高等数学期中试题

2019 -2020　学年第一学期

考试科目：高等数学B(上)　　考试时间：2019 年10 月 23日

姓　名：____________　　学　号：____________

本试题共 6 道大题，满分 100 分

1. 简单计算题(共 40 分)

(1) 求极限: a. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{2n}$.　　b. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

(2) 求下列函数的导数: a. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$.　　b. $y=\int_{x^2}^{x}\sin t^2dt$.

(3) 求方程 $y-x-\epsilon\sin y=0$ $(0<\epsilon<1)$ 确定的隐函数的一阶导数和二阶导数.

(4) a. 求定积分: $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$;　　b. 求不定积分: $\int\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

2. (10分) 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(a+b\sin x)}{x^2}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$$

若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 求 a,b,c 的值.

3. (10分)讨论方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上的根的个数.

4. (18分) 判断下列结论是否成立。如果成立说明理由; 如果不成立, 给出反例.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则对任给 $\epsilon>0$. 存在 N, 使得当 $n>N$ 时, $a_n>a-\frac{1}{n}$.

(2) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调有界函数, 若 x_n 是单调序列, 则 $f(x_n)$ 是收敛序列.

(3) 设 $f(x)\in R([a,b])$, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 (a,b) 上可导.

5. (10分) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

6. (12分) 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

问: 当 α 取什么值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导; 当 α 取什么值时, $f(x)$ 有连续的导函数.