线性代数 B 习题课讲义

李则成

2024 年 11 月 24 日

1 绪论

2 行列式及其计算

习题 2.1. 求 n 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$ 的行列式。

证明. 记

$$f_n(a)=\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

考虑对最后一行进行代数余子式展开，对 $n\geq 2$，有

$$f_n(a)=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}+af_{n-1}(a)=-a^{n-2}+af_{n-1}(a)$$

对上式进行迭代，

$$\begin{aligned} f_n(a)&=-a^{n-2}+a(-a^{n-3}+af_{n-2}(a))=-2a^{n-2}+a^2f_{n-2}(a) \\ &=\cdots=-ka^{n-2}+a^kf_{n-k}(a)=\cdots \\ &=-(n-1)a^{n-2}+a^{n-1}\cdot a=a^{n-2}(a^2-(n-1)) \end{aligned}$$

□

习题 2.2. 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & & & & \\ 2 & 5 & 3 & & & \\ & 2 & 5 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 5 & 3 \\ & & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

证明. 1. 直接由定义计算可得结果为 160。接下来我们做一点拓展。对换第 2，4 行，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

形如上式右端的矩阵被称作**循环矩阵**。更一般地，我们考虑下列 n 维情形，令

$$A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

令 $J = A(0, 1, 0, \cdots, 0)$，为 $a_1 = 1$，其余 a_i 均为 0 的循环矩阵。容易验证，J^k 为 $a_k = 1$，其余 a_i 均为 0 的循环矩阵 $(0 \le k \le n-1)$。从而我们有

$$A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-2} J^{n-2} + a_{n-1} J^{n-1}$$

令 $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ 为多项式函数，则上式可记为 $A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = g(J)$。

另一方面，我们可计算 J 的特征多项式 $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - J) = \lambda^n - 1$。因此 J 的 n 个特征值即为 $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$，其中 $\omega_k\,(0 \le k \le n-1)$ 为 n 次单位根，即 $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$。

综上，我们可求得循环矩阵 $A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ 的行列式

$$\det A(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} g(\omega_k)$$

循环矩阵在离散 Fourier 变换中起到重要作用。从上述过程中也能看到它是可被对角化的，我们在后续学到矩阵的相似对角化章节时可以回到这个例子上。

2. 一般地，我们考虑

$$f_n(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}_{n \times n}$$

对第 1 列做代数余子式展开，

$$f_n(a, b, c) = a f_{n-1}(a, b, c) - c \begin{vmatrix} b & & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

对上式右端最后一项的 $n-1$ 阶行列式，对第 1 行做代数余子式展开，得

$$f_n(a,b,c) = af_{n-1}(a,b,c) - bcf_{n-2}(a,b,c) \tag{2.1}$$

得到一个线性二阶递推式（二阶差分方程）。我们容易得到首两项 $f_0(a,b,c)=1, f_1(a,b,c)=a$。为简便起见，我们接下来记 $f_n = f_n(a,b,c)$。求解差分方程 (2.1) 的方法有很多，我们将展示一种无需利用线性代数知识的初等办法。

不妨设（其中 λ 为待定系数）

$$f_n - \lambda f_{n-1} = (a-\lambda)(f_{n-1} - \lambda f_{n-2})$$

为使上式与 (2.1) 等价，我们要求 λ 满足下述方程（这通常也被称为特征方程）

$$(a-\lambda)\lambda = bc$$

解之，得

$$\lambda_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$$

当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时，代回可得

$$\begin{cases} f_{n+1} - \lambda_1 f_n = \lambda_2(f_n - \lambda_1 f_{n-1}) = \cdots = \lambda_2^n(f_1 - \lambda_1 f_0) = \lambda_2^{n+1} \\ f_{n+1} - \lambda_2 f_n = \lambda_1(f_n - \lambda_2 f_{n-1}) = \cdots = \lambda_1^n(f_1 - \lambda_2 f_0) = \lambda_1^{n+1} \end{cases}$$

进而有 $(\lambda_1 - \lambda_2)f_n = \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}$，即

$$f_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$ 时，可以得到（请读者自行验证）

$$f_n = (n+1)\lambda_1^n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

最后，将 $a=5, b=3, c=2$ 代入，得 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$，从而 $f_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$。 □

习题 2.3. 计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

证明. 记该行列式的值为 D_n，则有

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & & & \\ -1 & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & n-1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + nD_{n-1} \\ &= (n-1)! + nD_{n-1} \end{aligned}$$

不断迭代上式，结合 $D_1=2$，可得

$$\begin{aligned}D_n&=(n-1)!+n((n-2)!+(n-1)D_{n-2})=\cdots\\&=n!\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots\frac{1}{2}+1\right)+n!\end{aligned}$$

□

习题 2.4. *求多项式*

$$p(x)=\begin{vmatrix}x^3-3 & 1 & -3 & 2x+2\\ -7 & 5 & -2x & 1\\ x+3 & -1 & 3 & 3x^2-2\\ 9 & x^3 & 6 & -6\end{vmatrix}$$

的次数、最高次项系数和常数项。

证明. 根据行列式的计算式，$p(x)$ 的最高次项为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,4\,2)}x^3(-2x)3x^2x^3=-6x^9$$

因此 $p(x)$ 的次数为 9，最高次项系数为 -6，而常数项为

$$\begin{vmatrix}-3 & 1 & -3 & 2\\ -7 & 5 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 3 & -2\\ 9 & 0 & 6 & -6\end{vmatrix}=0$$

□

习题 2.5. *已知 4 元线性方程组*

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ ax_1+a^2x_3=0\\ ax_2+a^2x_4=0\end{cases}\tag{2.2}$$

的解全是 4 元线性方程

$$x_1+x_2+x_3=0$$

的解，求 a 的值以及 (2.2) 的解集。

证明. 先考虑 $a=0$ 的平凡情形，此时 (2.2) 即为 $x_1+x_2+x_4=0$，其解显然不全是 $x_1+x_2+x_3=0$ 的解。因此接下来设 $a\neq 0$，我们写出 (2.2) 的矩阵形式并作初等行变换

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ a & 0 & a^2 & 0\\ 0 & a & 0 & a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & a & 0\\ 0 & 1 & 0 & a\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1-a\\ 0 & 1 & 0 & a\\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-1}{a}\end{pmatrix}$$

可得 (2.2) 的解集为

$$\begin{cases}x_1=(a-1)x_4\\ x_2=-ax_4\\ x_3=\frac{1-a}{a}x_4\end{cases},\quad x_4\text{为自由变量}$$

欲满足题意，a 需满足如下方程

$$(a-1)-a+\frac{1-a}{a}=0$$

即 $a=\frac{1}{2}$，此时 (2.2) 的解集为

$$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_4 \\ x_2=-\frac{1}{2}x_4 \\ x_3=x_4 \end{cases},\quad x_4\text{为自由变量}$$ □

习题 2.6. 设 $a\in\mathbb{R}$，记

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

1. 求 A 的行列式。

2. 求 A 的秩。

证明. 1. 记 $f_n(a)=\det A$。把 A 的第 $2,\dots,n$ 行减去第 1 行，得到

$$f_n(a)=\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a-1 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-1 & \cdots & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

当 $n\geq 2$ 时，对上式右端最后一列做代数余子式展开，

$$\begin{aligned} f_n(a)&=(-1)^{n+1}a\begin{vmatrix} a-1 & 1-a & & \\ a-1 & & 1-a & \\ \vdots & & & \ddots \\ a-1 & & & & 1-a \\ a-1 & & & & 0 \end{vmatrix}+(1-a)f_{n-1}(a) \\ &=(-1)^{n+1}a(-1)^n(a-1)(1-a)^{n-2}+(1-a)f_{n-1}(a) \\ &=a(1-a)^{n-1}+(1-a)f_{n-1}(a) \end{aligned}$$

不断迭代上式，可得

$$\begin{aligned} f_n(a)&=a(1-a)^{n-1}+(1-a)(a(1-a)^{n-2}+(1-a)f_{n-2}(a)) \\ &=2a(1-a)^{n-1}+(1-a)^2f_{n-2}(a)=\cdots \\ &=ka(1-a)^{n-1}+(1-a)^kf_{n-k}(a)=\cdots \\ &=(n-1)a(1-a)^{n-1}+(1-a)^{n-1}=(1-a)^{n-1}(1+(n-1)a) \end{aligned}$$

2. 当 $a=1$ 时，$r(A)=1$（因为每行都相等）。

当 $a=-\frac{1}{n-1}$ 时，$r(A)=n-1$（因为 n 行之和恰为 0）。

当 $a\notin\{1,-\frac{1}{n-1}\}$ 时，$r(A)=n$（因为行列式非零）。 □

习题 2.7. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & -1 & 27 & 8 \\ 1 & 1 & 81 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & & & & & a_0 \\ -1 & x & & & & a_1 \\ & -1 & x & & & a_2 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & x & a_{n-2} \\ & & & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

证明. 1. 根据列线性，该行列式的值此为 $(-1)\times 3\times 2V(1,-1,3,2)$，其中 $V(\cdot)$ 表示 Vandermonde 行列式。由已知的结论，

$$V(1,-1,3,2) = (-1-1)\times(3-1)\times(2-1)\times(3-(-1))\times(2-(-1))\times(2-3) = 48$$

因此该行列式的值为 -288。

2. 直接可由计算式得到该行列式的值为

$$(-1)^{\tau(5\,1\,3\,4\,2)}\times 1\times 1\times 3\times 4\times 2 = -24$$

3. 记该行列式的值为 $f(x;a_0,a_1,\dots,a_{n-1})$。直接对最后一列做代数余子式展开，

$$f(x;a_0,a_1,\dots,a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+1+k}a_k \begin{vmatrix} A_k & 0 \\ 0 & B_{n-1-k} \end{vmatrix} + x|A_{n-1}|$$

其中，

$$A_k = \begin{pmatrix} x & & & & \\ -1 & x & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x & \\ & & & -1 & x \end{pmatrix}_{k\times k}, \quad B_k = \begin{pmatrix} -1 & x & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & x \\ & & & & -1 \end{pmatrix}_{k\times k}$$

因此

$$\begin{aligned} f(x;a_0,a_1,\dots,a_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+1-k}a_k \det A_k \det B_k + x\det A_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+1-k}a_k x^k(-1)^{n-1-k} + x^n = \sum_{k=0}^{n-1}a_k x^k + x^n \end{aligned}$$

□

习题 2.8. 分析下面的线性方程组解的情况：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$$

证明. 记

$$A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

不难计算

$$\det A(a) = (a-1)^2(a+2)$$

因此，当 $a \notin \{1,-2\}$ 时，矩阵 $A(a)$ 可逆，因此方程组有唯一解。

当 $a=1$ 时，显然方程组等价于 $x_1+x_2+x_3=1$，方程有无穷多个解。

当 $a=-2$ 时，考虑方程组的增广矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

因此方程组无解。 □

习题 2.9. 求 n 阶方阵 A 的行列式和秩，其中

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

证明. A 的行列式可以直接由计算式得到，

$$\det A = a^n + (-1)^{n-1}$$

为求 A 的秩，不妨设 $a \neq 0$（因为当 $a=0$ 时显然 $r(A)=n$）。我们考虑如下初等变换

$$A \to \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a+(-\frac{1}{a})^{n-1} \end{pmatrix}$$

注意到

$$a + \left(-\frac{1}{a}\right)^{n-1} = \frac{\det A}{a}$$

因此当 a 为 n 次多项式 $a^n+(-1)^{n-1}=0$ 的根时，$r(A)=n-1$，否则 $r(A)=n$。 □

习题 2.10. 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 7 & 3 \\ -4 & -5 & -7 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

证明. 注意到这是一个奇数阶反对称矩阵的行列式，因此该行列式值为 0。事实上，对于一个 n 阶反对称矩阵 A（即 $A+A^T=0$），我们有

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

这说明了奇数阶反对称矩阵的行列式必为 0。 □

习题 2.11. 计算行列式:

$$
\begin{vmatrix}
a_0+a_1 & a_1 & & & & \\
a_1 & a_1+a_2 & a_2 & & & \\
& a_2 & a_2+a_3 & a_3 & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\
& & & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n
\end{vmatrix}
$$

证明. 记该行列式的值为 $f_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$。利用行线性，并对第 1 行做代数余子式展开，

$$
\begin{aligned}
f_n(a_0,\ldots,a_n) &= \begin{vmatrix}
a_0 & & & & \\
a_1 & a_1+a_2 & a_2 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\
& & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n
\end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix}
a_1 & a_1 & & & \\
a_1 & a_1+a_2 & a_2 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\
& & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

上式等式右端第一项即为 $a_0 f_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。记第二项的行列式为 D，再利用行线性，

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix}
a_1 & a_1 & & & \\
a_1 & a_1 & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\
& & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_1 & a_1 & & & \\
& a_2 & a_2 & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\
& & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n
\end{vmatrix} \\
&= \cdots = \begin{vmatrix}
a_1 & a_1 & & & \\
& a_2 & a_2 & & \\
& & \ddots & \ddots & \\
& & & a_{n-1} & a_{n-1} \\
& & & & a_n
\end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n
\end{aligned}
$$

从而我们得到如下递推关系

$$
f_n(a_0, \ldots, a_n) = a_0 f_{n-1}(a_1, \ldots, a_n) + a_1 \cdots a_n
$$

不断迭代上式，得到

$$
\begin{aligned}
f_n(a_0, \ldots, a_n) &= a_0(a_1 f_{n-2}(a_2, \ldots, a_n) + a_2 \cdots a_n) + a_1 \cdots a_n = \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_0 \cdots a_{k-1} a_{k+1} \cdots a_n
\end{aligned}
$$

□

3 线性方程组的进一步理论

习题 3.1. 证明：若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 可被 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性表示，且 $s>t$，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性相关。

证明. 设 $x_1,\ldots,x_s\in K$ 满足

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0 \tag{3.1}$$

由 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 可被 $\beta_1,\ldots,\beta_t$ 线性表示，存在 $a_{ij}\in K\,(1\le i\le t,1\le j\le s)$，使得

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^t a_{ij}\beta_i,\quad \forall j=1,\ldots,s$$

由此，若 $x_1,\ldots,x_s$ 满足如下方程组，则 (3.1) 成立：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s=0\\ \vdots\\ a_{t1}x_1+a_{t2}x_2+\cdots+a_{ts}x_s=0\end{cases}$$

由于 $t<s$，因此上述线性方程组有非零解。从而 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性相关。 □

习题 3.2. 求如下行列式的所有代数余子式的和。

$$\begin{vmatrix} & 1 & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{n-1}\\ \frac{1}{n} & & & & \end{vmatrix}$$

证明. 观察可得所有非零代数余子式为 $A_{12},A_{23},\ldots,A_{(n-1)n},A_{n1}$（不妨记 $A_{n(n+1)}=A_{n1}$），

$$A_{i(i+1)}=(-1)^{n+1}\frac{i}{n!}$$

从而代数余子式的和为

$$\sum_{i=1}^n A_{i(i+1)}=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\sum_{i=1}^n i=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2(n-1)!}$$ □

习题 3.3. 设齐次线性方程组 $x_1\vec{\alpha_1}+\cdots+x_n\vec{\alpha_n}=\vec{0}$ 有非零解，试问：$x_1\vec{\alpha_1}+\cdots+x_n\vec{\alpha_n}=\vec{\beta}$ 是否一定有解？

证明. 不一定。考虑如下反例，设 $n=2$，

$$\vec{\alpha_1}=\vec{\alpha_2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\vec{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

此时齐次方程有非零解，但非齐次方程无解。 □

习题 3.4. 在 $\mathbb{R}^5$ 中考虑 $V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle, W=\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle$，其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\\3\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

证明：$V+W$ 和 $V\cap W$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的线性子空间，并分别给出 $V+W$ 和 $V\cap W$ 的一个基。

证明. 子空间的和与交仍是子空间，这是熟知的结论。为求它们的基，我们考虑如下方程组

$$x_1\alpha_1+y_1\alpha_2+x_3\alpha_3+y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3=0$$

对其系数矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&1&3&1&1\\-1&3&1&1&2&2\\1&1&1&3&1&0\\-1&3&1&1&2&2\\1&1&2&3&1&0\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&1&\frac{3}{4}&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=-2y_1-\frac{1}{4}y_2\\x_2=-y_1-\frac{3}{4}y_2\\x_3=y_3=0\end{cases}$$

这时我们可以得到，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3$ 是 $V+W$ 的一个基。且

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\frac{1}{4}\alpha_1+\frac{3}{4}\alpha_2$$

进而得到 α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价。从而 α_1,α_2（或 β_1,β_2）是 $V\cap W$ 的一个基。 □

注释 3.1. 这题的数据比较特殊。一般来说，给定两个子空间 V,W 的生成元，$V\cap W$ 的基不一定在这两个子空间给定的生成元之中。

习题 3.5. 设 $x_0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ 两两互异，$y_0,y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$，证明：存在唯一一个次数不超过 n 的多项式函数 $f(x)$，使得 $f(x_i)=y_i,\forall i=0,1,\dots,n$。

证明. 若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 满足题意，则有

$$\begin{pmatrix}1&x_0&x_0^2&\cdots&x_0^n\\1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

注意到如上线性方程组的系数矩阵为 $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)^T$。由 Vandermonde 行列式的结果，系数矩阵可逆，从而该线性方程组的解存在且唯一。 □

习题 3.6. 设 $A = \{\vec{\alpha_1}, \ldots, \vec{\alpha_s}\}$ 可由 $B = \{\vec{\beta_1}, \ldots, \vec{\beta_t}\}$ 线性表出，且 $rank(A) = rank(B)$。试问：B 能否被 A 线性表出？

证明. B 能被 A 线性表出，证明如下：记 $r = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$。不失一般性，设 A 的一个极大无关组为

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

B 的一个极大无关组为

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$$

由 A 可被 B 线性表出，因此 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ 是 $C := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r\}$ 的一个极大无关组。进而，$\operatorname{rank}(C) = r$。由于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关，从而 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 也是 C 的一个极大无关组。因此 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 等价，进而得到 A 与 B 等价。 □

习题 3.7. 设 $\eta_1, \ldots, \eta_t$ 是齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0\,(i = 1, \ldots, s)$ 的一个基础解系，若 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ 也是该方程 $t-1$ 个线性无关解。试问：是否存在 j，使得 $\eta_j, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ 是该方程的基础解系。

证明. 存在满足题意的 j，证明如下：注意到 $\eta_1, \ldots, \eta_t$ 线性无关，由习题 3.1 的结果，其不能被 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ 线性表出。因此存在 $1 \le j \le t$，使得

$$\eta_j \notin \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1} \rangle$$

由 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ 线性无关，可得 $\eta_j, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ 线性无关。且由基础解系的定义，$\eta_j, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ 可被 $\eta_1, \ldots, \eta_t$ 线性表出。再由习题 3.6 的结果，$\eta_j, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ 与 $\eta_1, \ldots, \eta_t$ 等价，从而 $\eta_j, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ 也是一个基础解系。 □

习题 3.8. 设 $D = (a_{ij}) \in M_{10\times 10}(\mathbb{R})$，若对任意 $1 \le i, j \le 10$，a_{ij} 与相应的代数余子式 A_{ij} 相等，求 $rank(D)$ 的所有可能值。

证明. 若对任意 $1 \le i, j \le 10$，$a_{ij} = 0$，则 $\operatorname{rank}(D) = 0$。否则，存在 $1 \le i, j \le 10$，使得 $a_{ij} \ne 0$，则

$$\det D = \sum_{k=1}^{10} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{10} a_{ik}^2 \ge a_{ij}^2 > 0$$

此时有 $\operatorname{rank}(D) = 10$。 □

习题 3.9. 设

$$\alpha_1 = (1, 2, 7, 6),\ \alpha_2 = (-1, 1, 5, 3),\ \alpha_3 = (0, -1, -4, -3)$$
$$\alpha_4 = (1, 0, -2, -1),\ \alpha_5 = (1, 2, 9, 8)$$

求 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_5\}$ 的一个极大无关组，并用其表示其余向量。

证明. 我们考虑线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 + x_5\alpha_5 = 0 \tag{3.2}$$

为求解上述方程，对系数矩阵作行变换，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & -4 & -2 & 9 \\ 6 & 3 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此方程的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_5 \\ x_4 = 2x_5 \end{cases} \qquad x_3, x_5\text{为自由变量}$$

从而，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大无关组。令 $x_3 = -1, x_5 = 0$，即得

$$\alpha_3 = -\frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_2$$

令 $x_3 = 0, x_5 = -1$，即得

$$\alpha_5 = \frac{5}{3}\alpha_1 - \frac{4}{3}\alpha_2 - 2\alpha_4$$

□

习题 3.10. *设 $n \geq 2$，考虑如下方程组*

$$\begin{cases} (a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ \vdots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + (a_n + b)x_n = 0 \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$。

1. *求系数矩阵的行列式。*

2. *方程组何时仅有零解，何时有非零解?*

3. *有非零解时，给出一个基础解系。*

证明. 1. 我们考虑如下行变换，将第 $1, \ldots, n-1$ 行减去第 n 行，得到

$$\begin{vmatrix} a_1 + b & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} + b & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n + b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & & & -b \\ & \ddots & & \vdots \\ & & b & -b \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n + b \end{vmatrix}$$

$$= b^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & & & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n + b \end{vmatrix} = b^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & & & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ & & & \sum_{i=1}^{n} a_i + b \end{vmatrix} = b^{n-1}\left(b + \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$

2. 由上一问的结果，当 $b \in \{0, -\sum_{i=1}^n a_i\}$ 时，方程有非零解，否则仅有零解。

3. 当 $b = 0$ 时，由于 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$，则 $a_1, \ldots, a_n$ 不全为 0，不妨设 $a_1 \neq 0$。此时该方程组即为 $a_1x_1 + \cdots a_nx_n = 0$，因此该方程的一个基础解系为

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

当 $b = -\sum_{i=1}^n a_i$ 时，则由条件，$b \neq 0$。事实上我们在第 (1) 小问中求行列式时只用到了行变换，即

$$\begin{pmatrix} a_1 + b & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} + b & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n + b \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ & & & \sum_{i=1}^n a_i + b \end{pmatrix}$$

注意到 $\sum_{i=1}^n a_i + b = 0$，因此基础解系为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$$

□

习题 3.11. 设 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ 是 n 阶严格对角占优矩阵，即对任意 $1 \le i \le n$，

$$a_{ii} > \sum_{1 \le j \le n, j \neq i} |a_{ij}|$$

证明：$\det A > 0$。

证明. 我们首先证明 $\det A \neq 0$。设 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 是齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0\,(1 \le i \le n)$ 的一个解。我们欲证明，$x_i = 0, \forall 1 \le i \le n$。采用反证法：否则，存在 $1 \le i \le n$，使得

$$|x_i| = \max\{|x_j| : 1 \le j \le n\} > 0$$

不失一般性，我们设 $x_i > 0$。从而我们有

$$0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum_{1 \le j \le n, j \neq i} a_{ij}x_j \ge x_i \left(a_{ii} - \sum_{1 \le j \le n, j \neq i} |a_{ij}| \right) > 0$$

这导致一个矛盾。因此我们证明齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0\,(1 \le i \le n)$ 只有零解。因此系数矩阵 A 的行列式不为 0。

事实上，我们已经证明任意严格对角占优矩阵的行列式非零。为证其严格大于 0，考虑如下定义在 $[0,1]$ 上的函数

$$f(t) = \det(tA + (1-t)I_n)$$

按定义可以验证对于 $t \in [0,1]$，$tA + (1-t)I_n$ 仍是一个严格对角占优矩阵。因此由我们先前的讨论，f 在 $[0,1]$ 上没有零点。此外，注意到 $f(t)$ 是一个关于 t 的多项式函数，因此 f 在 $[0,1]$ 上连续。由连续函数的介值性，结合 $f(0) = \det I_n = 1$，可得 $\det A = f(1) > 0$。 □

4 矩阵及其运算

习题 4.1. 设 $A \in M_{n\times m}(K), B \in M_{m\times n}(K)$，证明：

$$\det(I_n - AB) = \det(I_m - BA)$$

证明. 只需注意到

$$\begin{pmatrix} I_n - AB & A \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_m - BA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_m \end{pmatrix}$$

由行列式的可乘性，

$$\det(I_n - AB) = \det \begin{pmatrix} I_n - AB & A \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_m - BA \end{pmatrix} = \det(I_m - BA)$$

□

注释 4.1. 作为上述结论的推论，我们有如下的命题：设 $A \in M_{n\times m}(K), B \in M_{m\times n}(K)$，若 $I_n - AB$ 可逆，则 $I_m - BA$ 可逆。

事实上，这一命题有一个直接的证法。我们可以通过 $(I_n - AB)^{-1}$ 把 $I_m - BA$ 的逆构造出来。令

$$C = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A$$

我们来验证 $(I_m - BA)C = I_m$，

$$\begin{aligned}(I_m - BA)C &= I_m + B(I_n - AB)^{-1}A - BA - BAB(I_n - AB)^{-1}A \\ &= I_m + B[I_n - (I_n - AB) - AB](I_n - AB)^{-1}A = I_m\end{aligned}$$

从而 $I_m - BA$ 可逆，且逆矩阵即为 $C = I_m + B(I_n - AB)^{-1}A$。

习题 4.2. 设 $A_{11} \in M_{n\times n}(K), A_{12} \in M_{n\times m}(K), A_{22} \in M_{m\times m}(K)$，

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

1. 证明：A 可逆当且仅当 A_{11}, A_{12} 均可逆。

2. 若 A 可逆，用 A_{11}, A_{12}, A_{22} 表示 A^{-1}。

证明. 1. 由 $\det A = \det A_{11} \det A_{12}$ 立得。

2. 我们考虑如下分块矩阵的初等行变换

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I_n & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & I_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & I_n & 0 \\ 0 & I_m & 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \\ \to &\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & I_n & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_m & 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & 0 & A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_m & 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

□

习题 4.3. 证明任意一个秩为 r 的矩阵可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和。

证明. 设 $A \in M_{n\times m}(K)$ 满足 $\mathrm{rank}(A) = r$。则 A 的相抵标准型即为

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

其中，P 为 n 阶可逆矩阵，Q 为 m 阶可逆矩阵。令 $D_i \in M_{n\times m}(K)\,(i = 1, \ldots, r)$ 表示第 i 行第 i 列元素为 1，其余元素为 0 的矩阵，则 PD_iQ 的秩为 1，且

$$A = P(D_1 + \cdots + D_r)Q = PD_1Q + \cdots + PD_rQ$$

即为满足题意的分解。 □

注释 4.2. 关于矩阵的秩和分解，接下来我们介绍一种同样常见的分解——满秩分解。设 $A \in M_{n\times m}(K)$ 且 $rank(A) = r$，则存在一个列满秩矩阵 $B \in M_{n\times r}(K)$ 与一个行满秩矩阵 $C \in M_{r\times n}(K)$，使得 $A = BC$。

事实上，我们考虑 A 的行相抵标准型

$$A = P \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 P 为 n 阶可逆矩阵，$C \in M_{r\times m}(K)$ 为行满秩（$rank(C) = r$）。将 P 的前 r 列构成的 $n \times r$ 阶矩阵记为 B，可以验证 B 为列满秩，且

$$A = \begin{pmatrix} B & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} = BC$$

习题 4.4. 定义矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的迹 *(trace)* 为 $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$。

1. 设 A, B 为 n 阶方阵，证明：$tr(AB) = tr(BA)$。

2. 证明：对任意实方阵 A，有 $tr(A^TA) \geq 0$。何时等号成立？

证明. 1. 由矩阵乘法以及迹的定义，

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}a_{ji} = \mathrm{tr}\,(BA)$$

直接计算可得

$$\mathrm{tr}\,(A^TA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0$$

进而，等号成立当且仅当 A 是一个零矩阵。 □

习题 4.5. 设 $A \in M_{s\times n}(K), B \in M_{n\times m}(K)$，证明：

$$rank(A) + rank(B) - n \leq rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$$

证明. 我们先来证右端的不等式（相对简单一些）。记

$$A = (\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n), \quad B = (b_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为 s 维列向量。则

$$AB = \left(\sum_{k=1}^n b_{k1}\alpha_k \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n b_{km}\alpha_k\right)$$

即 AB 的每一列都可以由 A 的列向量组线性表示出来，因此 $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(A)$。同理，$AB$ 的每一行都可以由 B 的行向量组线性表示出来，因此 $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(B)$，从而右端的不等式得证。

接下来我们来考虑左端的不等式（这又被称作 Sylvester 不等式）。我们来证明如下更一般的结论（又被称作 Frobenius 不等式）：设 $A \in M_{s\times r}(K), B \in M_{r\times n}(K), C \in M_{n\times m}(K)$，则

$$\mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC) \le \mathrm{rank}(ABC) + \mathrm{rank}(B) \tag{4.1}$$

考虑分块矩阵的初等变换（初等变换不改变矩阵的秩）：

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & BC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix}$$

从而

$$\mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC) \le \mathrm{rank}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(ABC) + \mathrm{rank}(B)$$

令 $r = n, B = I_n$，即得 Sylvester 不等式。 □

习题 4.6. 设 $A, B \in M_{n\times n}(K), AB = 0$，证明：

$$rank(A) + rank(B) \le n$$

证明. 这是上一题的直接推论。 □

习题 4.7. 设 $n \ge 2, A \in M_{n\times n}(K)$，证明：

$$rank(A^*) = \begin{cases} n, & rank(A) = n \\ 1, & rank(A) = n-1 \\ 0, & rank(A) < n-1 \end{cases}$$

证明. 由于

$$A^*A = (\det A)I_n$$

因此 $\mathrm{rank}(A) = n \iff \det A \ne 0 \iff A^*$ 可逆 $\iff \mathrm{rank}(A^*) = n$。

若 $\mathrm{rank}(A) = n-1$，则 $A^*A = 0$，由上一题的结论，

$$\mathrm{rank}(A^*) + \mathrm{rank}(A) \le n$$

从而 $\mathrm{rank}(A^*) \le 1$。又由于 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式非零，即 A^* 至少有一个非零元，从而 $\mathrm{rank}(A^*) \ge 1$，进而 $\mathrm{rank}(A^*) = 1$。

若 $\mathrm{rank}(A) < n-1$，则 A 的任意一个 $n-1$ 阶子式均为零，从而 A^* 是一个零矩阵，即 $\mathrm{rank}(A^*) = 0$。 □

习题 4.8. 设 $A \in M_{n\times n}(K)$。证明：$A^2 = A$ 的充分必要条件为

$$rank(A) + rank(I - A) = n$$

证明. 下证必要性。由秩的次可加性与习题 4.6 的结论，结合 $A(I - A) = 0$，

$$n = \operatorname{rank}(A + (I - A)) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I - A) \le n$$

从而上式中不等号均取到等号。必要性得证。

下证充分性。注意到 $N(A) \subset R(I - A)$，这是因为

$$x \in N(A) \implies Ax = 0 \implies x = (I - A)x \in R(I - A)$$

再由条件，

$$\dim N(A) = n - \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(I - A) = \dim R(I - A)$$

因此 $N(A) = R(I - A)$，则对任意 $x \in K^n$，$(I - A)x \in N(A)$，则

$$(A - A^2)x = A(I - A)x = 0$$

从而 $A - A^2 = 0$，即 $A = A^2$。充分性得证。 □

习题 4.9. 设 $A \in M_{n\times n}(K)$。证明：$A^2 = I$ 的充分必要条件为

$$rank(I - A) + rank(I + A) = n$$

证明. 令 $B = \frac{I+A}{2}$，则有 $\operatorname{rank}(I + A) = \operatorname{rank}(B), \operatorname{rank}(I - A) = \operatorname{rank}(I - B)$，由上一题的结论，

$$\begin{aligned} A^2 = I \iff B^2 = B &\iff \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(I - B) = n \\ &\iff \operatorname{rank}(I + A) + \operatorname{rank}(I - A) = n \end{aligned}$$ □

注释 4.3. 上述两题都是如下命题的特例：设 $A \in M_{n\times n}(K)$，$f(x), g(x)$ 是 K 上两个互素的多项式，则 $f(A)g(A) = 0$ 的充分必要条件是

$$rank(f(A)) + rank(g(A)) = n$$

事实上，由 *Bezout* 等式，由 $f(x), g(x)$ 互素，故存在 K 上的多项式 $p(x), q(x)$，使得

$$p(x)f(x) + q(x)g(x) = 1$$

由此

$$\begin{pmatrix} I_n & q(A) \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & p(A) \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & I_n \\ 0 & g(A) \end{pmatrix}$$

进一步做初等变换，得到

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -g(A) & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(A) & I_n \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -f(A) & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & f(A)g(A) \end{pmatrix}$$

由此即得

$$rank(f(A)) + rank(g(A)) = rank \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & g(A) \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & f(A)g(A) \end{pmatrix} = n + rank(f(A)g(A))$$

这就完成了命题的证明。

习题 4.10. 设 $A \in M_{n\times n}(K)$，存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $rank(A^{m+1}) = rank(A^m)$。试证明：对任意 $k \geq m$，有

$$rank(A^k) = rank(A^m)$$

证明. 首先，由 $N(A^m) \subset N(A^{m+1})$ 以及 $\mathrm{rank}(A^{m+1}) = \mathrm{rank}(A^m)$，得到

$$N(A^m) = N(A^{m+1})$$

对任意 $k \geq m$，我们欲证明 $N(A^k) = N(A^{k+1})$。$N(A^k) \subset N(A^{k+1})$ 是平凡的。任取 $x \in N(A^{k+1})$，则

$$A^{m+1}(A^{k-m}x) = A^{k+1}x = 0$$

因此 $A^{k-m}x \in N(A^{m+1}) = N(A^m)$，即

$$A^k x = A^m(A^{k-m}x) = 0$$

因此 $x \in N(A^k)$，这就说明了 $N(A^k) \supset N(A^{k+1})$。进而归纳可得

$$N(A^m) = N(A^{m+1}) = N(A^{m+2}) = \cdots$$

从而对任意 $k \geq m$，

$$\mathrm{rank}(A^k) = n - \dim N(A^k) = n - \dim N(A^m) = \mathrm{rank}(A^m)$$ □

5 特征值与特征向量

习题 5.1 (循环矩阵的对角化)**.** 证明如下循环矩阵（见习题2.2）可以做对角化，并求出其对角化。

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

证明. 令 $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则有

$$A=a_0I+a_1J+a_2J^2+\cdots+a_{n-1}J^{n-1}=g(J)$$

因此我们考虑 J 的对角化即可。令 $\omega_j=\exp(i\frac{2j\pi}{n})\,(j=0,\ldots,n-1)$ 为 n 次单位根，$f(x)$ 为 J 的特征多项式，

$$f(x)=\det(xI_n-J)=x^n-1=\prod_{j=0}^{n-1}(x-\omega_j)$$

从而 $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}$ 是 J 的 n 个单特征值，求解方程 $(\omega_jI-A)x=0$，得对应的特征向量 x_j 为

$$x_j=\begin{pmatrix} 1 & \omega_j & \cdots & \omega_j^{n-1} \end{pmatrix}^T$$

令 $D=\mathrm{diag}\{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}\}$，

$$P=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \cdots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

则 $J=PDP^{-1}$，因此 $A=g(J)=Pg(D)P^{-1}=P\mathrm{diag}\{g(\omega_0),g(\omega_1),\ldots,g(\omega_{n-1})\}P^{-1}$。 □

习题 5.2 (实对称矩阵的谱分解)**.** 设 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 是 n 阶实对称矩阵，其（互不相同的）特征值记为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$。

1. 证明：存在正交投影矩阵 $P_1,\ldots,P_s$，使得

$$A=\lambda_1P_1+\cdots\lambda_sP_s$$

且 $P_1,\ldots,P_s$ 满足

$$P_iP_j=0\,(\forall i\neq j),\quad I_n=P_1+\cdots+P_s,$$

2. 设 $f(x)$ 是多项式函数，证明：

$$f(A)=f(\lambda_1)P_1+\cdots+f(\lambda_s)P_s \tag{5.1}$$

证明. 1. 记特征值 λ_j 的重数为 n_j（$n_j \geq 1, \sum_{j=1}^{s} n_j = n$）。令 $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \ldots, \lambda_s I_{n_s}\}$，则 A 的正交相似对角化可写为

$$A = QDQ^{-1}$$

其中 Q 为 n 阶正交矩阵。对于 $j = 1, \ldots, s$，令 D_j 为第 j 个分块为 I_{n_j}，其余为 0 的（分块）对角矩阵，以及 $P_j = QD_jQ^{-1}$，则

$$\begin{aligned}
&P_iP_j = Q(D_iD_j)Q^{-1} = \begin{cases} QD_iQ^{-1} = P_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\
&P_j = QD_jQ^T = QD_j^TQ^T = P_j^T \\
&\sum_{j=1}^{s} \lambda_j P_j = Q\left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j D_j\right)Q^{-1} = QDQ^{-1} = A \\
&\sum_{j=1}^{s} P_j = Q\left(\sum_{j=1}^{s} D_j\right)Q^{-1} = QI_nQ^{-1} = I_n
\end{aligned}$$

因此 $P_1, \ldots, P_s$ 即为满足题意的正交矩阵。

2. 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$，我们有

$$\begin{aligned}
f(A) &= \sum_{k=0}^{m} a_kA^k = \sum_{k=0}^{m} a_k\left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_jP_j\right)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k\left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j^kP_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\lambda_j^k\right)P_j = \sum_{j=1}^{s} f(\lambda_j)P_j
\end{aligned}$$ □

习题 5.3 (Rayleigh 商，Min-Max 定理)**.** 设 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 是 n 阶实对称矩阵，其特征值（记重数）为 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$，对应的（单位）特征向量 $v_1, \ldots, v_n$ 构成了 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基。对于 $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$，定义 *Rayleigh* 商如下

$$R_A(v) = \frac{\langle v, Av\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{v^TAv}{v^Tv}$$

1. 证明：对任意 $k = 1, \ldots, n$，有

$$\lambda_k = \min_{v\in Span\{v_1,\ldots,v_k\}} R_A(v) = \max_{v\in\{v_1,\ldots,v_{k-1}\}^\perp} R_A(v)$$

2. 证明：对任意 $k = 1, \ldots, n$，有

$$\lambda_k = \max_{S_k} \min_{v\in S_k} R_A(v) \tag{5.2}$$

其中，S_k 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意一个 k 维子空间。

证明. 1. 对任意 $v \in \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$，有

$$v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, v_j\rangle v_j \implies Av = \sum_{j=1}^{k} \langle v, v_j\rangle \lambda_jv_j$$

进而

$$\langle v, Av\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j|\langle v, v_j\rangle|^2 \geq \lambda_k \sum_{j=1}^{k} |\langle v, v_j\rangle|^2 = \lambda_k\langle v, v\rangle$$

因此

$$\lambda_k \leq \min_{v \in \mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_k\}} R_A(v) \leq R_A(v_k) = \lambda_k$$

从而

$$\lambda_k = \min_{v \in \mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_k\}} R_A(v)$$

第二个等式证明类似。

2. 任意取定一个 k 维子空间 S_k，由维数公式，存在 $0 \neq w \in S_k \cap \{v_1,\dots,v_{k-1}\}^{\perp}$，从而

$$\min_{v \in S_k} R_A(v) \leq R_A(w) \leq \max_{v \in \{v_1,\dots,v_{k-1}\}^{\perp}} R_A(v) = \lambda_k$$

因此

$$\max_{S_k} \min_{v \in S_k} R_A(v) \leq \lambda_k$$

另一方面，

$$\max_{S_k} \min_{v \in S_k} R_A(v) \geq \min_{v \in \mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_k\}} R_A(v) = \lambda_k$$

□

注释 5.1. *1.* 特别地，我们有

$$\lambda_1 = \max_{v \in \mathbb{R}^n} R_A(v), \quad \lambda_n = \min_{v \in \mathbb{R}^n} R_A(v)$$

2. (5.2)被称为 *Fischer's principle*，类似地，还有如下 *Courant's principle*，

$$\lambda_k = \min_{S_{k-1}} \max_{v \in S_{k-1}^{\perp}} R_A(v)$$

习题 5.4 (Cayley-Hamilton 定理)**.** 本题的目标是给出 *Cayley-Hamilton* 定理的一个证明。该定理叙述如下：设 $A \in M_{n\times n}(K)$，$f(x)$ 为 A 的特征多项式，则 $f(A) = 0$。

令 $B(x)$ 为 $xI_n - A$ 的(古典)伴随矩阵，由其定义，存在(与 x 无关的)n 阶方阵 $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$，使得

$$B(x) = B_0 + xB_1 + \cdots + x^{n-1}B_{n-1}$$

1. 证明：对任意 $x \in K$，

$$-AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (B_{k-1} - AB_k) + x^n B_{n-1} = f(x) I_n \tag{5.3}$$

2. 设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$，证明：

$$-AB_0 = a_0 I_n, \quad B_{k-1} - AB_k = a_k I_n, (k = 1, \dots, n-1), \quad B_{n-1} = I_n$$

3. 完成 *Cayley-Hamilton* 定理的证明。

证明. 1. 直接计算可得

$$\begin{aligned} f(x)I_n &= (xI_n - A)B(x) = (xI_n - A)\sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} B_k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k AB_k \\ &= -AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k (B_{k-1} - AB_k) + x^n B_{n-1} \end{aligned}$$

2. 令 $x=0$ 即得 $-AB_0=a_0I_n$。代回(5.3)，得

$$x\left(\sum_{k=1}^{n-1}x^{k-1}(B_{k-1}-AB_k)+x^{n-1}B_{n-1}\right)=x(a_1+a_2x+\cdots+a_{n-1}x^{n-2}+x^{n-1})I_n$$

上式对任意 $x\in K$ 成立，因此可在等式两边同时除以 x，再令 $x=0$，即得 $B_0-AB_1=a_1I_n$。如此往复，可得(5.3)等式两端的每项 x^k 的系数均相等。

3. 直接计算可得

$$f(A)=a_0I_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_kA^k+A^n=-AB_0+\sum_{k=1}^{n-1}A^k(B_{k-1}-AB_k)+A^nB_{n-1}=0$$

□

注释 5.2. 这是 *Cayley-Hamilton* 定理一个经典而简洁的证明，只利用到了代数上的技巧。还有一个比较简单的证明利用了扰动法以及可对角化矩阵的稠密性，这里不做展开，有兴趣的同学可自行查阅参考书。但需要指出的一点是，*Cayley-Hamilton* 定理有一个经典的伪证：注意到 $f(x)=\det(xI_n-A)$，因此

$$f(A)=\det(AI_n-A)=\det 0=0$$

请同学们思考这一伪证错在何处。

习题 5.5. 设 $A\in M_{n\times n}(K)$ 是 n 阶可逆方阵，证明：存在一个 $n-1$ 次多项式 $g(x)$，使得 $A^{-1}=g(A)$。

证明. 设 A 的特征多项式为 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$。由 A 可逆，$a_0=(-1)^n\det A\neq 0$。由 Cayley-Hamilton 定理，$f(A)=0$，即

$$I_n=-\frac{1}{a_0}\left(a_1A+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}+A^n\right)$$

从而

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}\left(a_1I_n+\cdots+a_{n-1}A^{n-2}+A^{n-1}\right)=g(A)$$

其中 $g(x)=-\frac{a_1}{a_0}-\frac{a_2}{a_0}x-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_0}x^{n-2}-\frac{1}{a_0}x^{n-1}$ 为 $n-1$ 次多项式。 □

习题 5.6 (实相似标准型)**.** 设 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，记其 n 个特征值（记重数）为 $a_1\pm ib_1,\ldots,a_t\pm ib_t,\lambda_{2t+1},\ldots,\lambda_n$，其中 $a_1,\ldots,a_t,b_1,\ldots,b_t,\lambda_{2t+1},\ldots,\lambda_n$ 均为实数，且 $b_1,\ldots,b_t$ 均不为 0。

1. 设 $x\in\mathbb{C}^n$ 是 A 关于特征值 $\lambda=a+ib\,(a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ 的一个特征向量。令 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ 分别为 x 的实部和虚部。证明：x_1,x_2 线性无关。

2. 设 A 可对角化，证明：存在 n 阶可逆矩阵 $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，使得

$$P^{-1}AP=diag\left\{\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}a_t & b_t\\ -b_t & a_t\end{pmatrix},\lambda_{2t+1},\ldots,\lambda_n\right\}$$

证明. 1. 注意到 A 是一个实矩阵，$x=x_1+ix_2$ 是 A 关于特征值 $\lambda=a+ib$ 的一个特征向量，则 $\bar{x}=x_1-ix_2$ 是 A 关于特征值 $\bar{\lambda}=a-ib$ 的一个特征向量。因此 x 与 $\bar{x}$ 线性无关。设 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ 满足

$$0=c_1x_1+c_2x_2$$

则有

$$0=\tilde{c_1}(x_1+ix_2)+\tilde{c_2}(x_1-ix_2),\quad \text{其中}\tilde{c_1}=\frac{c_1-ic_2}{2},\tilde{c_2}=\frac{c_1+ic_2}{2}$$

由 $x,\bar{x}$ 线性无关，得 $\tilde{c_1}=\tilde{c_2}=0$，进而 $c_1=c_2=0$。因此 x_1,x_2 线性无关。

2. 令 $y_1,\ldots,y_t\in\mathbb{C}^n$ 分别是 A 关于特征值 $a_1+ib_1,\ldots,a_t+ib_t$ 的特征向量，令 $x_{2t+1},\ldots,x_n\in\mathbb{R}^n$ 分别是 A 关于特征值 $\lambda_{2t+1},\ldots,\lambda_n$ 的特征向量。由于 A 可对角化，我们可以令 $y_1,\bar{y_1},\ldots,y_t,\bar{y_t},x_{2t+1},\ldots,x_n$ 线性无关。对于 $k=1,\ldots,t$，令 $x_t,x_t'\in\mathbb{R}^n$ 分别是 y_t 的实部和虚部。类似于 1 中讨论，我们可以证明，$x_1,x_1',\ldots,x_t,x_t',x_{2t+1},\ldots,x_n$ 线性无关。令

$$P=\begin{pmatrix}x_1 & x_1' & \cdots & x_t & x_t' & x_{2t+1} & \cdots & x_n\end{pmatrix}$$

则 P 是可逆矩阵。

对任意 $k=1,\ldots,t$，由于 $x_k\pm ix_k'$ 是 A 关于特征值 $a_k\pm ib_k$ 的特征向量，因此

$$Ax_k=a_kx_k-b_kx_k',\quad Ax_k'=b_kx_k+a_kx_k'$$

从而

$$AP=P\mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}a_t & b_t\\ -b_t & a_t\end{pmatrix},\lambda_{2t+1},\ldots,\lambda_n\right\}$$ □

习题 5.7 (矩阵范数，谱半径)**.** 我们在 $\mathbb{C}^n$ 上引入如下范数：对于 $x\in\mathbb{C}^n$，定义

$$\|x\|=(x^T\bar{x})^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对于 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$，定义其矩阵范数为

$$\|A\|=\max_{0\neq x\in\mathbb{C}^n}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max_{x\in\mathbb{C}^n,\|x\|=1}\|Ax\|$$

定义 A 的谱半径为

$$r(A)=\max\{|\lambda|:\lambda\text{是}A\text{的一个特征值}\}$$

若 A 是 *Hermite* 矩阵，记其 n 个特征值（记重数）为 $\lambda_1(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)$。特别地，若 A 是正定 *Hermite* 矩阵，则 $r(A)=\lambda_1(A)$。

1. 证明：对任意 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C}),x\in\mathbb{C}^n$，

$$\|Ax\|\leq\|A\|\|x\|$$

2. 证明：对任意 $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$，

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|,\quad\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$$

3. 证明：对任意 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$，

$$r(A)\leq\|A\|$$

4. 证明：对任意 n 阶 *Hermite* 矩阵 A，

$$r(A)=\|A\|$$

5. 证明：对任意 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$，

$$\|A\|^2=\lambda_1(\bar{A}^TA)=\|\bar{A}^TA\|$$

6. 证明：对任意 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$，

$$\|A\|=\|\bar{A}^T\|$$

7. *证明：对任意 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$，$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$ 存在，且

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = r(A)$$

证明. 1,2 留给读者自行验证。

3 任取 A 的一个特征值 $\lambda \in \mathbb{C}$，令 $x \in \mathbb{C}^n$ 是对应的一个特征向量。则

$$\|A\| \ge \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|\lambda x\|}{\|x\|} = |\lambda|$$

因此 $\|A\| \ge r(A)$。

4 由 A 是 Hermite 矩阵，我们可以选取 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 对应的（单位）特征向量 $x_1, \dots, x_n$，使之成为 $\mathbb{C}^n$ 的一个标准正交基。任取 $x \in \mathbb{C}^n$，

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \implies Ax = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle \lambda_k x_k$$

因此

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 |\langle x, x_k \rangle|^2 \le r(A)^2 \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 = r(A)^2 \|x\|^2$$

由此，$\|A\| \le r(A)$，结合 3 即得 $r(A) = \|A\|$。

5 我们先前在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中关于 Rayleigh 商的讨论可以自然地推广到酉空间 $\mathbb{C}^n$: 对任意 $x \in \mathbb{C}^n$，

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, \bar{A}^T Ax \rangle \le \lambda_1(\bar{A}^T A) \|x\|^2$$

因此 $\|A\|^2 \le \lambda_1(\bar{A}^T A)$，且上式当 x 为 $\bar{A}^T A$ 关于特征值 $\lambda_1(\bar{A}^T A)$ 的特征向量时取到等号，因此 $\|A\|^2 = \lambda_1(\bar{A}^T A)$。再由 $\bar{A}^T A$ 的正定性，$\lambda_1(\bar{A}^T A) = r(\bar{A}^T A) = \|\bar{A}^T A\|$。

6 作为习题4.1的推论，$\bar{A}^T A$ 与 $A\bar{A}^T$ 的非零特征值相同。再结合正定性，可得

$$\|A\|^2 = \lambda_1(\bar{A}^T A) = \lambda_1(A\bar{A}^T) = \|\bar{A}^T\|^2$$

7 这里给出证明的大致思路，有兴趣的同学可自行补全。一方面，由于 3，我们有（注意到若 λ 是 A 的特征值，则 λ^k 是 A^k 的特征值，再由 $y = x^k$ 在 $[0, \infty)$ 上单调递增）

$$r(A)^k = r(A^k) \le \|A^k\|, \quad \forall k \ge 1$$

因此

$$\varliminf_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \ge r(A)$$

另一方面，定义矩阵的 1-范数 $\|\cdot\|_1$ 如下

$$\|A\|_1 = \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$$

可以证明，存在一个只与维数 n 有关的常数 $C(n) > 0$，使得

$$\|A\| \le C(n)\|A\|_1, \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$$

考虑 A 的 Jordan 标准型 $J=P^{-1}AP$，其中 P 是 n 阶可逆方阵。从而

$$\|A^k\|=\|PJ^kP^{-1}\|\le\|P\|\|J^k\|\|P^{-1}\|\le\tilde{C}\|J^k\|_1$$

其中 $\tilde{C}>0$ 是与 k 无关的常数。通过计算 Jordan 块 $J_m(\lambda)$ 的幂，（当 $k\ge m$ 时）

$$J_m(\lambda)^k=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \cdots & \binom{k}{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k\end{pmatrix}$$

我们可进一步估计，当 $k\ge n$ 时，

$$\|J^k\|_1\le r(A)^kp(k)$$

其中 $p(k)$ 是关于 k 的多项式函数，其次数为 J 的 Jordan 块阶数的最大值。特别地，$\deg p\le n$。由高等数学的结论，

$$\lim_{k\to\infty}p(k)^{\frac{1}{k}}=1$$

从而，

$$\varlimsup_{k\to\infty}\|A^k\|^{\frac{1}{k}}\le\varlimsup_{k\to\infty}r(A)(\tilde{C}p(k))^{\frac{1}{k}}=r(A)$$

□

习题 5.8 (矩阵的指数函数)**.** 一个熟知的结论是，定义在 $\mathbb{C}$ 上的幂级数

$$\exp(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},\quad z\in\mathbb{C}$$

在 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集上一致收敛。这允许我们按如下方式定义矩阵的指数函数（由于面向非数学专业的学生，我们避免关于收敛性的严格讨论），设 $A\in M_{n\times n}(K)$，

$$\exp(A)=I_n+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$$

1. 设 $A,B\in M_{n\times n}(K)$，P 是 n 阶可逆矩阵，满足 $P^{-1}AP=B$，证明：

$$P^{-1}\exp(A)P=\exp(B)$$

2. 设 $A,B\in M_{n\times n}(K)$ 满足 $AB=BA$，证明：

$$\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$$

3. 对于 n 阶 Jordan 块 $J=J_n(\lambda)$，计算 $\exp(J)$，其中

$$J=J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda\end{pmatrix}$$

证明. 1. 对任意 $m \geq 1$，

$$P^{-1}\sum_{k=0}^{m}\frac{A^m}{m!}P = \sum_{k=0}^{m}\frac{(P^{-1}AP)^k}{k!}$$

在上式两端令 $m \to \infty$，即得 $P^{-1}\exp(A)P = \exp(P^{-1}AP)$。

2. 绝对收敛的级数乘积可以任意交换求和顺序，结合 $AB = BA$，

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(B) &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{A^{k_1}}{k_1!}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{B^{k_2}}{k_2!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+k_2=k}\frac{A^{k_1}B^{k_2}}{k_1!k_2!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{k_1=0}^{k}\binom{k}{k_1}A^{k_1}B^{k-k_1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A+B)^k}{k!} = \exp(A+B)\end{aligned}$$

3. 令 $N = J_n(0)$，则 $N^k = 0, \forall k \geq n$。从而

$$\begin{aligned}\exp(J) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\lambda I_n + N)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\lambda^{k-l}N^l\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{N^l}{l!}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{\lambda^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{l=0}^{n-1}\frac{N^l}{l!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)\sum_{l=0}^{n-1}\frac{N^l}{l!}\end{aligned}$$

写成矩阵形式，

$$\exp(J) = \exp(\lambda)\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\\ & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & 1 & 1\\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

□