

# 复习积分中值定理

- 复习积分中值定理：若  $f \in C([a, b])$ , 则存在  $c \in [a, b]$  使得  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ .
- 若令  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , 上面中值定理可以写成：存在  $c \in [a, b]$  使得

$$f(c) = F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

- 若还有  $F(a) = F(b)$ , 则上面的  $c$  满足  $F'(c) = 0$ .

# 复习积分中值定理

- 复习积分中值定理：若  $f \in C([a, b])$ , 则存在  $c \in [a, b]$  使得  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ .
- 若令  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , 上面中值定理可以写成：存在  $c \in [a, b]$  使得

$$f(c) = F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

- 若还有  $F(a) = F(b)$ , 则上面的  $c$  满足  $F'(c) = 0$ .

# 复习积分中值定理

- 复习积分中值定理：若  $f \in C([a, b])$ , 则存在  $c \in [a, b]$  使得  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ .
- 若令  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , 上面中值定理可以写成：存在  $c \in [a, b]$  使得

$$f(c) = F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

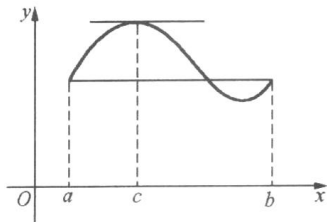
- 若还有  $F(a) = F(b)$ , 则上面的  $c$  满足  $F'(c) = 0$ .

# 一个引理

- 引理：设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导，若  $c \in (a, b)$  为最值点，则有  $f'(c) = 0$ .

- 引理证明：不妨假设  $c$  是最大值点. 由于  $x > c$  时,  $f(x) \leq f(c)$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ ;  
由于  $x < c$  时,  $f(x) \leq f(c)$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ , 由于  $f$  在  $c$  点可导,

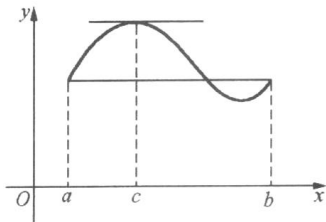
$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$



# 一个引理

- 引理：设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导，若  $c \in (a, b)$  为最值点，则有  $f'(c) = 0$ .

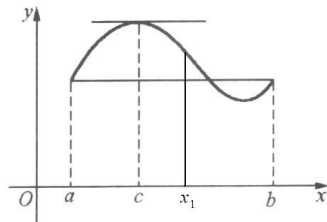
- 引理证明：不妨假设  $c$  是最大值点. 由于  $x > c$  时,  $f(x) \leq f(c)$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ ;  
由于  $x < c$  时,  
 $f(x) \leq f(c)$ , 因此  $\lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ , 由于  $f$  在  $c$  点可导,



$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0.$$

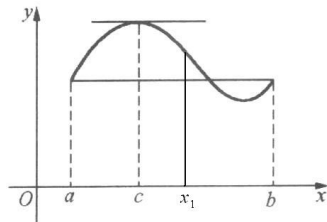
# Rolle 定理 1

- Rolle 定理: 设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $(a, b)$  内可导, 且  $f(b) = f(a)$ , 则存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f'(c) = 0$ .
- 证明: 不妨设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ . 若  $M = m$ , 则  $f$  是常数函数, 结论显然成立. 若  $M > m$ , 则  $M$  和  $m$  中至少有一个不等于  $f(a)$ . 不妨设  $M \neq f(a)$ . 则存在最大值点  $c \in (a, b)$ , 由引理得  $f'(c) = 0$ .



# Rolle 定理 1

- Rolle 定理: 设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $(a, b)$  内可导, 且  $f(b) = f(a)$ , 则存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $f'(c) = 0$ .
- 证明: 不妨设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $M$ , 最小值为  $m$ . 若  $M = m$ , 则  $f$  是常数函数, 结论显然成立. 若  $M > m$ , 则  $M$  和  $m$  中至少有一个不等于  $f(a)$ . 不妨设  $M \neq f(a)$ . 则存在最大值点  $c \in (a, b)$ , 由引理得  $f'(c) = 0$ .



# Rolle 定理 2

- 注:  $f$  不可导时, 结论不成立, 如  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ . 满足条件的  $c$  也不一定唯一.
- 例: 若  $f$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $(a, +\infty)$  上可导, 且有  $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则存在  $c \in (a, +\infty)$  使得  $f'(c) = 0$ .  
证明:  $g(x) = f(\tan x)$ ,  $x \in [\arctan a, \frac{\pi}{2})$ , 令  $g(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
则  $g \in C([\arctan a, \frac{\pi}{2}])$ , 且  $g(\arctan a) = g(\frac{\pi}{2})$ .  
存在  $\xi \in (\arctan a, \frac{\pi}{2})$ ,  $g'(\xi) = f'(\tan \xi) \frac{1}{\cos^2 \xi} = 0$ . 取  $c = \tan \xi$ ,  
则  $f'(c) = 0$ .



# Rolle 定理 2

- 注:  $f$  不可导时, 结论不成立, 如  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ . 满足条件的  $c$  也不一定唯一.
- 例: 若  $f$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $(a, +\infty)$  上可导, 且有  $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则存在  $c \in (a, +\infty)$  使得  $f'(c) = 0$ .

证明:  $g(x) = f(\tan x)$ ,  $x \in [\arctan a, \frac{\pi}{2})$ , 令  $g(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

则  $g \in C([\arctan a, \frac{\pi}{2}])$ , 且  $g(\arctan a) = g(\frac{\pi}{2})$ .

存在  $\xi \in (\arctan a, \frac{\pi}{2})$ ,  $g'(\xi) = f'(\tan \xi) \frac{1}{\cos^2 \xi} = 0$ . 取  $c = \tan \xi$ , 则  $f'(c) = 0$ .

## Rolle 定理 2

- 注:  $f$  不可导时, 结论不成立, 如  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ . 满足条件的  $c$  也不一定唯一.

- 例: 若  $f$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $(a, +\infty)$  上可导, 且有  $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则存在  $c \in (a, +\infty)$  使得  $f'(c) = 0$ .

证明:  $g(x) = f(\tan x)$ ,  $x \in [\arctan a, \frac{\pi}{2})$ , 令  $g(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

则  $g \in C([\arctan a, \frac{\pi}{2}])$ , 且  $g(\arctan a) = g(\frac{\pi}{2})$ .

存在  $\xi \in (\arctan a, \frac{\pi}{2})$ ,  $g'(\xi) = f'(\tan \xi) \frac{1}{\cos^2 \xi} = 0$ . 取  $c = \tan \xi$ , 则  $f'(c) = 0$ .

## Rolle 定理 2

- 注:  $f$  不可导时, 结论不成立, 如  $f(x) = |x|$ ,  $x \in [-1, 1]$ . 满足条件的  $c$  也不一定唯一.
- 例: 若  $f$  在  $[a, +\infty)$  上连续,  $(a, +\infty)$  上可导, 且有  $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 则存在  $c \in (a, +\infty)$  使得  $f'(c) = 0$ .  
证明:  $g(x) = f(\tan x)$ ,  $x \in [\arctan a, \frac{\pi}{2})$ , 令  $g(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
则  $g \in C([\arctan a, \frac{\pi}{2}])$ , 且  $g(\arctan a) = g(\frac{\pi}{2})$ .  
存在  $\xi \in (\arctan a, \frac{\pi}{2})$ ,  $g'(\xi) = f'(\tan \xi) \frac{1}{\cos^2 \xi} = 0$ . 取  $c = \tan \xi$ ,  
则  $f'(c) = 0$ .

# Rolle 定理 — 列 1

- 设  $c_1, c_2, \dots, c_n$  为任意实数, 证明函数

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \dots + c_n \cos nx$$

在  $(0, \pi)$  内必有实根.

证明: 方法 1.  $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ .

方法 2. 令

$$g(x) = c_1 \sin x + \frac{c_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{c_n}{n} \sin nx,$$

则有  $g'(x) = f(x)$ ,  $g(0) = g(\pi) = 0$ , 由 Rolle 定理, 存在  $c \in (0, \pi)$ , 使得  $g'(c) = f(c) = 0$ .

# Rolle 定理 — 列 1

- 设  $c_1, c_2, \dots, c_n$  为任意实数, 证明函数

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \dots + c_n \cos nx$$

在  $(0, \pi)$  内必有实根.

证明: 方法 1.  $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ .

方法 2. 令

$$g(x) = c_1 \sin x + \frac{c_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{c_n}{n} \sin nx,$$

则有  $g'(x) = f(x)$ ,  $g(0) = g(\pi) = 0$ , 由 Rolle 定理, 存在  $c \in (0, \pi)$ , 使得  $g'(c) = f(c) = 0$ .

# Rolle 定理 — 列 1

- 设  $c_1, c_2, \dots, c_n$  为任意实数, 证明函数

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \dots + c_n \cos nx$$

在  $(0, \pi)$  内必有实根.

证明: 方法 1.  $\int_0^\pi f(x) dx = 0$ .

方法 2. 令

$$g(x) = c_1 \sin x + \frac{c_2}{2} \sin 2x + \dots + \frac{c_n}{n} \sin nx,$$

则有  $g'(x) = f(x)$ ,  $g(0) = g(\pi) = 0$ , 由 Rolle 定理, 存在  $c \in (0, \pi)$ , 使得  $g'(c) = f(c) = 0$ .

## Rolle 定理 — 列 2

- 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = f(b) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$ .  
证明: 令  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ ,  $F(x) = e^{G(x)}f(x)$ , 则  $G \in C([a, b])$ ,  
 $G'(x) = g(x), x \in (a, b)$ . 且有  $F(a) = F(b) = 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ ,  
 $F'(\xi) = e^{G(\xi)}(f'(\xi) + g(\xi)f(\xi)) = 0$ .
- 特例:  $f(x)$  同上. 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ . (取  $G(x) = x$ ).
- 例: 设  $b > a > 0$ , 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) - \frac{b-\xi}{a}f'(\xi) = 0$ .  
证明:  $f'(\xi) - \frac{a}{b-\xi}f(\xi) = 0$ ,  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ .  
 $F'(x) = (b-x)^a(f'(x) - \frac{a}{b-x}f(x))$ .

## Rolle 定理 — 列 2

- 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = f(b) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$ .  
证明: 令  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ ,  $F(x) = e^{G(x)}f(x)$ , 则  $G \in C([a, b])$ ,  
 $G'(x) = g(x), x \in (a, b)$ . 且有  $F(a) = F(b) = 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ ,  
 $F'(\xi) = e^{G(\xi)}(f'(\xi) + g(\xi)f(\xi)) = 0$ .
- 特例:  $f(x)$  同上. 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ . (取  $G(x) = x$ ).
- 例: 设  $b > a > 0$ , 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) - \frac{b-\xi}{a}f'(\xi) = 0$ .  
证明:  $f'(\xi) - \frac{a}{b-\xi}f(\xi) = 0$ ,  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ .  
 $F'(x) = (b-x)^a (f'(x) - \frac{a}{b-x}f(x))$ .



## Rolle 定理 — 列 2

- 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = f(b) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$ .  
证明: 令  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ ,  $F(x) = e^{G(x)}f(x)$ , 则  $G \in C([a, b])$ ,  
 $G'(x) = g(x), x \in (a, b)$ . 且有  $F(a) = F(b) = 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ ,  
 $F'(\xi) = e^{G(\xi)}(f'(\xi) + g(\xi)f(\xi)) = 0$ .
- 特例:  $f(x)$  同上. 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ . (取  $G(x) = x$ ).
- 例: 设  $b > a > 0$ , 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) - \frac{b-\xi}{a}f'(\xi) = 0$ .  
证明:  $f'(\xi) - \frac{a}{b-\xi}f(\xi) = 0$ ,  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ .  
 $F'(x) = (b-x)^a (f'(x) - \frac{a}{b-x}f(x))$ .

## Rolle 定理 — 列 2

- 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = f(b) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$ .  
证明: 令  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ ,  $F(x) = e^{G(x)}f(x)$ , 则  $G \in C([a, b])$ ,  
 $G'(x) = g(x), x \in (a, b)$ . 且有  $F(a) = F(b) = 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ ,  
 $F'(\xi) = e^{G(\xi)}(f'(\xi) + g(\xi)f(\xi)) = 0$ .
- 特例:  $f(x)$  同上. 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ . (取  $G(x) = x$ ).
- 例: 设  $b > a > 0$ , 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) - \frac{b-\xi}{a}f'(\xi) = 0$ .  
证明:  $f'(\xi) - \frac{a}{b-\xi}f(\xi) = 0$ ,  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ .  
 $F'(x) = (b-x)^a (f'(x) - \frac{a}{b-x}f(x))$ .

## Rolle 定理 — 列 2

- 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = f(b) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + g(\xi)f(\xi) = 0$ .  
证明: 令  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ ,  $F(x) = e^{G(x)}f(x)$ , 则  $G \in C([a, b])$ ,  
 $G'(x) = g(x), x \in (a, b)$ . 且有  $F(a) = F(b) = 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ ,  
 $F'(\xi) = e^{G(\xi)}(f'(\xi) + g(\xi)f(\xi)) = 0$ .
- 特例:  $f(x)$  同上. 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ . (取  $G(x) = x$ ).
- 例: 设  $b > a > 0$ , 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导,  
 $f(a) = 0$ , 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) - \frac{b-\xi}{a}f'(\xi) = 0$ .  
证明:  $f'(\xi) - \frac{a}{b-\xi}f(\xi) = 0$ ,  $F(x) = (b-x)^a f(x)$ .  
 $F'(x) = (b-x)^a(f'(x) - \frac{a}{b-x}f(x))$ .

# Lagrange 中值定理 1

- 定理：设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导，则存在  $c \in (a, b)$ ，使得  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

- 证明：令

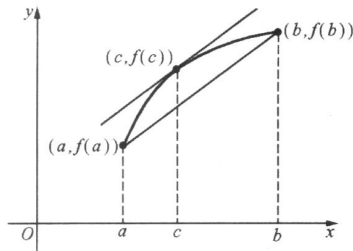
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x,$$

$$\text{则有 } g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a},$$

由 Rolle 定理，

存在  $c \in (a, b)$ ，使得  $g'(c) = 0$ ，即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$



# Lagrange 中值定理 1

- 定理：设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导，则存在  $c \in (a, b)$ ，使得  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .
- 证明：令

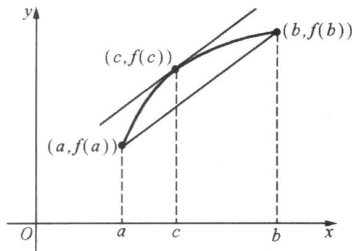
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x,$$

$$\text{则有 } g(a) = g(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a},$$

由 Rolle 定理，

存在  $c \in (a, b)$ ，使得  $g'(c) = 0$ ，即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$



## Lagrange 中值定理 2

- 推论：设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内可导， $x_0, x \in (a, b)$ . 则存在  $0 < \theta < 1$ , 使得  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x$ , 其中  $\Delta x = x - x_0$ .  
证明：不妨设  $x > x_0$ , 在  $[x_0, x]$  上利用 Lagrange 中值定理, 存在  $c \in (x_0, x)$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(c) \Delta x.$$

令  $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0} \in (0, 1)$ , 则  $c = x_0 + \theta \Delta x$ .

## Lagrange 中值定理 2

- 推论：设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内可导， $x_0, x \in (a, b)$ . 则存在  $0 < \theta < 1$ , 使得  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x$ , 其中  $\Delta x = x - x_0$ .  
证明：不妨设  $x > x_0$ , 在  $[x_0, x]$  上利用 Lagrange 中值定理, 存在  $c \in (x_0, x)$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)\Delta x.$$

令  $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0} \in (0, 1)$ , 则  $c = x_0 + \theta\Delta x$ .

# Lagrange 中值定理 3

- 推论: 设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  上可导, 且  $f'(x) \equiv 0$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上为常数. (这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ .)

证明: 固定  $x_0 \in (a, b)$ . 对任意  $x \in (a, b)$ , 存在  $0 < \theta < 1$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x = f(x_0).$$

- 推论: 若  $G(x)$ ,  $F(x)$  都是  $f(x)$  在  $(a, b)$  上的原函数, 则存在常数  $C$ , 使得  $G(x) = F(x) + C$ .



## Lagrange 中值定理 3

- 推论: 设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  上可导, 且  $f'(x) \equiv 0$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上为常数. (这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ .)

证明: 固定  $x_0 \in (a, b)$ . 对任意  $x \in (a, b)$ , 存在  $0 < \theta < 1$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x = f(x_0).$$

- 推论: 若  $G(x)$ ,  $F(x)$  都是  $f(x)$  在  $(a, b)$  上的原函数, 则存在常数  $C$ , 使得  $G(x) = F(x) + C$ .

## Lagrange 中值定理 3

- 推论: 设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  上可导, 且  $f'(x) \equiv 0$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上为常数. (这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ .)

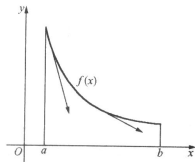
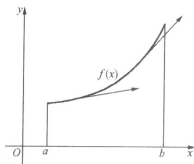
证明: 固定  $x_0 \in (a, b)$ . 对任意  $x \in (a, b)$ , 存在  $0 < \theta < 1$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x = f(x_0).$$

- 推论: 若  $G(x)$ ,  $F(x)$  都是  $f(x)$  在  $(a, b)$  上的原函数, 则存在常数  $C$ , 使得  $G(x) = F(x) + C$ .

# 函数的导数和单调性 1

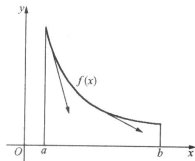
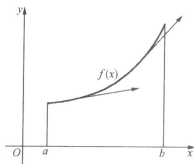
- 定理：设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导.
  - 若  $f'(x) > 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调增.
  - 若  $f'(x) \geq 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增.
  - 若  $f'(x) < 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调减.
  - 若  $f'(x) \leq 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调减.



- 证明：若有  $f'(x) > 0$ . 设  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , 存在  $c \in (x_1, x_2)$ , 使得  $f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) > f(x_1)$ .

# 函数的导数和单调性 1

- 定理：设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导.
  - 若  $f'(x) > 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调增.
  - 若  $f'(x) \geq 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增.
  - 若  $f'(x) < 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调减.
  - 若  $f'(x) \leq 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调减.



- 证明：若有  $f'(x) > 0$ . 设  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , 存在  $c \in (x_1, x_2)$ , 使得  $f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) > f(x_1)$ .

## 函数的导数和单调性 2

- 推论：设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内可导. 若  $f'(x) > 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上严格单调增 (这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ ).

证明：设  $a < x_1 < x_2 < b$ , 在  $[x_1, x_2]$  上利用上面的定理, 得  $f(x_2) > f(x_1)$ .

- 由  $f(x)$  严格单调增不能得出  $f'(x) > 0$ , 如  $f(x) = x^3$ .
- 若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上  $f'(x) \geq 0$ , 且  $f'(x)$  只有有限个零点, 则  $f(x)$  也是严格单调增的.

证明：设  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上有零点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则由上面的定理,  $f(x)$  在  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$  上均严格单调, 从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调.

## 函数的导数和单调性 2

- 推论：设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内可导. 若  $f'(x) > 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上严格单调增 (这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ ).

证明：设  $a < x_1 < x_2 < b$ , 在  $[x_1, x_2]$  上利用上面的定理, 得  $f(x_2) > f(x_1)$ .

- 由  $f(x)$  严格单调增不能得出  $f'(x) > 0$ , 如  $f(x) = x^3$ .
- 若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上  $f'(x) \geq 0$ , 且  $f'(x)$  只有有限个零点, 则  $f(x)$  也是严格单调增的.

证明：设  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上有零点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则由上面的定理,  $f(x)$  在  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$  上均严格单调, 从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调.

## 函数的导数和单调性 2

- 推论：设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内可导. 若  $f'(x) > 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上严格单调增 (这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ ).

证明：设  $a < x_1 < x_2 < b$ , 在  $[x_1, x_2]$  上利用上面的定理, 得  $f(x_2) > f(x_1)$ .

- 由  $f(x)$  严格单调增不能得出  $f'(x) > 0$ , 如  $f(x) = x^3$ .
- 若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上  $f'(x) \geq 0$ , 且  $f'(x)$  只有有限个零点, 则  $f(x)$  也是严格单调增的.

证明：设  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上有零点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则由上面的定理,  $f(x)$  在  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$  上均严格单调, 从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调.

## 函数的导数和单调性 2

- 推论：设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内可导. 若  $f'(x) > 0, x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上严格单调增 (这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ ).

证明：设  $a < x_1 < x_2 < b$ , 在  $[x_1, x_2]$  上利用上面的定理, 得  $f(x_2) > f(x_1)$ .

- 由  $f(x)$  严格单调增不能得出  $f'(x) > 0$ , 如  $f(x) = x^3$ .
- 若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上  $f'(x) \geq 0$ , 且  $f'(x)$  只有有限个零点, 则  $f(x)$  也是严格单调增的.

证明：设  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上有零点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则由上面的定理,  $f(x)$  在  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$  上均严格单调, 从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调.



## 函数的导数和单调性 2

- 推论：设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内可导. 若  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上严格单调增 (这里  $a$  可以是  $-\infty$ ,  $b$  可以是  $+\infty$ ).

证明：设  $a < x_1 < x_2 < b$ , 在  $[x_1, x_2]$  上利用上面的定理, 得  $f(x_2) > f(x_1)$ .

- 由  $f(x)$  严格单调增不能得出  $f'(x) > 0$ , 如  $f(x) = x^3$ .
- 若  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上  $f'(x) \geq 0$ , 且  $f'(x)$  只有有限个零点, 则  $f(x)$  也是严格单调增的.

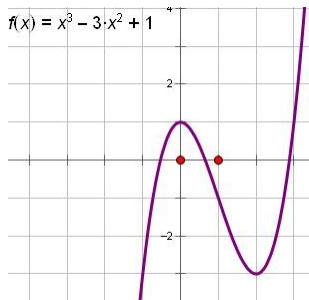
证明：设  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上有零点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则由上面的定理,  $f(x)$  在  $[a, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $\dots$ ,  $[x_n, b]$  上均严格单调, 从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调.

# 函数的导数和单调性 — 例 1

- 例：求  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  的单调区间.  
解：

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2),$$

因此  $f(x)$  在  $(0, 2)$  ( $[0, 2]$ ) 上严格单调下降,  $(-\infty, 0)$  和  $(2, +\infty)$  上严格单调增.

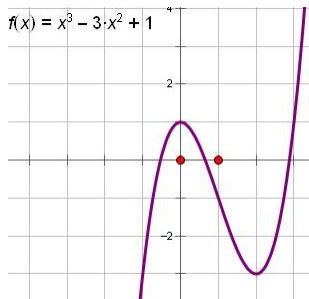


# 函数的导数和单调性 — 例 1

- 例：求  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  的单调区间.  
解：

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2),$$

因此  $f(x)$  在  $(0, 2)$  ( $[0, 2]$ ) 上严格单调下降,  $(-\infty, 0)$  和  $(2, +\infty)$  上严格单调增.



## 函数的导数和单调性 — 例 2

- 例：证明  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  在  $(0, +\infty)$  上递减.

证明：

$$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{g(x)}{x^2},$$

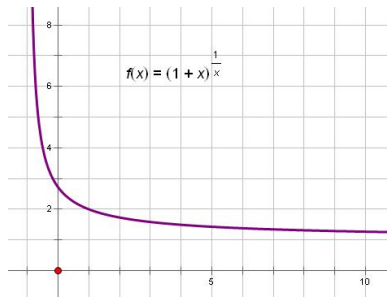
其中  $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0,$$

因此当  $x > 0$  时,

$g(x) < g(0) = 0$ , 从而  $f'(x) < 0$ .

- 推论：  $(1 + \frac{1}{n})^n$  单调递增.



## 函数的导数和单调性 — 例 2

- 例：证明  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  在  $(0, +\infty)$  上递减.

证明：

$$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{g(x)}{x^2},$$

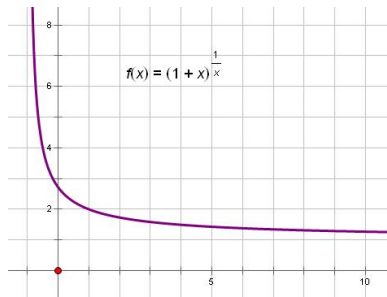
其中  $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0,$$

因此当  $x > 0$  时,

$g(x) < g(0) = 0$ , 从而  $f'(x) < 0$ .

- 推论：  $(1 + \frac{1}{n})^n$  单调递增.



## 函数的导数和单调性 — 例 2

- 例：证明  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  在  $(0, +\infty)$  上递减.

证明：

$$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{g(x)}{x^2},$$

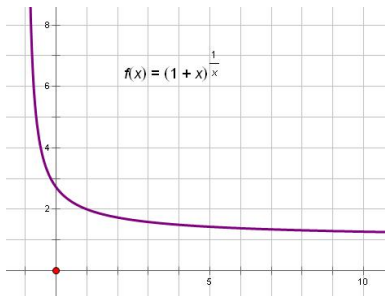
其中  $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ ,

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0,$$

因此当  $x > 0$  时,

$g(x) < g(0) = 0$ , 从而  $f'(x) < 0$ .

- 推论：  $(1 + \frac{1}{n})^n$  单调递增.



# 不等式的证明 1

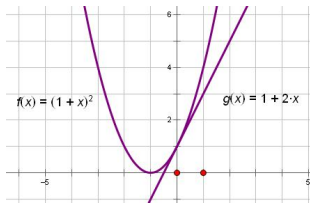
- Bernoulli 不等式: 设  $\alpha > 1, (1+x)^\alpha > 1+\alpha x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .

证明: 设

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x) \implies f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha.$$

$x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上严格单调增, 因此  $x > 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ .  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(-1, 0]$  上严格单调减. 因此  $-1 < x < 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ .

- 注: 设  $0 < \alpha < 1, (1+x)^\alpha < 1+\alpha x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ . 事实上  $x > 0$  时,  $f'(x) < 0$ ;  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ .



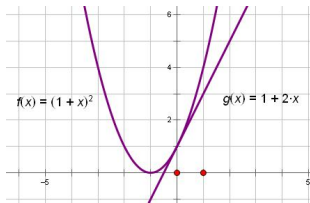
# 不等式的证明 1

- Bernoulli 不等式: 设  $\alpha > 1, (1+x)^\alpha > 1+\alpha x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .  
证明: 设

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x) \implies f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha.$$

$x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上严格单调增, 因此  $x > 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ .  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(-1, 0]$  上严格单调减. 因此  $-1 < x < 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ .

- 注: 设  $0 < \alpha < 1, (1+x)^\alpha < 1+\alpha x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ . 事实上  $x > 0$  时,  $f'(x) < 0$ ;  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ .





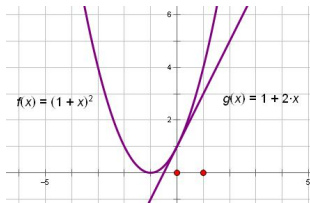
# 不等式的证明 1

- Bernoulli 不等式: 设  $\alpha > 1, (1+x)^\alpha > 1+\alpha x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .  
证明: 设

$$f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x) \implies f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha.$$

$x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上严格单调增, 因此  $x > 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ .  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(-1, 0]$  上严格单调减. 因此  $-1 < x < 0$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ .

- 注: 设  $0 < \alpha < 1, (1+x)^\alpha < 1+\alpha x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ . 事实上  $x > 0$  时,  $f'(x) < 0$ ;  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ .



## 不等式的证明 2

- $[0, +\infty)$  上的可导函数  $f(x)$  满足  $f(0) = 0$  且导函数  $f'(x)$  严格单调递减, 对任意正数  $a, b$ , 证明  $f(a) + f(b) > f(a + b)$ .
- 证法 1. 不妨设  $0 < a \leq b$ . 存在  $\xi_1 \in (0, a)$ ,  $\xi_2 \in (b, a + b)$ , 使得  $f(a) - f(0) = f(a) = f'(\xi_1)a$ ,  $f(a + b) - f(b) = f'(\xi_2)a$ , 由于  $\xi_2 > \xi_1$ ,  $f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$ , 因此  $f(a + b) - f(b) < f(a)$ .
- 证法 2. 令  $F(x) = f(a) + f(x) - f(a + x)$ , 则有  $F'(x) = f'(x) - f'(a + x) > 0$ , 因此  $F(b) > F(0) = 0$ .

## 不等式的证明 2

- $[0, +\infty)$  上的可导函数  $f(x)$  满足  $f(0) = 0$  且导函数  $f'(x)$  严格单调递减, 对任意正数  $a, b$ , 证明  $f(a) + f(b) > f(a + b)$ .
- 证法 1. 不妨设  $0 < a \leq b$ . 存在  $\xi_1 \in (0, a)$ ,  $\xi_2 \in (b, a + b)$ , 使得  $f(a) - f(0) = f(a) = f'(\xi_1)a$ ,  $f(a + b) - f(b) = f'(\xi_2)a$ , 由于  $\xi_2 > \xi_1$ ,  $f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$ , 因此  $f(a + b) - f(b) < f(a)$ .
- 证法 2. 令  $F(x) = f(a) + f(x) - f(a + x)$ , 则有  $F'(x) = f'(x) - f'(a + x) > 0$ , 因此  $F(b) > F(0) = 0$ .

## 不等式的证明 2

- $[0, +\infty)$  上的可导函数  $f(x)$  满足  $f(0) = 0$  且导函数  $f'(x)$  严格单调递减, 对任意正数  $a, b$ , 证明  $f(a) + f(b) > f(a + b)$ .
- 证法 1. 不妨设  $0 < a \leq b$ . 存在  $\xi_1 \in (0, a)$ ,  $\xi_2 \in (b, a + b)$ , 使得  $f(a) - f(0) = f(a) = f'(\xi_1)a$ ,  $f(a + b) - f(b) = f'(\xi_2)a$ , 由于  $\xi_2 > \xi_1$ ,  $f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$ , 因此  $f(a + b) - f(b) < f(a)$ .
- 证法 2. 令  $F(x) = f(a) + f(x) - f(a + x)$ , 则有  $F'(x) = f'(x) - f'(a + x) > 0$ , 因此  $F(b) > F(0) = 0$ .

# 导函数的性质

- $f(x)$  是  $(a, b)$  上的可微函数, 则  $f'(x)$  没有第一类间断点.

证明: 若  $f'(x)$  有第一类间断点  $x_0 \in (a, b)$  ( $x_0$  在  $f'(x)$  的定义域内, 即  $f(x)$  在  $x_0$  处可导). 则有  $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f'(x)$  存在.  $x > x_0$  时,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) \end{aligned}$$

同理可得  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x)$ , 从而  $f'(x)$  在  $x_0$  处连续, 矛盾.

# 导函数的性质

- $f(x)$  是  $(a, b)$  上的可微函数, 则  $f'(x)$  没有第一类间断点.

证明: 若  $f'(x)$  有第一类间断点  $x_0 \in (a, b)$  ( $x_0$  在  $f'(x)$  的定义域内, 即  $f(x)$  在  $x_0$  处可导). 则有  $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f'(x)$  存在.  $x > x_0$  时,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) \end{aligned}$$

同理可得  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x)$ , 从而  $f'(x)$  在  $x_0$  处连续, 矛盾.

## 导函数的性质 2

- 注：上面最后一个等式

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$$

成立，可以用复合函数的极限解释 ( $c_x = x_0 + \theta(x - x_0)$  看成  $x$  的函数)，也可以直接证明：设  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = A$ ，对任给  $\epsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，当  $0 < x - x_0 < \delta$  时， $|f'(x) - A| < \epsilon$ 。由于  $c_x$  在  $x_0$  与  $x$  之间， $0 < c_x - x_0 < \delta$  时，因此  $|f'(c_x) - A| < \epsilon$ 。

- 推论： $\operatorname{sgn} x$  在  $\mathbb{R}$  上没有原函数。

- $f'(x)$  可以有第二类间断点，如  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

## 导函数的性质 2

- 注：上面最后一个等式

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$$

成立，可以用复合函数的极限解释 ( $c_x = x_0 + \theta(x - x_0)$  看成  $x$  的函数)，也可以直接证明：设  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = A$ ，对任给  $\epsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，当  $0 < x - x_0 < \delta$  时， $|f'(x) - A| < \epsilon$ 。由于  $c_x$  在  $x_0$  与  $x$  之间， $0 < c_x - x_0 < \delta$  时，因此  $|f'(c_x) - A| < \epsilon$ 。

- 推论： $\operatorname{sgn} x$  在  $\mathbb{R}$  上没有原函数。

- $f'(x)$  可以有第二类间断点，如  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



## 导函数的性质 2

- 注：上面最后一个等式

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x_0 + \theta(x - x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$$

成立，可以用复合函数的极限解释 ( $c_x = x_0 + \theta(x - x_0)$  看成  $x$  的函数)，也可以直接证明：设  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = A$ ，对任给  $\epsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，当  $0 < x - x_0 < \delta$  时， $|f'(x) - A| < \epsilon$ 。由于  $c_x$  在  $x_0$  与  $x$  之间， $0 < c_x - x_0 < \delta$  时，因此  $|f'(c_x) - A| < \epsilon$ 。

- 推论： $\operatorname{sgn} x$  在  $\mathbb{R}$  上没有原函数。

- $f'(x)$  可以有第二类间断点，如  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

# Cauchy 柯西中值定理 1

- 定理：设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导，且  $g'(x) \neq 0$  则存在  $c \in (a, b)$ ，使得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

- 证明：令

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)],$$

则有  $h(b) = h(a) = f(a)$ ，由 Rolle 定理，存在  $c \in (a, b)$ ，使得

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0.$$

# Cauchy 柯西中值定理 1

- 定理：设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续， $(a, b)$  内可导，且  $g'(x) \neq 0$  则存在  $c \in (a, b)$ ，使得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

- 证明：令

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)],$$

则有  $h(b) = h(a) = f(a)$ ，由 Rolle 定理，存在  $c \in (a, b)$ ，使得

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0.$$

## Cauchy 柯西中值定理 2

- 注：参数方程  $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ ,  $t \in [a, b]$  表示一段曲线,  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$  表示端点连线的斜率,  $\frac{f'(c)}{g'(c)}$  是  $(g(c), f(c))$  点的切线斜率.

- 如下证明是否正确：由 Lagrange 定理, 存在  $c$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ ,  $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$ , 从而有

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

## Cauchy 柯西中值定理 2

- 注：参数方程  $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ ,  $t \in [a, b]$  表示一段曲线,  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$  表示

端点连线的斜率,  $\frac{f'(c)}{g'(c)}$  是  $(g(c), f(c))$  点的切线斜率.

- 如下证明是否正确：由 Lagrange 定理, 存在  $c$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ ,  $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$ , 从而有

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

# Cauchy 柯西中值定理 -例 1

- 设  $0 < a < b$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

特别地若取  $f(x) = \ln x$ , 得到  $b \ln a - a \ln b = (b - a)(\ln \xi - 1)$ .

证明: 因为

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}.$$

设  $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $G(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{F'(x)}{G'(x)} = f(x) - xf'(x)$ .

# Cauchy 柯西中值定理 -例 1

- 设  $0 < a < b$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

特别地若取  $f(x) = \ln x$ , 得到  $b \ln a - a \ln b = (b - a)(\ln \xi - 1)$ .

证明: 因为

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}.$$

设  $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $G(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{F'(x)}{G'(x)} = f(x) - xf'(x)$ .

## Cauchy 柯西中值定理 -例 2

- 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上二次可导, 且  $g''(x) \neq 0$ . 则存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f''(c)}{g''(c)} = \frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}$ .
- 证明: 令  $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ ,  
 $G(x) = g(x) - g(a) - g'(a)(x-a)$ , 则有  $F(a) = G(a) = 0$ ,  $G'(x) \neq 0$ .  
则由 Cauchy 中值定理, 存在  $c_1 \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{F(b)}{G(b)}.$$

在  $[a, c_1]$  上对函数用 Cauchy 中值定理, 存在  $c \in (a, c_1)$ , 使得

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}.$$



## Cauchy 柯西中值定理 -例 2

- 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上二次可导, 且  $g''(x) \neq 0$ . 则存在  $c \in (a, b)$ , 使得  $\frac{f''(c)}{g''(c)} = \frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}$ .
- 证明: 令  $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ ,  
 $G(x) = g(x) - g(a) - g'(a)(x-a)$ , 则有  $F(a) = G(a) = 0$ ,  $G'(x) \neq 0$ .  
则由 Cauchy 中值定理, 存在  $c_1 \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{F(b)}{G(b)}.$$

在  $[a, c_1]$  上对函数用 Cauchy 中值定理, 存在  $c \in (a, c_1)$ , 使得

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f'(c_1) - f'(a)}{g'(c_1) - g'(a)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}.$$

# $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 1

- $\frac{0}{0}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 例: 若  $f(x), g(x)$  在  $a$  点的附近连续且可导, 且  $f(a) = g(a) = 0$ ,  $g'(a) \neq 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(x-a) + o((x-a))}{g'(a)(x-a) + o((x-a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $a$  点的某个空心邻域上有定义, 且可导,  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

# $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 1

- $\frac{0}{0}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 例: 若  $f(x), g(x)$  在  $a$  点的附近连续且可导, 且  $f(a) = g(a) = 0$ ,  $g'(a) \neq 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(x-a) + o((x-a))}{g'(a)(x-a) + o((x-a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $a$  点的某个空心邻域上有定义, 且可导,  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

# $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 1

- $\frac{0}{0}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 例: 若  $f(x), g(x)$  在  $a$  点的附近连续且可导, 且  $f(a) = g(a) = 0$ ,  $g'(a) \neq 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(x-a) + o((x-a))}{g'(a)(x-a) + o((x-a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $a$  点的某个空心邻域上有定义, 且可导,  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 2

- 定理证明: 定义  $f(a) = g(a) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $[x, a]$  (或  $[a, x]$ ) 上连续, 内部可导.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

上面用到当  $x \rightarrow a$  时,  $c_x \rightarrow a$ .

- 注: 上面最后一个等式成立, 可以用复合函数的极限解释 ( $c_x$  看成  $x$  的函数), 也可以直接证明: 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ , 对任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时,  $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \epsilon$ . 由于  $c_x$  在  $a$  与  $x$  之间,  $0 < |c_x - a| < \delta$  时, 因此  $|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - A| < \epsilon$ .

## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 2

- 定理证明: 定义  $f(a) = g(a) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $[x, a]$  (或  $[a, x]$ ) 上连续, 内部可导.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

上面用到当  $x \rightarrow a$  时,  $c_x \rightarrow a$ .

- 注: 上面最后一个等式成立, 可以用复合函数的极限解释 ( $c_x$  看成  $x$  的函数), 也可以直接证明: 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ , 对任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时,  $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \epsilon$ . 由于  $c_x$  在  $a$  与  $x$  之间,  $0 < |c_x - a| < \delta$  时, 因此  $|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - A| < \epsilon$ .

## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 3

- 注: 对  $x \rightarrow a \pm 0$ , 也有相应的结论成立.
- 注: 若  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ , 上面结论依然成立.
- 注:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在时,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  也可能存在, 如  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , 但是下面极限不存在.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1}$$

## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 3

- 注: 对  $x \rightarrow a \pm 0$ , 也有相应的结论成立.
- 注: 若  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ , 上面结论依然成立.
- 注:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在时,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  也可能存在, 如  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , 但是下面极限不存在.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1}$$



## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 3

- 注: 对  $x \rightarrow a \pm 0$ , 也有相应的结论成立.
- 注: 若  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ , 上面结论依然成立.
- 注:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在时,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  也可能存在, 如  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , 但是下面极限不存在.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1}$$

## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 4

- 推论: 设  $f(x), g(x)$  在  $a$  点的某个空心邻域上有定义, 且  $n$  次可导.

若  $g^{(k)}(x) \neq 0 (k = 0, 1, \dots, n)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = 0$

$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

- 看看下面是否正确

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{2 \ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 4

- 推论: 设  $f(x), g(x)$  在  $a$  点的某个空心邻域上有定义, 且  $n$  次可导.

若  $g^{(k)}(x) \neq 0 (k = 0, 1, \dots, n)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = 0$

$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

- 看看下面是否正确

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{2 \ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 — 例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}.$

- 例:  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ . 求  $f''(0)$ .

解:  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2}$   
 $= 0$ ,  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ . 因此

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

## $\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 — 例

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}.$

- 例:  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ . 求  $f''(0)$ .

解:  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2}$   
 $= 0$ ,  $x \neq 0$  时,  $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ . 因此

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

## $x \rightarrow \infty$ 的 L'Hospital 法则

- $\frac{0}{0}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $[A, +\infty)$  上有定义 (不妨设  $A > 0$ ), 且可导,  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

证明: 令  $F(x) = f(\frac{1}{x})$ ,  $G(x) = g(\frac{1}{x})$ ,  $F, G$  在  $(0, \frac{1}{A})$  上有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} G(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

## $x \rightarrow \infty$ 的 L'Hospital 法则

- $\frac{0}{0}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $[A, +\infty)$  上有定义 (不妨设  $A > 0$ ), 且可导,  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

证明: 令  $F(x) = f(\frac{1}{x})$ ,  $G(x) = g(\frac{1}{x})$ ,  $F, G$  在  $(0, \frac{1}{A})$  上有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} G(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

## $x \rightarrow \infty$ 的 L'Hospital 法则

- $\frac{0}{0}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $[A, +\infty)$  上有定义 (不妨设  $A > 0$ ), 且可导,  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

证明: 令  $F(x) = f(\frac{1}{x})$ ,  $G(x) = g(\frac{1}{x})$ ,  $F, G$  在  $(0, \frac{1}{A})$  上有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} G(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$



# $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则 1

- $\frac{\infty}{\infty}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , 求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $a$  的某个空心邻域上可导, 且  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- 把  $f(x), g(x)$  转变为  $\frac{1}{f(x)}, \frac{1}{g(x)}$  可转换为  $\frac{0}{0}$  型,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)^2}}{\frac{g'(x)}{g(x)^2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \right)^2$$

若已知  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$  存在, 且  $A \neq 0$ , 则有由此可得  $A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

# $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则 1

- $\frac{\infty}{\infty}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , 求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $a$  的某个空心邻域上可导, 且  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- 把  $f(x), g(x)$  转变为  $\frac{1}{f(x)}, \frac{1}{g(x)}$  可转换为  $\frac{0}{0}$  型,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)^2}}{\frac{g'(x)}{g(x)^2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \right)^2$$

若已知  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$  存在, 且  $A \neq 0$ , 则有由此可得  $A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

# $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则 1

- $\frac{\infty}{\infty}$  型: 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , 求  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .
- 定理: 设  $f(x), g(x)$  在  $a$  的某个空心邻域上可导, 且  $g'(x) \neq 0$ . 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 且 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- 把  $f(x), g(x)$  转变为  $\frac{1}{f(x)}, \frac{1}{g(x)}$  可转换为  $\frac{0}{0}$  型,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)^2}}{\frac{g'(x)}{g(x)^2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \right)^2$$

若已知  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$  存在, 且  $A \neq 0$ , 则有由此可得  $A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

## $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则 2

- 定理证明思路：由柯西中值定理，存在  $c_x$ ，使得  $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ ，  
即

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}(g(x) - g(x_1)).$$

两边除以  $g(x)$ ，得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)$$

设  $A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ，则存在  $\delta_0$  满足当  $|x - a| \leq \delta_0$  时， $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \frac{\epsilon}{3}$ ，  
然后令  $x_1 = a + \delta_0$ ， $x \rightarrow a$  即可。

- 其它不定型： $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ ， $0 \ln 0 = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}}$ ， $0^0 = e^{0 \ln 0}$ ， $0 \ln \infty = \frac{\ln \infty}{\frac{1}{0}}$ ，  
 $\infty^0 = e^{0 \ln \infty}$ ， $\infty \ln 1 = \frac{\ln 1}{\frac{1}{\infty}}$ ， $1^\infty = e^{\infty \ln 1}$ 。

## $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则 2

- 定理证明思路：由柯西中值定理，存在  $c_x$ ，使得  $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$ ，  
即

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}(g(x) - g(x_1)).$$

两边除以  $g(x)$ ，得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)$$

设  $A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ，则存在  $\delta_0$  满足当  $|x - a| \leq \delta_0$  时， $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \frac{\epsilon}{3}$ ，  
然后令  $x_1 = a + \delta_0$ ， $x \rightarrow a$  即可。

- 其它不定型： $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ ， $0 \ln 0 = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}}$ ， $0^0 = e^{0 \ln 0}$ ， $0 \ln \infty = \frac{\ln \infty}{\frac{1}{0}}$ ，  
 $\infty^0 = e^{0 \ln \infty}$ ， $\infty \ln 1 = \frac{\ln 1}{\frac{1}{\infty}}$ ， $1^\infty = e^{\infty \ln 1}$ 。

# L'Hospital 法则 — 例 1

- 例:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P'(x)}{e^x} = 0.$

- 例:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = 1$ , 这里用到

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

- 例:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

# L'Hospital 法则 — 例 1

- 例:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P'(x)}{e^x} = 0.$

- 例:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = 1,$  这里用到

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

- 例:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

# L'Hospital 法则 — 例 1

- 例:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P'(x)}{e^x} = 0.$

- 例:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = 1,$  这里用到

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

- 例:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$



# L'Hospital 法则 — 例 1

- 例:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P'(x)}{e^x} = 0.$

- 例:  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = 1,$  这里用到

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

- 例:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

## L'Hospital 法则 — 例 2

- 设  $a_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

证明:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x) - \ln n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x} \\ &= \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}. \end{aligned}$$

## L'Hospital 法则 — 例 2

- 设  $a_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

证明:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x) - \ln n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x} \\ &= \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}. \end{aligned}$$

# Taylor 公式 1

- 历史注记：1715 年 Taylor 在《正的和反的增量法》中给出 Taylor 公式（没有考虑余项），后来 Lagrange 给出余项表达式，指出不考虑余项是不严格的.
- 复习：若  $f(x)$  在  $x_0$  处可导，则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

# Taylor 公式 1

- 历史注记：1715 年 Taylor 在《正的和反的增量法》中给出 Taylor 公式（没有考虑余项），后来 Lagrange 给出余项表达式，指出不考虑余项是不严格的.
- 复习：若  $f(x)$  在  $x_0$  处可导，则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

# Taylor 公式 1

- 定理:  $y = f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域上有定义, 且在  $x_0$  处有  $n$  阶导数 (则在  $x_0$  的某个邻域上的  $n-1$  阶导数存在), 则有

①  $x \rightarrow x_0$  时,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

② 若存在常数  $A_0, A_1, \cdots, A_n$ , 使得  $x \rightarrow x_0$  时,

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

则有  $A_0 = f(x_0)$ ,  $A_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0) (k = 1, 2, \cdots, n)$ .

# Taylor 公式 1

- 注:  $x_0 = 0$  时的 Taylor 公式称为 Marclaurin 公式,

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

称为 Peano 余项.

- 多项式

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

满足  $f(x_0) = T(x_0), f'(x_0) = T'(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0) = T^{(n)}(x_0)$ .

# Taylor 公式 1

- 注:  $x_0 = 0$  时的 Taylor 公式称为 Marclaurin 公式,

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

称为 Peano 余项.

- 多项式

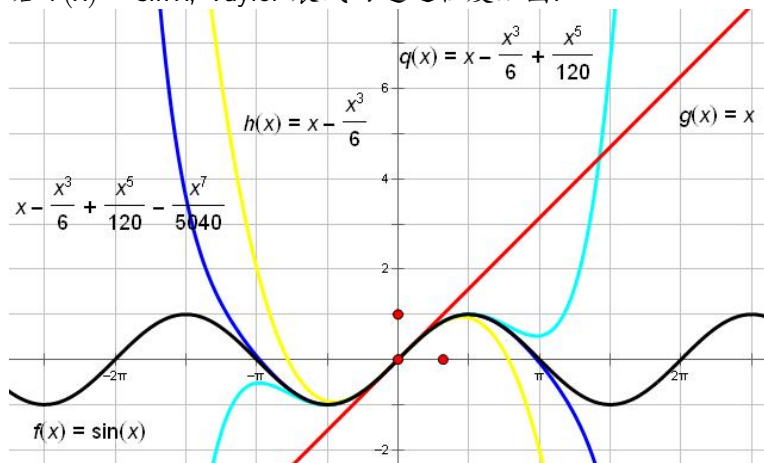
$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

满足  $f(x_0) = T(x_0), f'(x_0) = T'(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0) = T^{(n)}(x_0).$



# Taylor 公式 2

- 若  $f(x) = \sin x$ , Taylor 展式的逼近程度如图.



# Taylor 公式的证明 1

## • 1 的证明: 令多项式

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

则有  $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) (k = 0, \cdots, n)$ ,

$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$ . 利用 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

# Taylor 公式的证明 1

## • 1 的证明: 令多项式

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

则有  $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) (k = 0, \cdots, n)$ ,

$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$ . 利用 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

# Taylor 公式的证明 2

- 2 的证明: 令

$$S_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n,$$

由  $f(x) = S_n(x) + o((x - x_0)^n)$ ,  $x \rightarrow x_0$  得  $f(x_0) = A_0$ . 又由

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A_1 + A_2(x - x_0) + o((x - x_0)) \rightarrow f'(x_0) = A_1,$$

即我们证明了  $S_1(x) = T_1(x)$ . 下面用归纳法, 若  $S_k = T_k (k < n)$ , 则有  $f(x) - T_k(x) = A_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{k+1})$ , 由于

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_k(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!(x - x_0)} = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0),$$

因此  $A_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0)$ .

# Taylor 公式的证明 2

- 2 的证明: 令

$$S_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n,$$

由  $f(x) = S_n(x) + o((x - x_0)^n)$ ,  $x \rightarrow x_0$  得  $f(x_0) = A_0$ . 又由

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A_1 + A_2(x - x_0) + o((x - x_0)) \rightarrow f'(x_0) = A_1,$$

即我们证明了  $S_1(x) = T_1(x)$ . 下面用归纳法, 若  $S_k = T_k (k < n)$ , 则有  $f(x) - T_k(x) = A_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{k+1})$ , 由于

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_k(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!(x - x_0)} = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0),$$

因此  $A_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0)$ .

# 一些初等函数的 Taylor 公式 1

● 例:  $e^x$  的泰勒公式.  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$ .

● 例:  $\sin x$  的泰勒公式. 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$ ,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

● 例:  $\cos x$  的泰勒公式.  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$ ,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1}).$$

# 一些初等函数的 Taylor 公式 1

- 例:  $e^x$  的泰勒公式.  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$ .
- 例:  $\sin x$  的泰勒公式. 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$ ,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

- 例:  $\cos x$  的泰勒公式.  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$ ,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1}).$$

# 一些初等函数的 Taylor 公式 1

- 例:  $e^x$  的泰勒公式.  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$ .
- 例:  $\sin x$  的泰勒公式. 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$ ,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

- 例:  $\cos x$  的泰勒公式.  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$ ,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1}).$$



# 一些初等函数的 Taylor 公式 1

- 例:  $e^x$  的泰勒公式.  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$ .
- 例:  $\sin x$  的泰勒公式. 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$ ,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

- 例:  $\cos x$  的泰勒公式.  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$ ,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1}).$$

# 一些初等函数的 Taylor 公式 1

- 例:  $e^x$  的泰勒公式.  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$ .
- 例:  $\sin x$  的泰勒公式. 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$ ,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

- 例:  $\cos x$  的泰勒公式.  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$ ,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1}).$$

# 一些初等函数的 Taylor 公式 1

- 例:  $e^x$  的泰勒公式.  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$ .
- 例:  $\sin x$  的泰勒公式. 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$ ,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$$

- 例:  $\cos x$  的泰勒公式.  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$ ,  
 $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$ ,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1}).$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 2

- $\ln(1+x)$  的泰勒公式. 由  $\ln(1+x)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$ ,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- $(1+x)^\alpha$  ( $\alpha$  不是非负整数) 的泰勒公式 (二项式展开).

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{(\alpha-k)},$$

因此

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 2

- $\ln(1+x)$  的泰勒公式. 由  $\ln(1+x)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$ ,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- $(1+x)^\alpha$  ( $\alpha$  不是非负整数) 的泰勒公式 (二项式展开).

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{(\alpha-k)},$$

因此

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 2

- $\ln(1+x)$  的泰勒公式. 由  $\ln(1+x)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$ ,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- $(1+x)^\alpha$  ( $\alpha$  不是非负整数) 的泰勒公式 (二项式展开).

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{(\alpha-k)},$$

因此

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 2

- $\ln(1+x)$  的泰勒公式. 由  $\ln(1+x)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$ ,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- $(1+x)^\alpha$  ( $\alpha$  不是非负整数) 的泰勒公式 (二项式展开).

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{(\alpha-k)},$$

因此

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 3

- $\alpha = -1$ ,  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ .

事实上,  $\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ .

- $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$



## 一些初等函数的 Taylor 公式 3

- $\alpha = -1, \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$

事实上,  $\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$

- $\alpha = -\frac{1}{2},$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = \frac{1}{2},$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 3

- $\alpha = -1$ ,  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ .

事实上,  $\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ .

- $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 3

- $\alpha = -1$ ,  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ .

事实上,  $\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ .

- $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 3

- $\alpha = -1$ ,  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ .

事实上,  $\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ .

- $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

## 一些初等函数的 Taylor 公式 3

- $\alpha = -1, \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n).$

事实上,  $\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$

- $\alpha = -\frac{1}{2},$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = \frac{1}{2},$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

# 例 1

- 例：求  $f(x) = e^{-x^2}$  在  $x = 0$  处的 Taylor 公式，并求  $f$  在 0 处的任意阶导数.

解：利用  $e^x$  的 Taylor 公式，有

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + (-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(-x^2)^n + o(x^{2n}) \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}x^{2n} + o(x^{2n}), \end{aligned}$$

由此可得  $f^{(2n+1)}(0) = 0$ ,  $f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{n!}(2n)!.$

# 例 1

- 例：求  $f(x) = e^{-x^2}$  在  $x = 0$  处的 Taylor 公式，并求  $f$  在 0 处的任意阶导数.

解：利用  $e^x$  的 Taylor 公式，有

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + (-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(-x^2)^n + o(x^{2n}) \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}x^{2n} + o(x^{2n}), \end{aligned}$$

由此可得  $f^{(2n+1)}(0) = 0$ ,  $f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n}{n!}(2n)!.$

## 例 2

- 例:  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则有  $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . 事实上, 存在多项式  $P_n(x)$ , 使得

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f(x)$  的 Taylor 公式  $f(x) = o(x^n)$ .



## 例 2

- 例:  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则有  $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . 事实上, 存在多项式  $P_n(x)$ , 使得

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$f(x)$  的 Taylor 公式  $f(x) = o(x^n)$ .

# Taylor 公式在求极限中的应用 1

● 例：求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x}{2} \sin x}{\sin x - x \cos x}$ .

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{x - \frac{1}{6}x^3 - x(1 - \frac{1}{2!}x^2) + o(x^3)} = \frac{1}{2}.$$

● 例：设  $m > 1$ , 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^m + x^{m-1})^{\frac{1}{m}} - (x^m - x^{m-1})^{\frac{1}{m}}]$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{m}} - x(1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{m}}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 + \frac{1}{mx}) - x(1 - \frac{1}{mx}) + o(1)] = \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

# Taylor 公式在求极限中的应用 1

● 例：求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x}{2} \sin x}{\sin x - x \cos x}$ .

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{x - \frac{1}{6}x^3 - x(1 - \frac{1}{2!}x^2) + o(x^3)} = \frac{1}{2}.$$

● 例：设  $m > 1$ , 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^m + x^{m-1})^{\frac{1}{m}} - (x^m - x^{m-1})^{\frac{1}{m}}]$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{m}} - x(1 - \frac{1}{x})^{\frac{1}{m}}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 + \frac{1}{mx}) - x(1 - \frac{1}{mx}) + o(1)] = \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

# Taylor 公式在求极限中的应用 1

● 例：求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x}{2} \sin x}{\sin x - x \cos x}$ .

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{x - \frac{1}{6}x^3 - x(1 - \frac{1}{2!}x^2) + o(x^3)} = \frac{1}{2}.$$

● 例：设  $m > 1$ , 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^m + x^{m-1})^{\frac{1}{m}} - (x^m - x^{m-1})^{\frac{1}{m}}]$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{m}} - x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{m}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 + \frac{1}{mx} \right) - x \left( 1 - \frac{1}{mx} \right) + o(1) \right] = \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

# Taylor 公式在求极限中的应用 1

● 例：求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x}{2} \sin x}{\sin x - x \cos x}$ .

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{x - \frac{1}{6}x^3 - x(1 - \frac{1}{2!}x^2) + o(x^3)} = \frac{1}{2}.$$

● 例：设  $m > 1$ , 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^m + x^{m-1})^{\frac{1}{m}} - (x^m - x^{m-1})^{\frac{1}{m}}]$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{m}} - x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{m}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 + \frac{1}{mx} \right) - x \left( 1 - \frac{1}{mx} \right) + o(1) \right] = \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

## Taylor 公式在求极限中的应用 2

- 例 (上节例 5): 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln(1+x-1)}{(x-1)\ln(1+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - ((x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- 例: 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (x - \frac{1}{6}x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## Taylor 公式在求极限中的应用 2

- 例 (上节例 5): 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln(1+x-1)}{(x-1)\ln(1+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - ((x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- 例: 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (x - \frac{1}{6}x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## Taylor 公式在求极限中的应用 2

- 例 (上节例 5): 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln(1+x-1)}{(x-1)\ln(1+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - ((x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- 例: 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (x - \frac{1}{6}x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$



## Taylor 公式在求极限中的应用 2

- 例 (上节例 5): 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln(1+x-1)}{(x-1)\ln(1+x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - ((x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- 例: 求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (x - \frac{1}{6}x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

# Taylor 公式 -例

- $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3), \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \ln(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))$

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

- $(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$

# Taylor 公式 - 例

- $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ ,  $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \ln(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))$

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3))^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

- $(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ .

# 带 Peano 余项的 Taylor 公式

- 带 Peano 余项的 Taylor 公式:  $f$  在  $x_0$  附近有定义,  $f$  在  $x_0$  处有  $n$  阶导数, 则  $x \rightarrow x_0$  时,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

这里余项  $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$  只反映了  $x \rightarrow x_0$  时, 余项趋向于 0 的速度.

# 带 Peano 余项的 Taylor 公式

- 带 Peano 余项的 Taylor 公式:  $f$  在  $x_0$  附近有定义,  $f$  在  $x_0$  处有  $n$  阶导数, 则  $x \rightarrow x_0$  时,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

这里余项  $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$  只反映了  $x \rightarrow x_0$  时, 余项趋向于 0 的速度.

# 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式: 设  $f$  在  $(A, B)$  内有  $n+1$  阶导数, 则对任意  $x, x_0 \in (A, B)$ , 存在  $\xi \in (x_0, x)$  (或者  $(x, x_0)$ ), 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

- 注:  $(A, B)$  可以是无穷区间.  $n=0$  时, 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理.
- 注: 两个 Taylor 公式的条件不同.
- 注: 余项  $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$  可用于估计余项大小.

# 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式: 设  $f$  在  $(A, B)$  内有  $n+1$  阶导数, 则对任意  $x, x_0 \in (A, B)$ , 存在  $\xi \in (x_0, x)$  (或者  $(x, x_0)$ ), 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

- 注:  $(A, B)$  可以是无穷区间.  $n=0$  时, 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理.
- 注: 两个 Taylor 公式的条件不同.
- 注: 余项  $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$  可用于估计余项大小.

# 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式: 设  $f$  在  $(A, B)$  内有  $n+1$  阶导数, 则对任意  $x, x_0 \in (A, B)$ , 存在  $\xi \in (x_0, x)$  (或者  $(x, x_0)$ ), 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

- 注:  $(A, B)$  可以是无穷区间.  $n=0$  时, 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理.
- 注: 两个 Taylor 公式的条件不同.
- 注: 余项  $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$  可用于估计余项大小.



# 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：设  $f$  在  $(A, B)$  内有  $n+1$  阶导数，则对任意  $x, x_0 \in (A, B)$ ，存在  $\xi \in (x_0, x)$  (或者  $(x, x_0)$ )，使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

- 注： $(A, B)$  可以是无穷区间.  $n=0$  时，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理.
- 注：两个 Taylor 公式的条件不同.
- 注：余项  $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$  可用于估计余项大小.

# 带 Lagrange 余项 Taylor 公式的证明

- 令  $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ , 其中

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

则有  $R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ ,  $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ .  
重复利用 Cauchy 中值定理, 存在  $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+1}$  ( $\xi_1$  位于  $x_0$  与  $x$  之间,  $\xi_{k+1}$  位于  $x_0$  与  $\xi_k$  之间), 使得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} = \cdots = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

取  $\xi = \xi_{n+1}$  即可.

## 带 Lagrange 余项 Taylor 公式的证明

- 令  $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ , 其中

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

则有  $R_n(x_0) = R'_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ ,  $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ .  
重复利用 Cauchy 中值定理, 存在  $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+1}$  ( $\xi_1$  位于  $x_0$  与  $x$  之间,  $\xi_{k+1}$  位于  $x_0$  与  $\xi_k$  之间), 使得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} = \cdots = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

取  $\xi = \xi_{n+1}$  即可.

# 一些初等函数带的 Lagrange 余项 1

- $e^x$ :  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$

- $\sin x$ : 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x, (\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x,$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ + (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}.$$

- $\cos x$ :  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x, (\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \\ + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}, x \in \mathbb{R}.$$

# 一些初等函数带的 Lagrange 余项 1

- $e^x$ :  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$

- $\sin x$ : 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x, (\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x,$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ + (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}.$$

- $\cos x$ :  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x, (\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \\ + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}, x \in \mathbb{R}.$$

# 一些初等函数带的 Lagrange 余项 1

- $e^x$ :  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$

- $\sin x$ : 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x, (\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x,$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ + (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}.$$

- $\cos x$ :  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x, (\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \\ + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}, x \in \mathbb{R}.$$

# 一些初等函数带的 Lagrange 余项 1

- $e^x$ :  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$

- $\sin x$ : 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x, (\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x,$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ + (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}.$$

- $\cos x$ :  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x, (\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \\ + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}, x \in \mathbb{R}.$$

# 一些初等函数带的 Lagrange 余项 1

- $e^x$ :  $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$

- $\sin x$ : 利用  $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x, (\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x,$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ + (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}.$$

- $\cos x$ :  $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x, (\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \\ + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}, x \in \mathbb{R}.$$



## 一些初等函数的 Lagrange 余项 2

- $\ln(1+x)$ :  $(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$ .

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, x > -1.$$

- $(1+x)^\alpha$ : 由  $((1+x)^\alpha)^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$ ,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, x > -1.$$

## 一些初等函数的 Lagrange 余项 2

- $\ln(1+x)$ :  $(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$ .

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, x > -1.$$

- $(1+x)^\alpha$ : 由  $((1+x)^\alpha)^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$ ,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, x > -1.$$

## 一些初等函数的 Lagrange 余项 2

- $\ln(1+x)$ :  $(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$ .

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, x > -1.$$

- $(1+x)^\alpha$ : 由  $((1+x)^\alpha)^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$ ,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, x > -1.$$

## 一些初等函数的 Lagrange 余项 2

- $\ln(1+x)$ :  $(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k}$ .

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, x > -1.$$

- $(1+x)^\alpha$ : 由  $((1+x)^\alpha)^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$ ,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, x > -1.$$

# 误差估计

- $f(x) = \sin x$ ,  $n \rightarrow +\infty$  时,

$$|R_{2n}(x)| = \left| (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} |x|^{2n+1} \rightarrow 0.$$

- $f(x) = e^x$ ,  $n \rightarrow +\infty$  时,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} (|x|)^{n+1} \rightarrow 0.$$

# 误差估计

- $f(x) = \sin x$ ,  $n \rightarrow +\infty$  时,

$$|R_{2n}(x)| = \left| (-1)^n \frac{\cos \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \leq \frac{1}{(2n+1)!} |x|^{2n+1} \rightarrow 0.$$

- $f(x) = e^x$ ,  $n \rightarrow +\infty$  时,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} (|x|)^{n+1} \rightarrow 0.$$

# 一个特殊函数的 Taylor 公式

- 设  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则存在多项式  $P_n(x)$ , 使得

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

该函数的 Taylor 公式为  $f(x) = 0 + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ .

- 注: 存在  $\xi$  (在 0 与  $-\frac{1}{x^2}$  之间), 使得

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{n+1},$$

但上式不是 Taylor 公式.

## 一个特殊函数的 Taylor 公式

- 设  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则存在多项式  $P_n(x)$ , 使得

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

该函数的 Taylor 公式为  $f(x) = 0 + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ .

- 注: 存在  $\xi$  (在 0 与  $-\frac{1}{x^2}$  之间), 使得

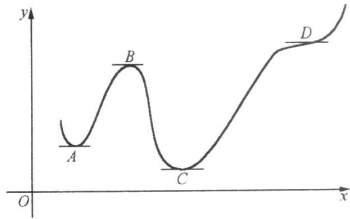
$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{n+1},$$

但上式不是 Taylor 公式.



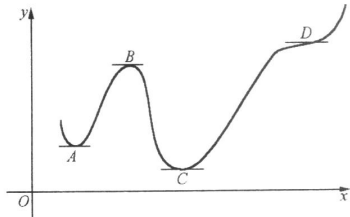
# 极值与极值点 1

- 历史注记：极值问题历史悠久. 1638 年 Fermat 在《求最大值和最小值的方法》用微积分方法研究极值 (该研究对微积分的创立发挥了很大的作用). 规划论、对策论等研究的本质上也是极值问题.
- 极值与极值点：设  $f(x)$  在  $x_0$  附近有定义，若存在  $\delta > 0$ , 使得对任意的  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 有  $f(x) \leq f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值,  $x_0$  为  $f(x)$  的一个极大点. 类似地可定义极小值和极小值点. 极大值和极小值统称为极值, 极小点和极大点统称为极值点.



# 极值与极值点 1

- 历史注记：极值问题历史悠久. 1638 年 Fermat 在《求最大值和最小值的方法》用微积分方法研究极值 (该研究对微积分的创立发挥了很大的作用). 规划论、对策论等研究的本质上也是极值问题.
- 极值与极值点：设  $f(x)$  在  $x_0$  附近有定义，若存在  $\delta > 0$ , 使得对任意的  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 有  $f(x) \leq f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值,  $x_0$  为  $f(x)$  的一个极大点. 类似地可定义极小值和极小值点. 极大值和极小值统称为极值, 极小点和极大点统称为极值点.



# Fermat 定理 1

- 注：极值点必须是在定义域内部. 极大值是局部最大值，一个函数可以有多个极大值和极小值，极小值可能比极大值大. 对  $f(x) = C$ , 所有点都是极值点. 而  $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ , 有理点是极大点，无理点是极小点.
- 定理：设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 若  $x_0 \in (a, b)$  是  $f(x)$  的极值点, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则有  $f'(x_0) = 0$ .
- 证明：存在  $\delta > 0$ ,  $x_0$  是  $f(x)(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$  的内部最值点.
- 极值点不一定可导, 如  $f(x) = |x|$ ; 导数为 0 的点也不一定是极值点, 如  $y = x^3$ ,  $x_0 = 0$ .

# Fermat 定理 1

- 注：极值点必须是在定义域内部. 极大值是局部最大值，一个函数可以有多个极大值和极小值，极小值可能比极大值大. 对  $f(x) = C$ , 所有点都是极值点. 而  $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ , 有理点是极大点，无理点是极小点.
- 定理：设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 若  $x_0 \in (a, b)$  是  $f(x)$  的极值点, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则有  $f'(x_0) = 0$ .
- 证明：存在  $\delta > 0$ ,  $x_0$  是  $f(x)$  ( $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ) 的内部最值点.
- 极值点不一定可导, 如  $f(x) = |x|$ ; 导数为 0 的点也不一定是极值点, 如  $y = x^3$ ,  $x_0 = 0$ .

# Fermat 定理 1

- 注：极值点必须是在定义域内部. 极大值是局部最大值，一个函数可以有多个极大值和极小值，极小值可能比极大值大. 对  $f(x) = C$ , 所有点都是极值点. 而  $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ , 有理点是极大点，无理点是极小点.
- 定理：设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 若  $x_0 \in (a, b)$  是  $f(x)$  的极值点, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则有  $f'(x_0) = 0$ .
- 证明：存在  $\delta > 0$ ,  $x_0$  是  $f(x)(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$  的内部最值点.
- 极值点不一定可导, 如  $f(x) = |x|$ ; 导数为 0 的点也不一定是极值点, 如  $y = x^3$ ,  $x_0 = 0$ .

# Fermat 定理 1

- 注：极值点必须是在定义域内部. 极大值是局部最大值，一个函数可以有多个极大值和极小值，极小值可能比极大值大. 对  $f(x) = C$ , 所有点都是极值点. 而  $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ , 有理点是极大点，无理点是极小点.
- 定理：设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 若  $x_0 \in (a, b)$  是  $f(x)$  的极值点, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 则有  $f'(x_0) = 0$ .
- 证明：存在  $\delta > 0$ ,  $x_0$  是  $f(x)(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$  的内部最值点.
- 极值点不一定可导, 如  $f(x) = |x|$ ; 导数为 0 的点也不一定是极值点, 如  $y = x^3$ ,  $x_0 = 0$ .

# 极值点的判别 1

- 定义：设  $f(x)$  可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）.
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
  - 根据  $f'(x)$  在稳定点两边的符号来判别，若  $f'(x)$  在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
  - 若  $f$  在  $x_0$  处有二阶导数，可用下面的定理来判断.

# 极值点的判别 1

- 定义：设  $f(x)$  可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）.
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
  - 根据  $f'(x)$  在稳定点两边的符号来判别，若  $f'(x)$  在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
  - 若  $f$  在  $x_0$  处有二阶导数，可用下面的定理来判断.



# 极值点的判别 1

- 定义：设  $f(x)$  可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）.
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
  - 根据  $f'(x)$  在稳定点两边的符号来判别，若  $f'(x)$  在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
  - 若  $f$  在  $x_0$  处有二阶导数，可用下面的定理来判断.

# 极值点的判别 1

- 定义：设  $f(x)$  可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）.
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
  - 根据  $f'(x)$  在稳定点两边的符号来判别，若  $f'(x)$  在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
  - 若  $f$  在  $x_0$  处有二阶导数，可用下面的定理来判断.

# 极值点的判别 1

- 定义：设  $f(x)$  可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）.
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
  - 根据  $f'(x)$  在稳定点两边的符号来判别，若  $f'(x)$  在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
  - 若  $f$  在  $x_0$  处有二阶导数，可用下面的定理来判断.

# 极值点的判别 1

- 定义：设  $f(x)$  可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）.
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
  - 根据  $f'(x)$  在稳定点两边的符号来判别，若  $f'(x)$  在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
  - 若  $f$  在  $x_0$  处有二阶导数，可用下面的定理来判断.

## 极值点的判别 2

- 定理:  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内有一阶导数,  $x_0 \in (a, b)$  是稳定点, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处有二阶导数. 若  $f''(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大点; 若  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小点. ( $f''(x_0) = 0$ , 不定)
- 证明 1: 若  $f''(x_0) > 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ , 从而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 因此  $x_0$  为极小点.

- 注: 若  $f''(x) > 0$ , 则利用  $f'(x)$  严格单调增, 直接可得  $f'(x)$  在  $x_0$  左边为负, 右边为正.  $x_0$  为极小点.

## 极值点的判别 2

- 定理:  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内有一阶导数,  $x_0 \in (a, b)$  是稳定点, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处有二阶导数. 若  $f''(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大点; 若  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小点. ( $f''(x_0) = 0$ , 不定)
- 证明 1: 若  $f''(x_0) > 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ , 从而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 因此  $x_0$  为极小点.

- 注: 若  $f''(x) > 0$ , 则利用  $f'(x)$  严格单调增, 直接可得  $f'(x)$  在  $x_0$  左边为负, 右边为正.  $x_0$  为极小点.

## 极值点的判别 2

- 定理:  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内有一阶导数,  $x_0 \in (a, b)$  是稳定点, 且  $f(x)$  在  $x_0$  处有二阶导数. 若  $f''(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大点; 若  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小点. ( $f''(x_0) = 0$ , 不定)
- 证明 1: 若  $f''(x_0) > 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ , 从而  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 因此  $x_0$  为极小点.

- 注: 若  $f''(x) > 0$ , 则利用  $f'(x)$  严格单调增, 直接可得  $f'(x)$  在  $x_0$  左边为负, 右边为正.  $x_0$  为极小点.

## 极值点的判别 3

- 证明 2: 设  $f''(x_0) > 0$ . 由于  $f(x)$  在  $x_0$  处有二阶导数, 有 Taylor 公式

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x)$$

其中  $R_2(x) = o((x - x_0)^2)$ , 即  $\frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} \rightarrow 0$ . 因此存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $\frac{|R_2(x)|}{(x - x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0)$ , 从而

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x) \\ &\geq \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 - \frac{1}{4}f''(x_0)(x - x_0)^2 > 0 \end{aligned}$$

因此  $x_0$  为极小点.



## 极值点的判别 3

- 证明 2: 设  $f''(x_0) > 0$ . 由于  $f(x)$  在  $x_0$  处有二阶导数, 有 Taylor 公式

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x)$$

其中  $R_2(x) = o((x - x_0)^2)$ , 即  $\frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} \rightarrow 0$ . 因此存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $\frac{|R_2(x)|}{(x - x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0)$ , 从而

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x) \\ &\geq \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 - \frac{1}{4}f''(x_0)(x - x_0)^2 > 0 \end{aligned}$$

因此  $x_0$  为极小点.

## 极值点的判别 4

- 上面的证明 2 可以用于证明下面更一般的结论：设  $f(x)$  在  $x_0$  处有  $2n$  阶导数，且  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ . 若  $f^{(2n)}(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大点；若  $f^{(2n)}(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小点. ( $f^{(2n)}(x_0) = 0$ , 不定)

证明：  $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} + o((x - x_0)^{2n})$ .

- 注：若  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$ , 则  $x_0$  不是极值点. 例如  $f(x) = x^3$ .

## 极值点的判别 4

- 上面的证明 2 可以用于证明下面更一般的结论：设  $f(x)$  在  $x_0$  处有  $2n$  阶导数，且  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ . 若  $f^{(2n)}(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大点；若  $f^{(2n)}(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小点. ( $f^{(2n)}(x_0) = 0$ , 不定)

证明：  $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} + o((x - x_0)^{2n})$ .

- 注：若  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$ , 则  $x_0$  不是极值点. 例如  $f(x) = x^3$ .

## 极值点的判别 4

- 上面的证明 2 可以用于证明下面更一般的结论：设  $f(x)$  在  $x_0$  处有  $2n$  阶导数，且  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ . 若  $f^{(2n)}(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大点；若  $f^{(2n)}(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小点. ( $f^{(2n)}(x_0) = 0$ , 不定)  
证明：  $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} + o((x - x_0)^{2n})$ .
- 注：若  $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$ , 则  $x_0$  不是极值点. 例如  $f(x) = x^3$ .

# 例

- 例：求  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$  的极值点.

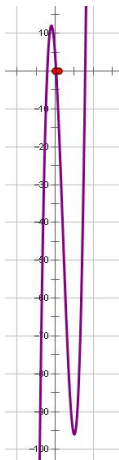
解：  $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x+1)(x-5)$ .

有两个稳定点：  $-1, 5$ .

方法一：  $f'(x)$  在  $-1$  的左边为正，右边为负，是极大点；  
 $f'(x)$  在  $5$  的左边为负，右边为正，是极小点.

方法二：  $f''(x) = 6x - 12$ ,

$f''(-1) < 0$ , 极大点；  $f''(5) > 0$ , 极小点.



# 例

- 例：求  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$  的极值点.

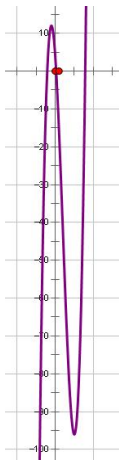
解：  $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x+1)(x-5)$ .

有两个稳定点：  $-1, 5$ .

方法一：  $f'(x)$  在  $-1$  的左边为正，右边为负，是极大点；  
 $f'(x)$  在  $5$  的左边为负，右边为正，是极小点.

方法二：  $f''(x) = 6x - 12$ ,

$f''(-1) < 0$ , 极大点；  $f''(5) > 0$ , 极小点.



# 最值与最值点

- $f(x)$  是集合  $X$  上的函数,  $x_0 \in X$  满足  $f(x) \geq f(x_0)$  对所有  $x \in X$  成立, 则称  $f(x_0)$  是  $f(x)$  在  $X$  上的最小值,  $x_0$  为最小点, 类似地可定义最大值和最大点.
- 注: 最值可以在边界上取得, 内部的最值点一定是极值点.
- 若  $f(x) \in C([a, b])$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n$  个极值点  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ , 则最大值  $M$  和最小值  $m$  分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

证明:  $f$  连续, 最值点一定存在, 若不是边界点, 必为极值点.

# 最值与最值点

- $f(x)$  是集合  $X$  上的函数,  $x_0 \in X$  满足  $f(x) \geq f(x_0)$  对所有  $x \in X$  成立, 则称  $f(x_0)$  是  $f(x)$  在  $X$  上的最小值,  $x_0$  为最小点, 类似地可定义最大值和最大点.
- 注: 最值可以在边界上取得, 内部的最值点一点是极值点.
- 若  $f(x) \in C([a, b])$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n$  个极值点  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ , 则最大值  $M$  和最小值  $m$  分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

证明:  $f$  连续, 最值点一定存在, 若不是边界点, 必为极值点.



# 最值与最值点

- $f(x)$  是集合  $X$  上的函数,  $x_0 \in X$  满足  $f(x) \geq f(x_0)$  对所有  $x \in X$  成立, 则称  $f(x_0)$  是  $f(x)$  在  $X$  上的最小值,  $x_0$  为最小点, 类似地可定义最大值和最大点.
- 注: 最值可以在边界上取得, 内部的最值点一点是极值点.
- 若  $f(x) \in C([a, b])$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n$  个极值点  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ , 则最大值  $M$  和最小值  $m$  分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

证明:  $f$  连续, 最值点一定存在, 若不是边界点, 必为极值点.

# 最值与最值点

- $f(x)$  是集合  $X$  上的函数,  $x_0 \in X$  满足  $f(x) \geq f(x_0)$  对所有  $x \in X$  成立, 则称  $f(x_0)$  是  $f(x)$  在  $X$  上的最小值,  $x_0$  为最小点, 类似地可定义最大值和最大点.
- 注: 最值可以在边界上取得, 内部的最值点一点是极值点.
- 若  $f(x) \in C([a, b])$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n$  个极值点  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ , 则最大值  $M$  和最小值  $m$  分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

证明:  $f$  连续, 最值点一定存在, 若不是边界点, 必为极值点.

# 最值 1

- 若  $f(x) \in C^1([a, b])$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n$  个稳定点  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ , 则最大值  $M$  和最小值  $m$  分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

证明：由于  $f$  连续，最值点一定存在，若不是边界点，必为稳定点。

- 例：求  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$  在  $[-2, 6]$  上的最值点。

解：有两个稳定点： $-1, 5$ .  $f(-1) = 12$ ,  $f(5) = -96$ ,  $f(-2) = 2$ ,  $f(6) = -86$ . 最大值为 12, 最小值为 -96.

# 最值 1

- 若  $f(x) \in C^1([a, b])$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有  $n$  个稳定点  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ , 则最大值  $M$  和最小值  $m$  分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

证明：由于  $f$  连续，最值点一定存在，若不是边界点，必为稳定点。

- 例：求  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$  在  $[-2, 6]$  上的最值点。

解：有两个稳定点： $-1, 5$ .  $f(-1) = 12$ ,  $f(5) = -96$ ,  $f(-2) = 2$ ,  $f(6) = -86$ . 最大值为 12, 最小值为 -96.

## 最值 2

- $f(x)$  在区间  $X$  上连续, 且有唯一的极值点  $x_0$  (必为  $X$  的内点). 若  $x_0$  为极小点, 则必为最小点; 若  $x_0$  为极大点, 则必为最大点.

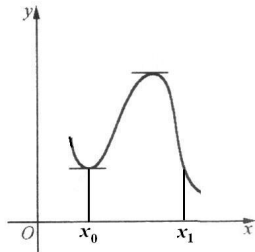
证明: 设  $x_0$  是唯一的极值点 (不妨设是极小点), 则存在邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 使得  $x_0$  是  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上的最小点. 下面证明  $f(x) > f(x_0)$  对所有  $x \neq x_0$  成立. 反设存在  $x_1$  使得  $f(x_1) \leq f(x_0)$ , 不妨设  $x_1 > x_0$ . 考虑  $f(x)$  在  $[x_0, x_1]$  上的最大值  $M$ , 则  $M \geq f(x_0) \geq f(x_1)$ .

(1) 若  $M = f(x_0)$ ,

则  $f(x_0)$  同时是  $f$  在  $[x_0, x_0 + \delta)$  上的最大值和最小值, 即  $f$  在  $[x_0, x_0 + \delta)$  上为常数, 与极值点的唯一性矛盾.

(2)  $M > f(x_0) \geq f(x_1)$ ,

$f$  在  $[x_0, x_1)$  上的最大值在区间内部取得, 必为极值点, 这也与极值点唯一矛盾.



## 最值 2

- $f(x)$  在区间  $X$  上连续, 且有唯一的极值点  $x_0$  (必为  $X$  的内点). 若  $x_0$  为极小点, 则必为最小点; 若  $x_0$  为极大点, 则必为最大点.

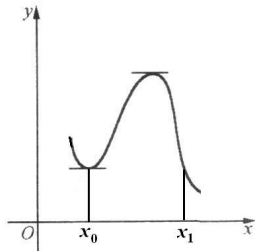
证明: 设  $x_0$  是唯一的极值点 (不妨设是极小点), 则存在邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 使得  $x_0$  是  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上的最小点. 下面证明  $f(x) > f(x_0)$  对所有  $x \neq x_0$  成立. 反设存在  $x_1$  使得  $f(x_1) \leq f(x_0)$ , 不妨设  $x_1 > x_0$ . 考虑  $f(x)$  在  $[x_0, x_1]$  上的最大值  $M$ , 则  $M \geq f(x_0) \geq f(x_1)$ .

(1) 若  $M = f(x_0)$ ,

则  $f(x_0)$  同时是  $f$  在  $[x_0, x_0 + \delta)$  上的最大值和最小值, 即  $f$  在  $[x_0, x_0 + \delta)$  上为常数, 与极值点的唯一性矛盾.

(2)  $M > f(x_0) \geq f(x_1)$ ,

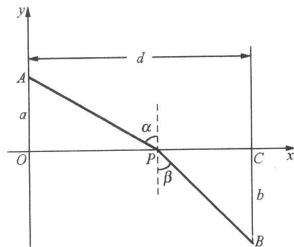
$f$  在  $[x_0, x_1)$  上的最大值在区间内部取得, 必为极值点, 这也与极值点唯一矛盾.



# 光的折射原理 1

- 光的折射原理：介质甲、乙中光速分别为  $v_1, v_2$ ，光线从介质甲中的  $A$  点到乙中的  $B$  点，求花时间最短的路径。

- 解：如图以两种介质分界线为  $x$  轴， $A$  到分界线的垂线为  $y$  轴的建立坐标系。设  $P$  是两种介质分界线上的一点，设路径是折线  $APB$ ，设  $B$  到  $x$  轴的垂线的垂足分别为  $C$ ，设  $OC$  长为  $d$ ， $AO, BC$  长分别为  $a$  和  $b$ 。设  $OP$  长为  $x$ ，则总时间为

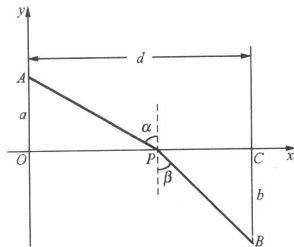


$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}$$

# 光的折射原理 1

- 光的折射原理：介质甲、乙中光速分别为  $v_1, v_2$ ，光线从介质甲中的  $A$  点到乙中的  $B$  点，求花时间最短的路径。

- 解：如图以两种介质分界线为  $x$  轴， $A$  到分界线的垂线为  $y$  轴的建立坐标系。设  $P$  是两种介质分界线上的一点，设路径是折线  $APB$ ，设  $B$  到  $x$  轴的垂线的垂足分别为  $C$ ，设  $OC$  长为  $d$ ， $AO, BC$  长分别为  $a$  和  $b$ 。设  $OP$  长为  $x$ ，则总时间为



$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}$$



## 光的折射原理 2

- 解 (续): 下面求  $T(x)$  的最小值.  $T(x)$  的一阶导数为

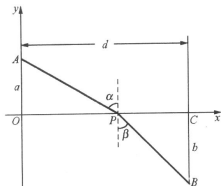
$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

$T(x)$  的二阶导数

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1 \sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{v_2 \sqrt{(b^2 + (d-x)^2)^3}} > 0.$$

显然  $T'(0) < 0$ ,  $T'(d) > 0$ , 因此存在唯一的  $x_0 \in (c, d)$ , 使得  $T'(x_0) = 0$ , 且  $x_0$  是极小点, 从而是最小点.  $x_0$  满足

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{d-x_0}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x_0)^2}} \text{ 即 } \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}$$



## 光的折射原理 2

- 解 (续): 下面求  $T(x)$  的最小值.  $T(x)$  的一阶导数为

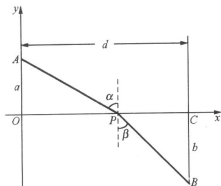
$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

$T(x)$  的二阶导数

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1 \sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{v_2 \sqrt{(b^2 + (d-x)^2)^3}} > 0.$$

显然  $T'(0) < 0$ ,  $T'(d) > 0$ , 因此存在唯一的  $x_0 \in (c, d)$ , 使得  $T'(x_0) = 0$ , 且  $x_0$  是极小点, 从而是最小点.  $x_0$  满足

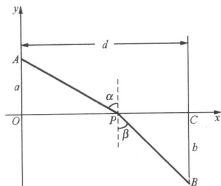
$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{d-x_0}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x_0)^2}} \text{ 即 } \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}$$



## 光的折射原理 2

- 解 (续): 下面求  $T(x)$  的最小值.  $T(x)$  的一阶导数为

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$



$T(x)$  的二阶导数

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1 \sqrt{(a^2 + x^2)^3}} + \frac{b^2}{v_2 \sqrt{(b^2 + (d-x)^2)^3}} > 0.$$

显然  $T'(0) < 0$ ,  $T'(d) > 0$ , 因此存在唯一的  $x_0 \in (c, d)$ , 使得  $T'(x_0) = 0$ , 且  $x_0$  是极小点, 从而是最小点.  $x_0$  满足

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{d-x_0}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x_0)^2}} \text{ 即 } \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}$$

# 最小二乘法

- 最小二乘法：作  $n$  次实验，得到数据  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 找  $x_0$ , 使得  $f(x) = \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2$  在  $x_0$  处最小 (此时我们认为  $x_0$  就是真实值).
- 解：先求  $f(x)$  的稳定点. 解  $f'(x) = 2 \sum_{i=1}^n (x - a_i) = 0$  得  $x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ . 显然  $f''(x_0) = 2n > 0$ , 因此  $x_0$  是唯一的极小点, 也是最小点.
- 注:  $a \neq 0$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + c'$ ,  $f'(x_0) = 0$ .

# 最小二乘法

- 最小二乘法：作  $n$  次实验，得到数据  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . 找  $x_0$ , 使得  $f(x) = \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2$  在  $x_0$  处最小 (此时我们认为  $x_0$  就是真实值).
- 解：先求  $f(x)$  的稳定点. 解  $f'(x) = 2 \sum_{i=1}^n (x - a_i) = 0$  得  $x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ . 显然  $f''(x_0) = 2n > 0$ , 因此  $x_0$  是唯一的极小点, 也是最小点.
- 注:  $a \neq 0$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + c'$ ,  $f'(x_0) = 0$ .

# 函数的凸凹性的定义

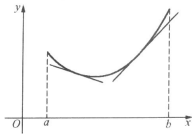
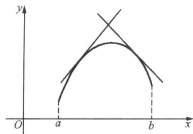
- 定义：设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导，若任意固定  $x_0 \in (a, b)$ ，都有

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b), x \neq x_0,$$

则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向上凸（凸）函数；若任意固定  $x_0 \in (a, b)$ ，都有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b), x \neq x_0,$$

则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向下凸（凹）函数。



# 函数的凸凹性的定义

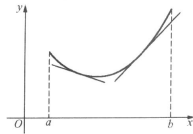
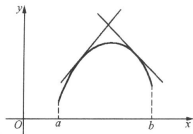
- 定义：设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上可导，若任意固定  $x_0 \in (a, b)$ ，都有

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b), x \neq x_0,$$

则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向上凸（凸）函数；若任意固定  $x_0 \in (a, b)$ ，都有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b), x \neq x_0,$$

则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向下凸（凹）函数.



- 例:  $p > 1$  时,  $f(x) = x^p$ , 是  $(0, +\infty)$  上的下凸函数.
- 证明: 对不相等的正实数  $x$  和  $x_0$ ,  $\frac{x-x_0}{x_0} > -1$  且不等于 0, 利用贝努利不等式,

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^p = \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^p > 1 + p\left(\frac{x}{x_0} - 1\right),$$

即得  $x^p > x_0^p + px_0^{p-1}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .



- 例:  $p > 1$  时,  $f(x) = x^p$ , 是  $(0, +\infty)$  上的下凸函数.
- 证明: 对不相等的正实数  $x$  和  $x_0$ ,  $\frac{x-x_0}{x_0} > -1$  且不等于 0, 利用贝努利不等式,

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^p = \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^p > 1 + p\left(\frac{x}{x_0} - 1\right),$$

即得  $x^p > x_0^p + px_0^{p-1}(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

## 凸 (凹) 函数的性质 1

- 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向上凸函数, 则对任意两个不相等的  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $0 < k_1, k_2 < 1$ ,  $k_1 + k_2 = 1$ ,  $x_0 = k_1 x_1 + k_2 x_2$ , 有

$$k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) < f(x_0)$$

类似地, 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个凹函数, 则有  $k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) > f(x_0)$ .

- 证明: 若  $f(x)$  是一个凸函数, 则  $f(x_k) < f(x_0) + f'(x_0)(x_k - x_0) (k = 1, 2)$ ,

$$\begin{aligned} k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) &< (k_1 + k_2) f(x_0) \\ &+ f'(x_0)(k_1 x_1 + k_2 x_2 - (k_1 + k_2)x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

## 凸 (凹) 函数的性质 1

- 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向上凸函数, 则对任意两个不相等的  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $0 < k_1, k_2 < 1$ ,  $k_1 + k_2 = 1$ ,  $x_0 = k_1 x_1 + k_2 x_2$ , 有

$$k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) < f(x_0)$$

类似地, 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个凹函数, 则有  $k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) > f(x_0)$ .

- 证明: 若  $f(x)$  是一个凸函数, 则  $f(x_k) < f(x_0) + f'(x_0)(x_k - x_0) (k = 1, 2)$ ,

$$\begin{aligned} k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) &< (k_1 + k_2) f(x_0) \\ &+ f'(x_0)(k_1 x_1 + k_2 x_2 - (k_1 + k_2)x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

## 凸 (凹) 函数的性质 1

- 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向上凸函数, 则对任意两个不相等的  $x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $0 < k_1, k_2 < 1$ ,  $k_1 + k_2 = 1$ ,  $x_0 = k_1 x_1 + k_2 x_2$ , 有

$$k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) < f(x_0)$$

类似地, 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个凹函数, 则有  $k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) > f(x_0)$ .

- 证明: 若  $f(x)$  是一个凸函数, 则  $f(x_k) < f(x_0) + f'(x_0)(x_k - x_0) (k = 1, 2)$ ,

$$\begin{aligned} k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) &< (k_1 + k_2) f(x_0) \\ &+ f'(x_0)(k_1 x_1 + k_2 x_2 - (k_1 + k_2)x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

## 凸 (凹) 函数的性质 2

- 若  $f(x)$  是凸函数,  $x_k \in (a, b) (k = 1, 2, \dots, n)$ ,  $0 < c_k < 1$  满足  $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$ , 则有

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) \leq f(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n).$$

上面不等式取等号当且仅当全部  $x_k$  相等.

证明: 设  $x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ , 则有

$$c_k f(x_k) \leq c_k f(x_0) + f'(x_0)(c_k x_k - c_k x_0) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

且上面的不等式取等号当且仅当  $x_k = x_0$ .

## 凸 (凹) 函数的性质 2

- 若  $f(x)$  是凸函数,  $x_k \in (a, b) (k = 1, 2, \dots, n)$ ,  $0 < c_k < 1$  满足  $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$ , 则有

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) \leq f(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n).$$

上面不等式取等号当且仅当全部  $x_k$  相等.

证明: 设  $x_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ , 则有

$$c_k f(x_k) \leq c_k f(x_0) + f'(x_0)(c_k x_k - c_k x_0) (k = 1, 2, \dots, n),$$

且上面的不等式取等号当且仅当  $x_k = x_0$ .

# 凸凹性的应用

- 对上凸函数有  $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ ; 对凹函数有  $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ .
- 例: 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数,  $p > 1$  时有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \left( \frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$0 < p < 1$  时有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \left( \frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 利用  $f(x) = x^p$ . 当  $p > 1$  时,  $f(x)$  是  $(0, +\infty)$  上的下凸函数,  $0 < p < 1$  有是上凸函数.

# 凸凹性的应用

- 对上凸函数有  $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ ; 对凹函数有  $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ .
- 例: 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是正实数,  $p > 1$  时有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \left( \frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$0 < p < 1$  时有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \left( \frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 利用  $f(x) = x^p$ . 当  $p > 1$  时,  $f(x)$  是  $(0, +\infty)$  上的下凸函数,  $0 < p < 1$  有是上凸函数.



## 凸 (凹) 函数的性质 3

- 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向上凸的可微函数, 则  $f'(x)$  严格递减  
证明: 对任意的  $x_1 < x_2$ , 由  $f$  是凸函数,

$$f(x_1) < f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

$$f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

因此

$$f'(x_1) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_2).$$

## 凸 (凹) 函数的性质 3

- 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向上凸的可微函数, 则  $f'(x)$  严格递减  
证明: 对任意的  $x_1 < x_2$ , 由  $f$  是凸函数,

$$f(x_1) < f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

$$f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

因此

$$f'(x_1) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_2).$$

## 凸 (凹) 函数的性质 3

- 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是一个向上凸的可微函数, 则  $f'(x)$  严格递减  
证明: 对任意的  $x_1 < x_2$ , 由  $f$  是凸函数,

$$f(x_1) < f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

$$f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

因此

$$f'(x_1) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_2).$$

# 函数凸凹性的判断 1

- 命题：若  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上严格递减，则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上为上凸函数，若  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上严格递增，则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上为下凸函数.  
证明：若  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上严格递减， $x \neq x_0$ ，存在  $\xi$  位于  $x_0$  与  $x$  之间，使得

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) < 0.$$

$f(x)$  为上凸函数

# 函数凸凹性的判断 1

- 命题：若  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上严格递减，则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上为上凸函数，若  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上严格递增，则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上为下凸函数.  
证明：若  $f'(x)$  在  $(a, b)$  上严格递减， $x \neq x_0$ ，存在  $\xi$  位于  $x_0$  与  $x$  之间，使得

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) < 0.$$

$f(x)$  为上凸函数

## 函数凸凹性的判断 2

- 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  二阶可导, 若  $f''(x) > 0$  对任意  $x \in (a, b)$  成立, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是凹函数;  $f''(x) < 0$  对任意  $x \in (a, b)$  成立, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是凸函数

证明 1: 有  $f''(x) > 0$ ,  $f'(x)$  严格增, 从而  $f(x)$  是凹函数.

证明 2:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

## 函数凸凹性的判断 2

- 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  二阶可导, 若  $f''(x) > 0$  对任意  $x \in (a, b)$  成立, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是凹函数;  $f''(x) < 0$  对任意  $x \in (a, b)$  成立, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是凸函数

证明 1: 有  $f''(x) > 0$ ,  $f'(x)$  严格增, 从而  $f(x)$  是凹函数.

证明 2:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

## 函数凸凹性的判断 2

- 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  二阶可导, 若  $f''(x) > 0$  对任意  $x \in (a, b)$  成立, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是凹函数;  $f''(x) < 0$  对任意  $x \in (a, b)$  成立, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上是凸函数

证明 1: 有  $f''(x) > 0$ ,  $f'(x)$  严格增, 从而  $f(x)$  是凹函数.

证明 2:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



# 例

- $f(x) = x^p, x > 0$ .  $f'(x) = px^{p-1}$ ,  $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ . 当  $p > 1$  或  $p < 0$  时,  $f'(x)$  严格单调增 ( $f''(x) > 0$ ), 是下凸函数; 当  $0 < p < 1$  时,  $f'(x)$  严格单调减 ( $f''(x) < 0$ ), 是上凸函数.

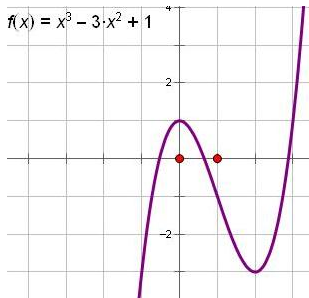
- 例: 设  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ,

则有  $y''(x) = 6x + 2b$ .

当  $x > -\frac{b}{3}$  时,  $y'' > 0$ ,  $(-\frac{b}{3}, +\infty)$

上是凹函数;  $x < -\frac{b}{3}$  时,  $y'' < 0$ ,

$y'' < 0$ ,  $(-\infty, -\frac{b}{3})$  上凸.  $f(x)$  在  $-\frac{b}{3}$  两边的凸凹性相反, 称  $-\frac{b}{3}$  为  $f(x)$  的拐点.



# 例

- $f(x) = x^p, x > 0. f'(x) = px^{p-1}, f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ . 当  $p > 1$  或  $p < 0$  时,  $f'(x)$  严格单调增 ( $f''(x) > 0$ ), 是下凸函数; 当  $0 < p < 1$  时,  $f'(x)$  严格单调减 ( $f''(x) < 0$ ), 是上凸函数.

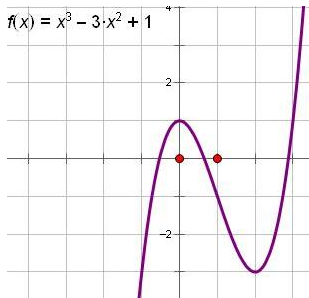
- 例: 设  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ,

则有  $y''(x) = 6x + 2b$ .

当  $x > -\frac{b}{3}$  时,  $y'' > 0, (-\frac{b}{3}, +\infty)$

上是凹函数;  $x < -\frac{b}{3}$  时,  $y'' < 0$ ,

$y'' < 0, (-\infty, -\frac{b}{3})$  上凸.  $f(x)$  在  $-\frac{b}{3}$  两边的凸凹性相反, 称  $-\frac{b}{3}$  为  $f(x)$  的拐点.



# 拐点的定义

- 上例中  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  在  $-\frac{b}{3}$  两边的凸凹性相反, 称  $-\frac{b}{3}$  为  $f(x)$  的拐点.
- 定义: 若  $x_0$  为  $f(x)$  定义域的一个内点, 存在  $\delta$ , 使得  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0)$  和  $(x_0, x_0 + \delta)$  上的凸凹性相反, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的拐点.
- 性质: 设  $f(x) \in C^2((a, b))$ . 若  $c \in (a, b)$  是  $f(x)$  的拐点, 则  $f''(c) = 0$ .  
证明: 由于  $f'(x)$  在  $c$  两边的单调性相反, 则  $f''(x)$  在  $c$  的一边非负, 一边非正, 由连续性,  $f''(c) = 0$ .
- 注: 二阶导数为 0 的点不一定是拐点, 如  $y = x^4, x_0 = 0$ .

# 拐点的定义

- 上例中  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  在  $-\frac{b}{3}$  两边的凸凹性相反, 称  $-\frac{b}{3}$  为  $f(x)$  的拐点.
- 定义: 若  $x_0$  为  $f(x)$  定义域的一个内点, 存在  $\delta$ , 使得  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0)$  和  $(x_0, x_0 + \delta)$  上的凸凹性相反, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的拐点.
- 性质: 设  $f(x) \in C^2((a, b))$ . 若  $c \in (a, b)$  是  $f(x)$  的拐点, 则  $f''(c) = 0$ .  
证明: 由于  $f'(x)$  在  $c$  两边的单调性相反, 则  $f''(x)$  在  $c$  的一边非负, 一边非正, 由连续性,  $f''(c) = 0$ .
- 注: 二阶导数为 0 的点不一定是拐点, 如  $y = x^4, x_0 = 0$ .

# 拐点的定义

- 上例中  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  在  $-\frac{b}{3}$  两边的凸凹性相反, 称  $-\frac{b}{3}$  为  $f(x)$  的拐点.
- 定义: 若  $x_0$  为  $f(x)$  定义域的一个内点, 存在  $\delta$ , 使得  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, 0)$  和  $(0, x_0 + \delta)$  上的凸凹性相反, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的拐点.
- 性质: 设  $f(x) \in C^2((a, b))$ . 若  $c \in (a, b)$  是  $f(x)$  的拐点, 则  $f''(c) = 0$ .

证明: 由于  $f'(x)$  在  $c$  两边的单调性相反, 则  $f''(x)$  在  $c$  的一边非负, 一边非正, 由连续性,  $f''(c) = 0$ .

- 注: 二阶导数为 0 的点不一定是拐点, 如  $y = x^4, x_0 = 0$ .

# 拐点的定义

- 上例中  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  在  $-\frac{b}{3}$  两边的凸凹性相反, 称  $-\frac{b}{3}$  为  $f(x)$  的拐点.
- 定义: 若  $x_0$  为  $f(x)$  定义域的一个内点, 存在  $\delta$ , 使得  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0)$  和  $(x_0, x_0 + \delta)$  上的凸凹性相反, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的拐点.
- 性质: 设  $f(x) \in C^2((a, b))$ . 若  $c \in (a, b)$  是  $f(x)$  的拐点, 则  $f''(c) = 0$ .  
证明: 由于  $f'(x)$  在  $c$  两边的单调性相反, 则  $f''(x)$  在  $c$  的一边非负, 一边非正, 由连续性,  $f''(c) = 0$ .
- 注: 二阶导数为 0 的点不一定是拐点, 如  $y = x^4, x_0 = 0$ .

# 拐点的定义

- 上例中  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  在  $-\frac{b}{3}$  两边的凸凹性相反, 称  $-\frac{b}{3}$  为  $f(x)$  的拐点.
- 定义: 若  $x_0$  为  $f(x)$  定义域的一个内点, 存在  $\delta$ , 使得  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0)$  和  $(x_0, x_0 + \delta)$  上的凸凹性相反, 则称  $x_0$  为  $f(x)$  的拐点.
- 性质: 设  $f(x) \in C^2((a, b))$ . 若  $c \in (a, b)$  是  $f(x)$  的拐点, 则  $f''(c) = 0$ .  
证明: 由于  $f'(x)$  在  $c$  两边的单调性相反, 则  $f''(x)$  在  $c$  的一边非负, 一边非正, 由连续性,  $f''(c) = 0$ .
- 注: 二阶导数为 0 的点不一定是拐点, 如  $y = x^4, x_0 = 0$ .

# 拐点的判别

- 拐点的判别: 满足下列条件之一的  $x_0$  是拐点:
  1. 若  $f'(x)$  在  $x_0$  两边的单调性相反.
  2.  $f''(x)$  在  $x_0$  两边的正负相反.
  3.  $f''(x_0) = 0$ ,  $f'''(x_0) \neq 0$ .



# 渐近线 1

- 当曲线上一点  $P$  沿曲线趋向无穷远点时, 如果  $P$  到一条直线的距离无限趋近于零, 那么这条直线称为这条曲线的渐近线.
- 曲线  $y = f(x)$ , 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时曲线上的点  $(x, f(x))$  趋向无穷远点;  
若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 当  $x \rightarrow x_0$  时曲线上的点  $(x, f(x))$  趋向无穷远点.
- 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时,  $y = f(x)$  上的点  $(x, f(x))$  到直线  $y = ax + b$  的距离

$$\frac{|f(x) - (ax + b)|}{\sqrt{a^2 + 1}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$$

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $y = f(x)$  上的点  $(x, f(x))$  到直线  $x = x_0$  的距离  
 $|x - x_0| \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$ .

# 渐近线 1

- 当曲线上一一点  $P$  沿曲线趋向无穷远点时, 如果  $P$  到一条直线的距离无限趋近于零, 那么这条直线称为这条曲线的渐近线.
- 曲线  $y = f(x)$ , 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时曲线上的点  $(x, f(x))$  趋向无穷远点; 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 当  $x \rightarrow x_0$  时曲线上的点  $(x, f(x))$  趋向无穷远点.
- 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时,  $y = f(x)$  上的点  $(x, f(x))$  到直线  $y = ax + b$  的距离

$$\frac{|f(x) - (ax + b)|}{\sqrt{a^2 + 1}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$$

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $y = f(x)$  上的点  $(x, f(x))$  到直线  $x = x_0$  的距离  $|x - x_0| \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$ .

# 渐近线 1

- 当曲线上的点  $P$  沿曲线趋向无穷远点时, 如果  $P$  到一条直线的距离无限趋近于零, 那么这条直线称为这条曲线的渐近线.
- 曲线  $y = f(x)$ , 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时曲线上的点  $(x, f(x))$  趋向无穷远点;  
若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , 当  $x \rightarrow x_0$  时曲线上的点  $(x, f(x))$  趋向无穷远点.
- 当  $x \rightarrow \pm\infty$  时,  $y = f(x)$  上的点  $(x, f(x))$  到直线  $y = ax + b$  的距离

$$\frac{|f(x) - (ax + b)|}{\sqrt{a^2 + 1}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$$

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ,  $y = f(x)$  上的点  $(x, f(x))$  到直线  $x = x_0$  的距离  
 $|x - x_0| \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$ .

## 渐近线 2

- 若  $y = f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 则称  $y = ax + b$  是  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的渐近线. 类似可定义  $x \rightarrow -\infty$  的渐近线.
- 若  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ , 则称  $x = a$  是  $y = f(x)$  的 (垂直) 渐近线.
- 定理: 若  $y = f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义,  $y = ax + b$  是  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的渐近线的充分必要条件是  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .  
证明: 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{f(x)}{x} - a) = 0$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .

## 渐近线 2

- 若  $y = f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 则称  $y = ax + b$  是  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的渐近线. 类似可定义  $x \rightarrow -\infty$  的渐近线.
- 若  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ , 则称  $x = a$  是  $y = f(x)$  的 (垂直) 渐近线.
- 定理: 若  $y = f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义,  $y = ax + b$  是  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的渐近线的充分必要条件是  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .  
证明: 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{f(x)}{x} - a) = 0$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .

## 渐近线 2

- 若  $y = f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 则称  $y = ax + b$  是  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的渐近线. 类似可定义  $x \rightarrow -\infty$  的渐近线.
- 若  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ , 则称  $x = a$  是  $y = f(x)$  的 (垂直) 渐近线.
- 定理: 若  $y = f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义,  $y = ax + b$  是  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的渐近线的充分必要条件是  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .

证明: 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{f(x)}{x} - a) = 0$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .

## 渐近线 2

- 若  $y = f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 则称  $y = ax + b$  是  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的渐近线. 类似可定义  $x \rightarrow -\infty$  的渐近线.
- 若  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ , 则称  $x = a$  是  $y = f(x)$  的 (垂直) 渐近线.
- 定理: 若  $y = f(x)$  在  $(c, +\infty)$  有定义,  $y = ax + b$  是  $y = f(x)$  在  $x \rightarrow +\infty$  时的渐近线的充分必要条件是  $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .  
证明: 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{f(x)}{x} - a) = 0$ ,  
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .

## 渐近线 -例 1

- 例：双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的渐近线.

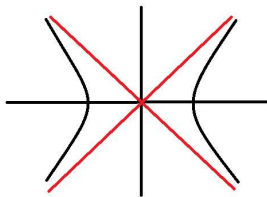
上半部分  $f(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \frac{b}{a}x) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{b}{a}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + \frac{b}{a}x) = 0$$

因此  $y = \frac{b}{a}x$  是  $x \rightarrow +\infty$  时  $f(x)$

的渐近线.  $y = -\frac{b}{a}x$  是  $x \rightarrow -\infty$  时  $f(x)$

的渐近线. 双曲线的下半部分可类似讨论.





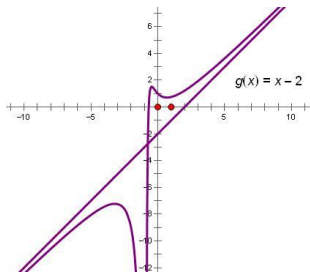
## 渐近线 -例 2

● 例：求  $y = \frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$  的渐近线.

● 解：  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{(x+1)^2} = -2,$$

因此  $y = x - 2$  是  $x \rightarrow \pm\infty$  时  $f(x)$  的渐近线. 显然  $x = -1$  是垂直渐近线.



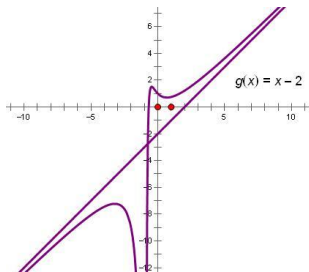
## 渐近线 -例 2

● 例：求  $y = \frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$  的渐近线.

● 解：  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{(x+1)^2} = -2,$$

因此  $y = x - 2$  是  $x \rightarrow \pm\infty$  时  $f(x)$  的渐近线. 显然  $x = -1$  是垂直渐近线.



- 函数作图的步骤:

- 确定定义域, 间断点
- 求导数, 确定不可微点, 稳定点, 单调区间, 极值点
- 求  $f''(x)$ , 确定凸凹区间, 拐点.
- 求渐近线.
- 求出几个点 (包括特殊点) 的值.

# 函数作图

- 函数作图的步骤:

- 确定定义域, 间断点
- 求导数, 确定不可微点, 稳定点, 单调区间, 极值点
- 求  $f''(x)$ , 确定凸凹区间, 拐点.
- 求渐近线.
- 求出几个点 (包括特殊点) 的值.

# 函数作图

- 函数作图的步骤:

- 确定定义域, 间断点
- 求导数, 确定不可微点, 稳定点, 单调区间, 极值点
- 求  $f''(x)$ , 确定凸凹区间, 拐点.
- 求渐近线.
- 求出几个点 (包括特殊点) 的值.

# 函数作图

- 函数作图的步骤:

- 确定定义域, 间断点
- 求导数, 确定不可微点, 稳定点, 单调区间, 极值点
- 求  $f''(x)$ , 确定凸凹区间, 拐点.
- 求渐近线.
- 求出几个点 (包括特殊点) 的值.

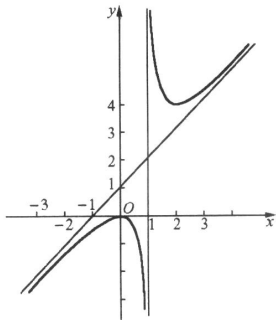
# 函数作图

- 函数作图的步骤:

- 确定定义域, 间断点
- 求导数, 确定不可微点, 稳定点, 单调区间, 极值点
- 求  $f''(x)$ , 确定凸凹区间, 拐点.
- 求渐近线.
- 求出几个点 (包括特殊点) 的值.

# 函数作图

- 例:  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,
  - 定义域为  $x \neq 1$ , 没有间断点.
  - 导数  $y'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ , 没有不可微点. 稳定点  $x=0, 2$ , 区间  $(-\infty, 0)$  上函数递增,  $(0, 1)$  和  $(1, 2)$  上递减,  $x=0$  是极大点,  $x=2$  是极小点.
  - $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ , 区间  $(-\infty, 1)$  上函数凸,  $(1, +\infty)$  上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线  $y = x + 1 (x \rightarrow \pm\infty) (\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1, f(x) - x = \frac{x}{x-1} \rightarrow 1), x = 1$ .
  - 几个点的值:  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  
 $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}, f(2) = 4, f(3) = \frac{9}{2}$ .

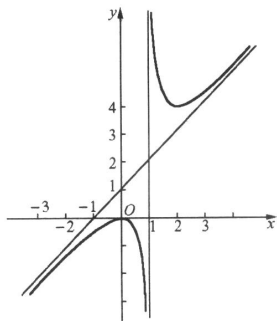




# 函数作图

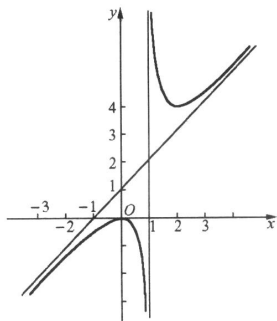
● 例:  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,

- 定义域为  $x \neq 1$ , 没有间断点.
- 导数  $y'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ , 没有不可微点. 稳定点  $x=0, 2$ , 区间  $(-\infty, 0)$  上函数递增,  $(0, 1)$  和  $(1, 2)$  上递减,  $x=0$  是极大点,  $x=2$  是极小点.
- $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ , 区间  $(-\infty, 1)$  上函数凸,  $(1, +\infty)$  上函数凹. 没有拐点
- 渐近线  $y = x + 1 (x \rightarrow \pm\infty)$  ( $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ ,  
 $f(x) - x = \frac{x}{x-1} \rightarrow 1$ ),  $x = 1$ .
- 几个点的值:  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  
 $f(0) = 0$ ,  $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = \frac{9}{2}$ .



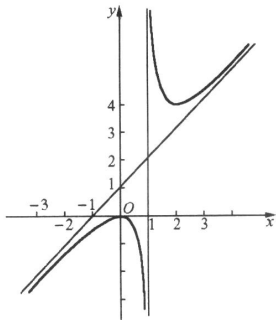
# 函数作图

- 例:  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,
  - 定义域为  $x \neq 1$ , 没有间断点.
  - 导数  $y'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ , 没有不可微点. 稳定点  $x=0, 2$ , 区间  $(-\infty, 0)$  上函数递增,  $(0, 1)$  和  $(1, 2)$  上递减,  $x=0$  是极大点,  $x=2$  是极小点.
  - $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ , 区间  $(-\infty, 1)$  上函数凸,  $(1, +\infty)$  上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线  $y = x + 1 (x \rightarrow \pm\infty)$  ( $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ ,  
 $f(x) - x = \frac{x}{x-1} \rightarrow 1$ ),  $x = 1$ .
  - 几个点的值:  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  
 $f(0) = 0$ ,  $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = \frac{9}{2}$ .



# 函数作图

- 例:  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,
  - 定义域为  $x \neq 1$ , 没有间断点.
  - 导数  $y'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ , 没有不可微点. 稳定点  $x=0, 2$ , 区间  $(-\infty, 0)$  上函数递增,  $(0, 1)$  和  $(1, 2)$  上递减,  $x=0$  是极大点,  $x=2$  是极小点.
  - $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ , 区间  $(-\infty, 1)$  上函数凸,  $(1, +\infty)$  上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线  $y = x + 1 (x \rightarrow \pm\infty) (\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1, f(x) - x = \frac{x}{x-1} \rightarrow 1), x = 1$ .
  - 几个点的值:  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  
 $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}, f(2) = 4, f(3) = \frac{9}{2}$ .



# 函数作图

- 例:  $y = \frac{x^2}{x-1}$ ,
  - 定义域为  $x \neq 1$ , 没有间断点.
  - 导数  $y'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ , 没有不可微点. 稳定点  $x=0, 2$ , 区间  $(-\infty, 0)$  上函数递增,  $(0, 1)$  和  $(1, 2)$  上递减,  $x=0$  是极大点,  $x=2$  是极小点.
  - $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ , 区间  $(-\infty, 1)$  上函数凸,  $(1, +\infty)$  上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线  $y = x + 1 (x \rightarrow \pm\infty) (\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1, f(x) - x = \frac{x}{x-1} \rightarrow 1), x = 1$ .
  - 几个点的值:  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  
 $f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}, f(2) = 4, f(3) = \frac{9}{2}$ .

