第一换元法

- 不定积分的第一换元法: 若 ϕ 是可微函数, $F'(y)=f(y)$, 则有 $F(\phi(x))'=f(\phi(x))\phi'(x)$, 即如果 $\int f(y)dy=F(y)+C$, 则有 $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx=F(\phi(x))+C$. 积分过程可写成:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx \xlongequal{y=\phi(x)} \int f(y)dy=F(y)+C$$
$$\xlongequal{y=\phi(x)} F(\phi(x))+C.$$

- 注: 这里 $y=\phi(x)$ 不要求可逆, $\phi'(x)$ 可以有零点.

第一换元法

- 不定积分的第一换元法: 若 ϕ 是可微函数, $F'(y) = f(y)$, 则有 $F(\phi(x))' = f(\phi(x))\phi'(x)$, 即如果 $\int f(y)dy = F(y) + C$, 则有 $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + C$. 积分过程可写成:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx \xlongequal{y=\phi(x)} \int f(y)dy = F(y) + C$$
$$\xlongequal{y=\phi(x)} F(\phi(x)) + C.$$

- 注：这里 $y = \phi(x)$ 不要求可逆，$\phi'(x)$ 可以有零点.

用第一换元法求不定积分 1

- 例: $\int f(kx)dx = \frac{1}{k}\int f(kx)d(kx) = \frac{1}{k}F(kx) + C$, 这里 $F' = f$.
- 例:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$\xlongequal{y=\cos x} -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C \xlongequal{y=\cos(x)} -\ln|\cos x| + C.$$

用第一换元法求不定积分 1

- 例: $\int f(kx)dx = \frac{1}{k}\int f(kx)d(kx) = \frac{1}{k}F(kx) + C$, 这里 $F' = f$.
- 例:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$\overset{y=\cos x}{=\!=\!=\!=} -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C \overset{y=\cos(x)}{=\!=\!=\!=} -\ln|\cos x| + C.$$

用第一换元法求不定积分 2

- 例:$m \neq n$,

$$\int \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\int \cos(n-m)xdx - \int \cos(n+m)xdx\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-m}\int \cos(n-m)xd(n-m)x$$
$$- \frac{1}{n+m}\int \cos(n+m)xd(n+m)x\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big) + C.$$

用第一换元法求不定积分 3

- $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx$$
  $$= \frac{1}{2a} \left(-\int \frac{d(a-x)}{a-x} + \int \frac{d(a+x)}{a+x} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$
- 设 $a > 0$, $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

- $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \Big(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\Big) dx$$
  $$= \frac{1}{2a}\Big(-\int \frac{d(a-x)}{a-x} + \int \frac{d(a+x)}{a+x}\Big) = \frac{1}{2a} \ln\Big|\frac{a+x}{a-x}\Big| + C.$$
- 设 $a > 0$, $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

用第一换元法求不定积分 3

- $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2a} \left(-\int \frac{d(a-x)}{a-x} + \int \frac{d(a+x)}{a+x} \right) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

- 设 $a > 0$, $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

例：求 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

- 方法 1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$= \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

- 方法 2.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$$

- 注：上面得到的两个结果相同. 事实上，$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$.

用第一换元法求不定积分 4

例：求 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

- 方法 1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$= \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

- 方法 2.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$$

- 注：上面得到的两个结果相同. 事实上，$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$.

用第一换元法求不定积分 4

例：求 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

- 方法 1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$= \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

- 方法 2.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$$

- 注：上面得到的两个结果相同. 事实上，$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$.

- 设 $x=\phi(t)$ 可逆，且 ϕ, ϕ^{-1} 均可导 $(\phi'(x)\neq 0)$，若 $F(t)$ 满足 $F'(t)=f(\phi(t))\phi'(t)$，则有 $F(\phi^{-1}(x))'=f(x)\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)}=f(x)$。即 $F(\phi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数，积分过程可写成：

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\phi(t)} \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(t)+C$$
$$\xlongequal{t=\phi^{-1}(x)} F(\phi^{-1}(x))+C$$

- 注：不定积分的第二换元法要求 ϕ 可逆.
- 例：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} \xlongequal[t>0]{x=t^2-1} \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int (1-\frac{1}{t+1})dt$$
$$= 2(t-\ln(1+t))+C \xlongequal{t=\sqrt{x+1}} 2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C.$$

不定积分的第二换元法 1

- 设 $x=\phi(t)$ 可逆，且 ϕ,ϕ^{-1} 均可导 $(\phi'(x)\neq 0)$，若 $F(t)$ 满足 $F'(t)=f(\phi(t))\phi'(t)$，则有 $F(\phi^{-1}(x))'=f(x)\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)}=f(x)$。即 $F(\phi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数，积分过程可写成：

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\phi(t)} \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(t)+C$$

$$\xlongequal{t=\phi^{-1}(x)} F(\phi^{-1}(x))+C$$

- 注：不定积分的第二换元法要求 ϕ 可逆.
- 例：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} \xlongequal[t>0]{x=t^2-1} \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int (1-\frac{1}{t+1})dt$$

$$= 2(t-\ln(1+t))+C \xlongequal{t=\sqrt{x+1}} 2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C.$$

不定积分的第二换元法 1

- 设 $x = \phi(t)$ 可逆，且 ϕ, ϕ^{-1} 均可导 $(\phi'(x) \neq 0)$，若 $F(t)$ 满足 $F'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$，则有 $F(\phi^{-1}(x))' = f(x)\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)} = f(x)$.
  即 $F(\phi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的原函数，积分过程可写成：

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\phi(t)} \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(t) + C$$
$$\xlongequal{t=\phi^{-1}(x)} F(\phi^{-1}(x)) + C$$

- 注：不定积分的第二换元法要求 ϕ 可逆.
- 例：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} \xlongequal[t>0]{x=t^2-1} \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int (1 - \frac{1}{t+1})dt$$
$$= 2(t - \ln(1+t)) + C \xlongequal{t=\sqrt{x+1}} 2(\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})) + C.$$

- 常用变换（目的是去根号）：含有根号 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，用变换 $x=a\sin t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$, 此时

$$t=\arcsin\frac{x}{a}, \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, dx=a\cos t dt.$$

- 例：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \int\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t dt=a^2\int\cos^2 t dt$$
$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\right)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

被积函数含有根号 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时的换元法

- 常用变换（目的是去根号）：含有根号 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，用变换 $x=a\sin t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$, 此时

$$t=\arcsin\frac{x}{a}, \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, dx=a\cos t dt.$$

- 例：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \int\sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos t dt = a^2\int\cos^2 t dt$$
$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\right)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

被积函数含有根号 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时的换元法 1

- 含有根号 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，对 $x>a$ 用变换 $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$, 此时

$$t=\arccos\frac{a}{x}, \sqrt{x^2-a^2}=a\tan t, dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

对 $x<-a$ 用变换 $x=-\frac{a}{\cos t}$, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$, 此时

$$t=\arccos(-\frac{x}{a}), \sqrt{x^2-a^2}=a\tan t, dx=-\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

- 也可以用变换 $x=a\cosh t$, $t>0$. $t=\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$, $dx=a\sinh t dt$.

被积函数含有根号 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时的换元法 1

- 含有根号 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，对 $x>a$ 用变换 $x=\frac{a}{\cos t}$, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$, 此时

$$t=\arccos\frac{a}{x}, \sqrt{x^2-a^2}=a\tan t, dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

对 $x<-a$ 用变换 $x=-\frac{a}{\cos t}$, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$, 此时

$$t=\arccos(-\frac{x}{a}), \sqrt{x^2-a^2}=a\tan t, dx=-\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

- 也可以用变换 $x=a\cosh t$, $t>0$. $t=\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$, $dx=a\sinh t dt$.

初等函数 2

- 反双曲函数

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in (-\infty, +\infty),$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \in [1, +\infty),$$
$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, (\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

事实上若 $y = \sinh x$, 则 $\cosh x = \sqrt{y^2 + 1}$,

$$e^x = \sinh x + \cosh x = y + \sqrt{y^2 + 1}, x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

- 例：求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间 $(a,+\infty)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{x=\frac{a}{\cos t}} \int \frac{1}{a\tan t}\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{dt}{\cos t}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = \ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C_1$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

- 注：利用 $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C_1 = \ln(\frac{x}{a} + \sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

- 例：求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间 $(a,+\infty)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{x=\frac{a}{\cos t}} \int \frac{1}{a\tan t}\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{dt}{\cos t}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = \ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C_1$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

- 注：利用 $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$，$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C_1 = \ln(\frac{x}{a}+\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

被积函数含有根号 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时的换元法 -例

- 例：求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间 $(a,+\infty)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{x=\frac{a}{\cos t}} \int \frac{1}{a\tan t}\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{dt}{\cos t}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = \ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C_1$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

- 注：利用 $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$，$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C_1 =$ $\ln(\frac{x}{a}+\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

- 例：求 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间 $(-\infty, -a)$.
- 解：变换 $x = -t,\ t > a$,

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right| + C_1$$
$$= -\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2}) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

- 总结：$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

被积函数含有根号 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时的换元法 2

- 例：求 $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间 $(-\infty,-a)$.
- 解：变换 $x=-t$, $t>a$,

$$I=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}=-\ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right|+C_1$$
$$=-\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

- 总结：$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$

被积函数含有根号 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时的换元法 2

- 例：求 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间 $(-\infty,-a)$.
- 解：变换 $x=-t$, $t>a$,

$$I=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}=-\ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right|+C_1$$
$$=-\ln(-x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

- 总结：$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$

被积函数含有根号 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时的换元法

- 含有根号 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，用变换 $x = a\tan t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$. 此时

$$t = \arctan\frac{x}{a}, \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t}, dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt.$$

也可用变换 $x = a\sinh t$.

- 例：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \xlongequal{x=a\tan t} \int\frac{1}{\frac{a}{\cos t}}\frac{a}{\cos^2 t}dt = \int\frac{dt}{\cos t}$$

$$= \int\frac{d\sin t}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C_1 = \ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C_1$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

被积函数含有根号 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时的换元法

- 含有根号 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，用变换 $x=a\tan t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$. 此时
$$t=\arctan\frac{x}{a}, \sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t}, dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt.$$
也可用变换 $x=a\sinh t$.
- 例：
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \xlongequal{x=a\tan t} \int\frac{1}{\frac{a}{\cos t}}\frac{a}{\cos^2 t}dt=\int\frac{dt}{\cos t}$$
$$=\int\frac{d\sin t}{1-\sin^2 t}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C_1=\ln\frac{1+\sin t}{\cos t}+C_1$$
$$=\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right)+C_1=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

分部积分法

- 设 $u(x), v(x)$ 可微，由于 $(uv)' = u'v + uv'$,
  $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'v$, 即得

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

- 注：选 $u(x)$ 使得 $u'(x)$ 比较简单，如 $\ln x$, 反三角函数，多项式，a^x, 三角函数.
- 下面的写法是否正确？$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx$.

分部积分法

- 设 $u(x), v(x)$ 可微，由于 $(uv)' = u'v + uv'$，
  $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'v$，即得
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

- 注：选 $u(x)$ 使得 $u'(x)$ 比较简单，如 $\ln x$, 反三角函数，多项式，a^x, 三角函数.
- 下面的写法是否正确？$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx.$

利用分部积分法求不定积分 1

- 例： $\int P(x)e^x dx$, 其中 $P(x)$ 为多项式.

$$\int P(x)e^x dx = \int P(x)de^x = P(x)e^x - \int P'(x)e^x dx.$$

- 例： $\int x^n \ln x dx$.

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x dx^{n+1} = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C.$$

利用分部积分法求不定积分 1

- 例：$\int P(x)e^x dx$, 其中 $P(x)$ 为多项式.

$$\int P(x)e^x dx = \int P(x)de^x = P(x)e^x - \int P'(x)e^x dx.$$

- 例：$\int x^n \ln x dx$.

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x dx^{n+1} = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C.$$

利用分部积分法求不定积分 2

- $\int \arctan x dx$,

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

- $I_n = \int \cos^n x dx$,

$$I_n = \int \cos^{n-1} x d \sin x = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

从而得得到递推公式 $I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由 $I_0 = x + C$, $I_1 = \sin x + C$ 可求出所有的 I_n.

利用分部积分法求不定积分 2

- $\int \arctan x dx$,

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

- $I_n = \int \cos^n x dx$,

$$I_n = \int \cos^{n-1} x d \sin x = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

从而得得到递推公式 $I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由 $I_0 = x + C$, $I_1 = \sin x + C$ 可求出所有的 I_n.

- $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, $n \geq 1, a > 0$.

$$\begin{aligned} I_n =& \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt \\ =& \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}, \end{aligned}$$

从而得得到递推公式 $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{t}{2na^2(t^2+a^2)^n}$. 如

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C \\ I_2 &= \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + C. \end{aligned}$$

利用分部积分法求不定积分 4

- 求不定积分 $I=\int e^{ax}\cos bx dx$.

$$
\begin{aligned}
I=&\frac{1}{a}\int \cos bx de^{ax}=\frac{1}{a}\cos bx\cdot e^{ax}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx\\
=&\frac{1}{a}\cos bx\cdot e^{ax}+\frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\sin bx-b\int e^{ax}\cos bx dx\right),
\end{aligned}
$$

从而得得到公式 $I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$. 类似可得

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$$

一些重要的不定积分 1

- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right) dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 - (\frac{x}{a})^2} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

一些重要的不定积分 1

- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int \Big(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\Big)dx = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{a+x}{a-x}\Big| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1-(\frac{x}{a})^2} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

一些重要的不定积分 1

- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int \Big(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\Big)dx = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{a+x}{a-x}\Big| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1-(\frac{x}{a})^2} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

一些重要的不定积分 1

- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int \Big(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\Big)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1-(\frac{x}{a})^2} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

一些重要的不定积分 2

- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

  证明：方法 1, $x = a \sin t$.

  方法 2，利用分部积分，原积分等于

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C.$

  证明：方法 1. $x = a \tan t$, 或者 $x = a \sec t$.

  方法 2, 利用分部积分，原积分等于

$$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

一些重要的不定积分 2

- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

  证明：方法 1, $x = a \sin t$.

  方法 2，利用分部积分，原积分等于

  $$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C.$

  证明：方法 1. $x = a \tan t$, 或者 $x = a \sec t$.

  方法 2, 利用分部积分，原积分等于

  $$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

- $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

  证明: 方法 1, $x = a\sin t$.

  方法 2，利用分部积分, 原积分等于

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C.$

  证明: 方法 1. $x = a\tan t$, 或者 $x = a\sec t$.

  方法 2, 利用分部积分, 原积分等于

$$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

一些重要的不定积分 2

- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

  证明：方法 1, $x = a \sin t$.

  方法 2，利用分部积分，原积分等于

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C.$

  证明：方法 1. $x = a \tan t$, 或者 $x = a \sec t$.

  方法 2, 利用分部积分，原积分等于

$$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

一些重要的不定积分 2

- $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$
  证明: 方法 1, $x = a\sin t$.
  方法 2，利用分部积分, 原积分等于
  $$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$
- $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C.$$
  证明：方法 1. $x = a\tan t$, 或者 $x = a\sec t$.
  方法 2, 利用分部积分, 原积分等于
  $$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

一些重要的不定积分 2

- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

  证明：方法 1, $x = a \sin t$.

  方法 2，利用分部积分，原积分等于

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|) + C.$

  证明：方法 1. $x = a \tan t$, 或者 $x = a \sec t$.

  方法 2, 利用分部积分，原积分等于

$$I = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

例

- 设 $f(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$, 计算 $\int f(x)dx$.

  解: 设 $x = \ln t$,

$$
\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \frac{\ln(1+t)}{t}\frac{dt}{t} \\
&= -\int \ln(1+t)d\frac{1}{t} = -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int \frac{1}{t(1+t)}dt \\
&= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln\frac{t}{1+t} + C \\
&= -(e^{-x}+1)\ln(1+e^x) + x + C
\end{aligned}
$$

简单有理式的不定积分 1

- 有理式：一般有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$. 其中 a_0, b_0 不为 0. 当 $n<m$ 时，称为（有理）真分式，任何有理式可分解为多项式和真分式之和. 如

$$\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}.$$

- $\int \frac{1}{x-a}dx=\ln|x-a|+C.$
- $n>1$ 时，$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx=\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}+C.$

简单有理式的不定积分 1

- 有理式：一般有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$. 其中 a_0, b_0 不为 0. 当 $n < m$ 时，称为（有理）真分式，任何有理式可分解为多项式和真分式之和. 如

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C.$
- $n > 1$ 时，$\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C.$

简单有理式的不定积分 1

- 有理式：一般有理式 $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$. 其中 a_0, b_0 不为 0. 当 $n < m$ 时，称为（有理）真分式，任何有理式可分解为多项式和真分式之和. 如

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C.$
- $n > 1$ 时，$\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C.$

简单有理式的不定积分 2

回例题 回注记 回根式积分

- 设 $q > \frac{p^2}{4}$, $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})$, 设 $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. 则有 $Bx + C = \frac{B}{2}(2x + p) + C - \frac{Bp}{2}$,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}dx \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + (C - \frac{Bp}{2})\int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} \\
&= \frac{B}{2}\ln(x^2 + px + q) + (C - \frac{Bp}{2})\frac{1}{a}\arctan\frac{x + \frac{p}{2}}{a} + K.
\end{aligned}$$

简单有理式的不定积分 2

回例题 回注记 回根式积分

- 设 $q>\frac{p^2}{4}$, $x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$, 设 $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. 则有 $Bx+C=\frac{B}{2}(2x+p)+C-\frac{Bp}{2}$,

$$\begin{aligned}
&\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx\\
&=\frac{B}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}\\
&=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+(C-\frac{Bp}{2})\frac{1}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+K.
\end{aligned}$$

- 设 $q > \frac{p^2}{4}$,$n > 1$, 设 $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx \\
&= \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{\left[(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})\right]^n} \\
&= \frac{B}{2(1-n)} (x^2 + px + q)^{1-n} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{\left[(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})\right]^n}.
\end{aligned}$$

其中不定积分 $\int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})]^n}$ 由 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 的递推公式得出.

- 设 $q > \frac{p^2}{4}, n > 1$, 设 $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx \\
&= \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{\left[(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})\right]^n} \\
&= \frac{B}{2(1-n)} (x^2 + px + q)^{1-n} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{\left[(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})\right]^n}.
\end{aligned}
$$

其中不定积分 $\int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})]^n}$ 由 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 的递推公式得出.

多项式的分解 1

- 任何多项式 $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$, 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 $Q(x)=0$ 的所有实根，重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$. 则 $Q(x)$ 可分解为

$$
\begin{aligned}
Q(x)=b_0(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}\\
\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l},
\end{aligned}
$$

  其中 $m=n_1+n_2+\cdots+n_k+2(m_1+m_2+\cdots+m_l)$.
- 例: $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$.

多项式的分解 1

- 任何多项式 $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$, 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 $Q(x) = 0$ 的所有实根，重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$. 则 $Q(x)$ 可分解为

$$
\begin{aligned}
Q(x) = b_0(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k} \\
\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l},
\end{aligned}
$$

  其中 $m = n_1 + n_2 + \cdots + n_k + 2(m_1 + m_2 + \cdots + m_l)$.
- 例：$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

- 注：由代数基本定理，$Q(x)$ 可分解为

$$Q(x) = b_0(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k} \cdot (x-c_1)^{m_1}(x-\bar{c}_1)^{m_1}\cdots(x-c_l)^{m_1}(x-\bar{c}_l)^{m_l},$$

其中 $c_1, \bar{c}_1, \cdots c_l, \bar{c}_l$ 是虚根（成对出现）.
$(x-c_j)(x-\bar{c}_j) = x^2 + p_j x + q_j$. $(j = 1, \cdots l)$.

- 代数基本定理：任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根 $(n \geq 1)$，由此推出， n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根（重根按重数计算）.

多项式的分解 2

- 注：由代数基本定理，$Q(x)$ 可分解为

$$\begin{aligned} Q(x) = b_0(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k} \\ \cdot(x-c_1)^{m_1}(x-\bar{c}_1)^{m_1}\cdots(x-c_l)^{m_1}(x-\bar{c}_l)^{m_l}, \end{aligned}$$

  其中 $c_1, \bar{c}_1, \cdots c_l, \bar{c}_l$ 是虚根（成对出现）.
  $(x-c_j)(x-\bar{c}_j) = x^2+p_jx+q_j.\ (j=1,\cdots l).$
- 代数基本定理：任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根 $(n \geq 1)$，由此推出，n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根（重根按重数计算）.

有理式的分解

- 任何有理真分式可以分解为以下四类简单分式之和：$\frac{1}{x-a}$，$\frac{1}{(x-a)^n}(n>1)$，$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$，$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}(n>1)$.
- 例：$P(x)$ 是二次多项式，$Q(x)=(x-a)(x^2+px+q)(q>\frac{p^2}{4})$，设 $Q_1(x)=x^2+px+q$, 则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)/Q_1(a)}{x-a}+\frac{\frac{P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}(x^2+px+q)}{x-a}}{x^2+px+q}.$$

有理式的分解

- 任何有理真分式可以分解为以下四类简单分式之和：$\frac{1}{x-a}$，$\frac{1}{(x-a)^n}(n>1)$，$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$，$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}(n>1)$.
- 例：$P(x)$ 是二次多项式，$Q(x)=(x-a)(x^2+px+q)(q>\frac{p^2}{4})$，设 $Q_1(x)=x^2+px+q$, 则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)/Q_1(a)}{x-a}+\frac{\frac{P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}(x^2+px+q)}{x-a}}{x^2+px+q}.$$

有理式真分式分解的待定系数法 1

- 把有理式的分母分解为

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}.$$

- 有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可分解为

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{21}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{n_1 1}}{(x-a_1)^{n_1}} \\ &+ \frac{A_{12}}{x-a_2}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{A_{n_2 2}}{(x-a_2)^{n_2}}+\cdots \\ &+ \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_{m_1 1}x+C_{m_1 1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} \\ &+\cdots.\end{aligned}$$

有理式真分式分解的待定系数法 1

- 把有理式的分母分解为

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}.$$

- 有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可分解为

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{21}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{n_1 1}}{(x-a_1)^{n_1}} \\ &+\frac{A_{12}}{x-a_2}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{A_{n_2 2}}{(x-a_2)^{n_2}}+\cdots \\ &+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_{m_1 1}x+C_{m_1 1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} \\ &+\cdots.\end{aligned}$$

有理式真分式分解的待定系数法 2

- 上面分解等式两边同乘以 $Q(x)$, 两边是次数不大于 $m-1$ 的多项式. 比较两边的多项式，可得到 m 个方程，从而解出待定系数（一共是 $n_1+\cdots+n_k+2(m_1+\cdots+m_l)=m$ 个待定系数）.
- 例：$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$, 两边同乘以 $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=x^4+1$, 得

$$
\begin{aligned}
1=(a+c)x^3+(b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c)x^2 \\
+(-\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c)x+b+d
\end{aligned}
$$

得方程组 $\begin{cases} a+c=0 \\ b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c=0 \\ -\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$ 有解 $\begin{cases} a=-c=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ b=d=\frac{1}{2} \end{cases}$.

有理式真分式分解的待定系数法 2

- 上面分解等式两边同乘以 $Q(x)$, 两边是次数不大于 $m-1$ 的多项式. 比较两边的多项式，可得到 m 个方程，从而解出待定系数（一共是 $n_1+\cdots+n_k+2(m_1+\cdots+m_l)=m$ 个待定系数）.
- 例：$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$, 两边同乘以 $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=x^4+1$, 得

$$\begin{aligned}1=(a+c)x^3+(b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c)x^2\\ +(-\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c)x+b+d\end{aligned}$$

得方程组 $\begin{cases}a+c=0\\ b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c=0\\ -\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c=0\\ b+d=1\end{cases}$ 有解 $\begin{cases}a=-c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ b=d=\frac{1}{2}\end{cases}$.

有理式真分式分解的待定系数法 2

- 上面分解等式两边同乘以 $Q(x)$, 两边是次数不大于 $m-1$ 的多项式. 比较两边的多项式，可得到 m 个方程，从而解出待定系数（一共是 $n_1+\cdots+n_k+2(m_1+\cdots+m_l)=m$ 个待定系数）.
- 例：$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$, 两边同乘以 $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=x^4+1$, 得

$$1=(a+c)x^3+(b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c)x^2 + (-\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c)x+b+d$$

得方程组 $\begin{cases} a+c=0 \\ b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c=0 \\ -\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$ 有解 $\begin{cases} a=-c=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ b=d=\frac{1}{2} \end{cases}$.

有理式真分式分解的待定系数法 3

- 上面我们得到了分解

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

- 由上面的分解我们可以写出不定积分 简单有理式积分

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1) + C.$$

有理式真分式分解的待定系数法 3

- 上面我们得到了分解

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

- 由上面的分解我们可以写出不定积分 简单有理式积分

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C.$$

有理式真分式分解的待定系数法 4

- 例

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx &= \int \frac{x^4-x^2+1}{x^6+1}dx + \int \frac{x^2}{x^6+1}dx \\ &= \int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^6+1} \\ &= \arctan x + \frac{1}{3}\arctan x^3 + C.\end{aligned}$$

有理式真分式分解的待定系数法 5

- 利用分解

$$\frac{t^2+1}{t^3+1}=\frac{\frac{2}{3}}{t+1}+\frac{\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{t^2-t+1}$$

得到如下分解

$$\begin{aligned}\frac{x^4+1}{x^6+1}&=\frac{\frac{2}{3}}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}}{x^4-x^2+1}\\&=\frac{\frac{2}{3}}{x^2+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\end{aligned}$$

由此得到积分

$$\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\frac{2}{3}\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(2x-\sqrt{3})+\frac{1}{3}\arctan(2x+\sqrt{3})+C$$

- 利用分解
$$\frac{t^2+1}{t^3+1}=\frac{\frac{2}{3}}{t+1}+\frac{\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{t^2-t+1}$$
得到如下分解
$$\begin{aligned}\frac{x^4+1}{x^6+1}&=\frac{\frac{2}{3}}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}}{x^4-x^2+1}\\&=\frac{\frac{2}{3}}{x^2+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}\end{aligned}$$
由此得到积分
$$\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\frac{2}{3}\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(2x-\sqrt{3})+\frac{1}{3}\arctan(2x+\sqrt{3})+C$$

万能变换

- 三角函数有理式：三角函数进行有限次加、减、乘、除运算所得的表达式. 等价于 $\sin x, \cos x$ 进行有限次加、减、乘、除运算所得的表达式, 可表示为 $R(\sin x, \cos x)$, 其中 $R(x, y)$ 是二元有理式.
- 理论上，三角函数有理式的不定积分可以用变换 $x = 2\arctan t$（称为万能变换）转化为有理式的积分, 此时 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \xlongequal{x=2\arctan t} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

万能变换

- 三角函数有理式：三角函数进行有限次加、减、乘、除运算所得的表达式. 等价于 $\sin x, \cos x$ 进行有限次加、减、乘、除运算所得的表达式, 可表示为 $R(\sin x, \cos x)$, 其中 $R(x, y)$ 是二元有理式.
- 理论上，三角函数有理式的不定积分可以用变换 $x = 2\arctan t$（称为万能变换）转化为有理式的积分, 此时 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \xlongequal{x=2\arctan t} \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

其它三角变换

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\sin x)\cos x$, 作变换 $t = \sin x$,

$$\int f(\sin x)\cos x dx \xlongequal{t=\sin x} \int f(t)dt.$$

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\cos x)\sin x$, 作变换 $t = \cos x$,

$$\int f(\cos x)\sin x dx \xlongequal{t=\cos x} -\int f(t)dt.$$

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\tan x)$, 作变换 $t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

$$\int f(\tan x)dx \xlongequal{t=\tan x} \int f(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

其它三角变换

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\sin x)\cos x$, 作变换 $t = \sin x$,

$$\int f(\sin x)\cos x dx \xlongequal{t=\sin x} \int f(t)dt.$$

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\cos x)\sin x$, 作变换 $t = \cos x$,

$$\int f(\cos x)\sin x dx \xlongequal{t=\cos x} -\int f(t)dt.$$

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\tan x)$, 作变换 $t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

$$\int f(\tan x)dx \xlongequal{t=\tan x} \int f(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

其它三角变换

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\sin x)\cos x$, 作变换 $t = \sin x$,

$$\int f(\sin x)\cos x dx \xlongequal{t=\sin x} \int f(t)dt.$$

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\cos x)\sin x$, 作变换 $t = \cos x$,

$$\int f(\cos x)\sin x dx \xlongequal{t=\cos x} -\int f(t)dt.$$

- 若 $R(\sin x, \cos x) = f(\tan x)$, 作变换 $t = \tan x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

$$\int f(\tan x)dx \xlongequal{t=\tan x} \int f(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

- 例：求不定积分

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} d\sin x = \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C.$$

也可用正切变换：

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{\tan x}{1+2\tan^2 x} dx \xlongequal{t=\tan x} \int \frac{tdt}{(1+2t^2)(1+t^2)}$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2}{1+2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt^2 = \frac{1}{2}(\ln(1+2t^2) - \ln(1+t^2)) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+2\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + C = \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C.$$

三角函数有理式的不定积分 2

- 求不定积分 回定积分

$$\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{1}{1+\tan x}dx$$

$$\xlongequal{t=\tan x}\int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t-1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|1+t|-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+\arctan t\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|1+\tan x|-\ln|\sec x|+x\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\ln|\sin x+\cos x|\right)+C.$$

三角函数有理式的不定积分 3

- 上面不定积分也可如下计算

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx \xlongequal{t=x+\frac{\pi}{4}} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t+\sin t)dt}{\sqrt{2}\sin t} \\
&= \int \frac{1}{2}(1+\frac{\cos t}{\sin t})dt = \frac{1}{2}(t+\ln|\sin t|)+C \\
&= \frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C'.
\end{aligned}
$$

三角函数有理式的不定积分 4

- 求不定积分 $(t = \tan x)$

$$
\begin{aligned}
&\int \tan^4 x dx = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt \\
&= \int (t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}) dt = \frac{1}{3} t^3 - t + \arctan t + C \\
&= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C
\end{aligned}
$$

三角多项式的不定积分 1

- 方法 1：利用倍角公式、积化和差降低次数，如

$$
\begin{aligned}
&\int \sin^4 x\cos^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x\sin^2 x dx \\
&= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)(1-\cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{16}\int \left(1-\cos 2x-\cos 4x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right) dx \\
&= \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C.
\end{aligned}
$$

- 方法 2：利用递推公式. 设 $I_{m,n}=\int \sin^m x \cos^n x dx$, 则有

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}. \end{aligned}$$

证明：

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{1}{m+1} \int \cos^{n-1} x d \sin^{m+1} x \\ &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx \\ &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} (I_{m,n-2} - I_{m,n}). \end{aligned}$$

三角多项式的不定积分 2

- 方法 2：利用递推公式. 设 $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$, 则有

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}. \end{aligned}$$

证明：

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{1}{m+1} \int \cos^{n-1} x d \sin^{m+1} x \\ &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx \\ &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} (I_{m,n-2} - I_{m,n}). \end{aligned}$$

三角多项式的不定积分 3

- 设 $I_m = \int \sin^m x dx$, 则有
$$I_m = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$
- 设 $J_n = \int \cos^n x dx$, 则有
$$J_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

三角多项式的不定积分 4

- $I_{0,0} = x + C$, $I_{1,0} = -\cos x + C$, $I_{0,1} = \sin x + C$, $I_{1,1} = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$, $I_{2,0} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + C$, $I_{0,2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + C$.
- 例：

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x\cos^2 x dx = I_{4,2} &= -\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{1}{2}I_{2,2} \\
&= -\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{1}{4}I_{2,0}\right) \\
&= -\frac{1}{6}\sin^3 x\cos^3 x + \frac{1}{8}\sin^3 x\cos x + \frac{1}{16}(x - \sin x\cos x) + C.
\end{aligned}
$$

关于三角有理式不定积分的一个注记

- 考虑不定积分 ($t = \tan\frac{x}{2}$ 时，$x = 2\arctan t$) 回简单有理式积分

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2} \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t+t^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

- 上面被积函数的定义域为 $\mathbb{R}$, 但是得到的函数是在 $(2k\pi-\pi, 2k\pi+\pi)$ 上定义的函数，且在端点处的单边极限存在. 可以通过调整在每个区间 $(2k\pi-\pi, 2k\pi+\pi)$ 上的任意常数 C, 得到的原函数延拓到 $\mathbb{R}$，然后验证该函数确实是处处可导，确实是 $\mathbb{R}$ 上的原函数，从而求出严格意义下的不定积分.

关于三角有理式不定积分的一个注记

- 考虑不定积分 ($t=\tan\frac{x}{2}$ 时，$x=2\arctan t$) 回简单有理式积分

$$\int\frac{dx}{\sin x+2}\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+t+t^2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

- 上面被积函数的定义域为 $\mathbb{R}$, 但是得到的函数是在 $(2k\pi-\pi,2k\pi+\pi)$ 上定义的函数，且在端点处的单边极限存在. 可以通过调整在每个区间 $(2k\pi-\pi,2k\pi+\pi)$ 上的任意常数 C, 得到的原函数延拓到 $\mathbb{R}$，然后验证该函数确实是处处可导，确实是 $\mathbb{R}$ 上的原函数，从而求出严格意义下的不定积分.

某些根式的不定积分 1

- 复习：含根式 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ 分别通过变换 $x = a\sin t$, $x = a\tan t$, $x = \pm\frac{a}{\cos t}$ 化成三角有理式的积分.
- 例:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{3x}}}dx = \int \frac{2t}{3t(t^2-1)}dt$$
$$= \frac{1}{3}\ln\frac{t-1}{t+1} + C = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+e^{3x}}-1}{\sqrt{1+e^{3x}}+1} + C.$$

这里

$$t = \sqrt{1+e^{3x}} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\ln(t^2-1), dx = \frac{2}{3}\frac{t}{t^2-1}.$$

某些根式的不定积分 1

- 复习：含根式 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ 分别通过变换 $x=a\sin t$, $x=a\tan t$, $x=\pm\frac{a}{\cos t}$ 化成三角有理式的积分.
- 例:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{3x}}}dx = \int \frac{2t}{3t(t^2-1)}dt$$
$$= \frac{1}{3}\ln\frac{t-1}{t+1} + C = \frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+e^{3x}}-1}{\sqrt{1+e^{3x}}+1} + C.$$

这里

$$t=\sqrt{1+e^{3x}} \Rightarrow x=\frac{1}{3}\ln(t^2-1), dx=\frac{2}{3}\frac{t}{t^2-1}.$$

某些根式的不定积分 1

- 被积函数可写成为 $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ 时（$R(x,y)$ 是二元有理函数），令

$$t = \sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow x = \frac{t^n - b}{a},$$

从而有

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right)\frac{nt^{n-1}}{a}dt.$$

某些根式的不定积分 1

- 被积函数可写成为 $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ 时（$R(x,y)$ 是二元有理函数），令

$$t = \sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow x = \frac{t^n - b}{a},$$

从而有

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx = \int R\Big(\frac{t^n - b}{a}, t\Big)\frac{nt^{n-1}}{a}dt.$$

- 例：回简单有理式积分

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{3x+2}} \xlongequal[x=\frac{1}{3}(t^3-2)]{t=\sqrt[3]{3x+2}} \int \frac{t^2\,dt}{t^3+t-2}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{3}{4}t+\frac{1}{2}}{t^2+t+2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\sqrt[3]{3x+2}-1| + \frac{3}{8}\ln(\sqrt[3]{(3x+2)^2}$$

$$+ \sqrt[3]{3x+2}+2) + \frac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{7}} + C.$$

- 被积函数可写成为 $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 时，令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a}$.
- 例：

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \xlongequal[x=\frac{1+t^2}{1-t^2}]{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \int \frac{1+t^2}{1-t^2} t \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}\Big) + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2} + C.$$

某些根式的不定积分 3

- 被积函数可写成为 $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 时，令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a}$.
- 例：

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \xlongequal[x=\frac{1+t^2}{1-t^2}]{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \int \frac{1+t^2}{1-t^2} t \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}\Big) + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2} + C.$$

某些根式的不定积分 4

- 被积函数可含有二次根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以通过线性变换把根式变为 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$.
- 例:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}} \xlongequal{t=2x+1} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+4}}$$

$$\xlongequal{t=2\tan\theta} \frac{1}{2}\int \frac{1}{4\tan^2\theta\frac{2}{\cos\theta}}\cdot\frac{2d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{8}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\sin\theta}+C = -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{t^2+4}}{t}+C = -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{2x+1}+C.$$

某些根式的不定积分 4

- 被积函数可含有二次根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以通过线性变换把根式变为 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$.
- 例：

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}} \xlongequal{t=2x+1} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+4}}$$

$$\xlongequal{t=2\tan\theta} \frac{1}{2}\int \frac{1}{4\tan^2\theta\frac{2}{\cos\theta}}\cdot\frac{2d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{8}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\sin\theta}+C = -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{t^2+4}}{t}+C = -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{2x+1}+C.$$

- 定理：设 $u(x), v(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且 $u'(x)$, $v'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

证明：$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.

- $u(x)$ 常取对数函数，反三角函数，指数函数，多项式，三角函数.

定积分的分部积分法

- 定理：设 $u(x), v(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $u'(x)$, $v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

证明：$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.

- $u(x)$ 常取对数函数，反三角函数，指数函数，多项式，三角函数.

定积分的分部积分法

- 定理：设 $u(x), v(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $u'(x)$, $v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

证明：$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.

- $u(x)$ 常取对数函数，反三角函数，指数函数，多项式，三角函数.

- 例：求积分 $\int_1^2 x\ln x dx$.

 解：

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x dx^2$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

 比较

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

用分部积分法求定积分

- 例：求积分 $\int_1^2 x\ln x dx$.
  解：

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x dx^2$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

比较

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

用分部积分法求定积分

- 例：求积分 $\int_1^2 x\ln x dx$.
  解：

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x dx^2$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

比较

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

- 例：求积分 $\int_1^2 x\ln x dx$.
  解：

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x dx^2$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

比较

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

瓦利斯公式 1

- 例：求 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ n \geq 0.$
- 解：显然 $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, $n \geq 2$ 时， stirling 例子

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}
$$

得到递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由该递推公式可得瓦利斯公式

$$
I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.
$$

瓦利斯公式 1

- 例：求 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ n \geq 0.$
- 解：显然 $I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1,\ n \geq 2$ 时， stirling 例子

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}
$$

得到递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由该递推公式可得瓦利斯公式

$$
I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.
$$

瓦利斯公式 1

- 例：求 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx,\ n \geq 0.$
- 解：显然 $I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1,\ n \geq 2$ 时， stirling 例子

$$\begin{aligned} I_n =& -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x \\ =& -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ =& (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

得到递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由该递推公式可得瓦利斯公式

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

瓦利斯公式 2

- 命题：当 $n \to \infty$ 时，$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
- 证明：显然 I_n 单调递减，即有 $I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}$，由于 $\frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \to 1$，因此 $\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \to 1$.
  利用瓦利斯公式，$I_{2k+1}I_{2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k+1}$，

$$\frac{\pi}{2} = I_{2k+1}I_{2k}(2k+1) = \lim_{k\to\infty}(I_{2k+1})^2(2k+1)$$

因此 $I_{2k+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$，$I_{2k} \sim I_{2k+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2k}}$. 因此 $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

瓦利斯公式 2

- 命题: 当 $n \to \infty$ 时, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- 证明: 显然 I_n 单调递减, 即有 $I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}$, 由于 $\frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \to 1$, 因此 $\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \to 1$.
  利用瓦利斯公式, $I_{2k+1} I_{2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k+1}$,

$$\frac{\pi}{2} = I_{2k+1} I_{2k}(2k+1) = \lim_{k\to\infty} (I_{2k+1})^2 (2k+1)$$

  因此 $I_{2k+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$, $I_{2k} \sim I_{2k+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k}}$. 因此 $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Stirling 公式 1

- 利用

$$\int_{k-1}^{k} \ln x dx < \ln k < \int_{k}^{k+1} \ln x dx \Longrightarrow \int_{0}^{n} \ln x dx < \ln n! < \int_{1}^{n+1} \ln x dx$$

因为 $\int \ln x dx = x \ln x - x$,

$$n \ln n - n < \ln n! < (n+1)\ln(n+1) - n \Rightarrow \frac{n^n}{e^n} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

- Stirling 公式: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} = 1.$

- Stirling 公式: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!}=1.$
- 证明：令 $a_n=\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$, $\ln a_n=\ln(n!)+n-(n+\frac{1}{2})\ln n.$

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1$$
$$=(n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))-1=\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|\ln a_k-\ln a_{k+1}|$ 收敛. 又由于

$\ln a_n=\ln a_1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\ln a_k-\ln_{k+1})$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n$ 存在, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

- Stirling 公式: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!}=1.$
- 证明：令 $a_n=\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$, $\ln a_n=\ln(n!)+n-(n+\frac{1}{2})\ln n.$

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1$$
$$=(n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))-1=\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|\ln a_k-\ln a_{k+1}|$ 收敛. 又由于

$\ln a_n=\ln a_1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\ln a_k-\ln_{k+1})$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n$ 存在, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

Stirling 公式 3

- 证明：设 $A = \lim_{n\to\infty} a(n)$，即 $n! \sim An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$. 利用 Wallis 公式，wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n)!}\right)^2}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{4n} \frac{\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 2^{4n} \frac{\left(\frac{(An^{n+1/2}e^{-n})^2}{A(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}\right)^2}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{4n} \frac{(2^{-2n-\frac{1}{2}}A\sqrt{n})^2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 2^{4n} \frac{A^2 2^{-4n-1} n}{2n+1} = \frac{A^2}{4}$$

所以 $A = \sqrt{2\pi}$，即得 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!} = 1$.

定积分的换元法 1

- 定理：设 $f(x)$ 是 $[A,B]$ 上的连续函数，$\phi \in C^1([C,D])$ 且值域包含在 $[A,B]$ 内，设 $\alpha,\beta \in [C,D]$，$a=\phi(\alpha), b=\phi(\beta)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

- 证明：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(\phi(t))$ 是 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 的原函数，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$= F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

- 注：这里不要求 ϕ 可逆.

定积分的换元法 1

- 定理：设 $f(x)$ 是 $[A,B]$ 上的连续函数，$\phi\in C^1([C,D])$ 且值域包含在 $[A,B]$ 内，设 $\alpha,\beta\in[C,D]$，$a=\phi(\alpha),b=\phi(\beta)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

- 证明：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(\phi(t))$ 是 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 的原函数，

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$=F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha))=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

- 注：这里不要求 ϕ 可逆.

定积分的换元法 1

- 定理：设 $f(x)$ 是 $[A, B]$ 上的连续函数，$\phi \in C^1([C, D])$ 且值域包含在 $[A, B]$ 内，设 $\alpha, \beta \in [C, D]$，$a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

- 证明：设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(\phi(t))$ 是 $f(\phi(t))\phi'(t)$ 的原函数，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$= F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

- 注：这里不要求 ϕ 可逆.

- 注：上面定理中 a 不需要小于 b, α 也不需要小于 β. 例：

$$\int_{-1}^{1} f(t^2)2tdt = \int_{1}^{1} f(x)dx = 0,$$

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(t^2)2tdt = \int_{0}^{-1} f(t^2)2tdt$$

对任意的连续函数 f 成立.

- 上式定理可以用于从 $\int_a^b f(x)dx$ 计算 $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$（比较不定积分的第一换元法），也可用于从 $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ 计算 $\int_a^b f(x)dx$（比较不定积分的第二换元法）.

- 注：上面定理中 a 不需要小于 b, α 也不需要小于 β. 例：

$$\int_{-1}^{1} f(t^2)2t dt = \int_{1}^{1} f(x)dx = 0,$$

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(t^2)2t dt = \int_{0}^{-1} f(t^2)2t dt$$

对任意的连续函数 f 成立.

- 上式定理可以用于从 $\int_a^b f(x)dx$ 计算 $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ （比较不定积分的第一换元法），也可用于从 $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ 计算 $\int_a^b f(x)dx$ （比较不定积分的第二换元法）.

利用换元法求定积分 1

- 例：（第一换元）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln 2.$$

- 例：（第二换元）

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \xlongequal{x=t^2} \int_0^1 \frac{t}{1+t} 2t dt = -1 + 2\ln 2.$$

- 例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt.$$

如 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$

利用换元法求定积分 1

- 例：（第一换元）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln 2.$$

- 例：（第二换元）

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \xlongequal{x=t^2} \int_0^1 \frac{t}{1+t} 2tdt = -1 + 2\ln 2.$$

- 例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt.$$

如 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$

利用换元法求定积分 1

- 例：（第一换元）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln 2.$$

- 例：（第二换元）

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \xlongequal{x=t^2} \int_0^1 \frac{t}{1+t} 2t dt = -1 + 2\ln 2.$$

- 例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt.$$

如 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$

- 例： wallis

$$\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 tdt$$

$$= a^6\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt\right) = a^6\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{16}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}a^6$$

- 例：求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$. (不定积分)

解：由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{\pi}{4}$$

- 例： wallis

$$\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 tdt$$

$$=a^6\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt\Big)=a^6\Big(\frac{3}{8}-\frac{5}{16}\Big)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{32}a^6$$

- 例：求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$. (不定积分)

解：由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{\pi}{4}$$

一个定积分

- 直接计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{\pi}{4}$.

  解法 1(化成广义积分):

$$\begin{aligned}I &\xlongequal{y=\tan x}\int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+y)(1+y^2)}dy\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+y}+\frac{y+1}{1+y^2}\right)dy\\ &=\frac{1}{4}\ln\frac{1+y^2}{(1+y)^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\arctan y\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

  解法 2:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin(t-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{2\sin t}dt$$

- 直接计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$.

  解法 1(化成广义积分):

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal{y=\tan x} \int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+y)(1+y^2)} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+y} + \frac{y+1}{1+y^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{1+y^2}{(1+y)^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \arctan y\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

解法 2:

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(t-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t - \cos t}{2\sin t} dt
$$

一个定积分

- 直接计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$.
  解法 1(化成广义积分):

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal{y=\tan x} \int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+y)(1+y^2)} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+y} + \frac{y+1}{1+y^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{1+y^2}{(1+y)^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \arctan y \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

  解法 2:

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(t-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t - \cos t}{2\sin t} dt
$$

- 例：求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$.

  解：由于

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx \xlongequal{x=-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^2 t}{1+e^{-t}} dt$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x} dx$$

  因此有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x} dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

偶函数、奇函数的定积分

- 设 $f(x)$ 连续，若 $f(x) = f(-x)$, 则有

$$\int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

若 $f(x) = -f(-x)$, 则有 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

- 例：

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\ln(1+\sin^2 x)+2}dx = 0.$$

偶函数、奇函数的定积分

- 设 $f(x)$ 连续，若 $f(x) = f(-x)$, 则有
$$\int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$
若 $f(x) = -f(-x)$, 则有 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- 例：
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\ln(1+\sin^2 x)+2} dx = 0.$$

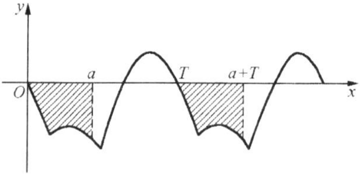
周期函数的定积分 1

- 设 $f(x)$ 连续，若 $f(x)=f(x+T)$, 则有 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$, $\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$.

证明：由于 $\int_T^{a+T} f(x)dx \xlongequal{x=T+t} \int_0^a f(t)dt$,

$$\int_0^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{a+T} f(x)dx$$

得 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$.



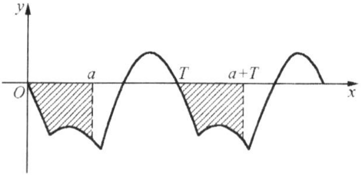
周期函数的定积分 1

- 设 $f(x)$ 连续，若 $f(x)=f(x+T)$, 则有 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$, $\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$.

证明：由于 $\int_T^{a+T} f(x)dx \xlongequal{x=T+t} \int_0^a f(t)dt$,

$$\int_0^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{a+T} f(x)dx$$

得 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$.



周期函数的定积分 2

- 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的连续函数，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx=A.$$

证明：设 $nT\le x<(n+1)T$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-A&=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(t)dt\\&=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{nT}\right)\int_0^x f(t)dt+\frac{1}{nT}\int_{nT}^x f(t)dt\end{aligned}$$

设 $|f(x)|\le M$, 则有 $|(\frac{1}{x}-\frac{1}{nT})\int_0^x f(t)dt|\le\frac{T}{x\cdot nT}xM=\frac{M}{n}\to 0$, $|\frac{1}{nT}\int_{nT}^x f(t)dt|\le\frac{1}{nT}TM=\frac{M}{n}\to 0.$

周期函数的定积分 2

- 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的连续函数，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx=A.$$

证明：设 $nT\le x<(n+1)T$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-A&=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(t)dt\\&=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{nT}\right)\int_0^x f(t)dt+\frac{1}{nT}\int_{nT}^x f(t)dt\end{aligned}$$

设 $|f(x)|\le M$, 则有 $|(\frac{1}{x}-\frac{1}{nT})\int_0^x f(t)dt|\le\frac{T}{x\cdot nT}xM=\frac{M}{n}\to 0$,
$|\frac{1}{nT}\int_{nT}^x f(t)dt|\le\frac{1}{nT}TM=\frac{M}{n}\to 0$.

总结

定积分的计算

- 第一步：利用奇偶性、周期性缩小积分区间.
- 第二步：若被积函数含有绝对值，或分段定义，先把积分分成几个区间上的积分.
- 第三步：计算（利用换元、分部积分）.

总结

定积分的计算

- 第一步：利用奇偶性、周期性缩小积分区间.
- 第二步：若被积函数含有绝对值，或分段定义，先把积分分成几个区间上的积分.
- 第三步：计算（利用换元、分部积分）.

总结

定积分的计算

- 第一步：利用奇偶性、周期性缩小积分区间.
- 第二步：若被积函数含有绝对值，或分段定义，先把积分分成几个区间上的积分.
- 第三步：计算（利用换元、分部积分）.

光滑曲线

- 光滑曲线：设平面曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$. （若 $x'(t), y'(t)$ 不同时为 0, 此时切线随 t 连续变动.）
- 若平面曲线的直角坐标方程为 $y = f(x)$, $y \in C^1([a, b])$, 则该曲线为光滑曲线.
- 分段光滑曲线：曲线可分割为有限段光滑曲线. 如曲线参数方程的满足 $x(t), y(t) \in C([\alpha, \beta])$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha_{k-1}, \alpha_k])$(其中 $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$).

光滑曲线

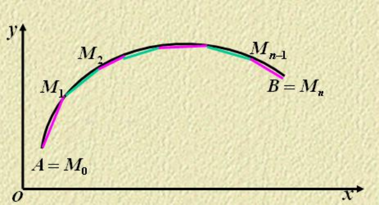
- 光滑曲线：设平面曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$. （若 $x'(t), y'(t)$ 不同时为 0, 此时切线随 t 连续变动.）
- 若平面曲线的直角坐标方程为 $y = f(x)$， $y \in C^1([a, b])$, 则该曲线为光滑曲线.
- 分段光滑曲线：曲线可分割为有限段光滑曲线. 如曲线参数方程的满足 $x(t), y(t) \in C([\alpha, \beta])$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha_{k-1}, \alpha_k])$(其中 $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$).

光滑曲线

- 光滑曲线：设平面曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$. （若 $x'(t), y'(t)$ 不同时为 0, 此时切线随 t 连续变动.）
- 若平面曲线的直角坐标方程为 $y = f(x)$， $y \in C^1([a, b])$, 则该曲线为光滑曲线.
- 分段光滑曲线：曲线可分割为有限段光滑曲线. 如曲线参数方程的满足 $x(t), y(t) \in C([\alpha, \beta])$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha_{k-1}, \alpha_k])$(其中 $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$).

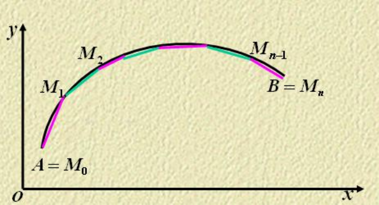
曲线弧长

- 曲线 AB 的弧长：把曲线进行分割（在曲线上依次取 $A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n = B$），$\lambda = \max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\}$, $\lambda \to 0$ 时，$\sum_{k=0}^{n} |M_{k-1}M_k|$ 的极限称为曲线 AB 的弧长 (极限不存在时曲线不可求长).
- 分段光滑曲线是可求长曲线.



曲线弧长

- 曲线 AB 的弧长：把曲线进行分割（在曲线上依次取 $A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n = B$），$\lambda = \max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\}$, $\lambda \to 0$ 时，$\sum_{k=0}^{n} |M_{k-1}M_k|$ 的极限称为曲线 AB 的弧长 (极限不存在时曲线不可求长).
- 分段光滑曲线是可求长曲线.



直角坐标下曲线弧长 1

- 设有光滑曲线的直角坐标方程为 $y = f(x)$, $y \in C^1([a, b])$ 作 $[a, b]$ 的分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 从而给出了曲线的分割点 $M_k(x_k, f(x_k))$. 设 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, 则弦 $M_{k-1}M_k$ 的长为

$$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\Delta x_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$$

这里用到中值定理: 存在 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 使得 $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)\Delta x_k$.

直角坐标下曲线弧长 2

- 令 $\lambda = \max\{\Delta x_k : k = 0, 1, \cdots, n\}$, 则

$$|M_{k-1}M_k| \leq \sqrt{1+M^2}\Delta x_k \leq \sqrt{1+M^2}\lambda,$$

这里 M 为 $|f'(x)|$ 的最大值. 因此当 $\lambda \to 0$ 时 $\max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\} \to 0$.

- 曲线弧长

$$s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

直角坐标下曲线弧长 2

- 令 $\lambda = \max\{\Delta x_k : k = 0, 1, \cdots, n\}$, 则

$$|M_{k-1}M_k| \leq \sqrt{1+M^2}\Delta x_k \leq \sqrt{1+M^2}\lambda,$$

  这里 M 为 $|f'(x)|$ 的最大值. 因此当 $\lambda \to 0$ 时 $\max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\} \to 0$.

- 曲线弧长

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$$
$$= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

参数方程下曲线弧长 1

- 设有光滑曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, 作 $[\alpha, \beta]$ 的分割 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 从而给出了曲线的分割 $M_i(x(t_i), y(t_i))$. 设 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, 则弦 $M_{i-1}M_i$ 的长为

$$
\begin{aligned}
|M_{i-1}M_i| &= \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\
&= \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2}\Delta t_i \sim \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}\Delta t_i
\end{aligned}
$$

这是因为

$$
|\sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\eta_i))^2} - \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}| \le |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)|
$$

参数方程下曲线弧长 2

- 令 $\lambda = \max\{\Delta t_i : i = 0, 1, \cdots, n\}$, 由于 $y'(x)$ 一致连续,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)| \Delta t_i = 0.$$

- 设 $|x'(t)| \leq A, |y'(t)| \leq B$, 则有 $|M_{i-1}M_i| \leq \sqrt{A^2 + B^2}\lambda$. $\lambda \to 0$ 时 $\max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\} \to 0$, 曲线弧长

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \end{aligned}$$

参数方程下曲线弧长 2

- 令 $\lambda = \max\{\Delta t_i : i = 0, 1, \cdots, n\}$, 由于 $y'(x)$ 一致连续,

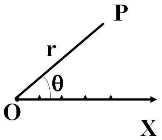
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |y'(\eta_i) - y'(\xi_i)| \Delta t_i = 0.$$

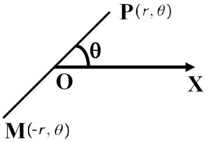
- 设 $|x'(t)| \le A, |y'(t)| \le B$, 则有 $|M_{i-1}M_i| \le \sqrt{A^2 + B^2}\lambda$. $\lambda \to 0$ 时 $\max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\} \to 0$, 曲线弧长

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_i))^2 + (y'(\xi_i))^2} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \end{aligned}$$

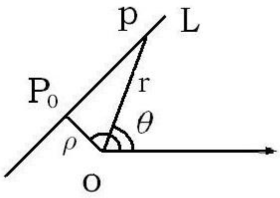
平面极坐标

- 极坐标系: 在平面上取定一点 O, 称为极点. 从 O 出发引一条射线 Ox, 称为极轴. 再取定一个长度单位, 规定角度取逆时针方向为正. 这样, 平面上任一点 P 的位置就可以用线段 OP 的长度 r 以及从 Ox 到 OP 的角度 θ 来确定, 有序数对 (r, θ) 就称为 P 点的极坐标, 记为 $P(r, \theta)$; r 称为 P 点的极径, θ 称为 P 点的极角. 当限制 $0 \leq \theta < 2\pi$ 时, 平面上除极点以外, 每一点都有唯一的一个极坐标. 极点的极径为零, 极角任意. 若允许 $r < 0$, 规定 $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$. 那么 $(r, \theta + 2n\pi)$, $(-r, \theta + (2n+1)\pi)$ 和 (r, θ) 是同一个点的极坐标, 这里 n 是任意整数.



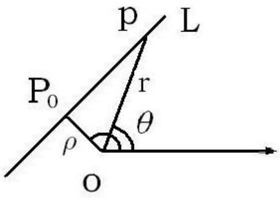


- 建立如下直角坐标系：以极坐标的原点 O 为原点，Ox 为 x 轴. 则点 $P(r,\theta)$ 的直角坐标 (x,y) 是 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.
- 例: 直线 L 不经过原点，过原点 O 做该直线的垂线，交点 P_0 的极坐标为 (ρ,ω), 则直线上任一点 $P(r,\theta)$ 满足的方程为 $r\cos(\theta-\omega)=\rho$.

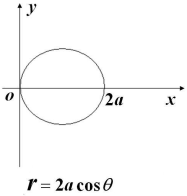


平面极坐标中的曲线方程

- 建立如下直角坐标系：以极坐标的原点 O 为原点，Ox 为 x 轴. 则点 $P(r,\theta)$ 的直角坐标 (x,y) 是 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.
- 例: 直线 L 不经过原点，过原点 O 做该直线的垂线，交点 P_0 的极坐标为 (ρ,ω), 则直线上任一点 $P(r,\theta)$ 满足的方程为 $r\cos(\theta-\omega)=\rho$.

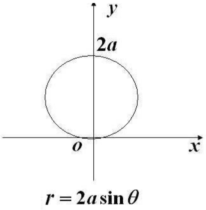


- 以 O 为圆心，半径为 R 的圆周的极坐标方程为 $r=R$.



- 设 $a>0$, 以 $(a,0)$ 为圆心，半径为 a 的圆周的极坐标方程为

$$r=2a\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}.$$

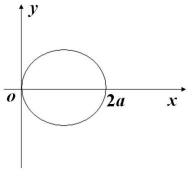


- 以 $(a,\frac{\pi}{2})$ 为圆心，半径为 a 的圆周的极坐标方程为

$$r=2a\sin\theta,\quad 0\leq\theta\leq\pi.$$

- 以 O 为圆心，半径为 R 的圆周的极坐标方程为 $r = R$.
- 设 $a > 0$, 以 $(a, 0)$ 为圆心，半径为 a 的圆周的极坐标方程为

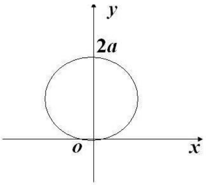
$$r = 2a\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$



$r = 2a\cos\theta$

- 以 $(a, \frac{\pi}{2})$ 为圆心，半径为 a 的圆周的极坐标方程为

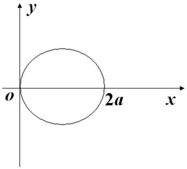
$$r = 2a\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$



$r = 2a\sin\theta$

平面极坐标中的曲线方程 2

- 以 O 为圆心，半径为 R 的圆周的极坐标方程为 $r = R$.



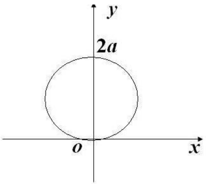
$r = 2a\cos\theta$

- 设 $a > 0$, 以 $(a, 0)$ 为圆心，半径为 a 的圆周的极坐标方程为

$$r = 2a\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

- 以 $(a, \frac{\pi}{2})$ 为圆心，半径为 a 的圆周的极坐标方程为

$$r = 2a\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$



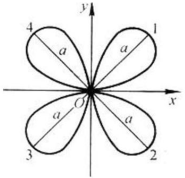
$r = 2a\sin\theta$

平面极坐标中的曲线方程 3

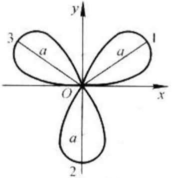
- 以任意点 (r_0, θ_0) 为圆心，半径为 R 的圆周的极坐标方程为

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

- 一般曲线的极坐标方程：$r = r(\theta)$，或 $F(r, \theta) = 0$.
- $r(\theta) = a\sin 2\theta$ 是四叶玫瑰线.
- $r(\theta) = a\sin 3\theta$ 是三叶玫瑰线.



四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$

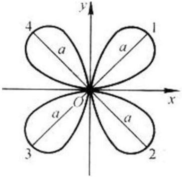


三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$

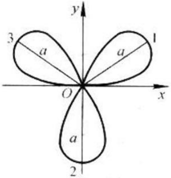
- 以任意点 (r_0, θ_0) 为圆心，半径为 R 的圆周的极坐标方程为

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

- 一般曲线的极坐标方程：$r = r(\theta)$，或 $F(r, \theta) = 0$.
- $r(\theta) = a\sin 2\theta$ 是四叶玫瑰线.
- $r(\theta) = a\sin 3\theta$ 是三叶玫瑰线.



四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$

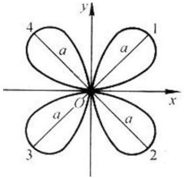


三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$

平面极坐标中的曲线方程 3

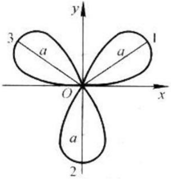
- 以任意点 (r_0, θ_0) 为圆心，半径为 R 的圆周的极坐标方程为

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$



四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$

- 一般曲线的极坐标方程：$r = r(\theta)$，或 $F(r, \theta) = 0$.
- $r(\theta) = a\sin 2\theta$ 是四叶玫瑰线.
- $r(\theta) = a\sin 3\theta$ 是三叶玫瑰线.



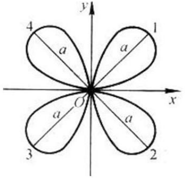
三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$

平面极坐标中的曲线方程 3

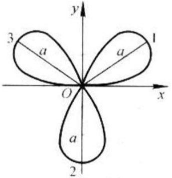
- 以任意点 (r_0, θ_0) 为圆心，半径为 R 的圆周的极坐标方程为

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

- 一般曲线的极坐标方程：$r = r(\theta)$，或 $F(r, \theta) = 0$.
- $r(\theta) = a \sin 2\theta$ 是四叶玫瑰线.
- $r(\theta) = a \sin 3\theta$ 是三叶玫瑰线.



四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$



三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$

平面极坐标中的曲线弧长

- 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$, 则直角坐标下的参数方程为
$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$
通过简单计算可知 $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2$, 从而有弧长公式
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta.$$

- 例：圆周 $r = R$ 的周长 $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + R^2} d\theta = 2\pi R$.
- 例：$r = 2R\cos\theta(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, $(r')^2 + r^2 = 4R^2$, 周长 $s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R d\theta = 2\pi R$.

平面极坐标中的曲线弧长

- 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta)(\alpha \leq \theta \leq \beta)$, 则直角坐标下的参数方程为
$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$
通过简单计算可知 $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2$, 从而有弧长公式
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}d\theta.$$

- 例：圆周 $r = R$ 的周长 $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + R^2}d\theta = 2\pi R$.
- 例：$r = 2R\cos\theta(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, $(r')^2 + r^2 = 4R^2$, 周长 $s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2Rd\theta = 2\pi R$.

平面极坐标中的曲线弧长

- 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$, 则直角坐标下的参数方程为
$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$
通过简单计算可知 $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2$, 从而有弧长公式
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}d\theta.$$

- 例：圆周 $r = R$ 的周长 $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + R^2}d\theta = 2\pi R.$
- 例：$r = 2R\cos\theta(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$, $(r')^2 + r^2 = 4R^2$, 周长 $s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2Rd\theta = 2\pi R.$

弧微分

- 光滑曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $[\alpha, t]$ 对应的弧长

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}du.$$

  则有 $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$

- 曲线 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $[a, x]$ 对应的弧长

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}dt.$$

  则有 $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$

- 极坐标表示的曲线 $r = r(\theta)$, 则有 $ds = \sqrt{r(\theta)^2 + (r'\theta)^2}d\theta.$

弧微分

- 光滑曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $[\alpha, t]$ 对应的弧长

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}du.$$

  则有 $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$

- 曲线 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $[a, x]$ 对应的弧长

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}dt.$$

  则有 $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$

- 极坐标表示的曲线 $r = r(\theta)$, 则有 $ds = \sqrt{r(\theta)^2 + (r'\theta)^2}d\theta.$

弧微分

- 光滑曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $[\alpha, t]$ 对应的弧长

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du.$$

  则有 $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$

- 曲线 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $[a, x]$ 对应的弧长

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt.$$

  则有 $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$

- 极坐标表示的曲线 $r = r(\theta)$, 则有 $ds = \sqrt{r(\theta)^2 + (r'\theta)^2} d\theta.$

- 光滑曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, 由于 $[t, t + \Delta t]$ 对应的弧长

$$\Delta s = ds + o(\Delta t).$$

因此若能把 $[t, t + \Delta t]$ 对应的弧长表示为 $\Delta s = f(t)\Delta t + o(\Delta t)$, 则 $[\alpha, \beta]$ 对应的弧长为 $\int_\alpha^\beta f(t)dt$.

- 一般地，要求区间 $[a, b]$ 对应的一个量 y(有区间可加性)(比如：面积，弧长，体积)，若 $[x, x + \Delta x]$ 对应的值为 $\Delta y = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$, 则 $[a, b]$ 对应的值为 $\int_a^b f(x)dx$.

微元法

- 光滑曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, 由于 $[t, t+\Delta t]$ 对应的弧长

$$\Delta s = ds + o(\Delta t).$$

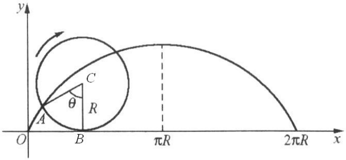
因此若能把 $[t, t+\Delta t]$ 对应的弧长表示为 $\Delta s = f(t)\Delta t + o(\Delta t)$, 则 $[\alpha, \beta]$ 对应的弧长为 $\int_\alpha^\beta f(t)dt$.

- 一般地，要求区间 $[a, b]$ 对应的一个量 y(有区间可加性)(比如：面积，弧长，体积)，若 $[x, x+\Delta x]$ 对应的值为 $\Delta y = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$, 则 $[a, b]$ 对应的值为 $\int_a^b f(x)dx$.

- 圆盘在 x 轴上滚动. 圆盘上固定一点旋转一周所得曲线（称为旋轮线）的弧长.

解：不妨假设固定点起始位置在原点，设 A 为固定点，B 为圆盘和 x 轴的接触点，C 是圆盘的中心，参数 $\theta = \angle ACB$. 旋转一周 θ 从 0 变到 2π. 旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = R(1 - \cos\theta) \end{cases},$$



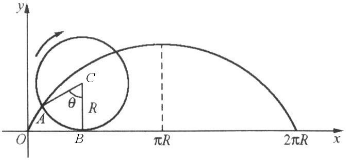
则有

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = R^2(1-\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta = 4R^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

从而得弧长 $s = \int_0^{2\pi} 2R|\sin\frac{\theta}{2}|d\theta = 8R.$

- 圆盘在 x 轴上滚动. 圆盘上固定一点旋转一周所得曲线（称为旋轮线）的弧长.
  解：不妨假设固定点起始位置在原点，设 A 为固定点，B 为圆盘和 x 轴的接触点，C 是圆盘的中心，参数 $\theta=\angle ACB$. 旋转一周 θ 从 0 变到 2π. 旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta)=R(\theta-\sin\theta) \\ y(\theta)=R(1-\cos\theta) \end{cases},$$



则有

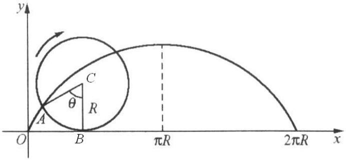
$$x'(\theta)^2+y'(\theta)^2=R^2(1-\cos\theta)^2+R^2\sin^2\theta=4R^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

从而得弧长 $s=\int_0^{2\pi}2R|\sin\frac{\theta}{2}|d\theta=8R.$

- 圆盘在 x 轴上滚动. 圆盘上固定一点旋转一周所得曲线（称为旋轮线）的弧长.

  解：不妨假设固定点起始位置在原点，设 A 为固定点，B 为圆盘和 x 轴的接触点，C 是圆盘的中心，参数 $\theta = \angle ACB$. 旋转一周 θ 从 0 变到 2π. 旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = R(1 - \cos\theta) \end{cases},$$



则有

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = R^2(1-\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta = 4R^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

从而得弧长 $s = \int_0^{2\pi} 2R|\sin\frac{\theta}{2}|d\theta = 8R.$

椭圆的周长

- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\neq b)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$.

  则周长为 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$.
- 若用直角坐标 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，则有周长等于

$$s=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{(\frac{b}{a}x)^2}{a^2-x^2}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^2+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)x^2}{a^2-x^2}}dx.$$

- 注：$a\neq b$ 时，上面积分中被积函数的原函数不是初等函数 (椭圆积分).

椭圆的周长

- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\neq b)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$, $0\le\theta\le 2\pi$.

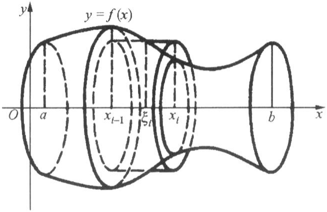
  则周长为 $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$.
- 若用直角坐标 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，则有周长等于

$$s=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{(\frac{b}{a}x)^2}{a^2-x^2}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^2+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)x^2}{a^2-x^2}}dx.$$

- 注：$a\neq b$ 时，上面积分中被积函数的原函数不是初等函数 (椭圆积分).

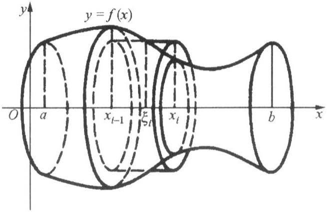
旋转体的体积 1

- 连续函数 $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$ 表示的曲线绕 x 轴旋转所围成的旋转体体积.
- $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片 (近似地看成底面半径为 $f(x)$ 的圆柱体) 的体积为 $\Delta V = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$, 因此 $V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.
- 注: $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片也可近似为上下底面半径分别为 $f(x), f(x + \Delta x)$ 的圆台，此时 $\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi(f(x)^2 + f(x)f(x + \Delta x) + f(x + \Delta x)^2)\Delta x = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$.

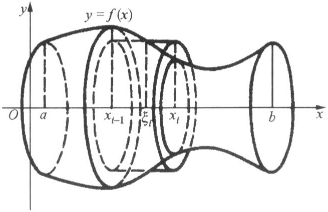


旋转体的体积 1

- 连续函数 $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$ 表示的曲线绕 x 轴旋转所围成的旋转体体积.
- $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片 (近似地看成底面半径为 $f(x)$ 的圆柱体) 的体积为 $\Delta V = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$, 因此 $V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.
- 注: $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片也可近似为上下底面半径分别为 $f(x), f(x + \Delta x)$ 的圆台, 此时 $\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi(f(x)^2 + f(x)f(x + \Delta x) + f(x + \Delta x)^2)\Delta x = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$.



- 连续函数 $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$ 表示的曲线绕 x 轴旋转所围成的旋转体体积.
- $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片 (近似地看成底面半径为 $f(x)$ 的圆柱体) 的体积为 $\Delta V = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$, 因此 $V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.
- 注: $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片也可近似为上下底面半径分别为 $f(x), f(x + \Delta x)$ 的圆台，此时 $\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi(f(x)^2 + f(x)f(x + \Delta x) + f(x + \Delta x)^2)\Delta x = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$.



旋转体的体积 2

- 设 $0 < a < b$, 求连续函数 $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$ 表示的曲线与 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转所围成的旋转体体积.
  $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片 (近似地看成内外半径分别为 $x, x + \Delta x$, 高为 $f(x)$ 的圆桶) 的体积为 $\Delta V = 2\pi x f(x)\Delta x + o(\Delta x)$, 因此 $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$.
- $x = g(y)$, $y \in [c, d]$）绕 y 轴旋转形成的旋转体体积为 $V = \int_c^d \pi g(y)^2 dy$.

旋转体的体积 2

- 设 $0 < a < b$, 求连续函数 $y = f(x) \geq 0(x \in [a, b])$ 表示的曲线与 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转所围成的旋转体体积. $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片 (近似地看成内外半径分别为 $x, x + \Delta x$, 高为 $f(x)$ 的圆桶) 的体积为 $\Delta V = 2\pi x f(x)\Delta x + o(\Delta x)$, 因此 $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$.
- $x = g(y)$, $y \in [c, d]$）绕 y 轴旋转形成的旋转体体积为 $V = \int_c^d \pi g(y)^2 dy$.

旋转体的体积 2

- 设 $0 < a < b$, 求连续函数 $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$ 表示的曲线与 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转所围成的旋转体体积. $[x, x + \Delta x]$ 对应的旋转体片 (近似地看成内外半径分别为 $x, x + \Delta x$, 高为 $f(x)$ 的圆桶) 的体积为 $\Delta V = 2\pi x f(x) \Delta x + o(\Delta x)$, 因此 $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$.
- $x = g(y)$, $y \in [c, d]$）绕 y 轴旋转形成的旋转体体积为 $V = \int_c^d \pi g(y)^2 dy$.

旋转体的体积 3

- 祖暅原理：两个同高的立体, 若对它们所作的等高平行截面的面积相等，则两立体的体积相等.
- 若有一立体 Ω，它在直角坐标系中位于两个平面 $x=a, x=b(a<b)$ 之间, 用垂直于 x 轴的平面去截 Ω，截面积为 $S(x)$. 若 $S=S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，Ω 的体积为

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

- $y=f(x)$（$x\in[a,b]$）绕 $y=d$ 轴旋转形成的旋转体体积为 $V=\int_a^b \pi(f(x)-d)^2dx.$

旋转体的体积 3

- 祖暅原理：两个同高的立体, 若对它们所作的等高平行截面的面积相等，则两立体的体积相等.
- 若有一立体 Ω，它在直角坐标系中位于两个平面 $x=a, x=b(a<b)$ 之间, 用垂直于 x 轴的平面去截 Ω，截面积为 $S(x)$. 若 $S=S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，Ω 的体积为

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

- $y=f(x)$（$x\in[a,b]$）绕 $y=d$ 轴旋转形成的旋转体体积为 $V=\int_a^b \pi(f(x)-d)^2dx$.

旋转体的体积 3

- 祖暅原理：两个同高的立体，若对它们所作的等高平行截面的面积相等，则两立体的体积相等.
- 若有一立体 Ω，它在直角坐标系中位于两个平面 $x = a, x = b(a < b)$ 之间，用垂直于 x 轴的平面去截 Ω，截面积为 $S(x)$. 若 $S = S(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，Ω 的体积为

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

- $y = f(x)$（$x \in [a, b]$）绕 $y = d$ 轴旋转形成的旋转体体积为 $V = \int_a^b \pi(f(x) - d)^2 dx$.

旋转体的体积 4

- 设曲线的参数方程为 $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. 曲线绕 x 轴旋转. 当 $x(t)$ 严格单调时, 曲线绕 x 轴旋转形成的旋转体体积为

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \int_\alpha^\beta \pi (y(t))^2 |x'(t)| dt.$$

- 曲线的参数方程为 $x = x(t) > 0, y = y(t) > 0$(假设 $x(t)$ 严格单调), $\alpha \le t \le \beta$ 与 $x = x(\alpha)$, $x = x(\beta)$ 及 x 轴围城的曲边梯形绕 y 轴旋转所围成的旋转体体积

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = \int_\alpha^\beta 2\pi x(t) y(t) |x'(t)| dt.$$

旋转体的体积 4

- 设曲线的参数方程为 $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. 曲线绕 x 轴旋转. 当 $x(t)$ 严格单调时，曲线绕 x 轴旋转形成的旋转体体积为

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \int_\alpha^\beta \pi (y(t))^2 |x'(t)| dt.$$

- 曲线的参数方程为 $x = x(t) > 0, y = y(t) > 0$(假设 $x(t)$ 严格单调), $\alpha \le t \le \beta$ 与 $x = x(\alpha)$, $x = x(\beta)$ 及 x 轴围城的曲边梯形绕 y 轴旋转所围成的旋转体体积

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = \int_\alpha^\beta 2\pi x(t) y(t) |x'(t)| dt.$$

计算旋转体的体积 1

- 球的体积：$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta (\theta \in [0,\pi])$ 绕 x 轴旋转形成的旋转体体积为
$$V = \int_0^\pi \pi (R\sin\theta)^2 R\sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3.$$
- 圆台的体积：上下底面半径分别为 R_1, R_2，高维 h 的圆台，可以看成是 $x = \frac{R_2-R_1}{h}(h-y) + R_1$ $(y \in [0,h]$ 绕 y 轴旋转所得的旋转体),
$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{R_2-R_1}{h}(h-y) + R_1\right)^2 dy = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

计算旋转体的体积 1

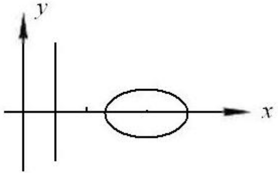
- 球的体积：$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta (\theta \in [0,\pi])$ 绕 x 轴旋转形成的旋转体体积为

$$V = \int_0^\pi \pi (R\sin\theta)^2 R\sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

- 圆台的体积：上下底面半径分别为 R_1, R_2, 高维 h 的圆台，可以看成是 $x = \frac{R_2 - R_1}{h}(h-y) + R_1$ $(y \in [0,h]$ 绕 y 轴旋转所得的旋转体),

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{R_2 - R_1}{h}(h-y) + R_1 \right)^2 dy = \frac{1}{3}\pi h (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

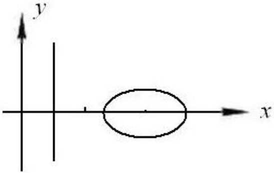
- 设 D 是由椭圆 $4(x-4)^2+9y^2=9$ 围成，求 D 绕以下直线旋转所得旋转体体积. （1）x 轴；（2）y 轴，（3）$x=1$.
- 解：椭圆的参数方程为
  $x=4+\frac{3}{2}\cos\theta, y=\sin\theta.$
  绕 x 轴旋转的旋转体体积为



$$\int_0^\pi \pi(\sin\theta)^2(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta=\int_0^\pi \pi(1-\cos^2\theta)(-\frac{3}{2})d\cos\theta$$
$$=\frac{3}{2}\pi\int_{-1}^1(1-t^2)dt=2\pi.$$

计算旋转体的体积 2

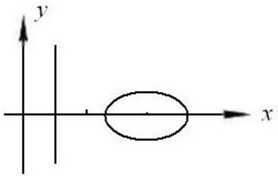
- 设 D 是由椭圆 $4(x-4)^2+9y^2=9$ 围成，求 D 绕以下直线旋转所得旋转体体积. （1）x 轴；（2）y 轴，（3）$x=1$.
- 解：椭圆的参数方程为
  $x=4+\frac{3}{2}\cos\theta, y=\sin\theta.$
  绕 x 轴旋转的旋转体体积为



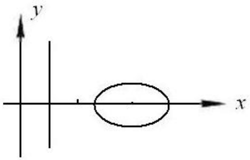
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\pi(\sin\theta)^2\left(\frac{3}{2}\sin\theta\right)d\theta &= \int_0^{\pi}\pi(1-\cos^2\theta)\left(-\frac{3}{2}\right)d\cos\theta \\ &= \frac{3}{2}\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt = 2\pi.\end{aligned}$$

计算旋转体的体积 2

- 设 D 是由椭圆 $4(x-4)^2+9y^2=9$ 围成，求 D 绕以下直线旋转所得旋转体体积.（1）x 轴；（2）y 轴，（3）$x=1$.
- 解：椭圆的参数方程为
  $x=4+\frac{3}{2}\cos\theta, y=\sin\theta$.
  绕 x 轴旋转的旋转体体积为



$$\int_0^{\pi}\pi(\sin\theta)^2(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta=\int_0^{\pi}\pi(1-\cos^2\theta)(-\frac{3}{2})d\cos\theta$$
$$=\frac{3}{2}\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt=2\pi.$$



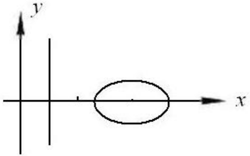
- 绕 y 轴旋转形成的旋转体,

$$V = 2\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{11}{2}} 2\pi xydx = 2\int_0^{\pi} 2\pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)\sin\theta(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta = 12\pi^2.$$

- 绕 $x=1$ 旋转形成的旋转体体积,

$$2\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{11}{2}} 2\pi(x-1)ydx = 4\pi\int_0^{\pi}(3+\frac{3}{2}\cos\theta)\sin\theta(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta = 9\pi^2.$$

计算旋转体的体积 3



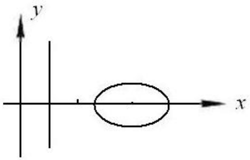
- 绕 y 轴旋转形成的旋转体,

$$V = 2\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{11}{2}} 2\pi xy dx = 2\int_0^{\pi} 2\pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)\sin\theta(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta = 12\pi^2.$$

- 绕 $x=1$ 旋转形成的旋转体体积,

$$2\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{11}{2}} 2\pi(x-1)y dx = 4\pi\int_0^{\pi}(3+\frac{3}{2}\cos\theta)\sin\theta(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta = 9\pi^2.$$

计算旋转体的体积 3



- 绕 y 轴旋转形成的旋转体,

$$V = 2\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{11}{2}} 2\pi xydx = 2\int_0^{\pi} 2\pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)\sin\theta(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta = 12\pi^2.$$

- 绕 $x=1$ 旋转形成的旋转体体积,

$$2\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{11}{2}} 2\pi(x-1)ydx = 4\pi\int_0^{\pi}(3+\frac{3}{2}\cos\theta)\sin\theta(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta = 9\pi^2.$$

- 注：绕 y 轴旋转形成的旋转体可以看成是 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 对应曲线产生的旋转体挖去 $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 对应曲线产生的旋转体，体积等于

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2\cos\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2(-\cos\theta) d\theta = 12\pi^2.$$

类似地，绕 $x=1$ 旋转形成的旋转体体积为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(3+\frac{3}{2}\cos\theta)^2\cos\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi(3+\frac{3}{2}\cos\theta)^2(-\cos\theta) d\theta = 9\pi^2.$$

计算旋转体的体积 4

- 注：绕 y 轴旋转形成的旋转体可以看成是 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 对应曲线产生的旋转体挖去 $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 对应曲线产生的旋转体，体积等于

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2\cos\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2(-\cos\theta) d\theta = 12\pi^2.$$

类似地，绕 $x=1$ 旋转形成的旋转体体积为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(3+\frac{3}{2}\cos\theta)^2\cos\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi(3+\frac{3}{2}\cos\theta)^2(-\cos\theta) d\theta = 9\pi^2.$$

旋转体的侧面积 1

- $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$ 绕 x 轴旋转，求旋转体的侧面积 (曲线扫过的曲面面积).
- 把 $[a, b]$ 划分为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $M_k(x_k, f(x_k))$, 存在 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，使得 $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k$. 则线段 $M_{k-1}M_k$ 产生的旋转体片的侧面积为 $\pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k \sim 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k$.
- 旋转体片的侧面积公式

$$F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

旋转体的侧面积 1

- $y = f(x) \geq 0(x \in [a, b])$ 绕 x 轴旋转，求旋转体的侧面积 (曲线扫过的曲面面积).
- 把 $[a, b]$ 划分为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $M_k(x_k, f(x_k))$，存在 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，使得 $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k$. 则线段 $M_{k-1}M_k$ 产生的旋转体片的侧面积为
$\pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k \sim 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k$.
- 旋转体片的侧面积公式

$$F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

旋转体的侧面积 1

- $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$ 绕 x 轴旋转，求旋转体的侧面积 (曲线扫过的曲面面积).
- 把 $[a, b]$ 划分为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $M_k(x_k, f(x_k))$，存在 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$，使得 $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k$. 则线段 $M_{k-1}M_k$ 产生的旋转体片的侧面积为
$\pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k \sim 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k$.
- 旋转体片的侧面积公式

$$F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\Delta x_k = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

旋转体的侧面积 2

- 曲线参数方程 $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ 绕 x 轴旋转. 把 $[\alpha, \beta]$ 划分为 $\alpha = x_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$, $M_k(x(t_k), y(t_k))$, 存在 $\xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, 使得 $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\eta_k)^2}\Delta t_k$. 则线段 $M_{k-1}M_k$ 产生的旋转体片的侧面积为 $\pi(y(t_{k-1}) + y(t_k))\sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\eta_k)^2}\Delta t_k \sim$ $2\pi y(\xi_k)\sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\xi_k)^2}\Delta t_k$.
- 侧面积

$$F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi y(\xi_k)\sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\xi_k)^2}\Delta t_k$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(x)^2} dt.$$

旋转体的侧面积 2

- 曲线参数方程 $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ 绕 x 轴旋转. 把 $[\alpha, \beta]$ 划分为 $\alpha = x_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$, $M_k(x(t_k), y(t_k))$, 存在 $\xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$, 使得 $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\eta_k)^2}\Delta t_k$. 则线段 $M_{k-1}M_k$ 产生的旋转体片的侧面积为 $\pi(y(t_{k-1}) + y(t_k))\sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\eta_k)^2}\Delta t_k \sim 2\pi y(\xi_k)\sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\xi_k)^2}\Delta t_k$.
- 侧面积

$$
\begin{aligned}
F &= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi y(\xi_k)\sqrt{x'(\xi_k)^2 + y'(\xi_k)^2}\Delta t_k \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(x)^2}dt.
\end{aligned}
$$

旋转体的侧面积 -例

- 例：球面面积. 参数方程 $x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$,

$$F = \int_0^{\pi} 2\pi R\sin\theta R d\theta = 4\pi R^2$$

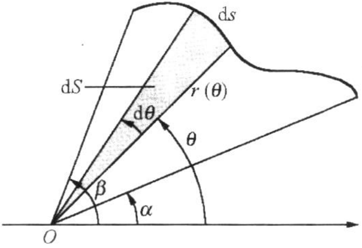
或用直角坐标 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$,

$$F = \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = 4\pi R^2$$

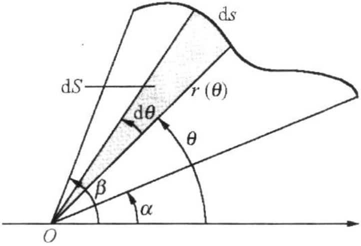
平面极坐标下图形的面积

- 曲边扇形的面积：$r = r(\theta)$，曲线 $\theta \in [\alpha, \beta]$ 与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的图形面积. $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ 对应的小扇形面积 $\Delta S \approx \frac{1}{2} r(\theta)^2 \Delta\theta$，因此面积为 $S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta$.
- 例：三叶玫瑰线 $r(\theta) = a \sin 3\theta$ 围成的面积.

  解：$S = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} a^2 \sin^2 3\theta d\theta = \frac{\pi}{4} a^2$.



- 曲边扇形的面积：$r = r(\theta)$，曲线 $\theta \in [\alpha, \beta]$ 与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的图形面积. $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ 对应的小扇形面积 $\Delta S \approx \frac{1}{2} r(\theta)^2 \Delta\theta$，因此面积为 $S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta$.
- 例：三叶玫瑰线 $r(\theta) = a \sin 3\theta$ 围成的面积.
  解：$S = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} a^2 \sin^2 3\theta d\theta = \frac{\pi}{4} a^2$.



定积分在物理上的应用 1

- 细线 $x=x(t), y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, 线密度为 $\rho(t)$ 的质量

$$M=\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

- 细线 $x=x(t), y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, 线密度为 $\rho(t)$, 设质心为 $(\bar{x},\bar{y})$, 则有

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_\alpha^\beta x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_\alpha^\beta y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

- 细线 $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, 线密度为 $\rho(t)$ 的质量

$$M = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

- 细线 $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, 线密度为 $\rho(t)$, 设质心为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 则有

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

定积分在物理上的应用 1

- 细线 $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, 线密度为 $\rho(t)$ 的质量

$$M = \int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

- 细线 $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, 线密度为 $\rho(t)$, 设质心为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 则有

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

- 细线 $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, 线密度为 $\rho(t)$ 的质量

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

- 细线 $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, 线密度为 $\rho(t)$, 设质心为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 则有

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

- 细线 $x=x(t), y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, 线密度为 $\rho(t)$, 绕 x 轴的转动惯量

$$I_x=\int_\alpha^\beta y(t)^2\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

  绕 y 轴的转动惯量

$$I_y=\int_\alpha^\beta x(t)^2\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

- Guldin 定理：平面上一条质量分布均匀的曲线绕一条不通过它的直线旋转一周，所得旋转体的侧面积恰好等于它的质心绕同一轴旋转所得的圆周长乘以曲线的弧长.

  证明：$\rho(t)=\rho$, 绕 x 轴旋转, 设弧长为 l. 侧面积
  $F=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$, 质心
  $\bar{y}=\frac{1}{\rho l}\int_\alpha^\beta y(t)\rho\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$, 因此 $F=2\pi l\bar{y}$.

定积分的近似计算

- $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。令

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x, y_i = f(x_i)$$

- 矩形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

- 梯形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2} = \frac{b-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i).$$

- 辛普森法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}) + 4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + f(x_i)}{6}.$$

定积分的近似计算

- $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。令

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x, y_i = f(x_i)$$

- 矩形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

- 梯形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2} = \frac{b-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i).$$

- 辛普森法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + 4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + f(x_i)}{6}.$$

定积分的近似计算

- $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。令

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}, x_i=a+i\Delta x, y_i=f(x_i)$$

- 矩形法

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

- 梯形法

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}=\frac{b-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i).$$

- 辛普森法

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})+f(x_i)}{6}.$$

定积分的近似计算

- $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。令

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x, y_i = f(x_i)$$

- 矩形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

- 梯形法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2} = \frac{b-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i).$$

- 辛普森法

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}) + 4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + f(x_i)}{6}.$$

复习

- 几个概念：极限、连续与间断、导数、高阶导数、微分、高阶微分、定积分。
  极限的 $\epsilon-\delta$ 语言，一些分段定义函数在特殊点的连续性和可导性。
  用定积分定义求极限。
- 几个定理: 单调有界序列有极限。极限的夹逼定理。有界闭区间上的连续函数的介值定理，最值存在，有界。积分中值定理，微积分基本定理。
- 计算：极限、导数、微分、不定积分、定积分、弧长、面积、体积。
  需要记住：一些基本极限，一些等价无穷小，一些无穷小阶的比较、一些求导公式和不定积分公式。弧长公式，旋转体体积和侧面积公式，曲边扇形面积公式。
- 注意: 答题时只能用书本上前三章的定理定义。

期中考试

-