区间. 设 M, m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的最大和最小值, 则对任意 $\eta \in [m, M]$, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \eta$.
- 推论：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.
- 注：上面定理和推论中的区间若不是闭区间，则结论不成立. 如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.



最大（小）定理

最值定理

- 定理：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值. 即存在 x_1 和 x_2 使得对任意性 $x \in [a,b]$ 有 $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$.
- 推论：$f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 的值域是一个闭区间. 设 M, m 分别为 f 在 $[a,b]$ 上的最大和最小值, 则对任意 $\eta \in [m, M]$, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \eta$.
- 推论：设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.
- 注：上面定理和推论中的区间若不是闭区间，则结论不成立. 如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.



最大（小）定理

例 1

- 例：$a_0 \neq 0$, $P(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + \cdots + a_5 = 0$ 至少有一个实根 (奇次多项式至少有一个实根).

  证明：不妨设 $a_0 > 0$, $x \neq 0$ 时,

  $$P(x) = a_0x^5(1 + \frac{a_1}{a_0}x^{-1} + \cdots + \frac{a_5}{a_0}x^{-5}).$$

  存在 $M > 0$, 使得 $|x| \geq M$ 时，$1 + \frac{a_1}{a_0}x^{-1} + \cdots + \frac{a_5}{a_0}x^{-5} > \frac{1}{2}$. $x \geq M$ 时，$P(x) \geq \frac{1}{2}a_0x^5 > 0$, $x \leq -M$ 时，$P(x) \leq \frac{1}{2}a_0x^5 < 0$, 由介值定理，存在 $\xi \in [-M, M]$ 使得 $f(\xi) = 0$.
- 例: 首项系数为正的偶次多项式有最小值.($\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$, 任取 x_0, 存在 $X > 0$, 使得 $|x| \geq X$ 时 $P(x) > P(x_0)$, $[-X, X]$ 上的最小值即为 $P(x)$ 的最小值)。

- 例：$a_0 \neq 0$, $P(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + \cdots + a_5 = 0$ 至少有一个实根 (奇次多项式至少有一个实根).

  证明：不妨设 $a_0 > 0$, $x \neq 0$ 时，

  $$P(x) = a_0x^5(1 + \frac{a_1}{a_0}x^{-1} + \cdots + \frac{a_5}{a_0}x^{-5}).$$

  存在 $M > 0$, 使得 $|x| \geq M$ 时，$1 + \frac{a_1}{a_0}x^{-1} + \cdots + \frac{a_5}{a_0}x^{-5} > \frac{1}{2}$. $x \geq M$ 时，$P(x) \geq \frac{1}{2}a_0x^5 > 0$, $x \leq -M$ 时，$P(x) \leq \frac{1}{2}a_0x^5 < 0$, 由介值定理，存在 $\xi \in [-M, M]$ 使得 $f(\xi) = 0$.

- 例: 首项系数为正的偶次多项式有最小值.($\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$, 任取 x_0, 存在 $X > 0$, 使得 $|x| \geq X$ 时 $P(x) > P(x_0)$, $[-X, X]$ 上的最小值即为 $P(x)$ 的最小值)。

例 1

- 例：$a_0 \neq 0$, $P(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + \cdots + a_5 = 0$ 至少有一个实根 (奇次多项式至少有一个实根).
  证明：不妨设 $a_0 > 0$, $x \neq 0$ 时，
  $$P(x) = a_0x^5(1 + \frac{a_1}{a_0}x^{-1} + \cdots + \frac{a_5}{a_0}x^{-5}).$$
  存在 $M > 0$, 使得 $|x| \geq M$ 时，$1 + \frac{a_1}{a_0}x^{-1} + \cdots + \frac{a_5}{a_0}x^{-5} > \frac{1}{2}$. $x \geq M$ 时，$P(x) \geq \frac{1}{2}a_0x^5 > 0$, $x \leq -M$ 时，$P(x) \leq \frac{1}{2}a_0x^5 < 0$, 由介值定理，存在 $\xi \in [-M, M]$ 使得 $f(\xi) = 0$.
- 例: 首项系数为正的偶次多项式有最小值.($\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$, 任取 x_0, 存在 $X > 0$, 使得 $|x| \geq X$ 时 $P(x) > P(x_0)$, $[-X, X]$ 上的最小值即为 $P(x)$ 的最小值)。

例 2

- 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$，证明存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

- 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，满足 $f(0) = f(1)$，则存在 $x_n \in [0,1]$，使得 $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$.

证明：令 $F(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$，$x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$，则有

$$F(0) + F(\frac{1}{n}) + F(\frac{2}{n}) + \cdot + F(\frac{n-1}{n}) = 0$$

存在 $x_n \in [0,1]$，使得 $F(x_n) = 0$.

例 2

- 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$, 证明存在 $\xi \in [a,b]$, 使得
$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

- 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 满足 $f(0) = f(1)$, 则存在 $x_n \in [0,1]$, 使得 $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$.
证明: 令 $F(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$, $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, 则有
$$F(0) + F(\frac{1}{n}) + F(\frac{2}{n}) + \cdot + F(\frac{n-1}{n}) = 0$$
存在 $x_n \in [0,1]$, 使得 $F(x_n) = 0$.

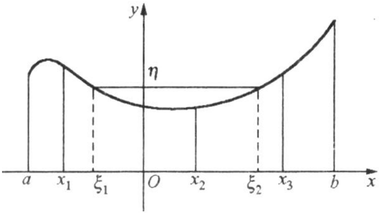
函数的连续性和单调性 1

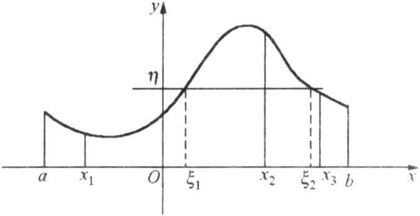
- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，并且是严格单调函数．则 f 是 (a,b) 上连续函数，且 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数（双射 + 严格单调 $\Rightarrow$ 连续）．
- 命题 A：$f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数，且映射 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 单射，则 f 严格单调（双射 + 连续 $\Rightarrow$ 严格单调）．
- 定理 B：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，且 $f(x)$ 是连续函数，则 f^{-1} 连续．

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，并且是严格单调函数. 则 f 是 (a,b) 上连续函数，且 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数（双射 + 严格单调 $\Rightarrow$ 连续）.
- 命题 A：$f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数，且映射 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 单射，则 f 严格单调（双射 + 连续 $\Rightarrow$ 严格单调）.
- 定理 B：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，且 $f(x)$ 是连续函数，则 f^{-1} 连续.

- 定理：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，并且是严格单调函数. 则 f 是 (a,b) 上连续函数，且 f^{-1} 是 (c,d) 上的连续函数（双射 $+$ 严格单调 $\Rightarrow$ 连续）.
- 命题 A：$f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数，且映射 $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ 单射，则 f 严格单调（双射 $+$ 连续 $\Rightarrow$ 严格单调）.
- 定理 B：设 $f(x):(a,b)\to(c,d)$ 是双射，且 $f(x)$ 是连续函数，则 f^{-1} 连续.

- 命题 A 的证明：反设 f 不是单调函数，则存在 $x_1 < x_2 < x_3$，使得 $f(x_1) > f(x_2), f(x_2) < f(x_3)$ (或者 $f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3)$)，取 $\eta \in (f(x_2), f(x_1)) \cap (f(x_2), f(x_3))$，则存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$，$\xi_2 \in (x_2, x_3)$，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$.

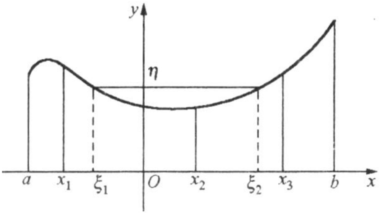


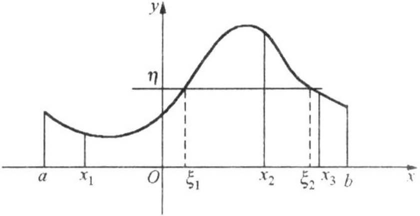


- 定理 B 的证明：设 $f(x) : (a, b) \to (c, d)$ 是双射，且 $f(x)$ 是连续函数，从而且 $f(x)$ 是严格单调函数. 从而 f^{-1} 是双射且严格单调，从而连续.

函数的连续性和单调性 2

- 命题 A 的证明：反设 f 不是单调函数，则存在 $x_1 < x_2 < x_3$，使得 $f(x_1) > f(x_2), f(x_2) < f(x_3)$ (或者 $f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_3)$)，取 $\eta \in (f(x_2), f(x_1)) \cap (f(x_2), f(x_3))$，则存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$，$\xi_2 \in (x_2, x_3)$，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$.





- 定理 B 的证明：设 $f(x) : (a, b) \to (c, d)$ 是双射，且 $f(x)$ 是连续函数，从而且 $f(x)$ 是严格单调函数. 从而 f^{-1} 是双射且严格单调，从而连续.

一致连续

- 一致连续: $f(x)$ 是区间 I 上有定义. 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对区间 I 中的任意两点 x_1, x_2, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, 则称 $f(x)$ 是区间 I 上一致连续.
- 定理: 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续.

一致连续

- 一致连续: $f(x)$ 是区间 I 上有定义. 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对区间 I 中的任意两点 x_1, x_2, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, 则称 $f(x)$ 是区间 I 上一致连续.
- 定理: 若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续.