北京大学数学科学学院期中试题参考答案

2022 - 2023学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1

姓 名 _____ 学 号 ____

本试题共 6 道大题,满分 100 分

1.(20分)

(1) (6分). 求出序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + \cos n}$$

(2) (7分). 求出序列极限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2(n^k)}\right)$$

(3) (7分). 求出函数极限

$$\lim_{x \to 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

(注: 在解本小题中,不可直接引用期中考试范围之外的 洛必达法则 和 高阶泰勒公式。)

2.(20分)

(1) (6分). 设x > 0. 求出函数

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

的导函数 f'(x) .

(2) (7分). 设 x < 1. 求出函数

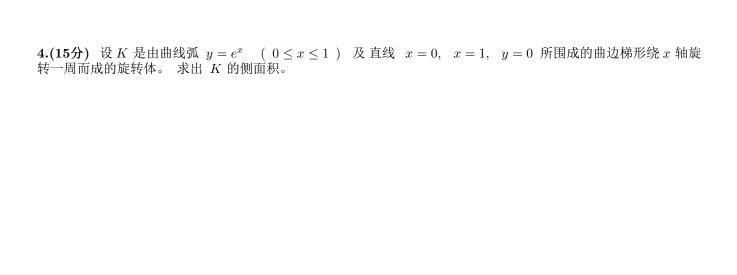
$$g(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^3}}$$

的导函数 g'(x) .

(3) (7分). 设 $x \neq \pm 1$. 求出函数

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

4 阶导函数 $h^{(4)}(x)$.



5.(10分) 设 a 为正实数, b 为正实数, c 为正实数, f(x) 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数,

$$f(0) = -a$$
 , $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = c$.

证明 f(x) 在 ($-\infty$, $+\infty$) 上至少有两个不同的实数根 r_1 , r_2 , $r_1 \neq r_2$.

6.(20分) 设

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \ln (1 - 2r \cos x + r^2) dx.$$

- (1) (12分). 证明: 对于 $r \in (-1,1)$, 有 $2A(r) = A(r^2)$.
- (2) (4分). 证明: A(r) 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上为有界函数 .
- (3) (4分). 对于任意 $r \in (-1,1)$, 从上面(1)和(2)出发推算出 A(r) 的值。

(注:本题要求写出详细过程。)