向量的基本概念 1

- 向量：即有大小又有方向的量. 若 A, B 是空间中的两点，$\overrightarrow{AB}$ 表示大小为 $d(A, B)$, 方向为从 A 指向 B 的向量. 称 A 为起点，B 为终点. 称 $\overrightarrow{AA}$ 为零向量，记为 $\vec{0}$, 它是大小为 0 方向任意的向量. 若不需要指出起点和终点，我们经常用记号 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$ 表示向量.
- 向量的模：向量起点和终点之间的距离 (即向量的大小) 称为向量的模. $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$, $\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$.

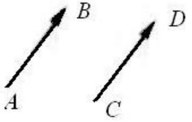
向量的基本概念 1

- 向量：即有大小又有方向的量. 若 A, B 是空间中的两点，$\overrightarrow{AB}$ 表示大小为 $d(A, B)$, 方向为从 A 指向 B 的向量. 称 A 为起点，B 为终点. 称 $\overrightarrow{AA}$ 为零向量，记为 $\vec{0}$, 它是大小为 0 方向任意的向量. 若不需要指出起点和终点，我们经常用记号 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$ 表示向量.
- 向量的模：向量起点和终点之间的距离 (即向量的大小) 称为向量的模. $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$, $\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$.

向量的基本概念 2

- 两个非零向量的相等：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 的充分必要条件是 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$, 且 AB 与 CD 平行且指向一致 (起点可以不同). 当 A, B, C, D 不共线时，此时 $ABDC$ 必为平行四边形.
- 共线向量: 互相平行的向量称为共线向量. 规定任何向量均与零向量共线.
- 若 $\vec{a}$ 是一个向量，则 $-\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 大小 (模) 相同，方向相反（平行但指向相反）的向量. 称为 $\vec{a}$ 的反向量. 例: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$
- 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量.

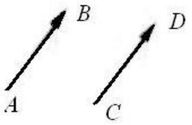
  与非零向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a}^{\circ}$.



向量的基本概念 2

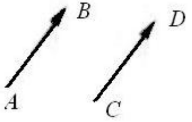
- 两个非零向量的相等：$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 的充分必要条件是 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, 且 AB 与 CD 平行且指向一致 (起点可以不同). 当 A, B, C, D 不共线时，此时 $ABDC$ 必为平行四边形.
- 共线向量: 互相平行的向量称为共线向量. 规定任何向量均与零向量共线.
- 若 $\vec{a}$ 是一个向量，则 $-\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 大小 (模) 相同，方向相反（平行但指向相反）的向量. 称为 $\vec{a}$ 的反向量. 例: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量.

  与非零向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a}^0$.



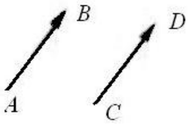
向量的基本概念 2

- 两个非零向量的相等：$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 的充分必要条件是 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, 且 AB 与 CD 平行且指向一致 (起点可以不同). 当 A, B, C, D 不共线时，此时 $ABDC$ 必为平行四边形.
- 共线向量: 互相平行的向量称为共线向量. 规定任何向量均与零向量共线.
- 若 $\vec{a}$ 是一个向量，则 $-\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 大小 (模) 相同，方向相反（平行但指向相反）的向量. 称为 $\vec{a}$ 的反向量. 例: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量.
  与非零向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a}^o$.



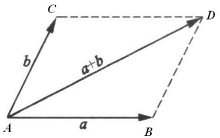
向量的基本概念 2

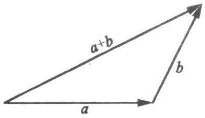
- 两个非零向量的相等：$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 的充分必要条件是 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, 且 AB 与 CD 平行且指向一致 (起点可以不同). 当 A, B, C, D 不共线时，此时 $ABDC$ 必为平行四边形.
- 共线向量: 互相平行的向量称为共线向量. 规定任何向量均与零向量共线.
- 若 $\vec{a}$ 是一个向量，则 $-\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 大小 (模) 相同，方向相反（平行但指向相反）的向量. 称为 $\vec{a}$ 的反向量. 例: $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量.
  与非零向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a}^o$.



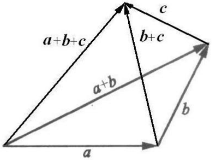
向量的加法

- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则.
  $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时，它们与 $\vec{a}+\vec{b}$ 也共线，特别地，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

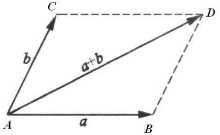


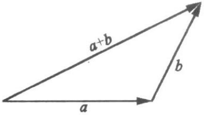


- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- 性质 (三角不等式)：$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.
- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$,
  性质: $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \iff \vec{c}-\vec{b}=\vec{a}$.

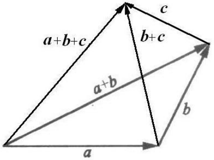


- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则.



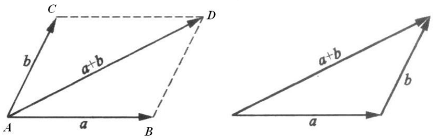


  $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时，它们与 $\vec{a}+\vec{b}$ 也共线，特别地，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.
- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

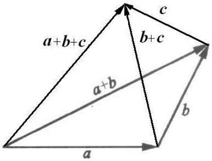


- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- 性质 (三角不等式)：$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$.
- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$，
  性质：$\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\iff\vec{c}-\vec{b}=\vec{a}$.

- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则.



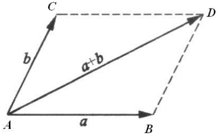
  $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时，它们与 $\vec{a}+\vec{b}$ 也共线，特别地，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.
- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

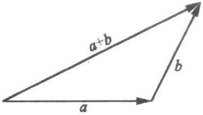


- 性质 (三角不等式)：$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$.
- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$,
  性质: $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \iff \vec{c}-\vec{b}=\vec{a}$.

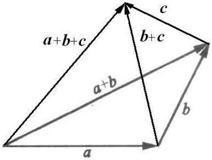
向量的加法

- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则.

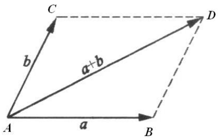


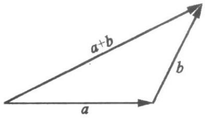


  $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时, 它们与 $\vec{a}+\vec{b}$ 也共线, 特别地, $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.
- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- 性质 (三角不等式)：$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

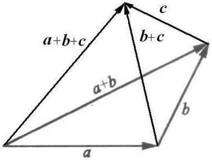


- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$,
  性质: $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\iff\vec{c}-\vec{b}=\vec{a}$.





- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则.
  $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时，它们与 $\vec{a}+\vec{b}$ 也共线，特别地，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.
- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- 性质 (三角不等式)：$|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$.
- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$,
  性质: $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \iff \vec{c}-\vec{b}=\vec{a}$.

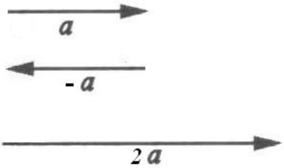


向量的数乘

- 向量的数乘：设 λ 是以实数，$\vec{a}$ 是一向量. 定义

$$\lambda\vec{a}=\begin{cases}\text{模为 }\lambda|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相同的向量,} & \lambda>0\\ \text{模为 }|\lambda|\cdot|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相反的向量,} & \lambda<0\\ \vec{0}, & \lambda=0\end{cases}.$$

- 性质：$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.
- 性质：$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}$.
- 性质：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
- 性质：$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.
- 向量的共线：两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在非零实数 λ, 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

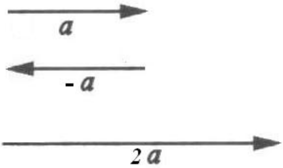


向量的数乘

- 向量的数乘：设 λ 是以实数，$\vec{a}$ 是一向量. 定义

$$\lambda\vec{a}=\begin{cases}\text{模为 }\lambda|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相同的向量}, & \lambda>0\\ \text{模为 }|\lambda|\cdot|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相反的向量}, & \lambda<0\\ \vec{0}, & \lambda=0\end{cases}.$$

- 性质：$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.
- 性质：$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}$.
- 性质：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
- 性质：$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.
- 向量的共线：两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在非零实数 λ, 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

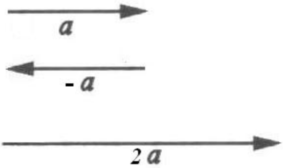


向量的数乘

- 向量的数乘：设 λ 是以实数，$\vec{a}$ 是一向量. 定义

$$\lambda\vec{a} = \begin{cases} \text{模为 } \lambda|\vec{a}| \text{ 方向与 } \vec{a} \text{ 相同的向量}, & \lambda > 0 \\ \text{模为 } |\lambda|\cdot|\vec{a}| \text{ 方向与 } \vec{a} \text{ 相反的向量}, & \lambda < 0 \\ \vec{0}, & \lambda = 0 \end{cases}.$$

- 性质：$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
- 性质：$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a}$.
- 性质：$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- 性质：$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
- 向量的共线：两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在非零实数 λ, 使得 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

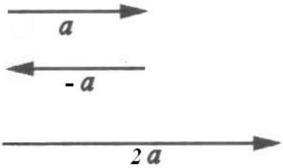


向量的数乘

- 向量的数乘：设 λ 是以实数，$\vec{a}$ 是一向量. 定义

$$\lambda\vec{a}=\begin{cases}\text{模为 } \lambda|\vec{a}| \text{ 方向与 } \vec{a} \text{ 相同的向量}, & \lambda>0\\ \text{模为 } |\lambda|\cdot|\vec{a}| \text{ 方向与 } \vec{a} \text{ 相反的向量}, & \lambda<0\\ \vec{0}, & \lambda=0\end{cases}.$$

- 性质：$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.
- 性质：$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}$.
- 性质：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
- 性质：$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.
- 向量的共线：两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在非零实数 λ, 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

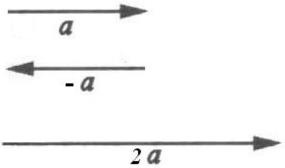


向量的数乘

- 向量的数乘：设 λ 是以实数，$\vec{a}$ 是一向量. 定义

$$\lambda\vec{a}=\begin{cases}\text{模为 }\lambda|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相同的向量}, & \lambda>0\\ \text{模为 }|\lambda|\cdot|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相反的向量}, & \lambda<0\\ \vec{0}, & \lambda=0\end{cases}.$$

- 性质：$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.
- 性质：$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}$.
- 性质：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
- 性质：$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.
- 向量的共线：两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在非零实数 λ, 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

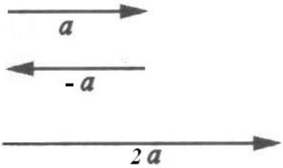


向量的数乘

- 向量的数乘：设 λ 是以实数，$\vec{a}$ 是一向量. 定义

$$\lambda\vec{a}=\begin{cases}\text{模为 }\lambda|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相同的向量}, & \lambda>0\\ \text{模为 }|\lambda|\cdot|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相反的向量}, & \lambda<0\,.\\ \vec{0}, & \lambda=0\end{cases}$$

- 性质：$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.
- 性质：$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}$.
- 性质：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
- 性质：$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.
- 向量的共线：两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在非零实数 λ, 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.



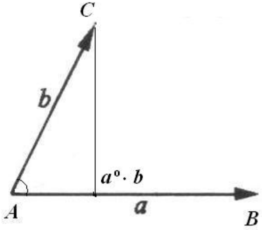
向量的内积 1

- 两个向量的夹角：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个非零向量，$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$，则角 $\angle BAC \in [0, \pi]$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$. 规定 $\langle \vec{a}, \vec{0} \rangle$ 可以是任意值.
- 内积：定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

显然，$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

- $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直：$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 显然 $\vec{0}$ 与任何向量垂直.
- 若 $\vec{c}$ 是单位向量，则 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 为 $\vec{b}$ 在方向 $\vec{c}$ 上的有向投影.

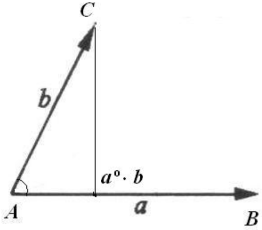


向量的内积 1

- 两个向量的夹角：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个非零向量，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，则角 $\angle BAC\in[0,\pi]$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. 规定 $\langle\vec{a},\vec{0}\rangle$ 可以是任意值.
- 内积：定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

显然, $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.



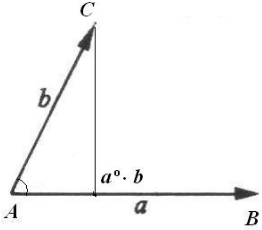
- $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直: $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 显然 $\vec{0}$ 与任何向量垂直.
- 若 $\vec{c}$ 是单位向量，则 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 为 $\vec{b}$ 在方向 $\vec{c}$ 上的有向投影.

向量的内积 1

- 两个向量的夹角：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个非零向量，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，则角 $\angle BAC \in [0,\pi]$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$. 规定 $\langle \vec{a},\vec{0}\rangle$ 可以是任意值.
- 内积：定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

显然, $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.
- $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直: $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 显然 $\vec{0}$ 与任何向量垂直.
- 若 $\vec{c}$ 是单位向量，则 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 为 $\vec{b}$ 在方向 $\vec{c}$ 上的有向投影.

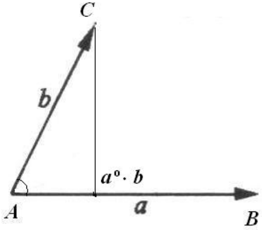


- 两个向量的夹角：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个非零向量，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，则角 $\angle BAC\in[0,\pi]$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. 规定 $\langle\vec{a},\vec{0}\rangle$ 可以是任意值.
- 内积：定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

显然，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

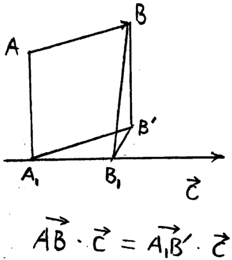
- $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直：$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 显然 $\vec{0}$ 与任何向量垂直.
- 若 $\vec{c}$ 是单位向量，则 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 为 $\vec{b}$ 在方向 $\vec{c}$ 上的有向投影.



- 若 $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}$ 是单位向量,
  过 A 做与 $\vec{c}$ 垂直的平面与 $\vec{c}$ 所在直线交于 A_1, 过 B 做与 $\vec{c}$ 垂直的平面与 $\vec{c}$ 所在直线交于 B_1, $\vec{b}$ 在方向 $\vec{c}$ 上的有向投影

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{c}=A_1B_1$$

  这里规定: 当 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 $\vec{c}$ 方向一致时 $A_1B_1=|\overrightarrow{A_1B_1}|$;
  方向相反时 $A_1B_1=-|\overrightarrow{A_1B_1}|$.



内积的性质

- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

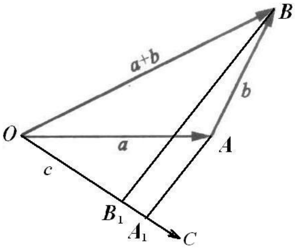
  证明：不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直，交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.
- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0，则有

  $\vec{a}=\vec{0}$;

  若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.

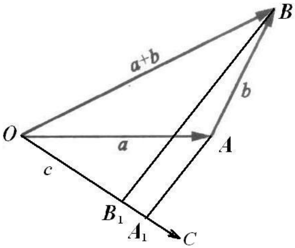
  证明：

  若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^o=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.



内积的性质

- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
  证明：不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直，交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.
- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0，则有
  $\vec{a}=\vec{0}$;
  若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.
  证明：
  若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^o=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.



内积的性质

- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

  证明：不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直，交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.

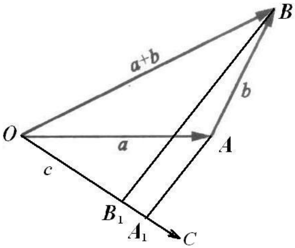
- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0，则有

  $\vec{a}=\vec{0}$;

  若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.

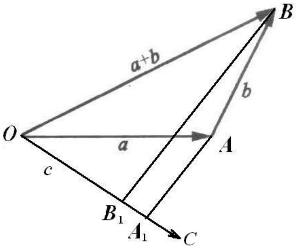
  证明：

  若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^o=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.



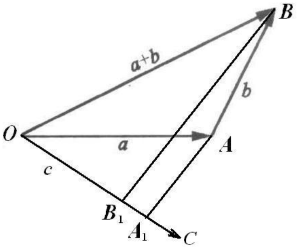
内积的性质

- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
  证明：不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直，交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.
- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0，则有
  $\vec{a}=\vec{0}$;
  若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.
  证明：
  若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^{o}=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.



内积的性质

- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
  证明：不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直，交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.
- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0，则有
  $\vec{a}=\vec{0}$;
  若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.
  证明：
  若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^o=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.



内积的性质

- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

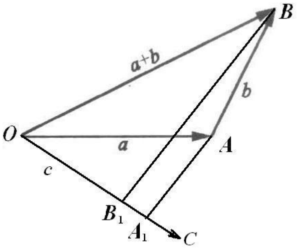
  证明：不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直，交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.
- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0，则有

  $\vec{a}=\vec{0}$;

  若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.

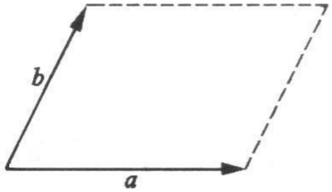
  证明：

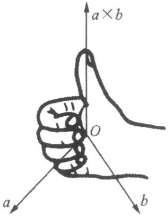
  若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^o=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.



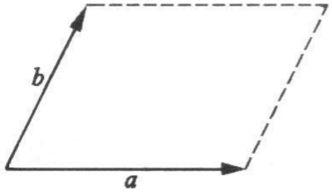
向量的叉乘

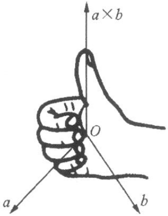
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为不共线向量时：$\vec{a}\times\vec{b}$ 的模为 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，即 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积. 方向为垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 决定的平面，指向由右手法则决定，即 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系.
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时：定义 $\vec{a}\times\vec{b}$ 为零向量.
- 性质：$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.



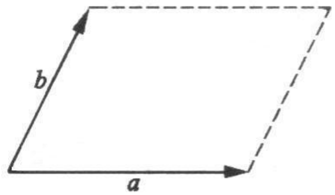


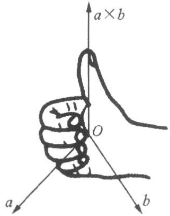
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为不共线向量时：$\vec{a}\times\vec{b}$ 的模为 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，即 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积. 方向为垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 决定的平面，指向由右手法则决定，即 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系.
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时：定义 $\vec{a}\times\vec{b}$ 为零向量.
- 性质：$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.





- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为不共线向量时：$\vec{a}\times\vec{b}$ 的模为 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，即 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积. 方向为垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 决定的平面，指向由右手法则决定，即 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系.
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时：定义 $\vec{a}\times\vec{b}$ 为零向量.
- 性质：$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.



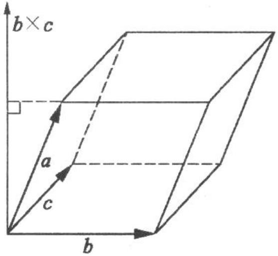


向量混合积

- 三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的混合积定义为 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. 设 $\vec{b}\times\vec{c}$ 方向的单位向量为 $\vec{n}$, 设 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 张成的平行四边形面积为 S, 则

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{n}S=\pm(\vec{a}、\vec{b}\text{ 和 }\vec{c}\text{ 张成的平行六面体体积}).$$

且当 $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系是取"+".



- 性质: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.
证明: 三个向量中的两个位置互换, 手性要变化。$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow$ $\vec{c}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 成右手系.

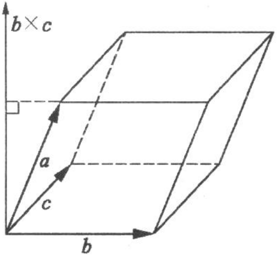
向量混合积

- 三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的混合积定义为 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. 设 $\vec{b}\times\vec{c}$ 方向的单位向量为 $\vec{n}$, 设 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 张成的平行四边形面积为 S, 则

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{n}S=\pm(\vec{a}、\vec{b}\text{ 和 }\vec{c}\text{ 张成的平行六面体体积}).$$

  且当 $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系是取"+".
- 性质：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

  证明：三个向量中的两个位置互换，手性要变化。$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow\vec{c}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 成右手系.



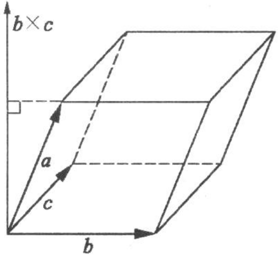
向量混合积

- 三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的混合积定义为 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. 设 $\vec{b}\times\vec{c}$ 方向的单位向量为 $\vec{n}$, 设 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 张成的平行四边形面积为 S, 则

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{n}S=\pm(\vec{a}\text{、}\vec{b}\text{ 和 }\vec{c}\text{ 张成的平行六面体体积}).$$

  且当 $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系是取"+".

- 性质：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.
  证明：三个向量中的两个位置互换，手性要变化。$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow\vec{c}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 成右手系.

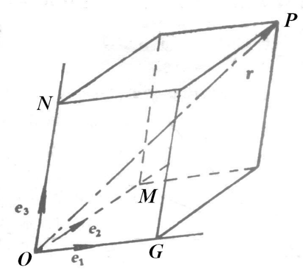


四点共面

- 性质：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充分必要条件是 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
- 若 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 是空间中的三个不共面向量, 则对任意空间向量 $\vec{r}$, 存在一组实数 x, y, z, 使得 $\vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

证明: 把所有向量的起点移至原点, $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, 如图作平行六面体, 则有

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$



- 推论：空间中的四个点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0.$$

四点共面

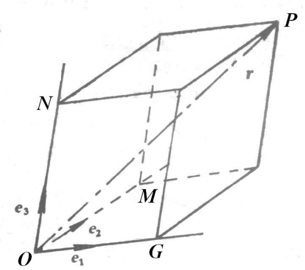
- 性质：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充分必要条件是 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
- 若 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 是空间中的三个不共面向量，则对任意空间向量 $\vec{r}$，存在一组实数 x, y, z，使得 $\vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

  证明：把所有向量的起点移至原点，$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$，如图作平行六面体，则有

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$

- 推论：空间中的四个点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是

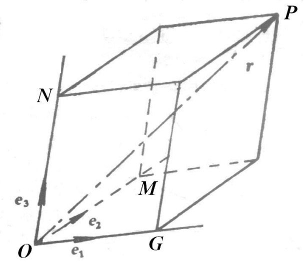
$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0.$$



- 性质：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充分必要条件是 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
- 若 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 是空间中的三个不共面向量, 则对任意空间向量 $\vec{r}$, 存在一组实数 x, y, z, 使得 $\vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

  证明: 把所有向量的起点移至原点, $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, 如图作平行六面体, 则有

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$



- 推论：空间中的四个点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是

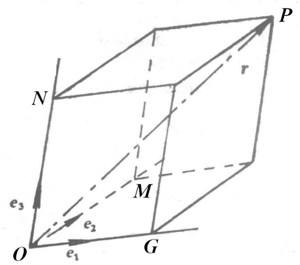
$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0.$$

四点共面

- 性质：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充分必要条件是 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
- 若 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 是空间中的三个不共面向量, 则对任意空间向量 $\vec{r}$, 存在一组实数 x, y, z, 使得 $\vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

  证明: 把所有向量的起点移至原点, $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, 如图作平行六面体, 则有

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$



- 推论：空间中的四个点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0.$$

叉乘的性质

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.
- $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.
  证明: $\lambda>0$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相同, 大小都等于 λS(S 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积).
  $\lambda=-1$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相反, 大小都等于 S.
- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.
  证明：设 $\vec{d}$ 是任意向量，由混合积的性质，

$$\begin{aligned}&\vec{d}\cdot[(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}]=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\times\vec{d}\\&=\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})+\vec{d}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\\&=\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\end{aligned}$$

  由 $\vec{d}$ 的任意性，即得.

叉乘的性质

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

  证明: $\lambda > 0$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 方向相同, 大小都等于 λS(S 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积).

  $\lambda = -1$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 方向相反, 大小都等于 S.
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

  证明：设 $\vec{d}$ 是任意向量，由混合积的性质，

$$\begin{aligned}
&\vec{d} \cdot [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \times \vec{d} \\
&= \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\
&= \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}$$

  由 $\vec{d}$ 的任意性，即得.

叉乘的性质

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
  证明: $\lambda > 0$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 方向相同, 大小都等于 λS(S 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积).
  $\lambda = -1$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 方向相反, 大小都等于 S.
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
  证明：设 $\vec{d}$ 是任意向量，由混合积的性质，

$$
\begin{aligned}
&\vec{d} \cdot [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \times \vec{d} \\
&= \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\
&= \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}
$$

  由 $\vec{d}$ 的任意性，即得.

叉乘的性质

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
  证明: $\lambda > 0$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 方向相同, 大小都等于 λS(S 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积).
  $\lambda = -1$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 方向相反, 大小都等于 S.
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
  证明: 设 $\vec{d}$ 是任意向量, 由混合积的性质,

$$
\begin{aligned}
&\vec{d} \cdot [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \times \vec{d} \\
&= \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\
&= \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}
$$

  由 $\vec{d}$ 的任意性, 即得.

叉乘的性质

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
  证明: $\lambda > 0$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相同, 大小都等于 λS(S 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积).
  $\lambda = -1$ 时, 等式两边的向量方向都与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相反, 大小都等于 S.
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
  证明：设 $\vec{d}$ 是任意向量，由混合积的性质，

$$
\begin{aligned}
&\vec{d} \cdot [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \times \vec{d} \\
&= \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\
&= \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}
$$

  由 $\vec{d}$ 的任意性，即得.

例 1

- $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

  证明: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2\theta)$.

- 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 证明 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = -(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b}$.

  证明: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ 垂直于 $\vec{a} \times \vec{b}$, 可设

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

  上式两边和 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 作内积, 得

$$\begin{cases} x(\vec{a} \cdot \vec{a}) + y(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \\ x(\vec{a} \cdot \vec{b}) + y(\vec{b} \cdot \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \end{cases}$$

  可解得 $x = -(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $y = (\vec{a} \cdot \vec{a})$.

例 1

- $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.
  证明: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$.
- 设 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线, 证明 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = -(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}$.
  证明: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$ 垂直于 $\vec{a}\times\vec{b}$, 可设

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

上式两边和 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 作内积, 得

$$\begin{cases} x(\vec{a}\cdot\vec{a}) + y(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0 \\ x(\vec{a}\cdot\vec{b}) + y(\vec{b}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}\times\vec{b}|^2 \end{cases}$$

可解得 $x = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $y = (\vec{a}\cdot\vec{a})$.

例 1

- $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.
  证明: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$.
- 设 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线, 证明 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = -(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}$.
  证明: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$ 垂直于 $\vec{a}\times\vec{b}$, 可设

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

  上式两边和 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 作内积, 得

$$\begin{cases} x(\vec{a}\cdot\vec{a}) + y(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 0 \\ x(\vec{a}\cdot\vec{b}) + y(\vec{b}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}\times\vec{b}|^2 \end{cases}$$

  可解得 $x = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $y = (\vec{a}\cdot\vec{a})$.

例 1

- $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.
  证明: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$.
- 设 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线, 证明 $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}+(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}$.
  证明: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$ 垂直于 $\vec{a}\times\vec{b}$, 可设

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{b}.$$

上式两边和 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 作内积, 得

$$\begin{cases} x(\vec{a}\cdot\vec{a})+y(\vec{a}\cdot\vec{b})=0 \\ x(\vec{a}\cdot\vec{b})+y(\vec{b}\cdot\vec{b})=|\vec{a}\times\vec{b}|^2 \end{cases}$$

可解得 $x=-(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $y=(\vec{a}\cdot\vec{a})$.

例 2

- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$

  证明：当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线时，如 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, 显然. 当 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线时, 存在一组实数 x_1,y_1,z_1, 使得 $\vec{c}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{a}\times\vec{b}$. 因此只要分别对 $\vec{c}=\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 证明. 当 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 显然两边为零. 当 $\vec{c}=\vec{a}$，由前例可知等式成立.

- Lagrange 恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

证明: 利用混合积,

$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})&=[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\cdot\vec{a}\\&=[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}]\cdot\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d}).\end{aligned}$$

例 2

- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$.
  证明：当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线时，如 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, 显然. 当 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线时, 存在一组实数 x_1,y_1,z_1, 使得 $\vec{c}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{a}\times\vec{b}$. 因此只要分别对 $\vec{c}=\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 证明. 当 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 显然两边为零. 当 $\vec{c}=\vec{a}$, 由前例可知等式成立.
- Lagrange 恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

证明: 利用混合积,

$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})&=[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\cdot\vec{a}\\&=[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}]\cdot\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d}).\end{aligned}$$

例 2

- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$.
  证明：当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线时，如 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, 显然. 当 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线时, 存在一组实数 x_1,y_1,z_1, 使得 $\vec{c}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{a}\times\vec{b}$. 因此只要分别对 $\vec{c}=\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 证明. 当 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 显然两边为零. 当 $\vec{c}=\vec{a}$, 由前例可知等式成立.
- Lagrange 恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

证明: 利用混合积,

$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})&=[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\cdot\vec{a}\\&=[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}]\cdot\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d}).\end{aligned}$$

例 2

- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$.
  证明：当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线时，如 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, 显然. 当 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线时, 存在一组实数 x_1,y_1,z_1, 使得 $\vec{c}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{a}\times\vec{b}$. 因此只要分别对 $\vec{c}=\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 证明. 当 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 显然两边为零. 当 $\vec{c}=\vec{a}$，由前例可知等式成立.
- Lagrange 恒等式

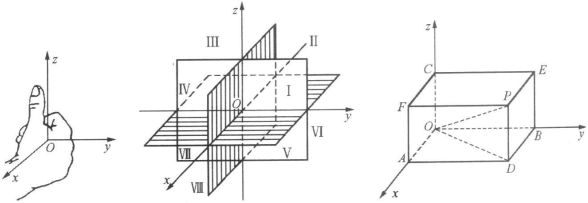
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

证明: 利用混合积,

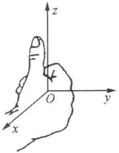
$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})&=[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\cdot\vec{a}\\&=[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}]\cdot\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d}).\end{aligned}$$

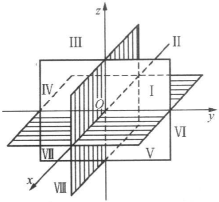
空间坐标系

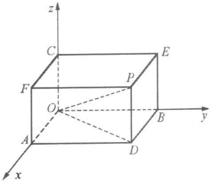
- 空间坐标系 (右手系)：取原点 O, 三个两两正交的数轴 Ox, Oy, Oz，且三个正向满足右手法则.
- 坐标平面：Oxy, Oyz, Ozx, 空间被分成八部分 (卦限).
- 坐标：过空间中的一点 P 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，交点的坐标分别为 x, y, z, 则称三元数组 (x, y, z) 为 P 点的坐标. 设 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. 显然映射 $P \to (x, y, z)$ 是三维空间和 $\mathbb{R}^3$ 之间的一一映射. 因此我们把三维空间等同于 $\mathbb{R}^3$.



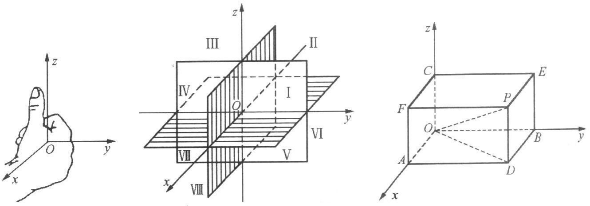
- 空间坐标系 (右手系)：取原点 O, 三个两两正交的数轴 Ox, Oy, Oz，且三个正向满足右手法则.
- 坐标平面：Oxy, Oyz, Ozx, 空间被分成八部分 (卦限).
- 坐标：过空间中的一点 P 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，交点的坐标分别为 x, y, z, 则称三元数组 (x, y, z) 为 P 点的坐标. 设 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. 显然映射 $P \to (x, y, z)$ 是三维空间和 $\mathbb{R}^3$ 之间的一一映射. 因此我们把三维空间等同于 $\mathbb{R}^3$.





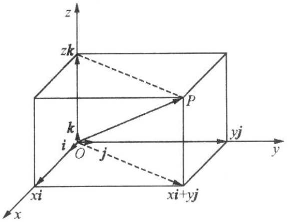


- 空间坐标系 (右手系)：取原点 O, 三个两两正交的数轴 Ox, Oy, Oz，且三个正向满足右手法则.
- 坐标平面：Oxy, Oyz, Ozx, 空间被分成八部分 (卦限).
- 坐标：过空间中的一点 P 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，交点的坐标分别为 x, y, z, 则称三元数组 (x, y, z) 为 P 点的坐标. 设 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. 显然映射 $P \to (x, y, z)$ 是三维空间和 $\mathbb{R}^3$ 之间的一一映射. 因此我们把三维空间等同于 $\mathbb{R}^3$.



- 若把向量的起点平移至原点，则向量由它的终点决定. 映射 $\overrightarrow{OP} \to P$ 是向量构成的集合与三维空间之间的一一映射. 我们把 P 的坐标称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标. 若 P 的坐标为 (x, y, z)，我们记 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. 该向量的模等于 $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- 向量空间的基：设 $A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$. 记 $\vec{i} = \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0), \vec{j} = \overrightarrow{OB} = (0, 1, 0), \vec{k} = \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$. 则任意向量 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ 可表示为

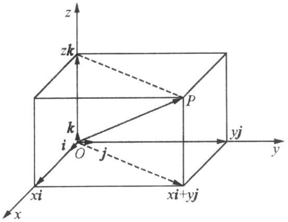
$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



向量坐标

- 若把向量的起点平移至原点，则向量由它的终点决定. 映射 $\overrightarrow{OP} \to P$ 是向量构成的集合与三维空间之间的一一映射. 我们把 P 的坐标称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标. 若 P 的坐标为 (x, y, z), 我们记 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. 该向量的模等于 $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- 向量空间的基：设 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. 记 $\vec{i} = \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0), \vec{j} = \overrightarrow{OB} = (0, 1, 0), \vec{k} = \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$. 则任意向量 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ 可表示为

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



向量运算的坐标表示 1

设向量 $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a} = (x, y, z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
  证明: 设 $P = (x, y, z)$, $P_\lambda = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, O, P, P_λ 共线, $|OP_\lambda| = |\lambda||OP|$.
- 内积：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 两两垂直，内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

向量运算的坐标表示 1

设向量 $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a} = (x, y, z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
  证明: 设 $P = (x, y, z)$, $P_\lambda = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, O, P, P_λ 共线, $|OP_\lambda| = |\lambda||OP|$.
- 内积：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 两两垂直，内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

向量运算的坐标表示 1

设向量 $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a} = (x, y, z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
  证明: 设 $P = (x, y, z)$, $P_\lambda = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, O, P, P_λ 共线, $|OP_\lambda| = |\lambda||OP|$.
- 内积：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 两两垂直，内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

向量运算的坐标表示 1

设向量 $\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{a}=(x,y,z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1\pm\vec{a}_2=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1+\vec{a}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=$
  $(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.
  证明: 设 $P=(x,y,z)$, $P_\lambda=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$, O,P,P_λ 共线,
  $|OP_\lambda|=|\lambda||OP|$.
- 内积：$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 两两垂直，内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

向量运算的坐标表示 1

设向量 $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a} = (x, y, z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
  证明: 设 $P = (x, y, z)$, $P_\lambda = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, O, P, P_λ 共线, $|OP_\lambda| = |\lambda||OP|$.
- 内积：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 两两垂直，内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

向量运算的坐标表示 2

- 模：$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{a}^o = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- $\cos\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.
- 方向余弦：$\vec{a} = (x, y, z)$，设 $\alpha = \langle \vec{a}, \vec{i} \rangle$, $\beta = \langle \vec{a}, \vec{j} \rangle$, $\gamma = \langle \vec{a}, \vec{k} \rangle$, 则由 $x = \vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos\alpha$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \cos\beta$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k} = |\vec{a}| \cos\gamma$, 有

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \vec{a}^o.$$

我们称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

向量运算的坐标表示 2

- 模：$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{a}^o = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- $\cos\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.
- 方向余弦：$\vec{a} = (x, y, z)$，设 $\alpha = \langle \vec{a}, \vec{i} \rangle$, $\beta = \langle \vec{a}, \vec{j} \rangle$, $\gamma = \langle \vec{a}, \vec{k} \rangle$, 则由 $x = \vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos\alpha$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \cos\beta$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k} = |\vec{a}| \cos\gamma$, 有

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \vec{a}^o.$$

我们称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

向量运算的坐标表示 2

- 模：$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{a}^o = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- $\cos\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.
- 方向余弦：$\vec{a} = (x, y, z)$， 设 $\alpha = \langle \vec{a}, \vec{i} \rangle$, $\beta = \langle \vec{a}, \vec{j} \rangle$, $\gamma = \langle \vec{a}, \vec{k} \rangle$, 则由 $x = \vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos\alpha$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \cos\beta$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k} = |\vec{a}| \cos\gamma$, 有

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \vec{a}^o.$$

  我们称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

行列式

- 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2.$$

- 三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$= x_0y_1z_2 + x_2y_0z_1 + x_1y_2z_0 - x_0y_2z_1 - x_1y_0z_2 - x_2y_1z_0.$$

- 性质：两行或两列交换差一个负号.

行列式

- 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

- 三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_0 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$= x_0 y_1 z_2 + x_2 y_0 z_1 + x_1 y_2 z_0 - x_0 y_2 z_1 - x_1 y_0 z_2 - x_2 y_1 z_0.$$

- 性质：两行或两列交换差一个负号.

行列式

- 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2.$$

- 三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_0 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$= x_0y_1z_2 + x_2y_0z_1 + x_1y_2z_0 - x_0y_2z_1 - x_1y_0z_2 - x_2y_1z_0.$$

- 性质：两行或两列交换差一个负号.

- 叉乘：$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

证明：由于 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, 利用分配率,

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{j} \times \vec{k} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{k} \times \vec{i} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{i} \times \vec{j} \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}
\end{aligned}$$

- 上面公式用行列式可以表示为

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 =$$

$$\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

叉乘的坐标表示

- 叉乘：$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

  证明：由于 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, 利用分配率,

$$
\begin{aligned}
&\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{j} \times \vec{k} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{k} \times \vec{i} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{i} \times \vec{j} \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}
\end{aligned}
$$

- 上面公式用行列式可以表示为

$$
\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 =
$$

$$
\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}
$$

- 叉乘：$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1)$.

  证明：由于 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, 利用分配率,

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{j} \times \vec{k} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{k} \times \vec{i} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{i} \times \vec{j} \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}\end{aligned}$$

- 上面公式用行列式可以表示为

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 =$$

$$\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

混合积的坐标表示

- 设向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, 则有

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

- 由行列式的性质, 显然有: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

混合积的坐标表示

- 设向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b_2}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, 则有

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

- 由行列式的性质, 显然有: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

例 1

- 例：设 $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,-1,1)$. 求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角.
- 解：设夹角为 θ, 则有

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1,1,0)\cdot(0,-1,0)}{|(-1,1,0)|\cdot|(0,-1,0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因此 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

例 1

- 例：设 $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,-1,1)$. 求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角.
- 解：设夹角为 θ, 则有

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1,1,0)\cdot(0,-1,0)}{|(-1,1,0)|\cdot|(0,-1,0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因此 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

- 例：设 $\vec{a}=(1,0,2)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, 求单位向量 $\vec{c}$，使得 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均垂直，而且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 成右手系.
- 解：$\vec{c}$ 是与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相同的单位向量,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(2,3,-1),$$

由此到 $\vec{c}=\frac{(2,3,-1)}{\sqrt{14}}$.

例 2

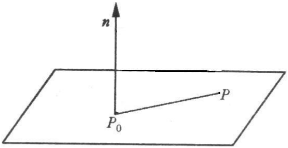
- 例：设 $\vec{a}=(1,0,2)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, 求单位向量 $\vec{c}$, 使得 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均垂直，而且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 成右手系.
- 解：$\vec{c}$ 是与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相同的单位向量,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(2,3,-1),$$

由此到 $\vec{c}=\frac{(2,3,-1)}{\sqrt{14}}$.

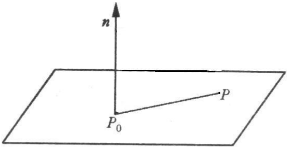
平面的点法式方程

- 一般空间曲面的方程 $F(x, y, z) = 0$.
- 平面的点法式方程：过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 法向量为 $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ 的平面方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
- 证明：
  $P(x, y, z)$ 在平面上 $\Longleftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Longleftrightarrow$
  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.



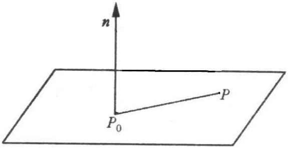
平面的点法式方程

- 一般空间曲面的方程 $F(x, y, z) = 0$.
- 平面的点法式方程：过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 法向量为 $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ 的平面方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
- 证明：
  $P(x, y, z)$ 在平面上 $\iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \iff$
  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.



平面的点法式方程

- 一般空间曲面的方程 $F(x,y,z)=0$.
- 平面的点法式方程：过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)\neq\vec{0}$ 的平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
- 证明：
  $P(x,y,z)$ 在平面上 $\iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0 \iff$
  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.



- 平面的一般式方程：$Ax + By + Cz + D = 0$. 这里 A, B, C 不同时为 0.
- 一般式方程化点法式方程: 任取一个点 (x_0, y_0, z_0) 满足 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. 平面方程可以写成

$$Ax + By + Cz + D = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

因此 (A, B, C) 是法向量.
- 点法式方程化一般方程: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 可以化为一般式 $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$.

平面的一般式方程

- 平面的一般式方程：$Ax + By + Cz + D = 0$. 这里 A, B, C 不同时为 0.
- 一般式方程化点法式方程: 任取一个点 (x_0, y_0, z_0) 满足 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. 平面方程可以写成

$$Ax + By + Cz + D = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

因此 (A, B, C) 是法向量.

- 点法式方程化一般方程: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 可以化为一般式 $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$.

平面的一般式方程

- 平面的一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$. 这里 A, B, C 不同时为 0.
- 一般式方程化点法式方程: 任取一个点 (x_0,y_0,z_0) 满足 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. 平面方程可以写成

$$Ax+By+Cz+D=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

因此 (A,B,C) 是法向量.

- 点法式方程化一般方程: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 可以化为一般式 $Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$.

- 平面的三点式方程：过不共线的三点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- 证明：P 在过三点的平面上 $\iff P,P_1,P_2,P_3$ 共面 $\iff \overrightarrow{P_1P}\cdot(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3})=0.$
- 若 $(A,B,C)=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$, 上面的方程可化为 $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$

平面的三点式方程

- 平面的三点式方程：过不共线的三点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- 证明：P 在过三点的平面上 $\Longleftrightarrow P, P_1, P_2, P_3$ 共面 $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{P_1P}\cdot(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3})=0.$
- 若 $(A,B,C)=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$，上面的方程可化为 $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$

平面的三点式方程

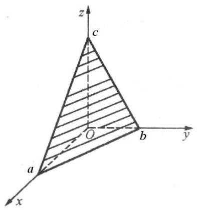
- 平面的三点式方程：过不共线的三点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$ 的方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- 证明：P 在过三点的平面上 $\iff P, P_1, P_2, P_3$ 共面 $\iff$ $\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$.
- 若 $(A,B,C) = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$, 上面的方程可化为 $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$.

平面的截距式方程

- 平面的截距式方程：过三点 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)(abc\neq 0)$ 的平面方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
  证明：法向量 $(A,B,C)=(-a,b,0)\times(-a,0,c)=(bc,ac,ab)$，平面方程为
$$bc(x-a)+acy+abz=0 \Longrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
- 若 $ABCD\neq 0$，一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 可化为截距式方程
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$



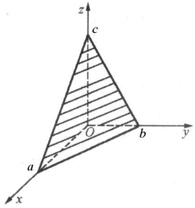
平面的截距式方程

- 平面的截距式方程：过三点 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)(abc\neq 0)$ 的平面方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$
  证明：法向量 $(A,B,C)=(-a,b,0)\times(-a,0,c)=(bc,ac,ab)$，平面方程为

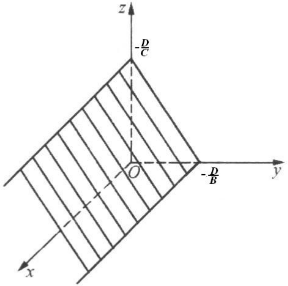
$$bc(x-a)+acy+abz=0\Longrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

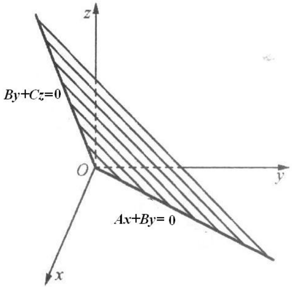
- 若 $ABCD\neq 0$，一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 可化为截距式方程

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$



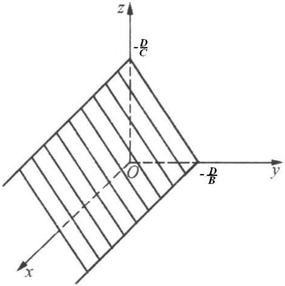
- 例：$Cz + D = 0$, 即 $z = -\frac{D}{C}$ 是与 Oxy 平面平行的平面.
- 例：$By + Cz + D = 0$, 是与 x 轴平行的平面.
- 例：$Ax + By + Cz = 0$, 是过原点的平面.

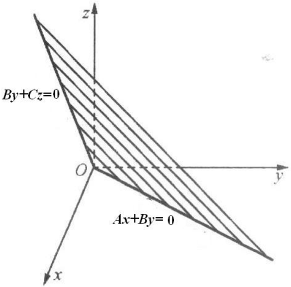




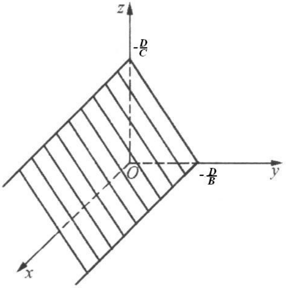
一些特殊方程

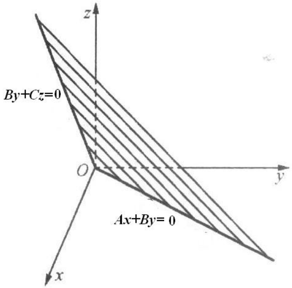
- 例： $Cz + D = 0$, 即 $z = -\frac{D}{C}$ 是与 Oxy 平面平行的平面.
- 例： $By + Cz + D = 0$, 是与 x 轴平行的平面.
- 例： $Ax + By + Cz = 0$, 是过原点的平面.





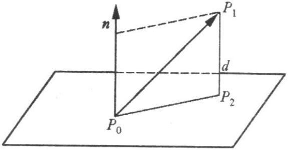
- 例：$Cz + D = 0$, 即 $z = -\frac{D}{C}$ 是与 Oxy 平面平行的平面.
- 例：$By + Cz + D = 0$, 是与 x 轴平行的平面.
- 例：$Ax + By + Cz = 0$, 是过原点的平面.





点到平面的距离

- 平面 $Ax+By+Cz+D=0$,
  求点 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 到平面的距离.

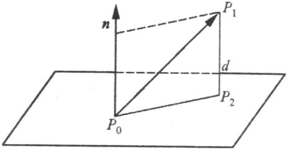


解：取平面上的点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$，则有 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. 设 $\vec{n}=(A,B,C)$. 则 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 到平面的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

点到平面的距离



- 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$,
  求点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 到平面的距离.
  解：取平面上的点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$，则有
  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. 设 $\vec{n} = (A, B, C)$.
  则 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 到平面的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

平面之间的关系

- 两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. 法向量分别为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{n}_1=(A_2,B_2,C_2)$. 设两平面的夹角 θ, 则

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

- 两平面垂直 $\Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.
- 两平面平行 (含重合)$\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 共线
  $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2)$.
- 两平面重合 $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2,D_2)$.

平面之间的关系

- 两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. 法向量分别为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{n}_1=(A_2,B_2,C_2)$. 设两平面的夹角 θ, 则

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

- 两平面垂直 $\Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.
- 两平面平行 (含重合)$\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 共线 $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2)$.
- 两平面重合 $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2,D_2)$.

平面之间的关系

- 两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. 法向量分别为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{n}_1=(A_2,B_2,C_2)$. 设两平面的夹角 θ, 则

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

- 两平面垂直 $\Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$
- 两平面平行 (含重合)$\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 共线
$\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2)$.
- 两平面重合 $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2,D_2)$.

平面之间的关系

- 两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. 法向量分别为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{n}_1=(A_2,B_2,C_2)$. 设两平面的夹角 θ, 则

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

- 两平面垂直 $\Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.
- 两平面平行 (含重合)$\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 共线
  $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2)$.
- 两平面重合 $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2,D_2)$.

例

- 求常数 l, k, 使得平面 $x+ly+kz=1$ 与平面 $x+y-z=8$ 垂直, 且过点 $(1,1,-\frac{2}{3})$.
- 解: $(1,l,k)\cdot(1,1,-1)=0$, 即 $1+l-k=0$. 又过 $(1,1,-\frac{2}{3})$, 因此满足 $1+l-\frac{2}{3}k=1$, 解方程组得 $l=2$, $k=3$.

例

- 求常数 l, k, 使得平面 $x+ly+kz=1$ 与平面 $x+y-z=8$ 垂直, 且过点 $(1,1,-\frac{2}{3})$.
- 解：$(1,l,k)\cdot(1,1,-1)=0$, 即 $1+l-k=0$. 又过 $(1,1,-\frac{2}{3})$，因此满足 $1+l-\frac{2}{3}k=1$, 解方程组得 $l=2$, $k=3$.

直线方程

- 一般曲线方程: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.
- 当两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 不平行, 即 $(A_1,B_1,C_1)\neq\lambda(A_2,B_2,C_2)$ 时, 方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

表示一条直线, 反过来, 任意直线可表示为两平面之交 (不唯一).

- 例: $\begin{cases} x-a=0 \\ y-b=0 \end{cases}$ 表示过 $(a,b,0)$ 且平行于 z 轴的直线.

直线方程

- 一般曲线方程: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.
- 当两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 不平行，即 $(A_1,B_1,C_1)\neq\lambda(A_2,B_2,C_2)$ 时，方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

表示一条直线, 反过来, 任意直线可表示为两平面之交 (不唯一).

- 例: $\begin{cases} x-a=0 \\ y-b=0 \end{cases}$ 表示过 $(a,b,0)$ 且平行于 z 轴的直线.

直线方程

- 一般曲线方程： $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.
- 当两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 不平行，即 $(A_1,B_1,C_1)\neq\lambda(A_2,B_2,C_2)$ 时，方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

表示一条直线，反过来，任意直线可表示为两平面之交 (不唯一).

- 例： $\begin{cases} x-a=0 \\ y-b=0 \end{cases}$ 表示过 $(a,b,0)$ 且平行于 z 轴的直线.

直线的参数方程

- 参数方程：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向为 $\vec{e} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 的直线方程：$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$.

  证明：点 $P(x, y, z)$ 在直线上 $\iff \overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{e}$ 共线 $\iff$ 存在 t, 使得 $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{e}$.

- 求两平面交线的参数方程：先求出交线上一点 P_0, 取 $\vec{e} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, 即可写出两平面交线的参数方程.

直线的参数方程

- 参数方程：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向为 $\vec{e} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 的直线方程：$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$.

  证明：点 $P(x, y, z)$ 在直线上 $\iff \overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{e}$ 共线 $\iff$ 存在 t, 使得 $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{e}$.
- 求两平面交线的参数方程：先求出交线上一点 P_0, 取 $\vec{e} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, 即可写出两平面交线的参数方程.

直线的参数方程

- 参数方程：过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，方向为 $\vec{e}=(a,b,c)\neq\vec{0}$ 的直线方程：$\begin{cases} x-x_0=ta \\ y-y_0=tb \\ z-z_0=tc \end{cases}$.
  证明：点 $P(x,y,z)$ 在直线上 $\iff \overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{e}$ 共线 $\iff$ 存在 t，使得 $\overrightarrow{P_0P}=t\vec{e}$.
- 求两平面交线的参数方程：先求出交线上一点 P_0，取 $\vec{e}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$，即可写出两平面交线的参数方程.

参数方程消去 t

- 直线的参数方程中消去 t: 若 $abc \neq 0$，得

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \Longrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c};$$

若 a, b, c 中有一个为 0, 如 $a = 0, bc \neq 0$ 时，得

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases};$$

若 a, b, c 中有两个为 0, 如 $a = b = 0, c \neq 0$ 时, 得

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}.$$

参数方程消去 t

- 直线的参数方程中消去 t: 若 $abc \neq 0$，得

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \Longrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c};$$

若 a, b, c 中有一个为 0, 如 $a = 0, bc \neq 0$ 时，得

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases};$$

若 a, b, c 中有两个为 0, 如 $a = b = 0, c \neq 0$ 时, 得

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}.$$

参数方程消去 t

- 直线的参数方程中消去 t: 若 $abc \neq 0$，得

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \implies \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c};$$

若 a, b, c 中有一个为 0, 如 $a = 0, bc \neq 0$ 时，得

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases};$$

若 a, b, c 中有两个为 0, 如 $a = b = 0, c \neq 0$ 时, 得

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}.$$

直线的标准方程

- 标准方程：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向为 $\vec{e} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 的直线方程：

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

这里规定：$a = 0, bc \neq 0$ 时，上面方程理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases};$$

$a = b = 0, c \neq 0$ 时，上面方程理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}.$$

直线的标准方程

- 标准方程：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向为 $\vec{e} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 的直线方程：

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

这里规定：$a = 0, bc \neq 0$ 时，上面方程理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases};$$

$a = b = 0, c \neq 0$ 时，上面方程理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}.$$

直线的标准方程

- 标准方程：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向为 $\vec{e} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 的直线方程：

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

这里规定：$a = 0, bc \neq 0$ 时，上面方程理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases};$$

$a = b = 0, c \neq 0$ 时，上面方程理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}.$$

- 直线过 P_0，方向为 $\vec{e}$, 则点 P 到该直线的距离为 $\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{e}|}{|\vec{e}|}$.
- 点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的垂线方程为

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}.$$

- 设直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的夹角为 θ，则有

$$\sin\theta=\frac{|(a,b,c)\cdot(A,B,C)|}{|(a,b,c)|\cdot|(A,B,C)|}$$

- 直线过 P_0，方向为 $\vec{e}$, 则点 P 到该直线的距离为 $\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{e}|}{|\vec{e}|}$.
- 点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的垂线方程为

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}.$$

- 设直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的夹角为 θ，则有

$$\sin\theta=\frac{|(a,b,c)\cdot(A,B,C)|}{|(a,b,c)|\cdot|(A,B,C)|}$$

直线与平面

- 直线过 P_0，方向为 $\vec{e}$, 则点 P 到该直线的距离为 $\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{e}|}{|\vec{e}|}$.
- 点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的垂线方程为

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}.$$

- 设直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的夹角为 θ，则有

$$\sin\theta=\frac{|(a,b,c)\cdot(A,B,C)|}{|(a,b,c)|\cdot|(A,B,C)|}$$

两直线之间的关系

两直线：$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$. 设 $\vec{e}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{e}_2=(a_2,b_2,c_2)$，$P_1=(x_1,y_1,z_1)$，$P_2=(x_2,y_2,z_2)$.

- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 共线，但与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 不共线，则两直线平行；当 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共线时，则两直线重合.
- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 不共线时，混合积 $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)=0$ 时两直线相交，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\neq 0$ 时，两直线异面.
- 当两直线是异面直线时，公垂线的长度为

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)|}{|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|}.$$

两直线之间的关系

两直线：$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$. 设 $\vec{e}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{e}_2=(a_2,b_2,c_2)$, $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$.

- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 共线，但与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 不共线，则两直线平行；当 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共线时，则两直线重合.
- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 不共线时，混合积 $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)=0$ 时两直线相交，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\neq 0$ 时，两直线异面.
- 当两直线是异面直线时，公垂线的长度为
$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)|}{|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|}.$$

两直线之间的关系

两直线：$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$. 设 $\vec{e}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{e}_2=(a_2,b_2,c_2)$, $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)$.

- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 共线，但与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 不共线，则两直线平行；当 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共线时，则两直线重合.
- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 不共线时，混合积 $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)=0$ 时两直线相交，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\neq 0$ 时，两直线异面.
- 当两直线是异面直线时，公垂线的长度为

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)|}{|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|}.$$

二次曲面

- 一般曲面：$F(x, y, z) = 0$, 一次曲面 (平面)：$Ax + By + Cz + D = 0$.
- 一般二次曲面方程：

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

其中 A, B, C, D, E, F 不能全为 0.

- 一些特殊情形不是曲面. 如

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)^2 + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2)^2 = 0$$

表示一条直线.

- 一般曲面：$F(x,y,z)=0$, 一次曲面 (平面)：$Ax+By+Cz+D=0$.
- 一般二次曲面方程：

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+J=0.$$

其中 A,B,C,D,E,F 不能全为 0.

- 一些特殊情形不是曲面. 如

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)^2=0$$

表示一条直线.

二次曲面

- 一般曲面：$F(x,y,z)=0$, 一次曲面 (平面)：$Ax+By+Cz+D=0$.
- 一般二次曲面方程：

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+J=0.$$

其中 A,B,C,D,E,F 不能全为 0.

- 一些特殊情形不是曲面. 如

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)^2=0$$

表示一条直线.

二次曲面方程的化简

- 任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$, 总有正交变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

使 f 化成标准型

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值.

- 若 $f=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx$, 取 $a_{12}=a_{21}=\frac{D}{2}$, $a_{23}=a_{32}=\frac{E}{2}$, $a_{13}=a_{31}=\frac{F}{2}$.

二次型化成标准型 1

- 例: 求一个正交变换, 把二次型 $-2xy+2xz+2yz$ 化成标准型.
- 解: 二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, 特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$

- 例: 求一个正交变换, 把二次型 $-2xy+2xz+2yz$ 化成标准型.
- 解: 二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

- 对 $\lambda_1 = -2$, 解方程

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = k\vec{p}_1$$

  对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 解方程

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= k_1\vec{p}_2 + k_2\vec{p}_3$$

二次型化成标准型 3

- $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ 正交化，

$$\vec{p'}_3 = \vec{p}_3 - \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3}{|\vec{p}_2|^2}\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 标准正交基

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

二次型化成标准型 3

- $\vec{p}_2, \vec{p}_3$ 正交化，

$$\vec{p'}_3 = \vec{p}_3 - \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3}{|\vec{p}_2|^2}\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 标准正交基

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

二次型化成标准型 4

- 正交变换
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
把二次型化成标准型
$$-2xy + 2xz + 2yz = -2(x')^2 + (y')^2 + (z')^2.$$

- 一般二次曲面方程经过坐标变换, 可简化为:
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$
其中 A, B, C 不全为 0.

二次型化成标准型 4

- 正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

  把二次型化成标准型

$$-2xy + 2xz + 2yz = -2(x')^2 + (y')^2 + (z')^2.$$

- 一般二次曲面方程经过坐标变换, 可简化为:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

  其中 A, B, C 不全为 0.

平面二次曲线

- 通过正交变换, $ax^2+bxy+cy^2$ 可化成标准型 $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2$, 其中 λ_1,λ_2 是特征方程 $\begin{vmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{vmatrix}=0$, 即 $\lambda^2-(a+c)\lambda+\frac{4ac-b^2}{4}=0$ 的根 (实根), 显然当 $b^2-4ac<0$,λ_1,λ_2 同号.
- 平面曲线方程 $ax^2+bxy+cy^2=1$, 若 $a\neq 0$, 可化为

$$(x+\frac{b}{2a}y)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}y^2=\frac{1}{a}.$$

做变换 $x'=x+\frac{b}{2a}y, y'=y$, 可知当 $b^2-4ac<0$, $a>0$ 时是椭圆, 当 $b^2-4ac>0$ 时是双曲线.

平面二次曲线

- 通过正交变换, $ax^2+bxy+cy^2$ 可化成标准型 $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2$, 其中 λ_1,λ_2 是特征方程 $\begin{vmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{vmatrix}=0$, 即 $\lambda^2-(a+c)\lambda+\frac{4ac-b^2}{4}=0$ 的根 (实根), 显然当 $b^2-4ac<0$,λ_1,λ_2 同号.
- 平面曲线方程 $ax^2+bxy+cy^2=1$, 若 $a\neq 0$, 可化为

$$(x+\frac{b}{2a}y)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}y^2=\frac{1}{a}.$$

做变换 $x'=x+\frac{b}{2a}y, y'=y$, 可知当 $b^2-4ac<0$, $a>0$ 时是椭圆, 当 $b^2-4ac>0$ 时是双曲线.

A, B, C 都不为 0 时方程的化简

A, B, C 都不为 0 时，方程可写成
$A(x+\frac{G}{2A})^2+B(y+\frac{H}{2B})^2+C(z+\frac{I}{2C})^2+J'=0$. 通过坐标平移，方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$.

- $J=0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \to$ 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- $J\neq 0$, 方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$. 有如下几种形式：
  A, B, C 符号相同 $\to$ 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
  $A>0, B>0, C<0 \to$ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  $A<0, B<0, C>0 \to$ 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

A, B, C 都不为 0 时方程的化简

A, B, C 都不为 0 时，方程可写成

$A(x+\frac{G}{2A})^2+B(y+\frac{H}{2B})^2+C(z+\frac{I}{2C})^2+J'=0$. 通过坐标平移，方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$.

- $J=0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \to$ 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- $J\neq 0$, 方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$. 有如下几种形式：
  A, B, C 符号相同 $\to$ 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
  $A>0, B>0, C<0 \to$ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  $A<0, B<0, C>0 \to$ 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

A, B, C 都不为 0 时方程的化简

A, B, C 都不为 0 时，方程可写成
$A(x+\frac{G}{2A})^2+B(y+\frac{H}{2B})^2+C(z+\frac{I}{2C})^2+J'=0$. 通过坐标平移，方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$.

- $J=0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \to$ 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- $J\neq 0$, 方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$. 有如下几种形式：
  A, B, C 符号相同 $\to$ 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
  $A>0, B>0, C<0 \to$ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  $A<0, B<0, C>0 \to$ 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

A, B, C 都不为 0 时方程的化简

A, B, C 都不为 0 时，方程可写成
$A(x+\frac{G}{2A})^2+B(y+\frac{H}{2B})^2+C(z+\frac{I}{2C})^2+J'=0$. 通过坐标平移，方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$.

- $J=0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \to$ 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- $J\neq 0$, 方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2=1$. 有如下几种形式：
  A, B, C 符号相同 $\to$ 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
  $A>0, B>0, C<0 \to$ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  $A<0, B<0, C>0 \to$ 双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

A, B, C 中有一个为 0 时方程的化简

设 A, B 不为 0，$C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$.

- $I = J = 0$, 退化
- $I = 0$，$J \neq 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 = 1$.
  A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
  A, B 符号相反 $\rightarrow$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 若 $I \neq 0$, 平移坐标 z 可以化为 $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$, 方程可化为 $Ax^2 + By^2 - z = 0$.
  A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
  A, B 符号不同 $\rightarrow$ 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.

A, B, C 中有一个为 0 时方程的化简

设 A, B 不为 0，$C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$.

- $I = J = 0$, 退化
- $I = 0$，$J \neq 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 = 1$.
  A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
  A, B 符号相反 $\rightarrow$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 若 $I \neq 0$, 平移坐标 z 可以化为 $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$, 方程可化为 $Ax^2 + By^2 - z = 0$.
  A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
  A, B 符号不同 $\rightarrow$ 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.

A, B, C 中有一个为 0 时方程的化简

设 A, B 不为 0，$C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$.

- $I = J = 0$, 退化
- $I = 0$，$J \neq 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 = 1$.
  A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
  A, B 符号相反 $\rightarrow$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 若 $I \neq 0$, 平移坐标 z 可以化为 $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$, 方程可化为 $Ax^2 + By^2 - z = 0$.
  A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
  A, B 符号不同 $\rightarrow$ 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.

A, B, C 中有一个为 0 时方程的化简

设 A, B 不为 0，$C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$.

- $I = J = 0$, 退化
- $I = 0$，$J \neq 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 = 1$.
  A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
  A, B 符号相反 $\rightarrow$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 若 $I \neq 0$, 平移坐标 z 可以化为 $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$, 方程可化为 $Ax^2 + By^2 - z = 0$.
  A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
  A, B 符号不同 $\rightarrow$ 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.

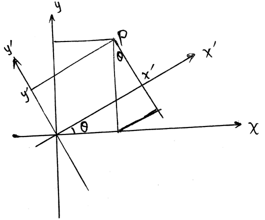
A, B, C 中有两个为 0 时方程的化简

设 A 不为 0，$B = C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + Hy + Iz + J = 0$. 当

- 当 $H = I = 0$ 时 $\to$ 曲面退化为平面.
- H, I 不全为 0 时，通过平移可化为 $Ax^2 + Hy + Iz = 0$. 再通过 Oyz 平面的旋转

$$\begin{cases} y' = \frac{H}{\sqrt{H^2+I^2}} y + \frac{I}{\sqrt{H^2+I^2}} z \\ z' = -\frac{I}{\sqrt{H^2+I^2}} y + \frac{H}{\sqrt{H^2+I^2}} z \end{cases}$$

方程可化为 $Ax^2 + \sqrt{H^2 + I^2} y' = 0 \to$ 抛物柱面 $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$.



$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

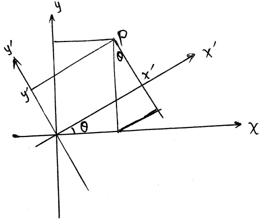
A, B, C 中有两个为 0 时方程的化简

设 A 不为 0，$B = C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + Hy + Iz + J = 0$. 当

- 当 $H = I = 0$ 时 $\rightarrow$ 曲面退化为平面.
- H, I 不全为 0 时，通过平移可化为 $Ax^2 + Hy + Iz = 0$. 再通过 Oyz 平面的旋转

$$\begin{cases} y' = \dfrac{H}{\sqrt{H^2+I^2}}y + \dfrac{I}{\sqrt{H^2+I^2}}z \\ z' = -\dfrac{I}{\sqrt{H^2+I^2}}y + \dfrac{H}{\sqrt{H^2+I^2}}z \end{cases}$$

方程可化为 $Ax^2 + \sqrt{H^2 + I^2}y' = 0 \rightarrow$ 抛物柱面 $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$.



$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

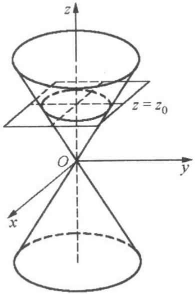
$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

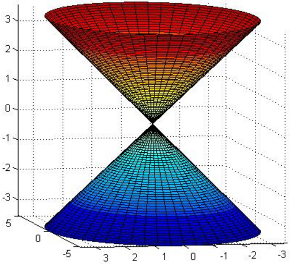
锥面

- 锥面：给定一条空间曲线 C 和不在 C 上的一点 O，当点 P 沿曲线 C 运动时，连接点 O 和 P 的直线 OP 形成的曲面称为锥面. 称点 O 为锥面的顶点，动直线称为锥面的直母线, 曲线 C 为锥面的准线.

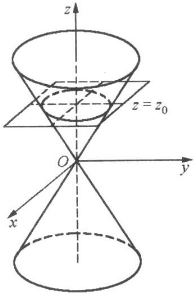
椭圆锥面

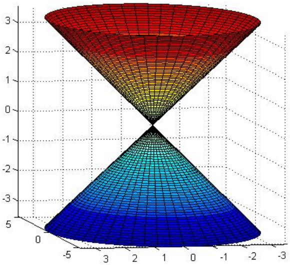
- 椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$
- 上面的椭圆锥面与 $z = z_0(\neq 0)$ 的交线为椭圆，与 $x = x_0(\neq 0)$，或者 $y = y_0(\neq 0)$ 的交线为双曲线，与 $x = 0$，或者 $y = 0$ 的交线为两条直线.





- 椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- 上面的椭圆锥面与 $z=z_0(\neq 0)$ 的交线为椭圆，与 $x=x_0(\neq 0)$，或者 $y=y_0(\neq 0)$ 的交线为双曲线，与 $x=0$，或者 $y=0$ 的交线为两条直线.

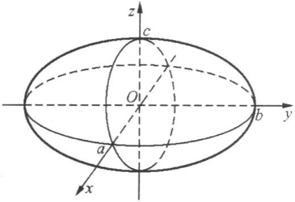




椭球面

- 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$
- 椭球面和平行与坐标平面的平面 $x=x_0(|x_0|<a)$, $y=y_0(|y_0|<y)$, $z=z_0(|z_0|<c)$ 截得的曲线是椭圆.
- 椭球面的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sin\phi\cos\theta \\ y=b\sin\phi\sin\theta \\ z=c\cos\phi \end{cases},$$



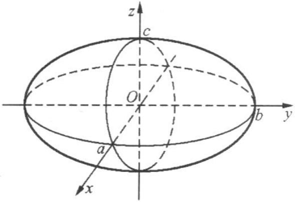
其中 $0\le\theta<2\pi$, $0\le\phi\le\pi$.

椭球面

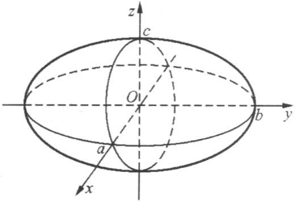
- 椭球面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- 椭球面和平行与坐标平面的平面 $x = x_0(|x_0| < a)$, $y = y_0(|y_0| < y)$, $z = z_0(|z_0| < c)$ 截得的曲线是椭圆.
- 椭球面的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\phi\cos\theta \\ y = b\sin\phi\sin\theta \\ z = c\cos\phi \end{cases},$$

其中 $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.



- 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- 椭球面和平行与坐标平面的平面 $x=x_0(|x_0|<a)$, $y=y_0(|y_0|<y)$, $z=z_0(|z_0|<c)$ 截得的曲线是椭圆.
- 椭球面的参数方程为

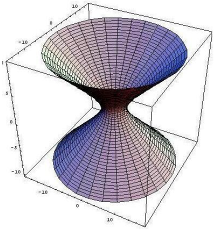


$$\begin{cases} x=a\sin\phi\cos\theta \\ y=b\sin\phi\sin\theta \\ z=c\cos\phi \end{cases},$$

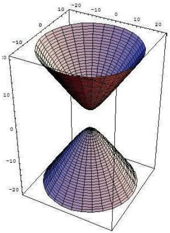
其中 $0\le\theta<2\pi$, $0\le\phi\le\pi$.

双曲面

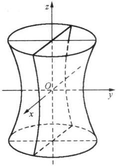
- 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  这里 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$. 与 $z=z_0$ 的交线为椭圆，与 $x=x_0\neq\pm a$ 或者 $y=y_0\neq\pm b$ 的交线为双曲线，与 $x=\pm a$ 或者 $y=\pm b$ 的交线为两条直线.
- 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.
  这里 $|z|\geq c$. 与 $x=x_0$ 或者 $y=y_0$ 的交线为双曲线.

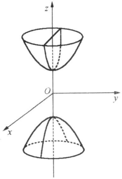


单叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{4^2}=1$



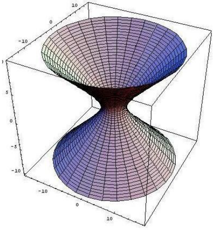
双叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{3^2}=-1$



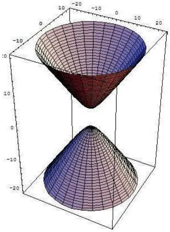


双曲面

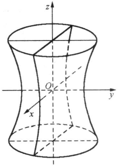
- 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  这里 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$. 与 $z=z_0$ 的交线为椭圆，与 $x=x_0\neq\pm a$ 或者 $y=y_0\neq\pm b$ 的交线为双曲线，与 $x=\pm a$ 或者 $y=\pm b$ 的交线为两条直线.
- 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.
  这里 $|z|\geq c$. 与 $x=x_0$ 或者 $y=y_0$ 的交线为双曲线.

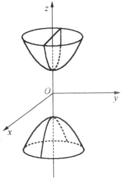


单叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{4^2}=1$



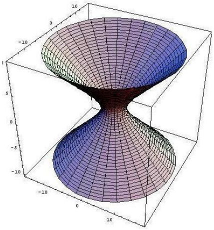
双叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{3^2}=-1$



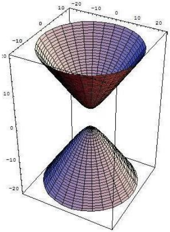


双曲面

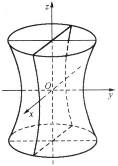
- 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  这里 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$. 与 $z=z_0$ 的交线为椭圆，与 $x=x_0\neq\pm a$ 或者 $y=y_0\neq\pm b$ 的交线为双曲线，与 $x=\pm a$ 或者 $y=\pm b$ 的交线为两条直线.
- 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.
  这里 $|z|\geq c$. 与 $x=x_0$ 或者 $y=y_0$ 的交线为双曲线.

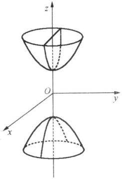


单叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{4^2}=1$

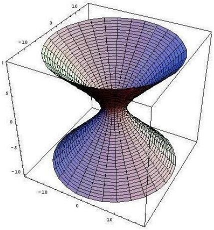


双叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{3^2}=-1$

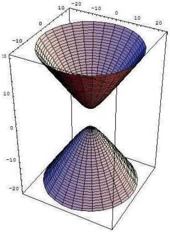




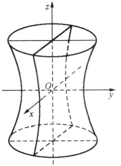
- 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  这里 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$. 与 $z=z_0$ 的交线为椭圆，与 $x=x_0\neq\pm a$ 或者 $y=y_0\neq\pm b$ 的交线为双曲线，与 $x=\pm a$ 或者 $y=\pm b$ 的交线为两条直线.
- 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.
  这里 $|z|\geq c$. 与 $x=x_0$ 或者 $y=y_0$ 的交线为双曲线.

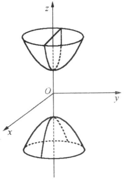


单叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{4^2}=1$



双叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{3^2}=-1$

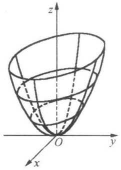


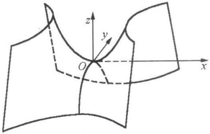


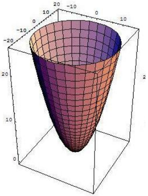
椭圆抛物面和双曲抛物面

.

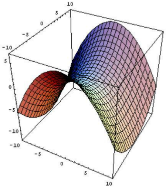
- 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0.$
- 双曲抛物面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0.$
  与平行于坐标平面的平面的截线：双曲线 $(z=z_0\neq 0)$，两条相交直线 $(z=0)$，抛物线 $(x=x_0$ 或 $y=y_0)$.







椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}$



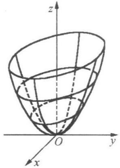
双曲抛物面 $z=\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}$

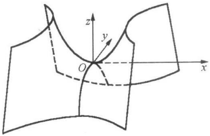
椭圆抛物面和双曲抛物面

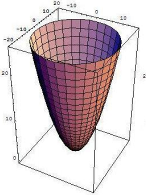
.

- 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
- 双曲抛物面：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.

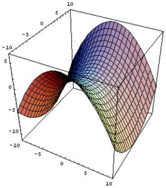
与平行于坐标平面的平面的截线：双曲线 ($z = z_0 \neq 0$)，两条相交直线 ($z = 0$)，抛物线 ($x = x_0$ 或 $y = y_0$).







椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}$

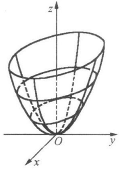


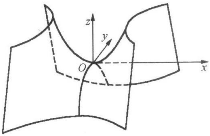
双曲抛物面 $z=\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}$

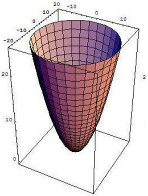
椭圆抛物面和双曲抛物面

.

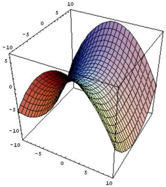
- 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$.
- 双曲抛物面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$.
  与平行于坐标平面的平面的截线：双曲线 $(z=z_0\neq 0)$, 两条相交直线 $(z=0)$, 抛物线 $(x=x_0$ 或 $y=y_0)$.







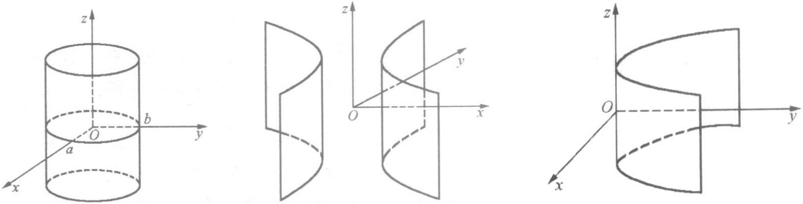
椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}$



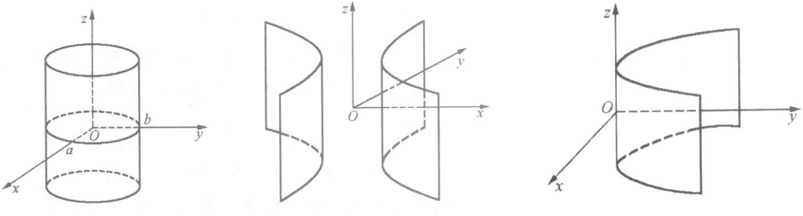
双曲抛物面 $z=\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}$

柱面

- 柱面：动直线沿着一条定曲线平行移动所形成的曲面. 动直线称为柱面的母线，定曲线称为柱面的准线.
- 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$
- 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$
- 抛物柱面：$\frac{x^2}{a^2} - y = 0.$

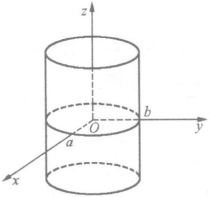


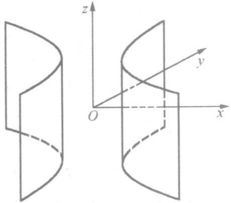
- 柱面：动直线沿着一条定曲线平行移动所形成的曲面. 动直线称为柱面的母线，定曲线称为柱面的准线.
- 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- 抛物柱面：$\frac{x^2}{a^2}-y=0$.

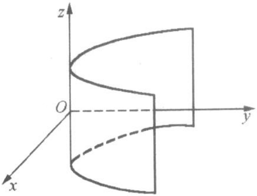


柱面

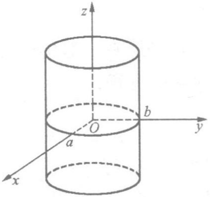
- 柱面：动直线沿着一条定曲线平行移动所形成的曲面. 动直线称为柱面的母线，定曲线称为柱面的准线.
- 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 抛物柱面：$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$.

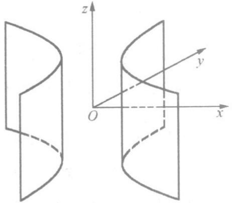


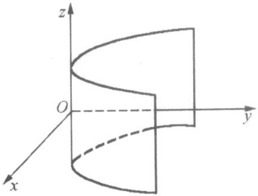




- 柱面：动直线沿着一条定曲线平行移动所形成的曲面. 动直线称为柱面的母线，定曲线称为柱面的准线.
- 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- 抛物柱面：$\frac{x^2}{a^2}-y=0$.







例 1

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$, 是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 例: 平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(看成三维空间中 Oxy 平面中的曲线) 绕 y 轴旋转所产生的旋转面.

  解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的一点, 存在曲线上的点 $(x_1,y,0)$ 满足 $x^2+z^2=x_1^2$, 因此 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 即得椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.
- 例: 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}(c\neq 0)$, 求直线绕 z 轴旋转所得曲面的方程.
- 注: 当 $c=0$ 时, 若直线与 z 轴不交, 得到去掉一个开圆盘的平面。

例 1

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$, 是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 例: 平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(看成三维空间中 Oxy 平面中的曲线) 绕 y 轴旋转所产生的旋转面.

  解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的一点, 存在曲线上的点 $(x_1,y,0)$ 满足 $x^2+z^2=x_1^2$, 因此 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 即得椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.
- 例: 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}(c\neq 0)$, 求直线绕 z 轴旋转所得曲面的方程.
- 注: 当 $c=0$ 时, 若直线与 z 轴不交, 得到去掉一个开圆盘的平面。

例 1

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$, 是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 例: 平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(看成三维空间中 Oxy 平面中的曲线) 绕 y 轴旋转所产生的旋转面.

  解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的一点, 存在曲线上的点 $(x_1,y,0)$ 满足 $x^2+z^2=x_1^2$, 因此 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 即得椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.
- 例: 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}(c\neq 0)$, 求直线绕 z 轴旋转所得曲面的方程.
- 注: 当 $c=0$ 时, 若直线与 z 轴不交, 得到去掉一个开圆盘的平面。

例 1

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$, 是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 例: 平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(看成三维空间中 Oxy 平面中的曲线) 绕 y 轴旋转所产生的旋转面.

  解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的一点, 存在曲线上的点 $(x_1,y,0)$ 满足 $x^2+z^2=x_1^2$, 因此 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 即得椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.
- 例: 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}(c\neq 0)$, 求直线绕 z 轴旋转所得曲面的方程.
- 注: 当 $c=0$ 时, 若直线与 z 轴不交, 得到去掉一个开圆盘的平面。

例 1

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$, 是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 例: 平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(看成三维空间中 Oxy 平面中的曲线) 绕 y 轴旋转所产生的旋转面.

  解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的一点, 存在曲线上的点 $(x_1,y,0)$ 满足 $x^2+z^2=x_1^2$, 因此 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 即得椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.
- 例: 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}(c\neq 0)$, 求直线绕 z 轴旋转所得曲面的方程.
- 注: 当 $c=0$ 时, 若直线与 z 轴不交, 得到去掉一个开圆盘的平面。

例 1

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$, 是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 例: 平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(看成三维空间中 Oxy 平面中的曲线) 绕 y 轴旋转所产生的旋转面.

  解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的一点, 存在曲线上的点 $(x_1,y,0)$ 满足 $x^2+z^2=x_1^2$, 因此 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 即得椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.
- 例: 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}(c\neq 0)$, 求直线绕 z 轴旋转所得曲面的方程.
- 注: 当 $c=0$ 时, 若直线与 z 轴不交, 得到去掉一个开圆盘的平面。

例 1

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$, 是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 例: 平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(看成三维空间中 Oxy 平面中的曲线) 绕 y 轴旋转所产生的旋转面.

  解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的一点, 存在曲线上的点 $(x_1,y,0)$ 满足 $x^2+z^2=x_1^2$, 因此 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 即得椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.
- 例：直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}(c\neq 0)$, 求直线绕 z 轴旋转所得曲面的方程.
- 注: 当 $c=0$ 时，若直线与 z 轴不交, 得到去掉一个开圆盘的平面。

例 2

- 解: 设 (x, y, z) 是旋转面上的任意点，则存在直线上的点 (x_1, y_1, z),
满足 $x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$, 当 $a = b = 0$ 时 $x_1 = x_0, y_1 = y_0$, 因此
$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ 是是圆柱面.
当 a, b 不同时为 0 时, (x, y, z) 满足方程

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a(z - z_0)}{c} + x_0\right)^2 + \left(\frac{b(z - z_0)}{c} + y_0\right)^2.$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{c^2}\left[z - z_0 + \frac{c(ax_0 + by_0)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \frac{(bx_0 - ay_0)^2}{a^2 + b^2}$$

当直线与 z 轴相交时 $(bx_0 = ay_0)$ 是圆锥曲面，不交时是单页双曲面。
- 注: 上面的单叶双曲面最细处半径等于直线和 z 的距离 $\frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

例 2

- 解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的任意点，则存在直线上的点 (x_1,y_1,z)，满足 $x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$，当 $a=b=0$ 时 $x_1=x_0,y_1=y_0$，因此 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$ 是是圆柱面.
  当 a,b 不同时为 0 时，(x,y,z) 满足方程

$$x^2+y^2=\left(\frac{a(z-z_0)}{c}+x_0\right)^2+\left(\frac{b(z-z_0)}{c}+y_0\right)^2.$$

$$=\frac{a^2+b^2}{c^2}\left[z-z_0+\frac{c(ax_0+by_0)}{a^2+b^2}\right]^2+\frac{(bx_0-ay_0)^2}{a^2+b^2}$$

  当直线与 z 轴相交时 $(bx_0=ay_0)$ 是圆锥曲面，不交时是单页双曲面。
- 注: 上面的单叶双曲面最细处半径等于直线和 z 的距离 $\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

例 2

- 解: 设 (x, y, z) 是旋转面上的任意点，则存在直线上的点 (x_1, y_1, z), 满足 $x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$, 当 $a = b = 0$ 时 $x_1 = x_0, y_1 = y_0$, 因此 $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ 是是圆柱面.

  当 a, b 不同时为 0 时, (x, y, z) 满足方程

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a(z - z_0)}{c} + x_0\right)^2 + \left(\frac{b(z - z_0)}{c} + y_0\right)^2.$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{c^2}\left[z - z_0 + \frac{c(ax_0 + by_0)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \frac{(bx_0 - ay_0)^2}{a^2 + b^2}$$

  当直线与 z 轴相交时 $(bx_0 = ay_0)$ 是圆锥曲面，不交时是单页双曲面。

- 注: 上面的单叶双曲面最细处半径等于直线和 z 的距离 $\frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

例 2

- 解: 设 (x, y, z) 是旋转面上的任意点，则存在直线上的点 (x_1, y_1, z)，满足 $x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$，当 $a = b = 0$ 时 $x_1 = x_0, y_1 = y_0$，因此 $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ 是是圆柱面.
  当 a, b 不同时为 0 时, (x, y, z) 满足方程
  $$x^2 + y^2 = \left(\frac{a(z - z_0)}{c} + x_0\right)^2 + \left(\frac{b(z - z_0)}{c} + y_0\right)^2.$$
  $$= \frac{a^2 + b^2}{c^2}\left[z - z_0 + \frac{c(ax_0 + by_0)}{a^2 + b^2}\right]^2 + \frac{(bx_0 - ay_0)^2}{a^2 + b^2}$$
  当直线与 z 轴相交时 $(bx_0 = ay_0)$ 是圆锥曲面，不交时是单页双曲面。
- 注: 上面的单叶双曲面最细处半径等于直线和 z 的距离 $\frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

例 2

- 解: 设 (x,y,z) 是旋转面上的任意点，则存在直线上的点 (x_1,y_1,z), 满足 $x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$, 当 $a=b=0$ 时 $x_1=x_0, y_1=y_0$, 因此 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$ 是是圆柱面.
  当 a,b 不同时为 0 时, (x,y,z) 满足方程

$$x^2+y^2=\left(\frac{a(z-z_0)}{c}+x_0\right)^2+\left(\frac{b(z-z_0)}{c}+y_0\right)^2.$$

$$=\frac{a^2+b^2}{c^2}\left[z-z_0+\frac{c(ax_0+by_0)}{a^2+b^2}\right]^2+\frac{(bx_0-ay_0)^2}{a^2+b^2}$$

  当直线与 z 轴相交时 $(bx_0=ay_0)$ 是圆锥曲面，不交时是单页双曲面。
- 注: 上面的单叶双曲面最细处半径等于直线和 z 的距离 $\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

一元向量函数

- 一元向量函数: $D \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射, 记为 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$.
- 向量函数的极限: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta, \text{使得当 } 0 < |t - t_0| < \delta \text{ 时}, \ |\vec{r(t)} - \vec{r}_0| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

- 向量函数的连续
- 向量函数的导数:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

一元向量函数

- 一元向量函数: $D \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射, 记为 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$.
- 向量函数的极限：$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta, \text{使得当 } 0 < |t - t_0| < \delta \text{ 时，} |\vec{r(t)} - \vec{r}_0| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

- 向量函数的连续
- 向量函数的导数：

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

一元向量函数

- 一元向量函数: $D \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射, 记为 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$.
- 向量函数的极限：$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta, \text{使得当 } 0 < |t - t_0| < \delta \text{ 时，} |\vec{r(t)} - \vec{r}_0| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

- 向量函数的连续
- 向量函数的导数：

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

空间曲线

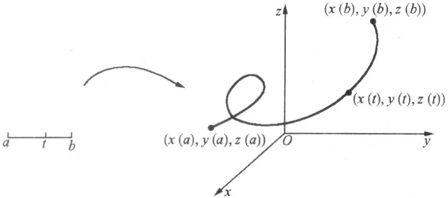
- 空间曲线：区间 $[a, b]$ 到空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个连续映射的像. 该映射可以用向量函数表示：

$$\begin{aligned} \vec{r}: [a, b] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

$(x(a), y(a), z(a))$ 和 $(x(b), y(b), z(b))$ 为曲线的端点.

此时我们称

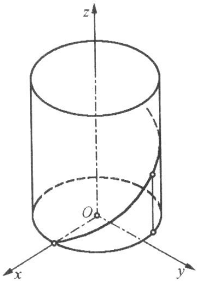
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a, b].$$



为该曲线的参数方程.

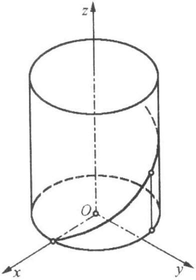
光滑曲线

- 光滑曲线：若 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([a,b])$，且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为 0，则称上面的参数方程表示的空间曲线是光滑曲线.
- 光滑曲线在每一点都有切线，而且切线随参数连续变动.
- 例：曲线 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,$ $z = bt(0 \le t \le 2\pi)$ 是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的一条曲线.



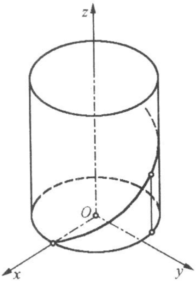
光滑曲线

- 光滑曲线：若 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([a,b])$，且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为 0，则称上面的参数方程表示的空间曲线是光滑曲线.
- 光滑曲线在每一点都有切线，而且切线随参数连续变动.
- 例：曲线 $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt (0 \le t \le 2\pi)$ 是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的一条曲线.



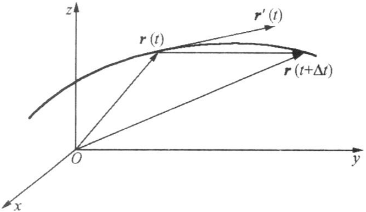
光滑曲线

- 光滑曲线：若 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([a, b])$，且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为 0，则称上面的参数方程表示的空间曲线是光滑曲线.
- 光滑曲线在每一点都有切线，而且切线随参数连续变动.
- 例：曲线 $x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = bt(0 \le t \le 2\pi)$ 是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的一条曲线.



光滑曲线的切向

- 光滑曲线 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. 当 $\Delta t>0$ 时, $\vec{r}(t)$ 到 $\vec{r}(t+\Delta t)$ 的割线方向 (或者 $\Delta t<0$ 时 $\vec{r}(t+\Delta t)$ 到 $\vec{r}(t)$ 的割线方向) 与下面向量的方向一致
$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}.$$
极限 (若存在且不是零向量)
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\vec{r}\,'(t)$$
是曲线在 $\vec{r}(t)$ 处的切线方向.



光滑曲线的切线和法平面

- 曲线在 $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ 处的切线为

$$\begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0) \\ z = z(t_0) + tz'(t_0) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

切线方程的向量形式：$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$.

- 曲线 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 在 $\vec{r}(t_0)$ 处的法平面为

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

光滑曲线的切线和法平面

- 曲线在 $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ 处的切线为

$$\begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0) \\ z = z(t_0) + tz'(t_0) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

切线方程的向量形式：$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$.

- 曲线 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 在 $\vec{r}(t_0)$ 处的法平面为

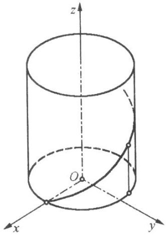
$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

例

- 例：曲线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$ 处的切向为 $(-a\sin t, a\cos t, b)|_{t=\frac{\pi}{2}} = (-a, 0, b)$, 切线方程为

$$\frac{x-0}{-a} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-\frac{\pi b}{2}}{b},$$

法平面为 $(-a)(x-0) + b(z - \frac{ba}{2}) = 0$.



- 第三章已经讲过平面曲线弧长公式.
- 曲线 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$，$a \leq t \leq b$. 把 $[a,b]$ 进行分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. $\lambda=\max\{\Delta t_i : i=1,2,\cdots,n\}$. 曲线的弧长定义为

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})|$$

则有

$$s=\int_a^b|\vec{r}'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

空间曲线弧长

- 第三章已经讲过平面曲线弧长公式.
- 曲线 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$，$a \le t \le b$. 把 $[a, b]$ 进行分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. $\lambda = \max\{\Delta t_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$. 曲线的弧长定义为

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$$

则有

$$s = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

曲线弧长

- 证明思路：利用

$$
\begin{aligned}
&|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})| \\
&=\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2} \\
&\approx \sqrt{(x'(t_{i-1}))^2+(y'(t_{i-1}))^2+(z'(t_{i-1}))^2}\Delta t_i=|\vec{r}\,'(t_{i-1})|\Delta t_i
\end{aligned}
$$

从而得到弧长公式.

或者用微元法, $[t, t+\Delta t]$ 对应的弧长

$\Delta s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\Delta t+o(\Delta t)$.

- 弧微分：$ds=|\vec{r}\,'(t)|dt=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$.
- 例：曲线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt,\ 0\le t\le\pi$ 的弧长

$$
s=\int_0^{\pi}\sqrt{(a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}dt=\pi\sqrt{a^2+b^2}.
$$

曲线弧长

- 证明思路：利用

$$
\begin{aligned}
&|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})| \\
&=\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2} \\
&\approx \sqrt{(x'(t_{i-1}))^2+(y'(t_{i-1}))^2+(z'(t_{i-1}))^2}\Delta t_i=|\vec{r}\,'(t_{i-1})|\Delta t_i
\end{aligned}
$$

  从而得到弧长公式.

  或者用微元法, $[t, t+\Delta t]$ 对应的弧长

  $\Delta s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\Delta t+o(\Delta t)$.

- 弧微分：$ds=|\vec{r}\,'(t)|dt=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$.
- 例：曲线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt,\ 0\le t\le\pi$ 的弧长

$$
s=\int_0^{\pi}\sqrt{(a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}dt=\pi\sqrt{a^2+b^2}.
$$

曲线弧长

- 证明思路：利用

$$
\begin{aligned}
&|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})| \\
&= \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2} \\
&\approx \sqrt{(x'(t_{i-1}))^2+(y'(t_{i-1}))^2+(z'(t_{i-1}))^2}\Delta t_i = |\vec{r}\,'(t_{i-1})|\Delta t_i
\end{aligned}
$$

  从而得到弧长公式.

  或者用微元法, $[t, t+\Delta t]$ 对应的弧长

  $\Delta s = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\Delta t + o(\Delta t)$.

- 弧微分：$ds = |\vec{r}\,'(t)|dt = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$.
- 例：曲线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$，$0 \le t \le \pi$ 的弧长

$$
s = \int_0^\pi \sqrt{(a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}dt = \pi\sqrt{a^2+b^2}.
$$