线性代数 B 习题课讲义

李则成

2024 年 9 月 29 日

1　绪论

2　行列式及其计算

习题 2.1. 求 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$ 的行列式。

证明. 记

$$f_n(a)=\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

考虑对最后一行进行代数余子式展开，对 $n \geq 2$，有

$$f_n(a)=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}+af_{n-1}(a)=-a^{n-2}+af_{n-1}(a)$$

对上式进行迭代，

$$\begin{aligned} f_n(a) &= -a^{n-2}+a(-a^{n-3}+af_{n-2}(a))=-2a^{n-2}+a^2f_{n-2}(a) \\ &= \cdots = -ka^{n-2}+a^kf_{n-k}(a)=\cdots \\ &= -(n-1)a^{n-2}+a^{n-1}\cdot a=a^{n-2}(a^2-(n-1)) \end{aligned}$$

□

习题 2.2. 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & & & & \\ 2 & 5 & 3 & & & \\ & 2 & 5 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 5 & 3 \\ & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

证明. 1. 直接由定义计算可得结果为 160。接下来我们做一点拓展。对换第 2，4 行，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

形如上式右端的矩阵被称作**循环矩阵**。更一般地，我们考虑下列 n 维情形，令

$$A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

令 $J = A(0, 1, 0, \cdots, 0)$，为 $a_1 = 1$，其余 a_i 均为 0 的循环矩阵。容易验证，J^k 为 $a_k = 1$，其余 a_i 均为 0 的循环矩阵 $(0 \le k \le n-1)$。从而我们有

$$A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-2} J^{n-2} + a_{n-1} J^{n-1}$$

令 $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ 为多项式函数，则上式可记为 $A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = g(J)$。

另一方面，我们可计算 J 的特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - J) = \lambda^n - 1$。因此 J 的 n 个特征值即为 $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$，其中 $\omega_k\,(0 \le k \le n-1)$ 为 n 次单位根，即 $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$。

综上，我们可求得循环矩阵 $A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ 的行列式

$$\det A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} g(\omega_k)$$

循环矩阵在离散 Fourier 变换中起到重要作用。从上述过程中也能看到它是可被对角化的，我们在后续学到矩阵的相似对角化章节时可以回到这个例子上。

2. 一般地，我们考虑

$$f_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}_{n \times n}$$

对第 1 列做代数余子式展开，

$$f_n(a,b,c) = a f_{n-1}(a,b,c) - c \begin{vmatrix} b & & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

对上式右端最后一项的 $n-1$ 阶行列式，对第 1 行做代数余子式展开，得

$$f_n(a,b,c) = af_{n-1}(a,b,c) - bcf_{n-2}(a,b,c) \tag{2.1}$$

得到一个线性二阶递推式（二阶差分方程）。我们容易得到首两项 $f_0(a,b,c)=1, f_1(a,b,c)=a$。为简便起见，我们接下来记 $f_n = f_n(a,b,c)$。求解差分方程 (2.1) 的方法有很多，我们将展示一种无需利用线性代数知识的初等办法。

不妨设（其中 λ 为待定系数）

$$f_n - \lambda f_{n-1} = (a-\lambda)(f_{n-1} - \lambda f_{n-2})$$

为使上式与 (2.1) 等价，我们要求 λ 满足下述方程（这通常也被称为特征方程）

$$(a-\lambda)\lambda = bc$$

解之，得

$$\lambda_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$$

当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时，代回可得

$$\begin{cases} f_{n+1} - \lambda_1 f_n = \lambda_2(f_n - \lambda_1 f_{n-1}) = \cdots = \lambda_2^n(f_1 - \lambda_1 f_0) = \lambda_2^{n+1} \\ f_{n+1} - \lambda_2 f_n = \lambda_1(f_n - \lambda_2 f_{n-1}) = \cdots = \lambda_1^n(f_1 - \lambda_2 f_0) = \lambda_1^{n+1} \end{cases}$$

进而有 $(\lambda_1-\lambda_2)f_n = \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}$，即

$$f_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$ 时，可以得到（请读者自行验证）

$$f_n = (n+1)\lambda_1^n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

最后，将 $a=5, b=3, c=2$ 代入，得 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$，从而 $f_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$。 □

习题 2.3. 计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

证明. 记该行列式的值为 D_n，则有

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & & & \\ -1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & n-1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + nD_{n-1}$$
$$= (n-1)! + nD_n$$

不断迭代上式，结合 $D_1 = 2$，可得

$$\begin{aligned} D_n &= (n-1)! + n((n-2)! + (n-1)D_{n-2}) = \cdots \\ &= n!\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots \frac{1}{2} + 1\right) + n! \end{aligned}$$

□

习题 2.4. *求多项式*

$$p(x) = \begin{vmatrix} x^3-3 & 1 & -3 & 2x+2 \\ -7 & 5 & -2x & 1 \\ x+3 & -1 & 3 & 3x^2-2 \\ 9 & x^3 & 6 & -6 \end{vmatrix}$$

的次数、最高次项系数和常数项。

证明. 根据行列式的计算式，$p(x)$ 的最高次项为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,4\,2)} x^3 (-2x) 3x^2 x^3 = -6x^9$$

因此 $p(x)$ 的次数为 9，最高次项系数为 -6，而常数项为

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 9 & 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

□

习题 2.5. *已知 4 元线性方程组*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ ax_1 + a^2 x_3 = 0 \\ ax_2 + a^2 x_4 = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

的解全是 4 元线性方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

的解，求 a 的值以及 (2.2) 的解集。

证明. 先考虑 $a = 0$ 的平凡情形，此时 (2.2) 即为 $x_1 + x_2 + x_4 = 0$，其解显然不全是 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的解。因此接下来设 $a \neq 0$，我们写出 (2.2) 的矩阵形式并作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-1}{a} \end{pmatrix}$$

可得 (2.2) 的解集为

$$\begin{cases} x_1 = (a-1)x_4 \\ x_2 = -ax_4 \\ x_3 = \frac{1-a}{a} x_4 \end{cases}, \quad x_4\text{为自由变量}$$

欲满足题意，a 需满足如下方程

$$(a-1) - a + \frac{1-a}{a} = 0$$

即 $a=\frac{1}{2}$，此时 (2.2) 的解集为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}, \quad x_4\text{为自由变量}$$

□

习题 2.6. 设 $a\in\mathbb{R}$，记

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

1. 求 A 的行列式。

2. 求 A 的秩。

证明. 1. 记 $f_n(a)=\det A$。把 A 的第 $2,\dots,n$ 行减去第 1 行，得到

$$f_n(a)=\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a-1 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-1 & \cdots & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

当 $n\geq 2$ 时，对上式右端最后一列做代数余子式展开，

$$\begin{aligned} f_n(a) &= (-1)^{n+1}a\begin{vmatrix} a-1 & 1-a & & & \\ a-1 & & 1-a & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a-1 & & & & 1-a \\ a-1 & & & & 0 \end{vmatrix} + (1-a)f_{n-1}(a) \\ &= (-1)^{n+1}a(-1)^n(a-1)(1-a)^{n-2}+(1-a)f_{n-1}(a) \\ &= a(1-a)^{n-1}+(1-a)f_{n-1}(a) \end{aligned}$$

不断迭代上式，可得

$$\begin{aligned} f_n(a) &= a(1-a)^{n-1}+(1-a)(a(1-a)^{n-2}+(1-a)f_{n-2}(a)) \\ &= 2a(1-a)^{n-1}+(1-a)^2f_{n-2}(a)=\cdots \\ &= ka(1-a)^{n-1}+(1-a)^kf_{n-k}(a)=\cdots \\ &= (n-1)a(1-a)^{n-1}+(1-a)^{n-1}=(1-a)^{n-1}(1+(n-1)a) \end{aligned}$$

2. 当 $a=1$ 时，$r(A)=1$（因为每行都相等）。

当 $a=-\frac{1}{n-1}$ 时，$r(A)=n-1$（因为 n 行之和恰为 0）。

当 $a\notin\{1,-\frac{1}{n-1}\}$ 时，$r(A)=n$（因为行列式非零）。 □

习题 2.7. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & 27 & 8 \\ 1 & 1 & 81 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & & & & & a_0 \\ -1 & x & & & & a_1 \\ & -1 & x & & & a_2 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & x & a_{n-2} \\ & & & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

证明. 1. 根据列线性，该行列式的值此为 $(-1)\times 3\times 2V(1,-1,3,2)$，其中 $V(\cdot)$ 表示 Vandermonde 行列式。由已知的结论，

$$V(1,-1,3,2)=(-1-1)\times(3-1)\times(2-1)\times(3-(-1))\times(2-(-1))\times(2-3)=48$$

因此该行列式的值为 -288。

2. 直接可由计算式得到该行列式的值为

$$(-1)^{\tau(5\,1\,3\,4\,2)}\times 1\times 1\times 3\times 4\times 2=-24$$

3. 记该行列式的值为 $f(x;a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$。直接对最后一列做代数余子式展开，

$$f(x;a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+1+k}a_k\begin{vmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-1-k} \end{vmatrix}+x|A_{n-1}|$$

其中，

$$A_k=\begin{pmatrix} x & & & & \\ -1 & x & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x & \\ & & & -1 & x \end{pmatrix}_{k\times k}, \quad B_k=\begin{pmatrix} -1 & x & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & x \\ & & & & -1 \end{pmatrix}_{k\times k}$$

因此

$$\begin{aligned} f(x;a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+1-k}a_k\det A_k\det B_k+x\det A_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+1-k}a_kx^k(-1)^{n-1-k}+x^n=\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k+x^n \end{aligned}$$

□

习题 2.8. 分析下面的线性方程组解的情况：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$$

证明. 记

$$A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

不难计算

$$\det A(a) = (a-1)^2(a+2)$$

因此，当 $a \notin \{1,-2\}$ 时，矩阵 $A(a)$ 可逆，因此方程组有唯一解。

当 $a=1$ 时，显然方程组等价于 $x_1+x_2+x_3=1$，方程有无穷多个解。

当 $a=-2$ 时，考虑方程组的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

因此方程组无解。 □

习题 2.9. 求 n 阶方阵 A 的行列式和秩，其中

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

证明. A 的行列式可以直接由计算式得到，

$$\det A = a^n + (-1)^{n-1}$$

为求 A 的秩，不妨设 $a \neq 0$（因为当 $a=0$ 时显然 $r(A)=n$）。我们考虑如下初等变换

$$A \to \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a+(-\frac{1}{a})^{n-1} \end{pmatrix}$$

注意到

$$a + \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} = \frac{\det A}{a}$$

因此当 a 为 n 次多项式 $a^n+(-1)^{n-1}=0$ 的根时，$r(A)=n-1$，否则 $r(A)=n$。 □

习题 2.10. 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 7 & 3 \\ -4 & -5 & -7 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

证明. 注意到这是一个奇数阶反对称矩阵的行列式，因此该行列式值为 0。事实上，对于一个 n 阶反对称矩阵 A（即 $A+A^T=0$），我们有

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

这说明了奇数阶反对称矩阵的行列式必为 0。 □

习题 2.11. 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & & & & \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & & & \\ & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

证明. 记该行列式的值为 $f_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)$。利用行线性，并对第 1 行做代数余子式展开，

$$\begin{aligned} f_n(a_0,\ldots,a_n) &= \begin{vmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & & & \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

上式等式右端第一项即为 $a_0f_{n-1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。记第二项的行列式为 D，再利用行线性，

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & & & \\ a_1 & a_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & & & \\ & a_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} \\ &= \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & & & \\ & a_2 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n \end{aligned}$$

从而我们得到如下递推关系

$$f_n(a_0,\ldots,a_n) = a_0f_{n-1}(a_1,\ldots,a_n) + a_1\cdots a_n$$

不断迭代上式，得到

$$\begin{aligned} f_n(a_0,\ldots,a_n) &= a_0(a_1f_{n-2}(a_2,\ldots,a_n)+a_2\cdots a_n)+a_1\cdots a_n = \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_0\cdots a_{k-1}a_{k+1}\cdots a_n \end{aligned}$$

□