北京大学线性代数 B 期中试题

（2023-2024 学年第一学期）

1.(10 分)判断下面方程组是否有解.若有解给出方程组的全部解，若无解请给出理由。

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

2.(10 分)已知线性方程组

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + (a_2+b)x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + (a_3+b)x_3 + \dots + a_nx_n = 0, \\ \dots\dots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + (a_n+b)x_n = 0. \end{cases}$$

其中$\sum_{i=1}^{n} a_n \neq 0$.

(1).计算系数矩阵的行列式。

(2).讨论$a_1,\dots,a_n,b$满足什么条件时，方程组仅有零解；方程组有非零解。

(3).有非零解时，请给出方程的一个基础解系。

3.(15 分)计算下面行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

4.(13 分)求下面行列式中所有元素的代数子余式之和。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5.(10 分)已知向量组$\alpha_1=(3,4,-2)^T,\alpha_2=(2,-5,0)^T,\alpha_3=(5,0,-1)^T,\alpha_4=(3,3,-3)^T$，求这个向量组的一个极大线性无关组。

6.(12 分)求如下n-阶方阵的秩

$$\begin{pmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{pmatrix}$$

7.（10 分）

给定n个彼此不相同的数$a_1, a_2, \dots, a_n$. 设$b_1, b_2, \dots, b_n$为任意n个数. 证明：存在唯一一个次数不超过$n-1$的多项式$f(x)$使得$f(a_i) = b_i, \forall, i = 1, \dots, n$.

8.（10 分）设M为行列式不为零的 5-阶矩阵. 证明：存在一个行列式不为零的 5-阶上三角矩阵B使得矩阵BM有如下性质：对于$\forall 1 \leq \mathrm{i} \leq 5$,都存在且只存在$BM$的一行，使得该行的前$i-1$个位置为零，第$i$个位置不为零.