北京大学 19/20 学年第 1 学期
高数 B 期中试题

1. （20 分） 求极限：

(a)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) \tag{1}$$

(b)
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \tag{2}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n^2]{n}-1) \tag{3}$$

(d)
$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}} \tag{4}$$

2. （20 分） 求积分：

(a)
$$\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

(b)
$$\int_0^1 \frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

(c)
$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

(d)
$$\int_{-1}^1 (x^4+2x^2+1)\sin^3 x\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

3. （10 分）给定一个有区间 $[a,b]$, 已知函数 $f(x):[a,b]\to[a,b]$ 满足对于任意 $x,y\in[a,b]$ 都有
$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|. \tag{9}$$
证明由任意选取的初值 $x_1\in[a,b]$ 及推导公式
$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n)) \tag{10}$$
所定义的序列 $\{x_n\}$ 存在极限。

4. （10 分）求导数：

(a) 设 $y=(\arcsin x)^2$，求 $y^{(n)}(0)$；

(b)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

5. （10 分）函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并且 $f(0)=f(1)$。证明：存在 $c\in[0,1]$，使得 $f(c)=f(c+\frac{1}{3})$ 。

6. （10 分）函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数。证明：对于任意 $x\in[0,1]$，有
$$|f(x)|\le\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t+\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t。 \tag{12}$$

给出所有可能的 $f(x)$，使得上述不等式中等号对于所有 $x \in [0,1]$ 均成立。

7. （20 分）考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases} \tag{13}$$

其中 m 为正整数。在 $x \neq 0$ 处，求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$。求 m 满足的条件，使得 $f(x)$ 有连续的二阶导函数。