北京大学线性代数A期中试题

记号说明： $\mathbb{C}$ 表示复数域;$\mathbb{Q}$表示有理数域； $|A|$表示矩阵A的行列式, A^T表示矩阵A的转置矩阵.

1. (10分)当a取何值时，下列齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} ax_1 & & & + & x_4 & = 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & - & x_4 & = 0 \\ (a+2)x_1 & - & x_2 & & + & 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + 3x_3 & + & ax_4 & = 0 \end{cases}$$

解答：原式

$$\xlongequal{④+②\times(-1),③+①\times 1} \begin{vmatrix} x-y & y & z-x & x+y+z \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[①+②\times 1]{} \begin{vmatrix} x & y & z-x & x+y+z \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[③+①\times 1]{} \begin{vmatrix} x & y & z & x+y+z \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
\xlongequal{\quad\quad} 2\begin{vmatrix} x & y & z & x+y+z \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$= 2 \times \frac{1}{2}$

$= 1$

2. (45分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(a) 求 A 列向量组的一个极大无关组, 并用此无关组线性表出 A 其余的列向量;

(b) 求齐次线性方程组 $AX = 0$ 解空间的一组基;

(c) 将 A 写成 BC 的形式，其中 B 的列向量组线性无关, C 的行向量组线性无关.

解答：

(a) 初等行变换后有如下形式$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$故极大无关组为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$; 且$\alpha_3 =$ $\alpha_1 - \alpha_2; \alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$.

(b) 由行简化阶梯形矩阵得解的公式

$$
\begin{cases} (x_1 = -x_3 - 2x_5 \\ x_2 = x_3 - x_5 \\ x_4 = -x_5 \end{cases}, x_3, x_5\text{为自由未知量.}
$$

3. (10分)计算行列式

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}_{n\times n}
$$

解答：原式

$$\xlongequal{①+②\times\frac{-1}{2},①+③\times\frac{-1}{3},①+④\times\frac{-1}{4}\cdots}\begin{vmatrix}1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & n\end{vmatrix}_{n\times n}$$

$=n!(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n})$

4. (10分)判断对错,正确请给出证明,错误请举出反例. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,向量组 $\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_s+\beta$ 线性相关, 则 β一定能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

解:正确. 假设 β 不能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出,则$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性无关.于是 $\alpha_1+\beta,\cdots,\alpha_s+\beta,\beta$ 也线性无关(对向量组做初等变换,向量组的秩不变). 进而部分组$\alpha_1+\beta,\cdots,\alpha_s+\beta$ 线性无关.这与题设矛盾.

5. (10分)

(a) 证明：任给 $n+1$ 个 n 阶方阵 $A_1,\cdots,A_{n+)}\in M_n(\mathbb{Q})$,总能找到不全为零的有理数 $k_1,\cdots,k_{n+1}$,使得矩阵$k_1A_1+\cdots+k_{n+1}A_{n+1}$的秩 $<n$.

(b) 对任意 n 个($n>1$是任意自然数)方阵 $A_1,\cdots,A_n\in M_n(\mathbb{Q})$, 是否总有不全为零的有理数 $k_1,\cdots,k_n$,使得矩阵 $k_1A_1+\cdots+k_nA_n$的秩 $<n$?

(c) 证：1) 设方阵 A_i 的第一个列向量为 $\alpha_i,i=1,\cdots,n+1$.在 Q^n 中,任意 $n+1$ 个向量都线性相关.故存在不全为零的有理数$k_1,\cdots,k_{n+1}$,使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{n+1}\alpha_{n+1}=0$. 由于矩阵 $k_1A_1+\cdots+k_{n+1}A_{n+1}$的第一列为零向量, 其秩 $<n$.
2)不一定成立. 例如在 $n=2$ 时, 取

$$A_1=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},A_2=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}$$

,都属于$M_2(Q)$. 则矩阵 $x_1A_1+x_2A_2$的行列式为 $x_1^2+x_2{}^2$.只要 $x_1,x_2\in Q$ 不全为零,矩阵 $x_1A_1+x_2A_2$ 非退化.

6. (10分) 设线性方程组$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\alpha_i=\beta$, 其中列向量$\alpha_i(i=1,\cdots,n),\beta\in\mathbb{F}^m$. 证明:第$k$个列向量 α_k不能由其余列向量线性表出的充分必要条件是任何解 X 的第 k 个分量 x_k 取同一值.

   证明:第k个列向量 $\overrightarrow{\alpha_k}$不能由其余列向量线性表出的充分必要条件是任何解 $\overrightarrow{X}$ 的第 k 个分量 x_k 取同一值.

   设有两个解$\overrightarrow{X}=(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n),\overrightarrow{X^*}(x_1^*,\cdots,x_k^*,\cdots,x_n^*)$ 其中 $x_k\neq x_k^*$, $(x_k-x_k^{)}\neq 0$. $(x_1-x_1^{)}\overrightarrow{\alpha_1}+\cdots+(x_k-x_k^{)}\overrightarrow{\alpha_k}+\cdots+(x_n-x_n^{)}\overrightarrow{\alpha_n}=0$, 这样$\overrightarrow{\alpha_k}$由其余列向量线性表出.反之，若有 $\overrightarrow{\alpha_k}=t_1\overrightarrow{\alpha_1}+\cdots+t_{k-1}\overrightarrow{\alpha_{k-1}}+t_{k+1}\overrightarrow{\alpha_{k+1}}+t_n\overrightarrow{\alpha_n}$, 则$T=(t_1,\cdots,t_{k-1},-1,t_{k+1},\cdots,t_n)$

   是$AX=0$解，取$AX=\beta$的解X, 从而$X^*=T+X$是$AX=\beta$的解. 但是X 和X^* 第 k 个分量不同。

7. 如果齐次线性方程组 $a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,n}x_n=0$ $(i=1,\cdots,s)$的解全是方程$b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$的解, 则行向量$(b_1,\cdots,b_n)$可由行向量组$(a_{1,1},\cdots,a_{1,n}),\cdots,(a_{s,1},\cdots,a_{s,n})$线性表出.

   解答：设$W_1=\{\overrightarrow{X}\mid A\overrightarrow{X}=0\}$ 设矩阵

$$B=\begin{pmatrix} A \\ \beta, \end{pmatrix}$$

   $W_2=\{\overrightarrow{X}\mid B\overrightarrow{X}=0\}$证明$W_1=W_2$从而$A,B$秩相同。