$\mathbb{R}^n$

- n 元有序实数组构成的集合

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

$\mathbb{R}^3$ 等同于三维空间中的全体点 (或向量全体).
$\mathbb{R}^n$ 等同于 n 维空间中的全体点 (或向量全体, $P \in \mathbb{R}^n \to \overrightarrow{OP}$),

- $\mathbb{R}^n$ 上可定义加法和数乘.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

- 设 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则有
$\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \cdots, y_n - x_n)$.

- n 元有序实数组构成的集合

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

$\mathbb{R}^3$ 等同于三维空间中的全体点 (或向量全体).
$\mathbb{R}^n$ 等同于 n 维空间中的全体点 (或向量全体, $P \in \mathbb{R}^n \to \overrightarrow{OP}$),

- $\mathbb{R}^n$ 上可定义加法和数乘.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

- 设 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则有
$\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \cdots, y_n - x_n)$.

多元函数 1

- 函数的定义：集合 D 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

称为 D 上的函数. x 为自变量, D 称为定义域, y 为因变量, $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ 称为 f 的值域.

- 一元函数：若 $D \subset \mathbb{R}$，则称 f 是一元函数；若 $D \subset \mathbb{R}^n$，则称 f 是 n 元函数.

多元函数 1

- 函数的定义：集合 D 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$\begin{aligned} f: D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

称为 D 上的函数. x 为自变量, D 称为定义域, y 为因变量, $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ 称为 f 的值域.

- 一元函数：若 $D \subset \mathbb{R}$，则称 f 是一元函数；若 $D \subset \mathbb{R}^n$，则称 f 是 n 元函数.

多元函数 2

- 若 n 元函数 f 的值域 $f(D)$ 包含在一元函数 g 的定义域内, 则可以定义 f 与 g 的复合 $g \circ f$(就是映射的复合).
- 例：二元函数 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. 三元函数 $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$.
- 二元函数的图形：$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 一般为一曲面.
- 例：$z = ax + by + c$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 的图形是一平面.
- 例：$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$，它的定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 的图形是上半球面.

多元函数 2

- 若 n 元函数 f 的值域 $f(D)$ 包含在一元函数 g 的定义域内，则可以定义 f 与 g 的复合 $g \circ f$(就是映射的复合).
- 例：二元函数 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. 三元函数 $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$.
- 二元函数的图形：$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 一般为一曲面.
- 例：$z = ax + by + c$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 的图形是一平面.
- 例：$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$，它的定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 的图形是上半球面.

多元函数 2

- 若 n 元函数 f 的值域 $f(D)$ 包含在一元函数 g 的定义域内, 则可以定义 f 与 g 的复合 $g\circ f$(就是映射的复合).
- 例: 二元函数 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$. 三元函数 $u=f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$.
- 二元函数的图形: $\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$, 一般为一曲面.
- 例: $z=ax+by+c$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 的图形是一平面.
- 例: $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$, 它的定义域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le r^2\}$ 的图形是上半球面.

多元函数 2

- 若 n 元函数 f 的值域 $f(D)$ 包含在一元函数 g 的定义域内，则可以定义 f 与 g 的复合 $g \circ f$(就是映射的复合).
- 例：二元函数 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. 三元函数 $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$.
- 二元函数的图形：$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 一般为一曲面.
- 例：$z = ax + by + c$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 的图形是一平面.
- 例：$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$，它的定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 的图形是上半球面.

- 集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射：

$$f\colon D \to \mathbb{R}^m$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(x) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

这里

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n$ 中集合到 $\mathbb{R}^m$ 的映射 2

- 若 f 是集合 D 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射. 可以称 f 为 D 上的向量函数. D 为 f 的定义域. 像集 $f(D)=\{f(x): x\in D\}$ 为 f 的值域. 若 $D\subset\mathbb{R}$, 可称 f 是一元向量函数; 若 $D\subset\mathbb{R}^n$, 可称 f 是 n 元向量函数.
- 若 f 是 D 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, $f(D)\subset E$. g 是 E 到 $\mathbb{R}^k$ 的映射, 则复合 $g\circ f$ 是 D 到 $\mathbb{R}^k$ 的映射.

- 若 f 是集合 D 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射. 可以称 f 为 D 上的向量函数. D 为 f 的定义域. 像集 $f(D)=\{f(x):x\in D\}$ 为 f 的值域. 若 $D\subset\mathbb{R}$, 可称 f 是一元向量函数; 若 $D\subset\mathbb{R}^n$, 可称 f 是 n 元向量函数.
- 若 f 是 D 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, $f(D)\subset E$. g 是 E 到 $\mathbb{R}^k$ 的映射, 则复合 $g\circ f$ 是 D 到 $\mathbb{R}^k$ 的映射.

$\mathbb{R}^n$ 中集合到 $\mathbb{R}^m$ 的映射 -例 1

- 例：平面曲线参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是一元向量函数

$$\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{r}(t) = (\phi(t), \psi(t)).$$

- 例：平面坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\theta - y\sin\theta \\ v = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, 是 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射 (二元向量函数).

- 例： $\begin{cases} u = \phi(t)\cos\theta - \psi(t)\sin\theta \\ v = \phi(t)\sin\theta + \psi(t)\cos\theta \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是上面两个映射的复合.

- 例：平面曲线参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是一元向量函数

$$\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{r}(t) = (\phi(t), \psi(t)).$$

- 例：平面坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\theta - y\sin\theta \\ v = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, 是 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射 (二元向量函数).

- 例：$\begin{cases} u = \phi(t)\cos\theta - \psi(t)\sin\theta \\ v = \phi(t)\sin\theta + \psi(t)\cos\theta \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是上面两个映射的复合.

$\mathbb{R}^n$ 中集合到 $\mathbb{R}^m$ 的映射 -例 1

- 例：平面曲线参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是一元向量函数

$$\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{r}(t) = (\phi(t), \psi(t)).$$

- 例：平面坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\theta - y\sin\theta \\ v = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, 是 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射 (二元向量函数).
- 例：$\begin{cases} u = \phi(t)\cos\theta - \psi(t)\sin\theta \\ v = \phi(t)\sin\theta + \psi(t)\cos\theta \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是上面两个映射的复合.

- 例：曲面参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ ，$(u,v) \in D$，是平面集合 D 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射 (二元向量函数)，经常用 $\vec{r}$ 表示这个映射:

$$\vec{r} : D \to \mathbb{R}^2, (u,v) \to \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

$\mathbb{R}^n$ 中的距离 1

- $\mathbb{R}^n$ 上的内积和模，设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

- 性质：内积关于 x 和 y 线性，且

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|.$$

- $\mathbb{R}^n$ 中的距离：$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 到 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的距离定义为

$$d(P, P_0) = |\overrightarrow{PP_0}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}.$$

$\mathbb{R}^n$ 中的距离 2

- 例: $n = 1$ 时, $d(x, x_0) = |x - x_0|$.
- 例: $n = 3$ 时, $P(x, y, z)$ 到 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离为

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

- $d(P, Q) \geq 0$, $d(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$.
- $d(P, Q) = d(Q, P)$.

- 例: $n=1$ 时, $d(x,x_0)=|x-x_0|$.
- 例: $n=3$ 时, $P(x,y,z)$ 到 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离为
$$d(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$
- $d(P,Q)\geq 0$, $d(P,Q)=0 \Longleftrightarrow P=Q$.
- $d(P,Q)=d(Q,P)$.

$\mathbb{R}^n$ 中的距离 2

- $d(P,Q) \le d(P,R) + d(R,Q)$.

  证明：设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

$$
\begin{aligned}
|x+y|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y \\
&\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2.
\end{aligned}
$$

  因此得不等式 $|x+y| \le |x| + |y|$.
  上面不等式中取 $x = \overrightarrow{PR}$, $y = \overrightarrow{RQ}$, 则 $x + y = \overrightarrow{PQ}$.

内点集

- 点 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ 的 r 邻域

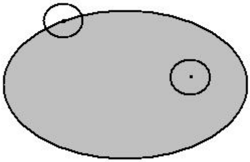
$$U_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n | d(P, P_0) < r\},$$

P_0 的 r 空心邻域为 $U_r(P_0) \backslash \{P_0\}$.

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的内点集

$$\mathring{E} = \{P \in E | 存在\ r, 使得 U_r(P) \subset E\}.$$

显然内点集 $\mathring{E}$ 是 E 的子集.



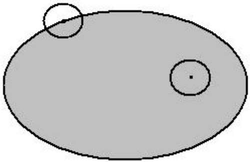
内点集

- 点 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ 的 r 邻域

$$U_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n | d(P, P_0) < r\},$$

P_0 的 r 空心邻域为 $U_r(P_0) \backslash \{P_0\}$.

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的内点集



$$\mathring{E} = \{P \in E | 存在\ r,\ 使得 U_r(P) \subset E\}.$$

显然内点集 $\mathring{E}$ 是 E 的子集.

边界点集

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的边界点集

$$\partial E = \{P \in \mathbb{R}^n | \text{对任意 } r > 0, \text{ 有} U_r(P) \cap E \neq \phi, U_r(P) \cap E^c \neq \phi\}.$$

E 的边界点不一定属于 E.

- 性质：$\partial E = \partial E^c$.
- 性质：$E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

边界点集

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的边界点集

$$\partial E = \{P \in \mathbb{R}^n | \text{对任意 } r > 0, \text{有} U_r(P) \cap E \neq \phi, U_r(P) \cap E^c \neq \phi\}.$$

  E 的边界点不一定属于 E.
- 性质：$\partial E = \partial E^c$.
- 性质：$E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

边界点集

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的边界点集

$$\partial E = \{P \in \mathbb{R}^n | \text{对任意 } r > 0, \text{ 有} U_r(P) \cap E \neq \phi, U_r(P) \cap E^c \neq \phi\}.$$

  E 的边界点不一定属于 E.
- 性质：$\partial E = \partial E^c$.
- 性质：$E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

开集和闭集 1

- 满足 $E = \mathring{E}$ 的集合称为开集，若集合 E 的补集为开集，则称 E 为闭集.
- 性质：E 为开集 $\Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.
  证明：利用 $E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.
- 性质：E 为闭集 $\Leftrightarrow \partial E \subset E$.
  证明：E 为闭集 $\Longleftrightarrow$ E^c 为开集 $\Longleftrightarrow$ $\partial E^c \cap E^c = \phi \Longleftrightarrow \partial E = \partial E^c \subset E$.

开集和闭集 1

- 满足 $E=\mathring{E}$ 的集合称为开集，若集合 E 的补集为开集，则称 E 为闭集.
- 性质：E 为开集 $\Leftrightarrow \partial E\cap E=\phi$.
  证明：利用 $E=\mathring{E}\Leftrightarrow \partial E\cap E=\phi$.
- 性质：E 为闭集 $\Leftrightarrow \partial E\subset E$.
  证明：E 为闭集 $\Longleftrightarrow$ E^c 为开集 $\Longleftrightarrow$ $\partial E^c\cap E^c=\phi\Longleftrightarrow \partial E=\partial E^c\subset E$.

开集和闭集 1

- 满足 $E = \overset{\circ}{E}$ 的集合称为开集，若集合 E 的补集为开集，则称 E 为闭集.
- 性质：E 为开集 $\Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.
  证明：利用 $E = \overset{\circ}{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.
- 性质：E 为闭集 $\Leftrightarrow \partial E \subset E$.
  证明：E 为闭集 $\iff$ E^c 为开集 $\iff$
  $\partial E^c \cap E^c = \phi \iff \partial E = \partial E^c \subset E$.

开集和闭集 2

- 例: $R=(-a,a)\times(-b,b)$ 是开集,

$$\partial R=\{(x,y)||x|=a\text{或者}|y|=b,|x|\le a,|y|\le b\}.$$

因此 $\partial R\cap R=\phi$, R 是开集.

- 例: $R_1=[-a,a]\times[-b,b]$, $\partial R_1=\partial R\subset R_1$, R_1 是闭集.
- 单点集 $\{P_0\}$ 是闭集, $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 是一维开集.

开集和闭集 2

- 例: $R=(-a,a)\times(-b,b)$ 是开集，

$$\partial R=\{(x,y)||x|=a\text{或者}|y|=b,|x|\le a,|y|\le b\}.$$

因此 $\partial R\cap R=\phi$, R 是开集.

- 例: $R_1=[-a,a]\times[-b,b]$，$\partial R_1=\partial R\subset R_1$，$R_1$ 是闭集.
- 单点集 $\{P_0\}$ 是闭集，$\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 是一维开集.

开集和闭集 2

- 例: $R=(-a,a)\times(-b,b)$ 是开集,

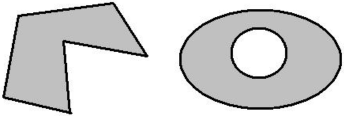
$$\partial R=\{(x,y)||x|=a\text{或者}|y|=b,|x|\leq a,|y|\leq b\}.$$

因此 $\partial R\cap R=\phi$, R 是开集.

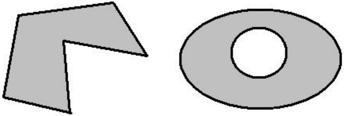
- 例: $R_1=[-a,a]\times[-b,b]$, $\partial R_1=\partial R\subset R_1$, R_1 是闭集.
- 单点集 $\{P_0\}$ 是闭集, $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 是一维开集.

连通开集和区域

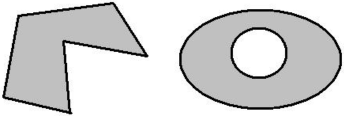
- 连通开集：$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 为连通开集.
  当 $n = 1$ 时，E 为连通非空开集的充分必要条件是 E 为开区间.
- 区域：连通的非空开集称为区域.
- 闭区域：设 G 是一个区域，集合 $\bar{G} = G \cup \partial G$ 称为闭区域 (集合 $E \cup \partial E$ 称为 E 的闭包，闭集 E 的闭包还是 E).
- 例：$R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是二维空间中的区域；$U_r(P_0)$ 也是区域.
  $R_1 = \bar{R}$ 和 $\overline{U_r(P_0)} = \{P | d(P, P_0) \le r\}$ 是闭区域.
- 有界集：若存在 $r > 0$
  使得 $U_r(O) \supset E$，则称 E 为有界集.



- 连通开集：$E\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，且 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 为连通开集.
  当 $n=1$ 时，E 为连通非空开集的充分必要条件是 E 为开区间.
- 区域：连通的非空开集称为区域.
- 闭区域：设 G 是一个区域，集合 $\bar{G}=G\cup\partial G$ 称为闭区域 (集合 $E\cup\partial E$ 称为 E 的闭包, 闭集 E 的闭包还是 E).
- 例：$R=(-a,a)\times(-b,b)$ 是二维空间中的区域；$U_r(P_0)$ 也是区域.
  $R_1=\bar{R}$ 和 $\overline{U_r(P_0)}=\{P|d(P,P_0)\le r\}$ 是闭区域.
- 有界集：若存在 $r>0$
  使得 $U_r(O)\supset E$, 则称 E 为有界集.

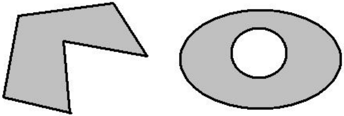


- 连通开集：$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 为连通开集.
  当 $n = 1$ 时，E 为连通非空开集的充分必要条件是 E 为开区间.
- 区域：连通的非空开集称为区域.
- 闭区域：设 G 是一个区域，集合 $\bar{G} = G \cup \partial G$ 称为闭区域 (集合 $E \cup \partial E$ 称为 E 的闭包, 闭集 E 的闭包还是 E).
- 例：$R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是二维空间中的区域；$U_r(P_0)$ 也是区域.
  $R_1 = \bar{R}$ 和 $\overline{U_r(P_0)} = \{P | d(P, P_0) \le r\}$ 是闭区域.
- 有界集：若存在 $r > 0$ 使得 $U_r(O) \supset E$, 则称 E 为有界集.



连通开集和区域

- 连通开集：$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 为连通开集.
  当 $n = 1$ 时，E 为连通非空开集的充分必要条件是 E 为开区间.
- 区域：连通的非空开集称为区域.
- 闭区域：设 G 是一个区域，集合 $\bar{G} = G \cup \partial G$ 称为闭区域 (集合 $E \cup \partial E$ 称为 E 的闭包, 闭集 E 的闭包还是 E).
- 例：$R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是二维空间中的区域；$U_r(P_0)$ 也是区域.
  $R_1 = \bar{R}$ 和 $\overline{U_r(P_0)} = \{P | d(P, P_0) \le r\}$ 是闭区域.
- 有界集：若存在 $r > 0$
  使得 $U_r(O) \supset E$, 则称 E 为有界集.



多元函数的极限的定义 1

- 复习一元函数的极限: $y = f(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r, a) \cup (a, a+r)$ 上有定义，若存在 A, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 $x \to a$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.
- 定义：设二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个空心邻域上有定义. 若存在实数 A，使得对任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 (x, y) 满足 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时，有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon,$$

则称 (x, y) 趋向于 (x_0, y_0) 时，$f(x, y)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \text{或者} \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

- 复习一元函数的极限: $y=f(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，若存在 A, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\epsilon$, 则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.
- 定义：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个空心邻域上有定义. 若存在实数 A，使得对任意的 $\epsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得当 (x,y) 满足 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-A|<\epsilon,$$

则称 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A\text{或者}\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

多元函数的极限的定义 2

- 类似可定义 n 元函数的极限: 对任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 P 满足 $0 < d(P, P_0) < \delta$ 时，有

$$|f(P) - A| < \epsilon.$$

则称 $P \to P_0$ 时，$f(P)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$.

- 注：依照定义，要求 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义. 依照上述定义，$f(x,y)=xy\sin\frac{1}{xy}$ 不能讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 的极限. 若补充定义函数在 x,y 轴上的值为 0, 则可以验证 $(x,y)\to(0,0)$ 时的 $f(x,y)$ 的极限为 0. 也可采用下面的更一般的定义, 可以不考虑没定义的点.
- 定义：f 是集合 E 上的函数，P_0 是 E 的聚点. 若对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $P\in D$ 且满足 $0<d(P,P_0)<\delta$ 时，有

$$|f(P)-A|<\epsilon,$$

则称 $P\to P_0$ 时，$f(P)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

多元函数的极限的定义 3

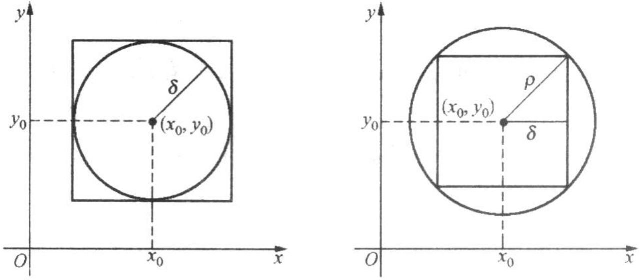
- 注：依照定义，要求 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义. 依照上述定义，$f(x,y)=xy\sin\frac{1}{xy}$ 不能讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 的极限. 若补充定义函数在 x,y 轴上的值为 0, 则可以验证 $(x,y)\to(0,0)$ 时的 $f(x,y)$ 的极限为 0. 也可采用下面的更一般的定义, 可以不考虑没定义的点.
- 定义：f 是集合 E 上的函数，P_0 是 E 的聚点. 若对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $P\in D$ 且满足 $0<d(P,P_0)<\delta$ 时，有

$$|f(P)-A|<\epsilon,$$

则称 $P\to P_0$ 时，$f(P)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

多元函数的极限的等价定义 1

- 命题：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 的充要条件是：对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 (x,y) 满足 $|x-x_0| < \delta$, $|y-y_0| < \delta$ 且 $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ 时，有 $|f(x,y) - A| < \epsilon$.



多元函数极限的等价定义 2

- 证明：若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 (x, y) 满足

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \text{且} (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

时，有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$, 则当 (x, y) 满足

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.

反过来, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\rho > 0$, 使得当 (x, y) 满足

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho$$

时，有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$. 取 $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho$, 则当 (x, y) 满足 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.

多元函数极限的等价定义 2

- 证明：若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 (x, y) 满足
$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \text{且} (x, y) \neq (x_0, y_0)$$
时，有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$, 则当 (x, y) 满足
$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$
时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.
反过来, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\rho > 0$, 使得当 (x, y) 满足
$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho$$
时，有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$. 取 $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho$, 则当 (x, y) 满足 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.

映射 (多元向量函数) 极限的定义 1

- 定义：设映射 (二元函数向量函数)$f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 的某个空心邻域上有定义. 若存在 $a=(a_1,a_2)$，使得对任意的 $\epsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得当 (x,y) 满足

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时，有

$$|f(x,y)-a|=\sqrt{(f_1(x,y)-a_1)^2+(f_2(x,y)-a_2)^2}<\epsilon,$$

则称 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 以 a 为极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a.$$

多元向量函数极限的定义 2

- 性质: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = a_1, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y) = a_2.$$

- 证明: 利用

$$|f_i(x,y) - a_i| \le |f(x,y) - a| \le |f_1(x,y) - a_1| + |f_2(x,y) - a_2|, \quad i = 1, 2.$$

- 注: 一般向量函数的极限可类似定义.

多元向量函数极限的定义 2

- 性质: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = a_1, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y) = a_2.$$

- 证明: 利用

$$|f_i(x,y) - a_i| \le |f(x,y) - a| \le |f_1(x,y) - a_1| + |f_2(x,y) - a_2|, \quad i = 1, 2.$$

- 注: 一般向量函数的极限可类似定义.

多元向量函数极限的定义 2

- 性质: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y)=a_1,\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y)=a_2.$$

- 证明: 利用

$$|f_i(x,y)-a_i|\le|f(x,y)-a|\le|f_1(x,y)-a_1|+|f_2(x,y)-a_2|,\quad i=1,2.$$

- 注: 一般向量函数的极限可类似定义.

一元向量值函数

- 一元向量函数的极限：设 $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 使得当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时，有

$$\sqrt{(x_1(t) - a_1)^2 + (x_2(t) - a_2)^2 + \cdots + (x_n(t) - a_n)^2} < \epsilon,$$

则称 $t \to t_0$ 时，一元向量函数 $f(t)$ 的极限为 a, 记为 $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a$.

- $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to t_0} x_k(t) = a_k,\ k = 1, 2, \cdots, n.$
- 向量值函数的导数：

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = (x_1'(t), x_2'(t), \cdots, x_n'(t)).$$

一元向量值函数

- 一元向量函数的极限：设 $f(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$, $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 若对任意的 $\epsilon>0$, 存在 δ, 使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，有

$$\sqrt{(x_1(t)-a_1)^2+(x_2(t)-a_2)^2+\cdots+(x_n(t)-a_n)^2}<\epsilon,$$

则称 $t\to t_0$ 时，一元向量函数 $f(t)$ 的极限为 a, 记为 $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=a$.

- $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0} x_k(t)=a_k$, $k=1,2,\cdots,n$.
- 向量值函数的导数：

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=(x_1'(t),x_2'(t),\cdots,x_n'(t)).$$

一元向量值函数

- 一元向量函数的极限：设 $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 使得当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时，有

$$\sqrt{(x_1(t) - a_1)^2 + (x_2(t) - a_2)^2 + \cdots + (x_n(t) - a_n)^2} < \epsilon,$$

则称 $t \to t_0$ 时，一元向量函数 $f(t)$ 的极限为 a, 记为 $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a$.

- $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to t_0} x_k(t) = a_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$.
- 向量值函数的导数：

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = (x_1'(t), x_2'(t), \cdots, x_n'(t)).$$

复习一元复合复合函数的极限

- 一元复合函数的极限: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$, 且 $x\neq x_0$ 时, $g(x)\neq y_0$, 若 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$.
- 一元复合函数的极限: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A=f(y_0)$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$.

复习一元复合复合函数的极限

- 一元复合函数的极限: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, 且 $x \neq x_0$ 时, $g(x) \neq y_0$, 若 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.
- 一元复合函数的极限: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A = f(y_0)$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

复合函数的极限 1

- 设函数 f 在 $P_0 \in \mathbb{R}^m$ 的某个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$. 映射 $g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D 包含 $Q_0 \in \mathbb{R}^n$ 的某个空心邻域. 若 $\lim\limits_{Q \to Q_0} g(Q) = P_0$, 且 $Q \neq Q_0$ 时, $g(Q) \neq P_0$. 则有 $\lim\limits_{Q \to Q_0} f(g(Q)) = A$.
- 证明: 由 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$, 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $r > 0$, 当 $0 < |d(P, P_0)| < r$ 时 $|f(P) - A| < \epsilon$.
由 $\lim\limits_{Q \to Q_0} g(Q) = P_0$, 存在 $\delta > 0$, 满足: 当 $0 < d(Q, Q_0) < \delta$ 时, $d(g(Q), P_0) < r$. 又由条件 $d(g(Q), P_0) > 0$, 因此 $|f(g(Q)) - A| < \epsilon$.

- 设函数 f 在 $P_0 \in \mathbb{R}^m$ 的某个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$. 映射 $g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D 包含 $Q_0 \in \mathbb{R}^n$ 的某个空心邻域. 若 $\lim\limits_{Q \to Q_0} g(Q) = P_0$, 且 $Q \neq Q_0$ 时, $g(Q) \neq P_0$. 则有 $\lim\limits_{Q \to Q_0} f(g(Q)) = A$.
- 证明: 由 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$, 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $r > 0$, 当 $0 < |d(P, P_0)| < r$ 时 $|f(P) - A| < \epsilon$.

  由 $\lim\limits_{Q \to Q_0} g(Q) = P_0$, 存在 $\delta > 0$, 满足: 当 $0 < d(Q, Q_0) < \delta$ 时, $d(g(Q), P_0) < r$. 又由条件 $d(g(Q), P_0) > 0$, 因此 $|f(g(Q)) - A| < \epsilon$.

复合函数的极限 1

- 设函数 f 在 $P_0 \in \mathbb{R}^m$ 的某个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$. 映射 $g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D 包含 $Q_0 \in \mathbb{R}^n$ 的某个空心邻域. 若 $\lim\limits_{Q \to Q_0} g(Q) = P_0$, 且 $Q \neq Q_0$ 时, $g(Q) \neq P_0$. 则有 $\lim\limits_{Q \to Q_0} f(g(Q)) = A$.
- 证明: 由 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$, 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $r > 0$, 当 $0 < |d(P, P_0)| < r$ 时 $|f(P) - A| < \epsilon$.
  由 $\lim\limits_{Q \to Q_0} g(Q) = P_0$, 存在 $\delta > 0$, 满足: 当 $0 < d(Q, Q_0) < \delta$ 时, $d(g(Q), P_0) < r$. 又由条件 $d(g(Q), P_0) > 0$, 因此 $|f(g(Q)) - A| < \epsilon$.

复合函数的极限 2

- 设函数 f 在 $P_0 \in \mathbb{R}^m$ 的某个邻域上有定义，$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$. 映射 $g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. D 包含 $Q_0 \in \mathbb{R}^n$ 的某个空心邻域. 若 $\lim\limits_{Q \to Q_0} g(Q) = P_0$, 则有 $\lim\limits_{Q \to Q_0} f(g(Q)) = A$.

复合函数的极限 3

- 定理：$x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ 在 (u_0, v_0) 的一个空心邻域上有定义，且有
$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} g(u,v) = x_0, \quad \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} h(u,v) = y_0.$$
又 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义，且有 $(g(u,v), h(u,v)) \neq (x_0, y_0)$. 若 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，则有
$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} f(g(u,v), h(u,v)) = A.$$
- 注：若 $f(x_0, y_0) = A$，条件 $(g(u,v), h(u,v)) \neq (x_0, y_0)$ 可去掉.

复合函数的极限 3

复合函数的极限

- 定理：$x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ 在 (u_0, v_0) 的一个空心邻域上有定义，且有 $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} g(u,v) = x_0$, $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)} h(u,v) = y_0$.
又 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义, 且有 $(g(u,v), h(u,v)) \neq (x_0, y_0)$. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$, 则有
$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} f(g(u,v), h(u,v)) = A.$$
- 注: 若 $f(x_0, y_0) = A$, 条件 $(g(u,v), h(u,v)) \neq (x_0, y_0)$ 可去掉.

复合函数的极限 4

- 定理：设 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，$u=g(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=u_0$，且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时有 $g(x,y)\neq u_0$. 则有
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y))=A.$$

- 命题 (沿曲线的极限)：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，$x=x(t), y=y(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=x_0$，$\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=y_0$，且 $t\neq t_0$ 时有 $(x(t),y(t))\neq(x_0,y_0)$. 则有 $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t))=A$.

复合函数的极限 4

- 定理：设 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，$u=g(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=u_0$，且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时有 $g(x,y)\neq u_0$. 则有

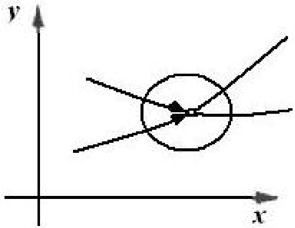
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y))=A.$$

- 命题 (沿曲线的极限)：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，$x=x(t), y=y(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=x_0$，$\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=y_0$，且 $t\neq t_0$ 时有 $(x(t),y(t))\neq(x_0,y_0)$. 则有 $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t))=A$.

- 命题：设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，$y_0=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)$. 则沿着曲线 $y=\phi(x)$, (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时的极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi(x))=A.$$

- 注：
  若上面命题中 $y_0=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$，
  则 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x,\phi(x))=A$.



- 注：对三元函数有类似结论。

多元函数的极限与沿曲线的极限 1

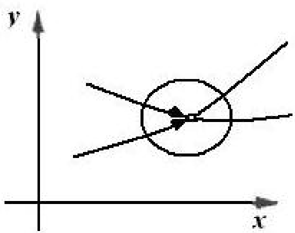
- 命题：设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，$y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x)$. 则沿着曲线 $y = \phi(x)$, (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时的极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi(x)) = A.$$

- 注：

  若上面命题中 $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,

  则 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x,\phi(x)) = A$.



- 注：对三元函数有类似结论。

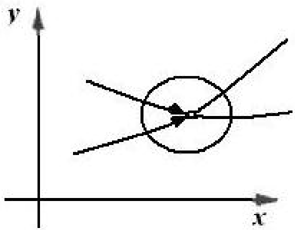
- 命题：设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，$y_0=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)$. 则沿着曲线 $y=\phi(x)$, (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时的极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi(x))=A.$$

- 注：

若上面命题中 $y_0=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,

则 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x,\phi(x))=A$.



- 注：对三元函数有类似结论。

多元函数的极限与沿曲线的极限 3

- 推论：若存在连续函数 $y=\phi(x)$，且 $y_0=\phi(x_0)$, 但是极限 $\lim_{x\to x_0} f(x,\phi(x))$ 不存在, 则极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.
- 推论：若存在连续函数 $y=\phi_1(x)$ 和 $y=\phi_2(x)$，且 $y_0=\phi_1(x_0)=\phi_2(x_0)$, 但是

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi_1(x)) \neq \lim_{x\to x_0} f(x,\phi_2(x)),$$

则极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在. (条件中的极限可以改为单边极限)

多元函数的极限与沿曲线的极限 3

- 推论：若存在连续函数 $y = \phi(x)$，且 $y_0 = \phi(x_0)$, 但是极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, \phi(x))$ 不存在, 则极限 $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ 不存在.
- 推论：若存在连续函数 $y = \phi_1(x)$ 和 $y = \phi_2(x)$，且 $y_0 = \phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$, 但是

$$\lim_{x \to x_0} f(x, \phi_1(x)) \neq \lim_{x \to x_0} f(x, \phi_2(x)),$$

则极限 $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ 不存在. (条件中的极限可以改为单边极限)

极限存在性 —例

- $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则有 $f(x,x)=\frac{x}{\sqrt{2}|x|}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ 不存在，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则有 $f(x,kx)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ 与 k 有关，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{x^4\cdot y^4}{(x^2+y^4)^3}$, 则有

$$\lim_{x\to 0} f(x,k\sqrt{|x|})=\frac{k^4}{(1+k^4)^3}.$$

与 k 有关，所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

极限存在性 —例

- $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则有 $f(x,x)=\frac{x}{\sqrt{2}|x|}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ 不存在，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则有 $f(x,kx)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ 与 k 有关，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{x^4\cdot y^4}{(x^2+y^4)^3}$, 则有

$$\lim_{x\to 0} f(x,k\sqrt{|x|})=\frac{k^4}{(1+k^4)^3}.$$

与 k 有关，所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

极限存在性—例

- $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则有 $f(x,x)=\frac{x}{\sqrt{2}|x|}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ 不存在，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则有 $f(x,kx)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ 与 k 有关，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{x^4\cdot y^4}{(x^2+y^4)^3}$, 则有

$$\lim_{x\to 0} f(x,k\sqrt{|x|})=\frac{k^4}{(1+k^4)^3}.$$

与 k 有关，所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

- 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)|=|A|$. 反过来不一定成立.
- 定理：设 $f(x,y),g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $f(x,y)\geq g(x,y)$. 若 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的极限都存在，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\geq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

极限的性质 1

- 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = |A|$. 反过来不一定成立.
- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $f(x,y) \geq g(x,y)$. 若 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的极限都存在，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \geq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

极限的性质 2

- 命题：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，满足

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) > \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

则存在 $\delta>0$, 使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$f(x,y) > g(x,y).$$

- 注：设 $f(x,y)$ 满足 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) > 0$, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时, $f(x,y)>0$.

极限的性质 2

- 命题：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，满足

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) > \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

则存在 $\delta>0$, 使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$f(x,y) > g(x,y).$$

- 注：设 $f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) > 0$, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时, $f(x,y)>0$.

夹逼定理

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $f(x,y) \le h(x,y) \le g(x,y)$. 若有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = A,$$

则有极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = A$.

- 推论：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $|f(x,y)| \le |g(x,y)|$. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

夹逼定理

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $f(x,y) \le h(x,y) \le g(x,y)$. 若有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = A,$$

则有极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = A.$

- 推论：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $|f(x,y)| \le |g(x,y)|$. 若 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

夹逼定理 —例 1

- $f(x,y)=\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有

$$|f(x,y)|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

- $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

证明：利用 $\lim\limits_{u\to0+0}u\ln(u)=0$，

$$|f(x,y)|\le\frac{1}{2}|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|\to0.$$

- $f(x,y)=\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有

$$|f(x,y)|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

- $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

证明：利用 $\lim\limits_{u\to0+0}u\ln(u)=0$，

$$|f(x,y)|\le\frac{1}{2}|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|\to0.$$

夹逼定理—例 2

- $f(x,y)=\frac{x^m\cdot y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m>k$ 时，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在 (极限为 0). $n+m\le k$ 时上述极限不存在.

证明：$n+m>k$ 时，

$$|f(x,y)|\le \frac{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}\cdot(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}\le (x^2+y^2)^{\frac{m+n-k}{2}}\to 0.$$

$n+m<k$ 时，取 $y=x$,

$$|f(x,x)|=2^{-\frac{k}{2}}|x|^{n+m-k}\to+\infty,$$

$n+m=k$ 时，取 $y=ax$,

$$|f(x,ax)|=|a|^n(1+a^2)^{-\frac{k}{2}}.$$

- $f(x,y)=\frac{x^m\cdot y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m>k$ 时，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在 (极限为 0). $n+m\leq k$ 时上述极限不存在.

证明：$n+m>k$ 时，

$$|f(x,y)|\leq\frac{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}\cdot(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}\leq(x^2+y^2)^{\frac{m+n-k}{2}}\to 0.$$

$n+m<k$ 时，取 $y=x$,

$$|f(x,x)|=2^{-\frac{k}{2}}|x|^{n+m-k}\to+\infty,$$

$n+m=k$ 时，取 $y=ax$,

$$|f(x,ax)|=|a|^n(1+a^2)^{-\frac{k}{2}}.$$

- $f(x,y)=\frac{x^m\cdot y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m>k$ 时，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在 (极限为 0). $n+m\leq k$ 时上述极限不存在.

  证明：$n+m>k$ 时，

$$|f(x,y)|\leq\frac{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}\cdot(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}\leq(x^2+y^2)^{\frac{m+n-k}{2}}\to 0.$$

$n+m<k$ 时，取 $y=x$,

$$|f(x,x)|=2^{-\frac{k}{2}}|x|^{n+m-k}\to+\infty,$$

$n+m=k$ 时，取 $y=ax$,

$$|f(x,ax)|=|a|^n(1+a^2)^{-\frac{k}{2}}.$$

夹逼定理 —例 2

- $f(x,y)=\frac{x^m\cdot y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m>k$ 时，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在 (极限为 0). $n+m\le k$ 时上述极限不存在.

  证明：$n+m>k$ 时，

$$|f(x,y)|\le\frac{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}\cdot(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}\le(x^2+y^2)^{\frac{m+n-k}{2}}\to 0.$$

  $n+m<k$ 时，取 $y=x$,

$$|f(x,x)|=2^{-\frac{k}{2}}|x|^{n+m-k}\to+\infty,$$

  $n+m=k$ 时，取 $y=ax$,

$$|f(x,ax)|=|a|^n(1+a^2)^{-\frac{k}{2}}.$$

夹逼定理 —例 3

- $f(x,y,z) = \frac{x^m y^n z^l}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m+l > k$ 时，极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0.$$

$n+m+l \leq k$ 时上述极限不存在.

极限的性质

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = B$. 则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = A \pm B,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = AB.$$

当 $B \neq 0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}$.

- 例： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$

- 例：求 $I = \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\left(\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2}\right)^{\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}}$.

  解：由于

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 2, \quad \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0.$$

  因此

$$\ln I = \lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}\ln\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 0\cdot\ln 2 = 0.$$

求极限 —例

- 例： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$
- 例：求 $I = \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\left(\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2}\right)^{\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}}.$

解：由于

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2}=2,\qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}=0.$$

因此

$$\ln I = \lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}\ln\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 0\cdot\ln 2 = 0.$$

- 例： $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$
- 例： 求 $I = \lim_{(u,v)\to(0,0)} (\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2})^{\frac{u \sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}}$.

  解: 由于

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 2, \quad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u \sin v}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0.$$

因此

$$\ln I = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{u \sin v}{\sqrt{u^2+v^2}} \ln \frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 0 \cdot \ln 2 = 0.$$

- 令 $A(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $B(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. 两个累次极限定义为

$$\lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big)=\lim_{x\to x_0} B(x),$$

$$\lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big)=\lim_{y\to y_0} A(y).$$

- 注: 上面定义中函数 $f(x,y)$ 可以在两条直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上没有定义.
- 例: $\lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\big)=0$, 但是全面极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.
- 例: $\lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\big)=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\big(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\big)=-1$

累次极限

- 令 $A(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $B(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. 两个累次极限定义为

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))=\lim_{x\to x_0} B(x),$$

$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\lim_{y\to y_0} A(y).$$

- 注: 上面定义中函数 $f(x,y)$ 可以在两条直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上没有定义.
- 例: $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2})=0$, 但是全面极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.
- 例: $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2})=1$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2})=-1$

累次极限

- 令 $A(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $B(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. 两个累次极限定义为

$$\lim_{x\to x_0}\big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big)=\lim_{x\to x_0} B(x),$$

$$\lim_{y\to y_0}\big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\big)=\lim_{y\to y_0} A(y).$$

- 注: 上面定义中函数 $f(x,y)$ 可以在两条直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上没有定义.
- 例: $\lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\big)=0$, 但是全面极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.
- 例: $\lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\big)=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\big(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\big)=-1$

累次极限和全面极限

- 若全面极限和累次极限都存在，则一定相等. 若两个累次极限存在但是不等，则全面极限不存在.

  证明：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在，则对任给 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$，$0<|y-y_0|<\delta$ 时，$|f(x,y)-A|<\epsilon$，则有当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)-A|\le\epsilon$，$|\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)-A|\le\epsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$.

- 例：$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，但是 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

- 若全面极限和累次极限都存在，则一定相等. 若两个累次极限存在但是不等，则全面极限不存在.

  证明：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 则对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$， $0 < |y - y_0| < \delta$ 时， $|f(x,y) - A| < \epsilon$， 则有当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) - A| \le \epsilon$,$|\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) - A| \le \epsilon$, 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = A$.

- 例： $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, 但是 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

- 若全面极限和累次极限都存在，则一定相等. 若两个累次极限存在但是不等，则全面极限不存在.

  证明：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 则对任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$， $0 < |y - y_0| < \delta$ 时，$|f(x,y) - A| < \epsilon$， 则有当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) - A| \le \epsilon$,$|\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) - A| \le \epsilon$, 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = A$.

- 例：$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, 但是 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

多元函数的连续性的定义

- 定义：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域上有定义. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，且在 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f\in C(D)$.
- 性质：f 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$(或者 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$) 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.
- 例：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点处不连续. 因为极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

多元函数的连续性的定义

- 定义：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域上有定义. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，且在 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f\in C(D)$.
- 性质：f 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$(或者 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$) 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.
- 例：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点处不连续. 因为极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

- 定义：设二元函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个邻域上有定义. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若 $z = f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，且在 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f \in C(D)$.
- 性质：f 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$(或者 $|x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta$) 时，有 $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$.
- 例：函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在原点处不连续. 因为极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

复合函数的连续

复合函数的极限

- 定理：若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，$u=g(z)$ 在 $z=z_0=f(x_0,y_0)$ 处连续，则有 $g(f(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

  证明：若 $u=g(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=z_0$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y))=g(z_0)=g(f(x_0,y_0)).$$

- 若 $g(u,v)$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续，$f(x,y),h(x,y)$ 在 $(x_0.y_0)$ 处连续，且 $(u_0.v_0)=(f(x_0.y_0),g(x_0.y_0))$. 则有 $g(f(x,y),h(x,y))$ 在 $(x_0.y_0)$ 处连续.

  证明: 由复合函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y),h(x,y))=g(u_0,v_0)$.

复合函数的连续

复合函数的极限

- 定理：若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，$u=g(z)$ 在 $z=z_0=f(x_0,y_0)$ 处连续，则有 $g(f(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

  证明：若 $u=g(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=z_0$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y))=g(z_0)=g(f(x_0,y_0)).$$

- 若 $g(u,v)$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续，$f(x,y),h(x,y)$ 在 $(x_0.y_0)$ 处连续，且 $(u_0.v_0)=(f(x_0.y_0),g(x_0.y_0))$. 则有 $g(f(x,y),h(x,y))$ 在 $(x_0.y_0)$ 处连续.

  证明：由复合函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y),h(x,y))=g(u_0,v_0)$.

复合函数的极限

- 定理：若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，$u=g(z)$ 在 $z=z_0=f(x_0,y_0)$ 处连续，则有 $g(f(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

  证明：若 $u=g(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=z_0$，则有
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y))=g(z_0)=g(f(x_0,y_0)).$$
- 若 $g(u,v)$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续，$f(x,y),h(x,y)$ 在 $(x_0.y_0)$ 处连续，且 $(u_0.v_0)=(f(x_0.y_0),g(x_0.y_0))$. 则有 $g(f(x,y),h(x,y))$ 在 $(x_0.y_0)$ 处连续.

  证明：由复合函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y),h(x,y))=g(u_0,v_0)$.

复合函数的连续

复合函数的极限

- 定理：若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，$u=g(z)$ 在 $z=z_0=f(x_0,y_0)$ 处连续，则有 $g(f(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

  证明：若 $u=g(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=z_0$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y))=g(z_0)=g(f(x_0,y_0)).$$

- 若 $g(u,v)$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续，$f(x,y),h(x,y)$ 在 $(x_0.y_0)$ 处连续，且 $(u_0.v_0)=(f(x_0.y_0),g(x_0.y_0))$. 则有 $g(f(x,y),h(x,y))$ 在 $(x_0.y_0)$ 处连续.

  证明: 由复合函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y),h(x,y))=g(u_0,v_0)$.

二元函数四则运算的连续性

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f\pm g, f\cdot g$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若还有 $g(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

  证明: $z=f(x,y)+g(x,y)$ 是 $z(u,v)=u+v$, $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 的复合.

- 例：$g(z)=\sqrt{z}$, $z=x^2+y^2$, 从而 $\sqrt{x^2+y^2}$ 连续.

二元函数四则运算的连续性

- 定理：设 $f(x,y),g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f\pm g, f\cdot g$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若还有 $g(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 (x_0,y_0) 处连续.
  证明: $z=f(x,y)+g(x,y)$ 是 $z(u,v)=u+v$, $(u,v)=(f(x,y),g(x,y))$ 的复合.
- 例：$g(z)=\sqrt{z}$, $z=x^2+y^2$, 从而 $\sqrt{x^2+y^2}$ 连续.

二元函数四则运算的连续性

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续，则 $f \pm g, f \cdot g$ 在 (x_0, y_0) 处连续. 若还有 $g(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 (x_0, y_0) 处连续.
  证明: $z = f(x,y) + g(x,y)$ 是 $z(u,v) = u + v$, $(u,v) = (f(x,y), g(x,y))$ 的复合.
- 例：$g(z) = \sqrt{z}$, $z = x^2 + y^2$, 从而 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 连续.

二元初等函数的连续性

- 二元初等函数：从 x, y 出发进行有限次的加、减、乘、除、与一元初等函数复合得到的函数.
- 定理：二元初等函数在其定义域内连续 (定义域的内点都是连续点). 例：$\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{xy}{x^2+y^2}$.
- 推论: 设 $f(x,y)$ 为二元初等函数, (x_0,y_0) 是其定义域的内点, 则有
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$
例: $x_0 > 0$ 时, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^y = x_0^{y_0}$,
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\sin(x+y) + |x+y+1|) = \sin(x_0+y_0) + |x_0+y_0+1|.$$

二元初等函数的连续性

- 二元初等函数：从 x, y 出发进行有限次的加、减、乘、除、与一元初等函数复合得到的函数.
- 定理：二元初等函数在其定义域内连续 (定义域的内点都是连续点).
  例：$\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{xy}{x^2+y^2}$.
- 推论: 设 $f(x,y)$ 为二元初等函数, (x_0,y_0) 是其定义域的内点, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

例: $x_0>0$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^y = x_0^{y_0}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\sin(x+y)+|x+y+1|) = \sin(x_0+y_0)+|x_0+y_0+1|.$$

- 二元初等函数：从 x, y 出发进行有限次的加、减、乘、除、与一元初等函数复合得到的函数.
- 定理：二元初等函数在其定义域内连续 (定义域的内点都是连续点).
  例：$\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{xy}{x^2+y^2}$.
- 推论: 设 $f(x, y)$ 为二元初等函数, (x_0, y_0) 是其定义域的内点, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

例: $x_0 > 0$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^y = x_0^{y_0}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\sin(x+y) + |x+y+1|) = \sin(x_0+y_0) + |x_0+y_0+1|.$$

向量函数的极限

- 向量函数的极限：设函数 $z = f(P) : D \to \mathbb{R}^m$ 在 P_0 点的一个空心邻域上有定义，若存在向量 $A \in \mathbb{R}^m$，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 使得当 $0 < d(P, P_0) < \delta$ 时，有 $d(f(P), A) < \epsilon$, 则称 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$. 则有

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \Longleftrightarrow \lim_{P \to P_0} f_k(P) = a_k, k = 1, 2, \cdots, m.$$

证明：$|f_k(P) - a_k| \le d(f(P), A) \le \sum\limits_{k=1}^{m} |f_k(P) - a_k|$.

向量函数的极限

- 向量函数的极限：设函数 $z=f(P):D\to\mathbb{R}^m$ 在 P_0 点的一个空心邻域上有定义，若存在向量 $A\in\mathbb{R}^m$，对任意 $\epsilon>0$, 存在 δ, 使得当 $0<d(P,P_0)<\delta$ 时，有 $d(f(P),A)<\epsilon$, 则称 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.
- 性质：设 $f(P)=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$, $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$. 则有

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \Longleftrightarrow \lim_{P\to P_0} f_k(P)=a_k, k=1,2,\cdots,m.$$

证明：$|f_k(P)-a_k|\le d(f(P),A)\le \sum\limits_{k=1}^{m}|f_k(P)-a_k|$.

映射 (向量函数) 的连续性

- 映射 (向量函数) 的连续：设映射 (向量函数)$z = f(P)$ 在 P_0 点附近有定义，若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$, 则称 $f(P)$ 在 P_0 点处连续. 如果 f 在区域 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f \in C(D)$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, 则有 f 在 P_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 在 P_0 处连续.
- 例：坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的连续映射.

映射 (向量函数) 的连续性

- 映射 (向量函数) 的连续：设映射 (向量函数)$z = f(P)$ 在 P_0 点附近有定义，若 $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$, 则称 $f(P)$ 在 P_0 点处连续. 如果 f 在区域 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f \in C(D)$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, 则有 f 在 P_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 在 P_0 处连续.
- 例：坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的连续映射.

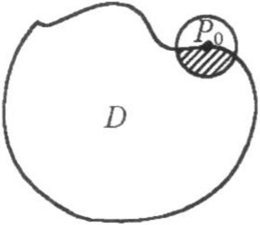
映射 (向量函数) 的连续性

- 映射 (向量函数) 的连续：设映射 (向量函数)$z = f(P)$ 在 P_0 点附近有定义，若 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$, 则称 $f(P)$ 在 P_0 点处连续. 如果 f 在区域 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f \in C(D)$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, 则有 f 在 P_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 在 P_0 处连续.
- 例：坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的连续映射.

- 定义：f 是闭区域 $\bar{D}$ 上的函数，$P_0 \in \partial\bar{D}$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $P \in U_\delta(P_0) \cap \bar{D}$ 时，有

$$|f(P) - f(P_0)| < \epsilon,$$

则称 f 在 P_0 处连续.
当 f 在 $\bar{D}$ 上处处连续时，记为 $f \in C(\bar{D})$.



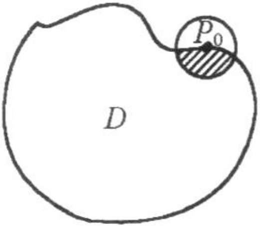
- $n = 1$ 时，
若 $\bar{D} = [a, b]$, f 在 a 点连续，即为右连续.
- 设 $f \in C(\bar{D})$, $P_0, P_k \in \bar{D}$,
且 $P_k \to P_0$, 则有 $\lim_{k\to\infty} f(P_k) = f(P_0)$.

有界闭区域上的连续函数 1

- 定义：f 是闭区域 $\bar{D}$ 上的函数，$P_0 \in \partial \bar{D}$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $P \in U_\delta(P_0) \cap \bar{D}$ 时，有

$$|f(P) - f(P_0)| < \epsilon,$$

则称 f 在 P_0 处连续.
当 f 在 $\bar{D}$ 上处处连续时，记为 $f \in C(\bar{D})$.

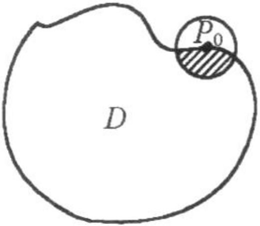


- $n = 1$ 时，
若 $\bar{D} = [a, b]$, f 在 a 点连续，即为右连续.
- 设 $f \in C(\bar{D})$, $P_0, P_k \in \bar{D}$,
且 $P_k \to P_0$, 则有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = f(P_0)$.

- 定义：f 是闭区域 $\bar{D}$ 上的函数，$P_0 \in \partial\bar{D}$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $P \in U_\delta(P_0) \cap \bar{D}$ 时，有

$$|f(P) - f(P_0)| < \epsilon,$$

则称 f 在 P_0 处连续.
当 f 在 $\bar{D}$ 上处处连续时，记为 $f \in C(\bar{D})$.



- $n = 1$ 时，
若 $\bar{D} = [a, b]$, f 在 a 点连续，即为右连续.
- 设 $f \in C(\bar{D})$, $P_0, P_k \in \bar{D}$,
且 $P_k \to P_0$, 则有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = f(P_0)$.

有界闭区域上的连续函数 2

- 定理：设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$ 上有界，即存在 $M > 0$，使得 $|f(P)| \leq M$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$ 上能取到最大值和最小值，即存在 $P_1, P_2 \in \bar{D}$, 使得 $f(P_1) \geq f(P) \geq f(P_2)$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 设 f 在 $\bar{D}$ 上的最大值为 M, 最小值为 m. 则对任意 $\eta \in (m, M)$, 存在 $P \in \bar{D}$, 使得 $f(P) = \eta$.

有界闭区域上的连续函数 2

- 定理：设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$ 上有界，即存在 $M > 0$，使得 $|f(P)| \leq M$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$ 上能取到最大值和最小值，即存在 $P_1, P_2 \in \bar{D}$, 使得 $f(P_1) \geq f(P) \geq f(P_2)$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 设 f 在 $\bar{D}$ 上的最大值为 M, 最小值为 m. 则对任意 $\eta \in (m, M)$, 存在 $P \in \bar{D}$, 使得 $f(P) = \eta$.

- 定理：设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$ 上有界，即存在 $M > 0$，使得 $|f(P)| \le M$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$ 上能取到最大值和最小值，即存在 $P_1, P_2 \in \bar{D}$, 使得 $f(P_1) \ge f(P) \ge f(P_2)$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 设 f 在 $\bar{D}$ 上的最大值为 M, 最小值为 m. 则对任意 $\eta \in (m, M)$, 存在 $P \in \bar{D}$, 使得 $f(P) = \eta$.

一阶偏导数的定义 1

- 定义：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在 (即 $f(x,y_0)$ 作为 x 的函数在 $x=x_0$ 处可导), 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数存在. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数可记为 $f_x(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)}$ 或者 $z_x|_{(x_0,y_0)}$. 类似可定义 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

- f 在 $\{(x,y_0)\in U_\delta(x_0,y_0)\}$ 上有定义即可考虑关于 x 的偏导数.

一阶偏导数的定义 1

- 定义：设 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某个邻域上有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

  存在 (即 $f(x, y_0)$ 作为 x 的函数在 $x = x_0$ 处可导)，则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数存在. $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数可记为 $f_x(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(x_0, y_0)}$ 或者 $z_x\big|_{(x_0, y_0)}$. 类似可定义 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处关于 y 的偏导数

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

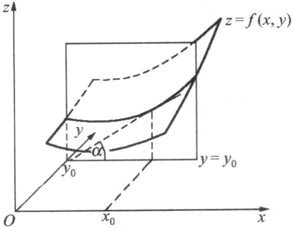
- f 在 $\{(x, y_0) \in U_\delta(x_0, y_0)\}$ 上有定义即可考虑关于 x 的偏导数.

一阶偏导数 —例 1

- 几何意义：$f_x(x_0, y_0)$ 是坐标曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在 (x_0, y_0) 点的切线关于 x 轴的斜率，$f_y(x_0, y_0)$ 类似.
- 例：$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$，$f(x, 0) = f(0, y) = 0$，因此 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

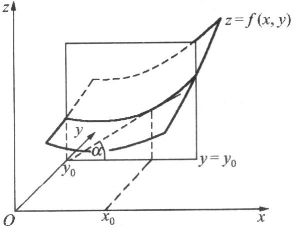
$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



- 几何意义：$f_x(x_0,y_0)$ 是坐标曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在 (x_0,y_0) 点的切线关于 x 轴的斜率，$f_y(x_0,y_0)$ 类似.
- 例：$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，$f(x,0)=f(0,y)=0$，因此 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$



一阶偏导数 —例 2

- 例：$z = \arctan\frac{(x-2)^2+y}{x+(x-2)^2y^2}$，则

$$z_y|_{(2,0)} = \frac{d}{dy}\left(\arctan\frac{y}{2}\right)\Big|_{y=0} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{4}}\frac{1}{2}\Big|_{y=0} = \frac{1}{2}.$$

- 例：$f(x,y) = x^y$, $x > 0$. 则 $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$.
- 注：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的偏导数记为 $f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n}$.

一阶偏导数 —例 2

- 例：$z = \arctan\frac{(x-2)^2+y}{x+(x-2)^2y^2}$，则

$$z_y|_{(2,0)} = \frac{d}{dy}\Big(\arctan\frac{y}{2}\Big)\Big|_{y=0} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{4}}\frac{1}{2}\Big|_{y=0} = \frac{1}{2}.$$

- 例：$f(x,y) = x^y$, $x > 0$. 则 $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$.
- 注：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的偏导数记为 $f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n}$.

一阶偏导数 —例 2

- 例：$z=\arctan\frac{(x-2)^2+y}{x+(x-2)^2y^2}$，则

$$z_y|_{(2,0)}=\frac{d}{dy}\Big(\arctan\frac{y}{2}\Big)\Big|_{y=0}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{4}}\frac{1}{2}\Big|_{y=0}=\frac{1}{2}.$$

- 例：$f(x,y)=x^y$, $x>0$. 则 $f_x=yx^{y-1}$, $f_y=x^y\ln x$.
- 注：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的偏导数记为 $f_{x_1},f_{x_2},\cdots,f_{x_n}$.

- 定义：设 $z = f(x, y)$, 定义 f 的二阶偏导数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

- 例：$f(x, y) = x^y$, $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$.

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1},$$
$$f_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}, \quad f_{yy} = x^y(\ln x)^2$$

高阶偏导数的定义

- 定义：设 $z = f(x, y)$，定义 f 的二阶偏导数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

- 例：$f(x, y) = x^y$, $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$.

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1},$$
$$f_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}, \quad f_{yy} = x^y(\ln x)^2$$

- 例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^2-y^2)xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^2-y^2)xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

显然，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 连续.

- 因为 $f_x(0,y)=-y, f_y(x,0)=x$. 从而得 $f_{xy}(0,0)=-1$，$f_{yx}(0,0)=1$.
容易验证 f_{xy}，f_{yx} 在原点处不连续.

高阶偏导数 —例

- 例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^2-y^2)xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^2-y^2)xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

显然，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 连续.

- 因为 $f_x(0,y)=-y, f_y(x,0)=x$. 从而得 $f_{xy}(0,0)=-1$，$f_{yx}(0,0)=1$. 容易验证 f_{xy}，f_{yx} 在原点处不连续.

高阶偏导数的性质

- 定理：若 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在区域 D 内连续，则 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in D$ 成立.
- $f(x,y)=x^y\in C^2$，但是 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的二阶偏导数不连续.
- 记 $C^n(D)$ 为 D 上所有 k 阶 $(k\le n)$ 偏导数连续的函数构成的集合. 则对 $f\in C^2(D)$，$f_{xy}=f_{yx}$，对 $f\in C^3(D)$，$f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx},\dots$

高阶偏导数的性质

- 定理：若 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在区域 D 内连续，则 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in D$ 成立.
- $f(x,y)=x^y\in C^2$, 但是 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的二阶偏导数不连续.
- 记 $C^n(D)$ 为 D 上所有 k 阶 $(k\leq n)$ 偏导数连续的函数构成的集合. 则对 $f\in C^2(D)$, $f_{xy}=f_{yx}$, 对 $f\in C^3(D)$, $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx},\cdots$

高阶偏导数的性质

- 定理：若 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在区域 D 内连续，则 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in D$ 成立.
- $f(x,y)=x^y\in C^2$，但是 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的二阶偏导数不连续.
- 记 $C^n(D)$ 为 D 上所有 k 阶 $(k\leq n)$ 偏导数连续的函数构成的集合. 则对 $f\in C^2(D)$，$f_{xy}=f_{yx}$，对 $f\in C^3(D)$，$f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$，…

- 证明：设

$$H(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0),$$

令 $g(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$，则有
$g'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y) - f_y(x_0, y)$,

$$\begin{aligned} H =&(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) \\ &- (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) \\ =&g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y \\ =&(f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - f_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y))\Delta y \\ =&f_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

定理的证明 2

- 证明 (续)：令 $h(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$, 则有 $h'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y) - f_x(x, y_0)$,

$$
\begin{aligned}
H =& (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)) \\
& - (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) \\
=& h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = h'(x_0 + \theta_3 \Delta x)\Delta x \\
=& (f_x(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0))\Delta x \\
=& f_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)\Delta x \Delta y,
\end{aligned}
$$

因此 $\Delta x \Delta y \neq 0$ 时,
$f_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) = f_{xy}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)$,
$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ 得 $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

Laplace 微分算子 1

- 例：$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足 $\Delta z=0$, 其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

证明：设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{r}\cdot\frac{x}{r}=\frac{x}{r^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{r}\cdot\frac{y}{r}=\frac{y}{r^2},$$

则有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{2x^2}{r^4},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{2y^2}{r^4},$$

相加即得.

- 例：$z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足 $\Delta z = 0$, 其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
  证明：设 $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{r}\cdot\frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{r}\cdot\frac{y}{r} = \frac{y}{r^2},$$

  则有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4},$$

  相加即得.

Laplace 微分算子 2

- 例：$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足 $\Delta u=0$, 其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

  证明：设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},$$

  则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

  相加即得.

- 注：$n>2$ 时，$\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, $\Delta[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}]=0$.

- 例：$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足 $\Delta u=0$, 其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

证明：设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},$$

则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

相加即得.

- 注：$n>2$ 时，$\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, $\Delta[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}]=0$.

- 例：$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足 $\Delta u=0$, 其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

  证明：设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},$$

  则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

  相加即得.

- 注：$n>2$ 时，$\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, $\Delta[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}]=0$.

全微分的定义

- 一元函数可微的定义：$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$. 即 $y=f(x)$ 与 $y=f(x_0)+A(x-x_0)$ 相切, 也等价于 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且 $f'(x_0)=A$.
- 二元函数可微的定义：$z=f(x,y)$. 记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 若存在实数 A,B，使得

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$
$$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全微分，记为 $df=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$.

全微分的定义

- 一元函数可微的定义：$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$. 即 $y=f(x)$ 与 $y=f(x_0)+A(x-x_0)$ 相切, 也等价于 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且 $f'(x_0)=A$.
- 二元函数可微的定义：$z=f(x,y)$. 记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 若存在实数 A,B，使得

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全微分，记为 $df=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$.

全微分 —例

- 注：$z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，即存在实数 A, B，使得

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

- n 元函数的全微分可类似定义.

- 例：$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，则

$$f(\Delta x, \Delta y) = o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，此时 $A = B = 0$, $df|_{(0,0)} = 0$.

全微分 —例

- 注: $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微，即存在实数 A, B，使得

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

- n 元函数的全微分可类似定义.
- 例： $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$，则

$$f(\Delta x, \Delta y) = o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，此时 $A = B = 0$, $df|_{(0,0)} = 0$.

- 定理：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，设 $df|_{(x_0,y_0)}=Adx+Bdy$, 则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，且 $f_x(x_0,y_0)=A$, $f_y(x_0,y_0)=B$. 即

$$df|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy.$$

- 证明：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-A\Delta x-B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

可微与偏导数存在 1

- 定理：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，设 $df|_{(x_0,y_0)}=Adx+Bdy$, 则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，且 $f_x(x_0,y_0)=A$, $f_y(x_0,y_0)=B$. 即

$$df|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy.$$

- 证明：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-A\Delta x-B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

可微与偏导数存在 2

- 证明 (续)：取 $\Delta y = 0$, $\rho = |\Delta x|$, 则有 $\Delta x \to 0$ 时,

$$\frac{|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) - A\Delta x|}{|\Delta x|} \to 0.$$

得 $f_x(x_0, y_0) = A$. 同样可得 $f_y(x_0, y_0) = B$.

- 推论：$f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微等价于: $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的偏导数存在, 且

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_x(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

- 偏导数存在时不一定可微. 如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

可微与偏导数存在 2

- 证明 (续)：取 $\Delta y = 0$, $\rho = |\Delta x|$, 则有 $\Delta x \to 0$ 时,

$$\frac{|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) - A\Delta x|}{|\Delta x|} \to 0.$$

  得 $f_x(x_0, y_0) = A$. 同样可得 $f_y(x_0, y_0) = B$.

- 推论：$f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微等价于: $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的偏导数存在, 且

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_x(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

- 偏导数存在时不一定可微. 如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

可微与偏导数存在 2

- 证明 (续)：取 $\Delta y = 0$, $\rho = |\Delta x|$, 则有 $\Delta x \to 0$ 时,

$$\frac{|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) - A\Delta x|}{|\Delta x|} \to 0.$$

得 $f_x(x_0, y_0) = A$. 同样可得 $f_y(x_0, y_0) = B$.

- 推论：$f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微等价于: $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的偏导数存在, 且

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_x(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

- 偏导数存在时不一定可微. 如

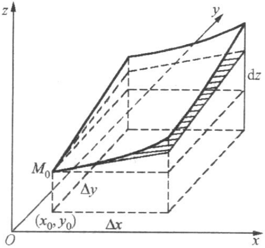
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

全微分的定义几何意义

- 几何意义：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}).$$

即 $z=f(x,y)$ 和
平面 $z=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)$
在 (x_0,y_0) 点相切.



可微与连续

- 定理：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

  证明: $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &= A(x-x_0)+B(y-y_0) \\ &\quad + o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}) \to 0. \end{aligned}$$

- 例：连续函数不一定可微: $f(x,y)=|x|+|y|$. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数不存在, 因此不可微.

可微与连续

- 定理：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

  证明: $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,

$$
\begin{aligned}
f(x,y)-f(x_0,y_0) &= A(x-x_0)+B(y-y_0) \\
&\quad + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)\to 0.
\end{aligned}
$$

- 例：连续函数不一定可微: $f(x,y)=|x|+|y|$. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数不存在, 因此不可微.

可微与偏导数连续 1

- 定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近两个偏导数存在，且 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.
- 证明：

$$
\begin{aligned}
\Delta z =& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\
=& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) \\
&+ f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\
=& f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y \\
=& f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y
\end{aligned}
$$

可微与偏导数连续 1

- 定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近两个偏导数存在，且 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.
- 证明：

$$
\begin{aligned}
\Delta z =& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\\
=& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)\\
&+ f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\\
=& f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\\
=& f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y
\end{aligned}
$$

- 证明 (续): 其中

$$\alpha_1 = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0) \to 0$$

$$\alpha_2 = f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0) \to 0$$

因为

$$\frac{|\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y|}{\rho} \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \to 0,$$

即得 $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = o(\rho)$.

- 推论: 若 $f \in C^1(D)$, 则 f 在 D 上可微.
- 对初等函数, 若 f 在 (x_0, y_0) 附近偏导数存在, 则 f 在 (x_0, y_0) 处可微.

可微与偏导数连续 2

- 证明 (续)：其中

$$\alpha_1 = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0) \to 0$$

$$\alpha_2 = f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0) \to 0$$

因为

$$\frac{|\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y|}{\rho} \le |\alpha_1| + |\alpha_2| \to 0,$$

即得 $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = o(\rho)$.

- 推论: 若 $f \in C^1(D)$, 则 f 在 D 上可微.
- 对初等函数, 若 f 在 (x_0, y_0) 附近偏导数存在, 则 f 在 (x_0, y_0) 处可微.

可微函数但偏导数不一定连续

- 注：可微函数函数偏导数不一定连续，如

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

则有

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

例

- 例: $f(x,y,z)=\left(\frac{y}{x}\right)^z$, 由于 $f_x(1,2,-1)=\frac{1}{2}$, $f_y(1,2,-1)=-\frac{1}{4}$, $f_z(1,2,-1)=\frac{1}{2}\ln 2$, 因此

$$df|_{(1,2,-1)}=\frac{1}{2}dx-\frac{1}{4}dy+\frac{1}{2}\ln 2dz.$$

复合函数微分法 1

- 定理：设 $z = g(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的偏导数存在，$u = f(z)$ 在 $z_0 = g(x_0, y_0)$ 处可导，则复合函数 $u = f(g(x, y))$ 在 (x_0, y_0) 处偏导数存在，且有链式法则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{du}{dz}(z_0) \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{du}{dz}(z_0) \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

复合函数微分法 2

- 定理：设 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数存在，$z=f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 附近偏导数存在且偏导数在 (u_0,v_0) 点连续（这里 $u_0=\phi(x_0,y_0)$, $v_0=\psi(x_0,y_0)$），则复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在，且有链式法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}+\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}+\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

- f 满足的条件可以改为：$f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点处可微.

复合函数微分法 2

- 定理：设 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数存在，$z=f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 附近偏导数存在且偏导数在 (u_0,v_0) 点连续 (这里 $u_0=\phi(x_0,y_0)$, $v_0=\psi(x_0,y_0)$), 则复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在, 且有链式法则

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

- f 满足的条件可以改为: $f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点处可微.

复合函数微分法 3

- 定理证明：由 $z=f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点可微，有

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v+\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\alpha(\Delta u,\Delta v),$$

其中 α 满足：当 $(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)$ 时，$\alpha(\Delta u,\Delta v)\to 0$. 令

$$\Delta u=\phi(x_0+\Delta x,y_0)-\phi(x_0,y_0),$$

$$\Delta v=\psi(x_0+\Delta x,y_0)-\psi(x_0,y_0),$$

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(\phi(x_0+\Delta x,y_0),\psi(x_0+\Delta x,y_0))-f(u_0,v_0)\\&=\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v+\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\alpha(\Delta u,\Delta v).\end{aligned}$$

上面等式两边同除以 Δx, 再令 $\Delta x\to 0$ 即得第一个等式.

复合函数微分法 3

- 定理证明：由 $z=f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点可微，有

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v+\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\alpha(\Delta u,\Delta v),$$

其中 α 满足：当 $(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)$ 时，$\alpha(\Delta u,\Delta v)\to 0$. 令

$$\Delta u=\phi(x_0+\Delta x,y_0)-\phi(x_0,y_0),$$

$$\Delta v=\psi(x_0+\Delta x,y_0)-\psi(x_0,y_0),$$

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(\phi(x_0+\Delta x,y_0),\psi(x_0+\Delta x,y_0))-f(u_0,v_0)\\&=\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v+\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\alpha(\Delta u,\Delta v).\end{aligned}$$

上面等式两边同除以 Δx, 再令 $\Delta x\to 0$ 即得第一个等式.

复合函数微分法 3

- 定理证明：由 $z = f(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 点可微，有

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\alpha(\Delta u, \Delta v),$$

其中 α 满足：当 $(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$ 时，$\alpha(\Delta u, \Delta v) \to 0$. 令

$$\Delta u = \phi(x_0 + \Delta x, y_0) - \phi(x_0, y_0),$$

$$\Delta v = \psi(x_0 + \Delta x, y_0) - \psi(x_0, y_0),$$

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(\phi(x_0 + \Delta x, y_0), \psi(x_0 + \Delta x, y_0)) - f(u_0, v_0)\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\alpha(\Delta u, \Delta v).\end{aligned}$$

上面等式两边同除以 Δx, 再令 $\Delta x \to 0$ 即得第一个等式.

复合函数微分法 4

- $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 求导的链式法则可以写成

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

- 若 $z=f(\phi(t),\psi(t))$, f 可微，则有

$$\frac{dz}{dt}=f_1'\phi'(t)+f_2'\psi'(t).$$

- 例: $z=f(x,y,w(x,y))$. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}$.
- 若 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $i=1,2,\cdots,n$. f 可微，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, k=1,2,\cdots,m.$$

复合函数微分法 4

- $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 求导的链式法则可以写成

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

- 若 $z=f(\phi(t),\psi(t))$, f 可微，则有

$$\frac{dz}{dt}=f_1'\phi'(t)+f_2'\psi'(t).$$

- 例: $z=f(x,y,w(x,y))$. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}$.
- 若 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $i=1,2,\cdots,n$. f 可微，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, k=1,2,\cdots,m.$$

复合函数微分法 4

- $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 求导的链式法则可以写成

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

- 若 $z=f(\phi(t),\psi(t))$, f 可微，则有

$$\frac{dz}{dt}=f_1'\phi'(t)+f_2'\psi'(t).$$

- 例: $z=f(x,y,w(x,y))$. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}$.
- 若 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $i=1,2,\cdots,n$. f 可微，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, k=1,2,\cdots,m.$$

复合函数微分法 4

- $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 求导的链式法则可以写成

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial \phi}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

- 若 $z=f(\phi(t),\psi(t))$, f 可微，则有

$$\frac{dz}{dt}=f_1'\phi'(t)+f_2'\psi'(t).$$

- 例: $z=f(x,y,w(x,y))$. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}$.
- 若 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $i=1,2,\cdots,n$. f 可微，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, k=1,2,\cdots,m.$$

关于复合函数微分法的注记 1

- 例: $z = f(u, v) = v \ln u$, $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

  解:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v}{u} \cdot 2x - \ln u \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2} \ln(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v}{u} \cdot 2y + \ln u \cdot \frac{1}{x} = \frac{2y^2}{x(x^2 + y^2)} + \frac{1}{x} \ln(x^2 + y^2).$$

- $f(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 处的偏导数存在但不可微时, 复合函数的偏导数不一定存在, 即使偏导数存在也不一定满足链式法则.

- 例: $z=f(u,v)=v\ln u$, $u=x^2+y^2$, $v=\frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
  解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v}{u}\cdot 2x-\ln u\cdot\frac{y}{x^2}=\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2}\ln(x^2+y^2),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{v}{u}\cdot 2y+\ln u\cdot\frac{1}{x}=\frac{2y^2}{x(x^2+y^2)}+\frac{1}{x}\ln(x^2+y^2).$$

- $f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 处的偏导数存在但不可微时, 复合函数的偏导数不一定存在, 即使偏导数存在也不一定满足链式法则.

关于复合函数微分法的注记 2

- 例：设 $u=x+y,\ v=x-y,$

$$z=f(u,v)=\begin{cases}\frac{u^2v}{u^2+v^2}, & (u,v)\neq(0,0)\\ 0, & (u,v)=(0,0)\end{cases}$$

则有 $z=f(x+y,x-y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^2(x-y)}{2(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{2},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(0,0)}\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{2},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(0,0)}\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0.$$

关于复合函数微分法的注记 2

- 例：设 $u = x + y,\ v = x - y,$

$$z = f(u, v) = \begin{cases} \frac{u^2 v}{u^2+v^2}, & (u, v) \neq (0,0) \\ 0, & (u, v) = (0,0) \end{cases}$$

则有 $z = f(x + y, x - y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2(x-y)}{2(x^2+y^2)}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \frac{1}{2}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)} \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(0,0)} \cdot \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = -\frac{1}{2}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)} \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(0,0)} \cdot \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

复合函数微分法 —例 2

- 设 $z = f(x, y)$ 有连续的一阶偏导数，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 证明

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

证明：利用复合函数求导法则，

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta).$$

从上式可以解出 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\sin\theta$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\cos\theta$.

复合函数微分法 —例 2

- 设 $z = f(x, y)$ 有连续的一阶偏导数，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 证明

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

证明：利用复合函数求导法则,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta).$$

从上式可以解出 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\sin\theta$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\cos\theta$.

- 设 $z=f(x,y)$ 有连续的一阶偏导数，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 证明

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

证明：利用复合函数求导法则,

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta).$$

从上式可以解出 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\sin\theta$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\cos\theta$.

复合函数的高阶偏导数

- 设 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 和 $z=f(u,v)$ 都有连续的二阶偏导数，则复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 的二阶偏导数存在，且有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2f_{uv}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+f_{vv}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

- 证明: $\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f_u}{\partial x}=f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}+f_{uv}\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f_v}{\partial x}=f_{vu}\frac{\partial u}{\partial x}+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial f_u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f_v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

复合函数的高阶偏导数

- 设 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 和 $z=f(u,v)$ 都有连续的二阶偏导数, 则复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 的二阶偏导数存在，且有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2f_{uv}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+f_{vv}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\\&\quad+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.\end{aligned}$$

- 证明： $\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f_u}{\partial x}=f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}+f_{uv}\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f_v}{\partial x}=f_{vu}\frac{\partial u}{\partial x}+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial f_u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f_v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

复合函数的高阶偏导数 —例 1

- $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. 则有

$$\Delta z = z_{rr}+\frac{1}{r}z_r+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}.$$

证明: 利用复合函数求偏导

$$z_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta, \quad z_\theta = z_x(-r\sin\theta)+z_y(r\cos\theta)$$

继续求偏导 $z_{rr}=\cos\theta\frac{\partial z_x}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial z_y}{\partial r}$, $\frac{\partial z_x}{\partial r}=z_{xx}\cos\theta+z_{xy}\sin\theta$.
$z_{\theta\theta}=z_x(-r\cos\theta)-z_y(r\sin\theta)+(-r\sin\theta)\frac{\partial z_x}{\partial\theta}+(r\cos\theta)\frac{\partial z_y}{\partial\theta}$.

$$\begin{aligned} z_{rr} &= z_{xx}\cos^2\theta+z_{yy}\sin^2\theta+2z_{xy}\cos\theta\sin\theta \\ z_{\theta\theta} &= z_{xx}(r^2\sin^2\theta)+z_{yy}(r^2\cos^2\theta)+2z_{xy}(-r^2\cos\theta\sin\theta) \\ &\quad + z_x(-r\cos\theta)+z_y(-r\sin\theta) \end{aligned}$$

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，
$x=r\sin\phi\cos\theta, y=r\sin\phi\sin\theta, z=r\cos\phi$, 则有

- $$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$
- $u=f(x,y,z)$, $x=r\sin\phi\cos\theta$, $y=r\sin\phi\sin\theta$, $z=r\cos\phi$. 则有
$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi})+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

复合函数的高阶偏导数 —例 3

- 求 $z = f(x+y, x-y)$ 的偏导数 (这里 f 有连续的二阶偏导数).

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x+y, x-y) + f_2'(x+y, x-y)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f_{11}''(x+y, x-y) + f_{12}''(x+y, x-y) \\
&\quad + f_{21}''(x+y, x-y) + f_{22}''(x+y, x-y) \\
&= f_{11}''(x+y, x-y) + 2f_{12}''(x+y, x-y) + f_{22}''(x+y, x-y), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{11}''(x+y, x-y) - f_{12}''(x+y, x-y) \\
&\quad + f_{21}''(x+y, x-y) - f_{22}''(x+y, x-y) \\
&= f_{11}''(x+y, x-y) - f_{22}''(x+y, x-y).
\end{aligned}$$

- 求 $z = f(x+y, x-y)$ 的偏导数 (这里 f 有连续的二阶偏导数).

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(x+y, x-y) + f'_2(x+y, x-y)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''_{11}(x+y, x-y) + f''_{12}(x+y, x-y)\\ &\quad + f''_{21}(x+y, x-y) + f''_{22}(x+y, x-y)\\ &= f''_{11}(x+y, x-y) + 2f''_{12}(x+y, x-y) + f''_{22}(x+y, x-y),\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{11}(x+y, x-y) - f''_{12}(x+y, x-y)\\ &\quad + f''_{21}(x+y, x-y) - f''_{22}(x+y, x-y)\\ &= f''_{11}(x+y, x-y) - f''_{22}(x+y, x-y).\end{aligned}$$

- 定理：设 $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 都有连续的偏导数，则 $z = f(u(x, y), v(x, y))$ 可微，全微分为 $dz = f_u du + f_v dv$, 即不管 u, v 是自变量还是中间变量，$z = f(u, v)$ 的微分形式相同.
- 证明：$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_u \frac{\partial u}{\partial y} + f_v \frac{\partial v}{\partial y}$. 得

$$
\begin{aligned}
dz =& \left(f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(f_u \frac{\partial u}{\partial y} + f_v \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy \\
=& f_u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) + f_v \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) \\
=& f_u du + f_v dv.
\end{aligned}
$$

一阶全微分形式的不变性 1

- 定理：设 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 都有连续的偏导数，则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 可微，全微分为 $dz=f_u du+f_v dv$, 即不管 u,v 是自变量还是中间变量，$z=f(u,v)$ 的微分形式相同.
- 证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}$. 得

$$
\begin{aligned}
dz=&\left(f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\
=&f_u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+f_v\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\
=&f_u du+f_v dv.
\end{aligned}
$$

一阶全微分形式的不变性 2

- 其它形式复合函数的微分：设下面中用到的函数都有连续偏导数或导数.

$$d(f(g(x,y))) = f'(g)dg$$

$$d(f(\phi(x),\psi(x))) = f_1'd\phi + f_2'd\psi$$

- 令 $f(u,v) = u \pm v, uv, \frac{u}{v}$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, 得

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

一阶全微分形式的不变性 2

- 其它形式复合函数的微分：设下面中用到的函数都有连续偏导数或导数.

$$d(f(g(x,y))) = f'(g)dg$$

$$d(f(\phi(x),\psi(x))) = f_1' d\phi + f_2' d\psi$$

- 令 $f(u,v) = u \pm v, uv, \frac{u}{v}$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, 得

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

一阶全微分形式不变性的应用

- 设 $u = \sin(x^2+y^2) + e^{xz}$, 求函数在 $(1,0,1)$ 处的全微分。

$$\begin{aligned} du &= \cos(x^2+y^2)d(x^2+y^2) + e^{xz}d(xz) \\ &= \cos(x^2+y^2)(2xdx+2ydy) + e^{xz}(xdz+zdx) \\ &= [2x\cos(x^2+y^2) + e^{xz}z]dx + 2y\cos(x^2+y^2)dy + e^{xz}xdz, \end{aligned}$$

从而得 $du|_{(1,0,1)} = (2\cos 1 + e)dx + edz.$

高阶微分

- 若 $z=f(x,y)\in C^2(D)$. 当 x,y 为自变量时，dx,dy 看成常数，从而 df 是 x,y 的函数，定义二阶微分 $d^2f=d(df)$. 由于
  $df=f_xdx+f_ydy=(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y})f$,

$$
\begin{aligned}
d^2f=&\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)f\\
=&dx^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+dy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}
$$

- 若 $z=f(x,y)\in C^n(D)$, 定义 $d^nf=d(d^{n-1}f)$. 则有

$$
\begin{aligned}
d^nf=&\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\\
=&dx^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+ndx^{n-1}dy\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}+\cdots+dy^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}.
\end{aligned}
$$

- 若 $z=f(x,y)\in C^2(D)$. 当 x,y 为自变量时，dx,dy 看成常数，从而 df 是 x,y 的函数，定义二阶微分 $d^2f=d(df)$. 由于
$df=f_xdx+f_ydy=(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y})f$,

$$
\begin{aligned}
d^2f=&\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)f\\
=&dx^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+dy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}
$$

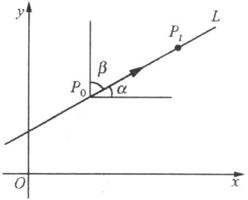
- 若 $z=f(x,y)\in C^n(D)$, 定义 $d^nf=d(d^{n-1}f)$. 则有

$$
\begin{aligned}
d^nf=&\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\\
=&dx^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+ndx^{n-1}dy\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}+\cdots+dy^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}.
\end{aligned}
$$

方向导数 1

- 方向导数：设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的一个邻域内有定义，$\vec{l}$ 是一个给定的方向，其方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$，若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$
$$=\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)\Big|_{t=0}$$



存在，则称 f 在 P_0 点沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，记作 $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(x_0,y_0)$，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

方向导数 2

- 注：f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，等价于 f 沿方向 $-\vec{l}$ 的方向导数存在，且 $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$.

  证明:

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} = \frac{d}{dt} f(x_0 - t\cos\alpha, y_0 - t\cos\beta)\Big|_{t=0}$$
$$= -\frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}.$$

- $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

方向导数 2

- 注：f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，等价于 f 沿方向 $-\vec{l}$ 的方向导数存在，且 $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$.

  证明:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} &= \frac{d}{dt} f(x_0 - t\cos\alpha, y_0 - t\cos\beta)\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}.\end{aligned}$$

- $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

方向导数 2

- 注：f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，等价于 f 沿方向 $-\vec{l}$ 的方向导数存在，且 $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})}=-\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$.
  证明:
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} &= \frac{d}{dt}f(x_0-t\cos\alpha, y_0-t\cos\beta)\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)\Big|_{t=0}=-\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}.\end{aligned}$$
- $\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}$; $\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial y}$.

方向导数 3

- 定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点沿任一方向 $\vec{l}$(方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$) 的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$
$$= (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))\cdot \vec{l}^o.$$

- 证明：利用链式法则，

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{d}{dt} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)\Big|_{t=0}$$
$$= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

方向导数 3

- 定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点沿任一方向 $\vec{l}$(方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$) 的方向导数均存在，且

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta \\ &= (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))\cdot \vec{l^o}.\end{aligned}$$

- 证明：利用链式法则，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} &= \frac{d}{dt} f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)\Big|_{t=0} \\ &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.\end{aligned}$$

方向导数 —例

- 例 (方向导数的计算): $f(x,y)=x^3y, \vec{l}=(\sqrt{3},1)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,2)}=3x^2y\big|_{(1,2)}\frac{\sqrt{3}}{2}+x^3\big|_{(1,2)}\frac{1}{2}=3\sqrt{3}+\frac{1}{2}.$$

- 例：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，若单位向量 $\vec{l},\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 满足 $\vec{l}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}=a\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}\Big|_{(x_0,y_0)}+b\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

证明: $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{l}=a(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{e}_1+b(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{e}_2$.

方向导数 —例

- 例 (方向导数的计算): $f(x,y)=x^3y, \vec{l}=(\sqrt{3},1)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,2)}=3x^2y|_{(1,2)}\frac{\sqrt{3}}{2}+x^3|_{(1,2)}\frac{1}{2}=3\sqrt{3}+\frac{1}{2}.$$

- 例：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，若单位向量 $\vec{l},\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 满足 $\vec{l}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}=a\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}\Big|_{(x_0,y_0)}+b\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

证明: $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{l}=a(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{e}_1+b(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{e}_2$.

三元函数的方向导数

- 三元函数的方向导数可类似定义. 设 $u=f(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域内有定义, $\vec{l}$ 是一个给定的方向, 其方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数定义为

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

- 若 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处可微, 利用链式法则,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(P_0)}=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta++f_z(P_0)\cos\gamma.$$

三元函数的方向导数

- 三元函数的方向导数可类似定义. 设 $u=f(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域内有定义, $\vec{l}$ 是一个给定的方向, 其方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数定义为

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

- 若 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处可微, 利用链式法则,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(P_0)}=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta++f_z(P_0)\cos\gamma.$$

方向导数 —例 3

- 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$. 由于

$$f(t\cos\alpha, t\cos\beta)=\cos\alpha\cos^2\beta\cdot t,$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)=\cos\alpha\cos^2\beta$.

- 上面的函数 $f(x,y)$ 在原点不可微, $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)=\cos\alpha\cos^2\beta\neq f_x(0,0)\cos\alpha+f_y(0,0)\cos\beta.$$

方向导数 —例 3

- 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$. 由于

$$f(t\cos\alpha,t\cos\beta)=\cos\alpha\cos^2\beta\cdot t,$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)=\cos\alpha\cos^2\beta$.

- 上面的函数 $f(x,y)$ 在原点不可微, $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)=\cos\alpha\cos^2\beta\neq f_x(0,0)\cos\alpha+f_y(0,0)\cos\beta.$$

最大方向导数

- 命题：设 f 在 (x_0, y_0) 点可微或偏导数连续，且在 (x_0, y_0) 的两个偏导数不同时为 0，则 f 在 (x_0, y_0) 处沿方向 $\vec{t} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ 的方向导数取最大值 $|\vec{t}|$ (沿 $-\vec{t}$ 的方向导数最小).
- 证明：设 $\vec{l}$ 是一个任意给定方向，其方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta \\ &= \vec{t}\cdot(\cos\alpha, \cos\beta) \le |\vec{t}| = \sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}.\end{aligned}$$

又有

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{t}}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\frac{f_x(x_0, y_0)}{|\vec{t}|} + f_y(x_0, y_0)\frac{f_y(x_0, y_0)}{|\vec{t}|} = |\vec{t}|.$$

最大方向导数

- 命题：设 f 在 (x_0, y_0) 点可微或偏导数连续，且在 (x_0, y_0) 的两个偏导数不同时为 0，则 f 在 (x_0, y_0) 处沿方向 $\vec{t} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ 的方向导数取最大值 $|\vec{t}|$ (沿 $-\vec{t}$ 的方向导数最小).
- 证明：设 $\vec{l}$ 是一个任意给定方向，其方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta \\ &= \vec{t}\cdot(\cos\alpha, \cos\beta) \le |\vec{t}| = \sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}.\end{aligned}$$

又有

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{t}}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\frac{f_x(x_0, y_0)}{|\vec{t}|} + f_y(x_0, y_0)\frac{f_y(x_0, y_0)}{|\vec{t}|} = |\vec{t}|.$$

梯度的定义

- 定义：设 f 在 (x_0, y_0) 点可微或者偏导数连续. f 在 (x_0, y_0) 的梯度定义为
$$\text{grad}\, f|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$
- 注：类似地可定义三元函数的梯度：f 在 (x_0, y_0, z_0) 点可微或者偏导数连续. f 在 (x_0, y_0, z_0) 的梯度定义为
$\text{grad}\, f|_{(x_0,y_0,z_0)} = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$. 且梯度方向的方向导数最大.

梯度的定义

- 定义：设 f 在 (x_0, y_0) 点可微或者偏导数连续. f 在 (x_0, y_0) 的梯度定义为

$$\text{grad}\, f|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

- 注: 类似地可定义三元函数的梯度: f 在 (x_0, y_0, z_0) 点可微或者偏导数连续. f 在 (x_0, y_0, z_0) 的梯度定义为
$\text{grad}\, f|_{(x_0,y_0,z_0)} = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$. 且梯度方向的方向导数最大.

梯度的性质

- 性质：设 f 可微或者偏导数连续，f 在 (x_0, y_0) 点处沿方向 $\vec{l}$(方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta = \operatorname{grad} f\big|_{(x_0,y_0)} \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

- 利用偏导数公式可得下面的梯度公式 (设 f 的偏导数连续):

$$\operatorname{grad}(f(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v,$$

$$\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v.$$

$$\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v.$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v).$$

梯度的性质

- 性质：设 f 可微或者偏导数连续，f 在 (x_0, y_0) 点处沿方向 $\vec{l}$(方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta = \operatorname{grad} f\big|_{(x_0,y_0)} \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

- 利用偏导数公式可得下面的梯度公式 (设 f 的偏导数连续):

$$\operatorname{grad}(f(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{grad} v,$$

$$\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v.$$

$$\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v.$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v).$$

- 例：位于原点的点电荷产生的电势为 $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则产生的电场为

$$-\mathrm{grad}\, V = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{(x, y, z)}{r^3}.$$

- 例：函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$，原点处沿方向 $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0, 0) = \cos\alpha \cos^2\beta,$$

原点处方向导数最大的方向为 $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$. 最大方向导数为 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

- 例：位于原点的点电荷产生的电势为 $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则产生的电场为

$$-\mathrm{grad}\, V = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{(x,y,z)}{r^3}.$$

- 例: 函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$，原点处沿方向 $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0) = \cos\alpha \cos^2\beta,$$

原点处方向导数最大的方向为 $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$. 最大方向导数为 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

曲面

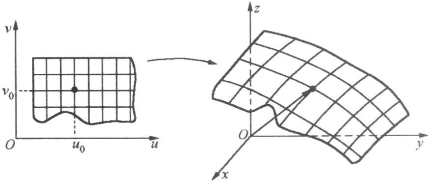
- 曲面是平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$ 中的一个连续映射的像.
- 曲面参数方程：设平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射

$$(u,v)\mapsto \vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

的像是曲面 S, 则称

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\ ,(u,v)\in D, \\ z=z(u,v) \end{cases}$$

为曲面的参数方程.

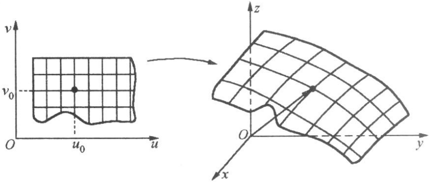


- 曲面是平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$ 中的一个连续映射的像.
- 曲面参数方程：设平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

的像是曲面 S, 则称

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \, , (u, v) \in D, \\ z = z(u, v) \end{cases}$$



为曲面的参数方程.

曲面的法向量

- 曲面中的参数曲线 (坐标曲线):

$$\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0) \end{cases}, \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}$$

$P_0(u_0, v_0)$ 处的切向量分别为 $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)|_{P_0}$ 和 $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)|_{P_0}$.

- 曲面的法向量: 设 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{P_0}$ 是曲面在 P_0 点的法向量.

曲面的法向量

- 曲面中的参数曲线 (坐标曲线):

$$\begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \\ z = z(u, v_0) \end{cases}, \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}$$

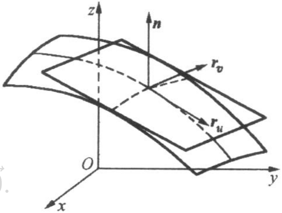
  $P_0(u_0, v_0)$ 处的切向量分别为 $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)|_{P_0}$ 和 $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)|_{P_0}$.

- 曲面的法向量: 设 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{P_0}$ 是曲面在 P_0 点的法向量.

- 正则曲面: $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$, 且 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$. (该条件保证曲面处处有切平面, 且切平面连续变动).
- 例: $z = f(x,y) \in C^1(D)$, $(x,y) \in D$ 是正则曲面. 事实上, 取参数方程 $x = x, y = y, z = f(x,y)$,

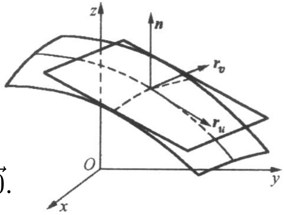
  $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (1,0,f_x) \times (0,1,f_y) = (-f_x, -f_y, 1) \neq \vec{0}$.

  比如 $z = Ax + By + C$ 的法向量为 $(-A, -B, 1)$.



正则曲面

- 正则曲面: $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$, 且 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$. (该条件保证曲面处处有切平面, 且切平面连续变动).
- 例: $z = f(x,y) \in C^1(D)$, $(x,y) \in D$ 是正则曲面. 事实上, 取参数方程 $x = x, y = y, z = f(x,y)$,



$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (1,0,f_x) \times (0,1,f_y) = (-f_x, -f_y, 1) \neq \vec{0}.$$

比如 $z = Ax + By + C$ 的法向量为 $(-A, -B, 1)$.

隐函数定理

- 一般曲面方程：$F(x,y,z)=0$，若 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 是曲面中的曲线，则有
$$F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)=0.$$
若 $(F_x,F_y,F_z)\neq\vec{0}$，则切线垂直于 (F_x,F_y,F_z)，因此 (F_x,F_y,F_z) 是曲面的法向.
- 一般曲面方程：$F(x,y,z)=0$，$F\in C^1$，$(F_x,F_y,F_z)\neq\vec{0}$ 时称为正则曲面．比如 $Ax+By+Cz+D=0$ 的法向量为 (A,B,C).
$z-f(x,y)=0$ 的法向量为 $(-f_x,-f_y,1)$.

一般曲面方程

隐函数定理

- 一般曲面方程：$F(x,y,z)=0$，若 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 是曲面中的曲线，则有
$$F_x x'(t)+F_y y'(t)+F_z z'(t)=0.$$
若 $(F_x,F_y,F_z)\neq\vec{0}$，则切线垂直于 (F_x,F_y,F_z)，因此 (F_x,F_y,F_z) 是曲面的法向.
- 一般曲面方程：$F(x,y,z)=0$，$F\in C^1$，$(F_x,F_y,F_z)\neq\vec{0}$ 时称为正则曲面．比如 $Ax+By+Cz+D=0$ 的法向量为 (A,B,C).
$z-f(x,y)=0$ 的法向量为 $(-f_X,-f_y,1)$.

球面

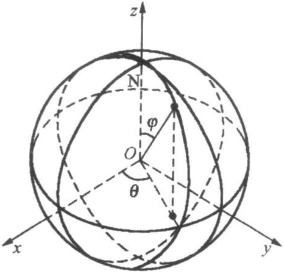
- 曲面方程：$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$.
- 曲面参数方程：$\begin{cases} x=R\sin\phi\cos\theta \\ y=R\sin\phi\sin\theta \\ z=R\cos\phi \end{cases}$，$(\phi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi)$,

$$\vec{r}_\phi=R(\cos\phi\cos\theta,\cos\phi\sin\theta,-\sin\phi)$$

$$\vec{r}_\theta=R(-\sin\phi\sin\theta,\sin\phi\cos\theta,0).$$

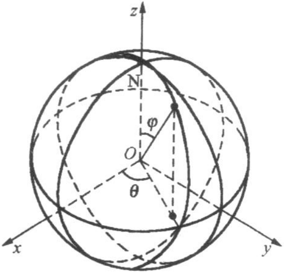
$$\vec{r}_\phi\times\vec{r}_\theta=R^2\sin\phi(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi).$$

$\phi\neq 0,\pi$ 时，$\vec{r}_\phi\times\vec{r}_\theta\neq\vec{0}$.



球面

- 曲面方程：$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$.
- 曲面参数方程：$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$，$(\phi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$,



$$\vec{r}_\phi = R(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$$

$$\vec{r}_\theta = R(-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0).$$

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = R^2\sin\phi(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

$\phi \neq 0, \pi$ 时，$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta \neq \vec{0}$.

切平面与法向量 1

曲面 $F(x,y,z)=0$. $F\in C^1$, 且 $(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}\neq\vec{0}$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $\vec{n}(P_0)=(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}$,
- 切平面方程：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

切平面与法向量 1

曲面 $F(x,y,z)=0$. $F\in C^1$, 且 $(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}\neq\vec{0}$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $\vec{n}(P_0)=(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}$,
- 切平面方程: $F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$.
- 法线方程: $\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

切平面与法向量 1

曲面 $F(x,y,z)=0$. $F\in C^1$, 且 $(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}\neq\vec{0}$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $\vec{n}(P_0)=(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}$,
- 切平面方程：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

切平面与法向量 2

曲面 $z = f(x, y)$. $f \in C^1$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $(-f_x, -f_y, 1)$.
- 切平面方程：$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$.

切平面与法向量 2

曲面 $z = f(x, y)$. $f \in C^1$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $(-f_x, -f_y, 1)$.
- 切平面方程：$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$.

切平面与法向量 2

曲面 $z = f(x,y)$. $f \in C^1$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $(-f_x, -f_y, 1)$.
- 切平面方程：$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$.

切平面与法向量 3

参数方程表示的曲面：$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v),\ (u,v) \in D,$
$x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$.

- 曲面在 $P_0(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ 点的法向量为 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.
- 切平面方程：$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$

证明：$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0) = 0.$

参数方程表示的曲面：$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(D)$.

- 曲面在 $P_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ 点的法向量为 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.
- 切平面方程：$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$

证明：$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) = 0.$

切平面与法向量 3

参数方程表示的曲面：$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, $(u,v) \in D$, $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$.

- 曲面在 $P_0(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ 点的法向量为 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.
- 切平面方程：$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$

  证明：$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0) = 0.$

两曲面的交线

- 曲线 $\begin{cases}\psi(x,y,z)=0\\ \phi(x,y,z)=0\end{cases}$ 的切线，其中 $\phi,\psi\in C^1(D)$，且 $(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})$ 和 $(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z})$ 不共线.
- 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是交线上的一点，切向

$$(A,B,C)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\Big|_{P_0},$$

切线方程 $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$.

两曲面的交线

- 曲线 $\begin{cases} \psi(x,y,z)=0 \\ \phi(x,y,z)=0 \end{cases}$ 的切线，其中 $\phi,\psi\in C^1(D)$，且 $(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})$ 和 $(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z})$ 不共线.
- 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是交线上的一点，切向

$$(A,B,C)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\Big|_{P_0},$$

切线方程 $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$.

复习一元函数的微分中值定理

- 复习一元函数微分中值定理：设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导，x_0, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. 则存在 $0 < \theta < 1$, 使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x.$$

二元函数的微分中值定理 1

- 定理：设 $z = f(x, y) \in C^1(D)$，$P_0(x_0, y_0)$，$P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$，且 $\overline{P_0 P_1} \subset D$. 则存在 $\theta \in (0, 1)$，使得

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x \\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y.
\end{aligned}
$$

- 注：设 $\overrightarrow{\Delta P} = \overrightarrow{P_0 P_1}$，中值公式可以写成

$$
f(P_1) = f(P_0) + \operatorname{grad} f\big|_{P_0 + \theta\overrightarrow{\Delta P}} \cdot \overrightarrow{\Delta P}.
$$

或者

$$
f(P_1) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\Delta P}}\bigg|_{P_0 + \theta\overrightarrow{\Delta P}} \cdot |\overrightarrow{\Delta P}|.
$$

- 定理：设 $z=f(x,y)\in C^1(D)$，$P_0(x_0,y_0)$，$P_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$，且 $\overline{P_0P_1}\subset D$. 则存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x \\ +\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y.$$

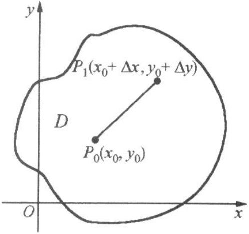
- 注：设 $\overrightarrow{\Delta P}=\overrightarrow{P_0P_1}$，中值公式可以写成

$$f(P_1)=f(P_0)+\operatorname{grad}f\big|_{P_0+\theta\overrightarrow{\Delta P}}\cdot\overrightarrow{\Delta P}.$$

或者

$$f(P_1)=f(P_0)+\frac{\partial f}{\partial\overrightarrow{\Delta P}}\Big|_{P_0+\theta\overrightarrow{\Delta P}}\cdot|\overrightarrow{\Delta P}|.$$

- 定理证明：令 $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$，则 $\phi(t) \in C^1([0,1])$，$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$. 由一元函数微分中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$ 使得



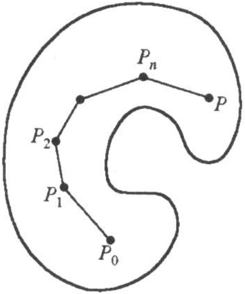
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \phi(1) = \phi(0) + \phi'(\theta)$$

$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x$$

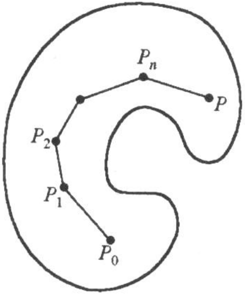
$$+ f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y.$$

- 推论：设 $z=f(x,y)$ 是区域 D 上的函数，且它的两个偏导数在 D 上恒为 0, 则 $f(x,y)\equiv C$.

证明：对任意 $P_0,P\in D$, 由于 D 是连通集，存在 D 中连接 P_0 和 P_1 的折线 $P_0P_1P_2\cdots P_nP\subset D$,
利用上面的中值定理，
有 $f(P_0)=f(P_1)=\cdots=f(P_n)=f(P)$.



- 推论：设 $z = f(x, y)$ 是区域 D 上的函数，且它的两个偏导数在 D 上恒为 0, 则 $f(x, y) \equiv C$.
  证明：对任意 $P_0, P \in D$, 由于 D 是连通集，存在 D 中连接 P_0 和 P_1 的折线 $P_0P_1P_2 \cdots P_nP \subset D$,
  利用上面的中值定理，
  有 $f(P_0) = f(P_1) = \cdots = f(P_n) = f(P)$.



二元函数的 Taylor 公式

- Lagrange 微分中值定理可以写成：

$$
\begin{aligned}
& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y \\
&= df(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)
\end{aligned}
$$

- 复习高阶微分:

$$
\begin{aligned}
d^n f &= \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\
&= \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\Delta x^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\Delta x^{n-1}\Delta y + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\Delta y^n
\end{aligned}
$$

二元函数的 Taylor 公式

- Lagrange 微分中值定理可以写成:

$$
\begin{aligned}
& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y \\
&= df(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)
\end{aligned}
$$

- 复习高阶微分:

$$
\begin{aligned}
d^n f &= \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\
&= \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\Delta x^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\Delta x^{n-1}\Delta y + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\Delta y^n
\end{aligned}
$$

二元函数的 Taylor 公式

- 定理：设 D 是一个平面区域，$f \in C^{n+1}(D)$，$P_0(x_0, y_0)$，$P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$，且 $\overline{P_0 P_1} \subset D$. 则存在 $\theta \in (0, 1)$，使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$$

$$= f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$$

余项 $R_n = \frac{1}{(n+1)!}(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)$.

二元函数的 Taylor 公式的证明

- 定理证明：令 $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$，则 $\phi \in C^{n+1}([0,1])$，

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \\ &= \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\end{aligned}$$

$\phi^{(k)}(t) = (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$. 由一元函数的 Taylor 公式，

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\phi'(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta).$$

利用 $\phi^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0)$，$\phi^{(n+1)}(\theta) = d^{(n+1)} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ 即得.

二元函数的 Taylor 公式的证明

- 定理证明：令 $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$，则 $\phi \in C^{n+1}([0,1])$，

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \\ &= \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\end{aligned}$$

$\phi^{(k)}(t) = (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$. 由一元函数的 Taylor 公式，

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\phi'(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta).$$

利用 $\phi^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0)$，$\phi^{(n+1)}(\theta) = d^{(n+1)} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ 即得.

Taylor 公式余项估计

- 注：一元函数 Taylor 公式只要求 f 的 $n+1$ 阶导数存在，不要求 $n+1$ 阶导数连续．二元函数 Taylor 公式要求 f 的 $n+1$ 阶偏导数连续．
- 余项估计：若 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数的绝对值 $\leq M$，则

$$
\begin{aligned}
|R_n| &= \left|\frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\right| \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left|\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x^{n+1-k}\Delta y^k\right| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\left|\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k M\rho^{n+1}\right| = M\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!}\rho^{n+1} = o(\rho^n),
\end{aligned}
$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Taylor 公式余项估计

- 注：一元函数 Taylor 公式只要求 f 的 $n+1$ 阶导数存在，不要求 $n+1$ 阶导数连续．二元函数 Taylor 公式要求 f 的 $n+1$ 阶偏导数连续．
- 余项估计：若 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数的绝对值 $\leq M$，则

$$
\begin{aligned}
|R_n| &= \left|\frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\right| \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left|\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x^{n+1-k}\Delta y^k\right| \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\left|\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k M\rho^{n+1}\right| = M\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!}\rho^{n+1} = o(\rho^n),
\end{aligned}
$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

带 Peano 余项的 Taylor 公式

- 推论：在上面定理相同的条件下，有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n). \qquad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

- 证明：存在 (x_0,y_0) 的一个小邻域 U_δ(事实上只要满足 $\bar{U}_\delta \subset D$ 即可), 使得 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数在 U_δ 上有界.
- 注：带 Piano 余项的 Taylor 公式的条件可以放松 (比如: $f \in C^n(D)$).
- 注：如果 $n=2$,Taylor 公式可以写成

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big]$$
$$+ o(\rho^2)$$

带 Peano 余项的 Taylor 公式

- 推论：在上面定理相同的条件下，有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n). \qquad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

- 证明：存在 (x_0,y_0) 的一个小邻域 U_δ(事实上只要满足 $\bar{U}_\delta \subset D$ 即可), 使得 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数在 U_δ 上有界.
- 注：带 Piano 余项的 Taylor 公式的条件可以放松 (比如: $f \in C^n(D)$).
- 注：如果 $n=2$,Taylor 公式可以写成

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big] + o(\rho^2)$$

带 Peano 余项的 Taylor 公式

- 推论：在上面定理相同的条件下，有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n). \qquad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

- 证明：存在 (x_0,y_0) 的一个小邻域 U_δ(事实上只要满足 $\bar{U}_\delta \subset D$ 即可), 使得 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数在 U_δ 上有界.
- 注：带 Piano 余项的 Taylor 公式的条件可以放松 (比如: $f\in C^n(D)$).
- 注：如果 $n=2$,Taylor 公式可以写成

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big]$$
$$+ o(\rho^2)$$

Taylor 公式的唯一性

- 命题：设 $f \in C^{n+1}(D)$, 令
  $T_n(\Delta x, \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)$. 若 $f(x, y)$ 有展开
  $$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = P_n(\Delta x, \Delta y) + o(\rho^n),$$
  其中 P_n 是 n 次二元多项式, 则有 $P_n = T_n$.
- 证明：取 $\Delta y = \lambda \Delta x$, 则有
  $$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda \Delta x) &= P_n(\Delta x, \lambda \Delta x) + o(\Delta x^n) \\ &= T_n(\Delta x, \lambda \Delta x) + o(\Delta x^n). \end{aligned}$$
  由一元函数 Taylor 公式的唯一性，有 $P_n(\Delta x, \lambda \Delta x) = T_n(\Delta x, \lambda \Delta x)$ 对任意 λ 和 Δx 成立，从而有 $P_n = T_n$.

Taylor 公式的唯一性

- 命题：设 $f \in C^{n+1}(D)$，令
  $T_n(\Delta x, \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)$. 若 $f(x, y)$ 有展开
  $$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = P_n(\Delta x, \Delta y) + o(\rho^n),$$
  其中 P_n 是 n 次二元多项式，则有 $P_n = T_n$.
- 证明：取 $\Delta y = \lambda \Delta x$，则有
  $$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda \Delta x) &= P_n(\Delta x, \lambda \Delta x) + o(\Delta x^n) \\ &= T_n(\Delta x, \lambda \Delta x) + o(\Delta x^n). \end{aligned}$$
  由一元函数 Taylor 公式的唯一性，有 $P_n(\Delta x, \lambda \Delta x) = T_n(\Delta x, \lambda \Delta x)$ 对任意 λ 和 Δx 成立，从而有 $P_n = T_n$.

Taylor 公式 —例 1

- 求函数 $f(x,y)=\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)$ 在 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式 (带 Peano 余项).
- 解 1：直接计算得 $f(1,1)=1$, $f_x(1,1)=0$, $f_y(1,1)=0$, $f_{xx}(1,1)=-\pi^2$, $f_{xy}(1,1)=-\frac{\pi^2}{2}$, $f_{yy}(1,1)=-\frac{\pi^2}{4}$, 由此可得 Taylor 公式

$$\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)=1-\frac{\pi^2}{2}\left((x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}(y-1)^2\right)+o(\rho^2).$$

- 求函数 $f(x,y)=\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)$ 在 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式 (带 Peano 余项).
- 解 1：直接计算得 $f(1,1)=1$, $f_x(1,1)=0$, $f_y(1,1)=0$, $f_{xx}(1,1)=-\pi^2$, $f_{xy}(1,1)=-\frac{\pi^2}{2}$, $f_{yy}(1,1)=-\frac{\pi^2}{4}$, 由此可得 Taylor 公式

$$\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)=1-\frac{\pi^2}{2}\left((x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}(y-1)^2\right)+o(\rho^2).$$

- 解 2：由于

$$\frac{\pi}{2}x^2y=\frac{\pi}{2}[1+2(x-1)+(y-1)+(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+o(\rho^2)].$$

我们有

$$\begin{aligned}&\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)\\=&\cos\frac{\pi}{2}\left[2(x-1)+(y-1)+(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+o(\rho^2)\right]\\=&1-\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}(2(x-1)+(y-1))\right]^2+o(\rho^2)\\=&1-\frac{\pi^2}{2}\left((x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}(y-1)^2\right)+o(\rho^2).\end{aligned}$$

- 解 2：由于

$$\frac{\pi}{2}x^2y = \frac{\pi}{2}[1 + 2(x-1) + (y-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + o(\rho^2)].$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\sin(\frac{\pi}{2}x^2y) \\
=&\cos\frac{\pi}{2}\left[2(x-1) + (y-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + o(\rho^2)\right] \\
=&1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}(2(x-1) + (y-1))\right]^2 + o(\rho^2) \\
=&1 - \frac{\pi^2}{2}\left((x-1)^2 + (x-1)(y-1) + \frac{1}{4}(y-1)^2\right) + o(\rho^2).
\end{aligned}$$

三元函数的 Taylor 公式

- 三元函数有类似的 Taylor 公式

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z})^k f(x_0, y_0, z_0) + o(\rho^n)$$

如果 $n=2$,

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0) + \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 + f_{yy}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 + f_{zz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) + 2f_{xz}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) + 2f_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0)\Big] + o(\rho^2)$$

- 求函数 $f(x,y,z)=\frac{x}{yz}$ 在 $(1,1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式 (带 Peano 余项).
- 解: $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{yz} &= \frac{1+x-1}{(1+y-1)(1+z-1)} \\
&= (1+x-1)\left[1-(y-1)+(y-1)^2+o(\rho^2)\right] \\
&\qquad \cdot \left[1-(z-1)+(z-1)^2+o(\rho^2)\right] \\
&= 1+(x-1)-(y-1)-(z-1)+(y-1)^2+(z-1)^2 \\
&\quad -(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)+(y-1)(z-1)+o(\rho^2)
\end{aligned}
$$

三元函数 Taylor 公式 —例

- 求函数 $f(x,y,z)=\frac{x}{yz}$ 在 $(1,1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式 (带 Peano 余项).
- 解： $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{yz} &= \frac{1+x-1}{(1+y-1)(1+z-1)} \\
&= (1+x-1)\left[1-(y-1)+(y-1)^2+o(\rho^2)\right] \\
&\qquad \cdot \left[1-(z-1)+(z-1)^2+o(\rho^2)\right] \\
&= 1+(x-1)-(y-1)-(z-1)+(y-1)^2+(z-1)^2 \\
&\quad -(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)+(y-1)(z-1)+o(\rho^2)
\end{aligned}$$

一个方程确定的隐函数

- 函数 $y = f(x),\ x \in D$ 代入 $F(x, y) = 0$, 使得 $F(x, f(x)) \equiv 0$, 则称 $y = f(x),\ x \in D$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数.
- 函数 $z = f(x, y),\ (x, y) \in D$ 代入 $F(x, y, z) = 0$, 使得

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0,$$

则称 $z = f(x, y),\ (x, y) \in D$ 是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数.

一个方程确定的隐函数

- 函数 $y = f(x),\ x \in D$ 代入 $F(x, y) = 0$, 使得 $F(x, f(x)) \equiv 0$, 则称 $y = f(x),\ x \in D$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数.
- 函数 $z = f(x, y),\ (x, y) \in D$ 代入 $F(x, y, z) = 0$, 使得

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0,$$

则称 $z = f(x, y),\ (x, y) \in D$ 是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数.

- $(x,y)\in D$ 时 $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \end{cases}$, 则称 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$, $(x,y)\in D$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数.
- 若 $x\in D$ 时 $\begin{cases} F(x,u(x),v(x))\equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x))\equiv 0 \end{cases}$, 则称 $\begin{cases} u=u(x) \\ v=v(x) \end{cases}$, $x\in D$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数.

二个方程确定的隐函数

- $(x,y)\in D$ 时 $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0 \end{cases}$，则称 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$，$(x,y)\in D$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数.
- 若 $x\in D$ 时 $\begin{cases} F(x,u(x),v(x))\equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x))\equiv 0 \end{cases}$，则称 $\begin{cases} u=u(x) \\ v=v(x) \end{cases}$，$x\in D$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数.

一元隐函数存在定理

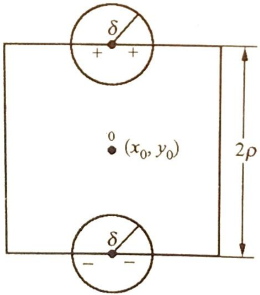
回一般曲面方程

- 定理：$F(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的一个邻域上有定义，且满足
  - $F(x_0,y_0)=0$,
  - $F_x(x,y), F_y(x,y)$ 连续，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

  则在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内存在一个函数 $y=f(x)$, 使得 $y_0=f(x_0)$, $F(x,f(x))\equiv 0, \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 且 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上连续、可微，导数为

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\bigg|_{y=f(x)}.$$

- 证明思路：不妨设 $F_y(x_0, y_0) > 0$, $F(x_0, y)$ 作为 y 的函数在 y_0 附近单调增，存在 $\rho > 0$, 使得 $F(x_0, y_0 + \rho) > 0$, $F(x_0, y_0 - \rho) < 0$. 由 $F(x, y)$ 的连续性，存在 $\delta > 0$, 使得对 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $F(x, y_0 + \rho) > 0$ 且 $F(x, y_0 - \rho) < 0$. 由介值定理，对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 存在 $y = f(x)$, 使得 $F(x, f(x)) = 0$.



一元隐函数微分法

- 隐函数的导数：设 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则

$$0 \equiv F(x+\Delta x, f(x)+\Delta y) - F(x, f(x)),$$

由 Langrange 中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$0 = F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$ 即得

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}.$$

一元隐函数微分法

- 隐函数的导数：设 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则

$$0 \equiv F(x+\Delta x, f(x)+\Delta y) - F(x, f(x)),$$

由 Langrange 中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$0 = F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$ 即得

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}.$$

- 隐函数的导数：设 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则

$$0 \equiv F(x+\Delta x, f(x)+\Delta y) - F(x, f(x)),$$

由 Langrange 中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$0 = F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$ 即得

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}.$$

- 隐函数的导数：设 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则

$$0 \equiv F(x+\Delta x, f(x)+\Delta y) - F(x, f(x)),$$

由 Langrange 中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$0 = F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$ 即得

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}.$$

- 例：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点附近确定隐函数 $y=y(x)$，求 $y'(\frac{a}{\sqrt{2}})$.

  解：设 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$，$F_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}$，$F_y(x,y)=\frac{2y}{b^2}$，因此有

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}\Longrightarrow y'(\frac{a}{\sqrt{2}})=-\frac{b}{a}.$$

- 注：也可用第二章中的方法，对方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导（y 看成 x 的函数）．也可两边微分得 $F_xdx+F_ydy=0$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

一元隐函数微分法 —例

- 例：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点附近确定隐函数 $y=y(x)$，求 $y'(\frac{a}{\sqrt{2}})$.
  解：设 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$，$F_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}$，$F_y(x,y)=\frac{2y}{b^2}$，因此有
  $$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}\Longrightarrow y'(\frac{a}{\sqrt{2}})=-\frac{b}{a}.$$
- 注：也可用第二章中的方法，对方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导（y 看成 x 的函数）．也可两边微分得 $F_xdx+F_ydy=0$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

- 例：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点附近确定隐函数 $y=y(x)$, 求 $y'(\frac{a}{\sqrt{2}})$.
  解：设 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$，$F_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}$, $F_y(x,y)=\frac{2y}{b^2}$, 因此有

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}\Longrightarrow y'(\frac{a}{\sqrt{2}})=-\frac{b}{a}.$$

- 注：也可用第二章中的方法，对方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导（y 看成 x 的函数）．也可两边微分得 $F_xdx+F_ydy=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

- 定理：$F(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域上有定义，满足
  - $F(x_0,y_0,z_0)=0$,
  - $F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)$ 连续，且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

  则在 (x_0,y_0) 的某个邻域 D 上存在函数 $z=z(x,y)$，使得 $z_0=z(x_0,y_0)$, $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$, $\forall (x,y)\in D$. 且 $z=z(x,y)\in C^1(D)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

多元隐函数存在定理

- 定理：$F(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域上有定义，满足
  - $F(x_0,y_0,z_0)=0$,
  - $F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)$ 连续，且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

  则在 (x_0,y_0) 的某个邻域 D 上存在函数 $z=z(x,y)$，使得 $z_0=z(x_0,y_0)$，$F(x,y,z(x,y))\equiv 0$, $\forall (x,y)\in D$. 且 $z=z(x,y)\in C^1(D)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

多元隐函数的微分法

- 若 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$. 方程 $F(x,y,z)=0$ 两边对 x,y 求偏导数得 (z 看成 x,y 的函数),

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

因此有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

- 也可方程两边微分:

$$F_xdx+F_ydy+F_zdz=0\Longrightarrow dz=-\frac{F_x}{F_z}dx-\frac{F_y}{F_z}dy.$$

多元隐函数的微分法

- 若 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$. 方程 $F(x,y,z)=0$ 两边对 x,y 求偏导数得 (z 看成 x,y 的函数),

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

  因此有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

- 也可方程两边微分:

$$F_x dx+F_y dy+F_z dz=0 \Longrightarrow dz=-\frac{F_x}{F_z}dx-\frac{F_y}{F_z}dy.$$

- 例：求 $xy+yz+e^{xz}=3$ 确定的隐函数 $z(x,y)$ 的偏导数.

  解: 设 $F(x,y,z)=xy+yz+e^{xz}-3$, $F_x=y+ze^{xz}$, $F_y=x+z$, $F_z=y+xe^{xz}$,

$$z_x=-\frac{y+ze^{xz}}{y+xe^{xz}},\quad z_y=-\frac{x+z}{y+xe^{xz}}.$$

也可对方程两边求偏导数:

$$y+yz_x+e^{xz}(z+xz_x)=0,\quad x+z+yz_y+e^{xz}xz_y=0,$$

再解出 z_x, z_y.

- 例：求 $xy + yz + e^{xz} = 3$ 确定的隐函数 $z(x, y)$ 的偏导数.
  解: 设 $F(x, y, z) = xy + yz + e^{xz} - 3$, $F_x = y + ze^{xz}$, $F_y = x + z$, $F_z = y + xe^{xz}$,

$$z_x = -\frac{y + ze^{xz}}{y + xe^{xz}}, \quad z_y = -\frac{x + z}{y + xe^{xz}}.$$

也可对方程两边求偏导数:

$$y + yz_x + e^{xz}(z + xz_x) = 0, \quad x + z + yz_y + e^{xz}xz_y = 0,$$

再解出 z_x, z_y.

- 例：求 $xy + yz + e^{xz} = 3$ 确定的隐函数 $z(x, y)$ 的偏导数.

  解: 设 $F(x, y, z) = xy + yz + e^{xz} - 3$, $F_x = y + ze^{xz}$, $F_y = x + z$, $F_z = y + xe^{xz}$,

$$z_x = -\frac{y + ze^{xz}}{y + xe^{xz}}, \quad z_y = -\frac{x + z}{y + xe^{xz}}.$$

也可对方程两边求偏导数:

$$y + yz_x + e^{xz}(z + xz_x) = 0, \quad x + z + yz_y + e^{xz}xz_y = 0,$$

再解出 z_x, z_y.

- 例：求 $xy + yz + e^{xz} = 3$ 确定的隐函数 $z(x, y)$ 的偏导数.
  解: 设 $F(x, y, z) = xy + yz + e^{xz} - 3$, $F_x = y + ze^{xz}$, $F_y = x + z$, $F_z = y + xe^{xz}$,

$$z_x = -\frac{y + ze^{xz}}{y + xe^{xz}}, \quad z_y = -\frac{x + z}{y + xe^{xz}}.$$

也可对方程两边求偏导数:

$$y + yz_x + e^{xz}(z + xz_x) = 0, \quad x + z + yz_y + e^{xz}xz_y = 0,$$

再解出 z_x, z_y.

- 例：求 $F(x-y, y-z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 (这里 $F \in C^1$).

  解：方程两边对 x, y 求偏导，$F_1' + F_2'(-\frac{\partial z}{\partial x}) = 0$,
  $-F_1' + F_2'(1-\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$, 由此可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1'(x-y, y-z)}{F_2'(x-y, y-z)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_1'(x-y, y-z) + F_2'(x-y, y-z)}{F_2'(x-y, y-z)}.$$

- 注：可令 $G(x,y,z) = F(x-y, y-z)$, $G_x = F_1'$, $G_y = -F_1' + F_2'$, $G_z = -F_2'$, 利用 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G_x}{G_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G_y}{G_z}$ 也可得到上面的偏导数公式.

多元隐函数微分法 —例 2

- 例：求 $F(x-y, y-z) = 0$ 确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数 (这里 $F \in C^1$).

  解：方程两边对 x, y 求偏导， $F_1' + F_2'(-\frac{\partial z}{\partial x}) = 0$, $-F_1' + F_2'(1 - \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$, 由此可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1'(x-y, y-z)}{F_2'(x-y, y-z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_1'(x-y, y-z) + F_2'(x-y, y-z)}{F_2'(x-y, y-z)}.$$

- 注：可令 $G(x, y, z) = F(x-y, y-z)$, $G_x = F_1'$, $G_y = -F_1' + F_2'$, $G_z = -F_2'$, 利用 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G_x}{G_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G_y}{G_z}$ 也可得到上面的偏导数公式.

多元隐函数微分法 —例 2

- 例：求 $F(x-y, y-z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 (这里 $F \in C^1$).
  解：方程两边对 x, y 求偏导，$F_1' + F_2'(-\frac{\partial z}{\partial x}) = 0$,
  $-F_1' + F_2'(1-\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$, 由此可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_1'(x-y, y-z)}{F_2'(x-y, y-z)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_1'(x-y, y-z)+F_2'(x-y, y-z)}{F_2'(x-y, y-z)}.$$

- 注：可令 $G(x,y,z)=F(x-y, y-z)$, $G_x = F_1'$, $G_y = -F_1' + F_2'$, $G_z = -F_2'$, 利用 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G_x}{G_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G_y}{G_z}$ 也可得到上面的偏导数公式.

两曲面的交线

- 设 $F(x,y,z), G(x,y,z) \in C^1$, 且 (F_x, F_y, F_z) 和 (G_x, G_y, G_z) 不是零向量. 设 (F_x, F_y, F_z) 和 (G_x, G_y, G_z) 在交点处不共线 (即两曲面不相切), 则曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交集是曲线.
- 若 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数, 即曲线 $x=x, y=y(x), z=z(x)$ 是曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线的一部分. 交线的切向量 $(1, y'(x), z'(x))$ 平行于

$$\begin{aligned}
&(F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z) \\
&= (F_yG_z - F_zG_y, F_zG_x - F_xG_z, F_xG_y - F_yG_x),
\end{aligned}$$

因此 $\frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = F_yG_z - F_zG_y \neq 0.$

两曲面的交线

- 设 $F(x,y,z), G(x,y,z) \in C^1$, 且 (F_x, F_y, F_z) 和 (G_x, G_y, G_z) 不是零向量. 设 (F_x, F_y, F_z) 和 (G_x, G_y, G_z) 在交点处不共线 (即两曲面不相切), 则曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交集是曲线.
- 若 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 确定的隐函数, 即曲线 $x = x, y = y(x), z = z(x)$ 是曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线的一部分. 交线的切向量 $(1, y'(x), z'(x))$ 平行于

$$\begin{aligned}&(F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z)\\ &= (F_yG_z - F_zG_y, F_zG_x - F_xG_z, F_xG_y - F_yG_x),\end{aligned}$$

因此 $\frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = F_yG_z - F_zG_y \neq 0.$

两曲面的交线

- 设 $F(x,y,z), G(x,y,z) \in C^1$, 且 (F_x, F_y, F_z) 和 (G_x, G_y, G_z) 不是零向量. 设 (F_x, F_y, F_z) 和 (G_x, G_y, G_z) 在交点处不共线 (即两曲面不相切), 则曲面 $F(x,y,z) = 0$ 和 $G(x,y,z) = 0$ 的交集是曲线.
- 若 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 确定的隐函数, 即曲线 $x = x, y = y(x), z = z(x)$ 是曲面 $F(x,y,z) = 0$ 和 $G(x,y,z) = 0$ 的交线的一部分. 交线的切向量 $(1, y'(x), z'(x))$ 平行于

$$\begin{aligned} &(F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z) \\ &= (F_yG_z - F_zG_y, F_zG_x - F_xG_z, F_xG_y - F_yG_x), \end{aligned}$$

因此 $\frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = F_yG_z - F_zG_y \neq 0.$

方程组确定的一元函数 1

- $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数存在定理:

  设 $F,G\in C^1$, $F(x_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,u_0,v_0)=0$.

$$(F_uG_v-F_vG_u)\big|_{(x_0,u_0,v_0)}\neq 0.$$

则存在 x_0 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u(x),v(x)\in C^1(D)$ 使得 $u_0=u(x_0)$, $v_0=v(x_0)$, 而且

$$\begin{cases} F(x,u(x),v(x))\equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x))\equiv 0 \end{cases}.$$

方程组确定的一元函数 1

- $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数存在定理:

设 $F,G\in C^1$, $F(x_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,u_0,v_0)=0$.

$$(F_uG_v-F_vG_u)\big|_{(x_0,u_0,v_0)}\neq 0.$$

则存在 x_0 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u(x)$, $v(x)\in C^1(D)$ 使得 $u_0=u(x_0)$, $v_0=v(x_0)$, 而且

$$\begin{cases} F(x,u(x),v(x))\equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x))\equiv 0 \end{cases}.$$

方程组确定的一元函数 3

- 若方程组 $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定隐函数 $\begin{cases} u=u(x) \\ v=v(x) \end{cases}$，即

$$\begin{cases} F(x,u(x),v(x))\equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x))\equiv 0 \end{cases},$$

对 x 求导得

$$\begin{cases} F_x+F_u u'+F_v v'=0 \\ G_x+G_u u'+G_v v'=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{F_v G_x-F_x G_v}{F_u G_v-F_v G_u} \\ v'(x)=\frac{F_x G_u-F_u G_x}{F_u G_v-F_v G_u} \end{cases}$$

方程组确定的一元函数 3

- 若方程组 $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定隐函数 $\begin{cases} u=u(x) \\ v=v(x) \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} F(x,u(x),v(x)) \equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x)) \equiv 0 \end{cases},$$

对 x 求导得

$$\begin{cases} F_x+F_u u'+F_v v'=0 \\ G_x+G_u u'+G_v v'=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{F_v G_x-F_x G_v}{F_u G_v-F_v G_u} \\ \\ v'(x)=\frac{F_x G_u-F_u G_x}{F_u G_v-F_v G_u} \end{cases}$$

- 方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数存在定理:

  设 $F, G \in C^1$, $(F_uG_v - F_vG_u)\big|_{(x_0,y_0;u_0,v_0)} \neq 0$.

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \\ G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \end{cases}.$$

  则存在 (x_0,y_0) 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u(x,y)$, $v(x,y) \in C^1$ 满足 $u_0 = u(x_0,y_0)$, $v_0 = v(x_0,y_0)$,

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0. \end{cases}$$

- 设方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$, 则有 $F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0$, $G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0$, 偏导数满足

$$\begin{cases} F_x+F_u\frac{\partial u}{\partial x}+F_v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ \\ G_x+G_u\frac{\partial u}{\partial x}+G_v\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} F_y+F_u\frac{\partial u}{\partial y}+F_v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \\ G_y+G_u\frac{\partial u}{\partial y}+G_v\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}.$$

由此方程组可解出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

例 1

- 例：由讨论方程组
$$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy+u^2-v^2=0 \end{cases},$$
确定的隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 的存在性，存在时求 u_x, u_y, v_x, v_y.
- 解：令 $F(x,y,u,v)=x^2+y^2-uv$, $G(x,y,u,v)=xy+u^2-v^2$, 则 $F_uG_v-F_vG_u=2(u^2+v^2)$. 若 (x_0,y_0,u_0,v_0) 满足上面的方程组. 当 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 时，u_0, v_0 不能同时为 0, 此时 $F_uG_v-F_vG_u\neq 0$, 因此在 (x_0,y_0) 的某个邻域上确定隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$.

例 1

- 例：由讨论方程组
$$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy+u^2-v^2=0 \end{cases},$$
确定的隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 的存在性，存在时求 u_x, u_y, v_x, v_y.
- 解：令 $F(x,y,u,v)=x^2+y^2-uv$, $G(x,y,u,v)=xy+u^2-v^2$, 则 $F_uG_v-F_vG_u=2(u^2+v^2)$. 若 (x_0,y_0,u_0,v_0) 满足上面的方程组. 当 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 时，u_0, v_0 不能同时为 0, 此时 $F_uG_v-F_vG_u\neq 0$, 因此在 (x_0,y_0) 的某个邻域上确定隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$.

例 2

- 下面求 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏导数. 对 x 求偏导,

$$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy+u^2-v^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 2x-u_xv-uv_x=0 \\ y+2uu_x-2vv_x=0 \end{cases} \to \begin{cases} u_x=\frac{4xv-yu}{2(u^2+v^2)} \\ v_x=\frac{4xu+yv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

对 y 求偏导,

$$\begin{cases} 2y-u_yv-uv_y=0 \\ x+2uu_y-2vv_y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_y=\frac{4yv-xu}{2(u^2+v^2)} \\ v_y=\frac{4yu+xv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

例 2

- 下面求 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏导数. 对 x 求偏导,

$$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy+u^2-v^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 2x-u_xv-uv_x=0 \\ y+2uu_x-2vv_x=0 \end{cases} \to \begin{cases} u_x=\frac{4xv-yu}{2(u^2+v^2)} \\ v_x=\frac{4xu+yv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

对 y 求偏导,

$$\begin{cases} 2y-u_yv-uv_y=0 \\ x+2uu_y-2vv_y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_y=\frac{4yv-xu}{2(u^2+v^2)} \\ v_y=\frac{4yu+xv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

例 2

- 下面求 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏导数. 对 x 求偏导,

$$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy+u^2-v^2=0 \end{cases}, \begin{cases} 2x-u_xv-uv_x=0 \\ y+2uu_x-2vv_x=0 \end{cases} \to \begin{cases} u_x=\frac{4xv-yu}{2(u^2+v^2)} \\ v_x=\frac{4xu+yv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

对 y 求偏导,

$$\begin{cases} 2y-u_yv-uv_y=0 \\ x+2uu_y-2vv_y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_y=\frac{4yv-xu}{2(u^2+v^2)} \\ v_y=\frac{4yu+xv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

逆映射的存在性定理 1

- 定理：设 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 是 (u_0, v_0) 的一个邻域上定义的函数，且有连续偏导数. 若 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|_{(u_0,v_0)} = x_u y_v - x_v y_u|_{(u_0,v_0)} \neq 0, \begin{cases} x_0 = x(u_0, v_0) \\ y_0 = y(u_0, v_0) \end{cases}.$$

则存在 (x_0, y_0) 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y) \in C^1(D)$ 满足 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 且 $x(u(x, y), v(x, y)) \equiv x$, $y(u(x, y), v(x, y)) \equiv y$.

证明. 令 $F(x, y, u, v) = x - x(u, v), G(x, y, u, v) = y - y(u, v)$,
$F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$,
$F_u G_v - F_v G_u|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} = x_u y_v - x_v y_u|_{(u_0,v_0)} \neq 0.$

逆映射的存在性定理 1

- 定理：设 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 是 (u_0,v_0) 的一个邻域上定义的函数，且有连续偏导数. 若 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} = x_u y_v - x_v y_u|_{(u_0,v_0)} \neq 0, \begin{cases} x_0 = x(u_0,v_0) \\ y_0 = y(u_0,v_0) \end{cases}.$$

则存在 (x_0,y_0) 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)\in C^1(D)$ 满足 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$, 且 $x(u(x,y),v(x,y))\equiv x,\ y(u(x,y),v(x,y))\equiv y$.

证明. 令 $F(x,y,u,v)=x-x(u,v), G(x,y,u,v)=y-y(u,v)$,

$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,

$F_uG_v-F_vG_u|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} = x_uy_v-x_vy_u|_{(u_0,v_0)} \neq 0.$

逆映射的存在性定理 2

- 定理：设 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 是 (u_0, v_0) 的一个邻域上定义的函数，且有连续偏导数. 若 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} = x_u y_v - x_v y_u|_{(u_0,v_0)} \neq 0, \begin{cases} x_0 = x(u_0, v_0) \\ y_0 = y(u_0, v_0) \end{cases}.$$

则存在 (u_0, v_0) 的邻域 U, (x_0, y_0) 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y) \in C^1(D)$ 满足 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 且映射

$$D \to U : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

是映射

$$U \to D : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$$

的逆映射.

逆映射的存在性定理 3

- $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, $x(u,v), y = y(u,v) \in C^1$, 逆映射函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 的偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = x_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + x_v \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = y_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + y_v \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 = x_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + x_v \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = y_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + y_v \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}.$$

由上面的方程组可解出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

- 注: 由上面方程组可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1}$$

逆映射的存在性定理 3

- $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, $x(u,v), y = y(u,v) \in C^1$, 逆映射函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 的偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = x_u \frac{\partial u}{\partial x} + x_v \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = y_u \frac{\partial u}{\partial x} + y_v \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 = x_u \frac{\partial u}{\partial y} + x_v \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = y_u \frac{\partial u}{\partial y} + y_v \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}.$$

由上面的方程组可解出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

- 注：由上面方程组可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1}$$

逆映射的存在性定理 3

- $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, $x(u,v), y = y(u,v) \in C^1$, 逆映射函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 的偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = x_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + x_v \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = y_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + y_v \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 = x_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + x_v \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = y_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + y_v \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}.$$

由上面的方程组可解出 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

- 注：由上面方程组可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1}$$

- n 为逆映射存在定理: 映射 $f\colon(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $y_k=f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $k=1,2,\cdots,n$. 若 f 的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.\end{vmatrix}\neq 0$$

则存在局部逆映射.

例

- 例: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, 若 $(x_0, y_0), (r_0, \theta_0)$ 满足上述方程组, 且 $x_r y_\theta - x_\theta y_r|_{(r_0,\theta_0)} = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$, 则存在 (x_0, y_0) 的某个邻域上定义的逆变换 $r = r(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$. 偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = r_x\cos\theta - \theta_x r\sin\theta \\ 0 = r_x\sin\theta + \theta_x r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = \cos\theta \\ \theta_x = -\dfrac{\sin\theta}{r} \end{cases}.$$

- 例: $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$ 的 Jacobi 行列式为 $r^2\sin\phi$.

例

- 例： $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，若 $(x_0, y_0), (r_0, \theta_0)$ 满足上述方程组，且 $x_r y_\theta - x_\theta y_r|_{(r_0,\theta_0)} = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$，则存在 (x_0, y_0) 的某个邻域上定义的逆变换 $r = r(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$. 偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = r_x\cos\theta - \theta_x r\sin\theta \\ 0 = r_x\sin\theta + \theta_x r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = \cos\theta \\ \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r} \end{cases}.$$

- 例： $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$ 的 Jacobi 行列式为 $r^2\sin\phi$.

- 定义：$f(x, y)$ 在集合 D 上定义，(x_0, y_0) 是 D 的内点. 若存在 (x_0, y_0) 的一个领域 U_δ 使得

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in U_\delta$$

成立，则称 (x_0, y_0) 为 f 的一个极大值点, $f(x_0, y_0)$ 称为 $f(x, y)$ 的一个极大值. 类似可定义极小值点与极小值. 极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

- 定义：$f(x, y)$ 在集合 D 上定义，若 $(x_0, y_0) \in D$ 满足

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in D,$$

则称 $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值, (x_0, y_0) 为 f 在 D 上的最大值点. 类似可定义最小值点与最小值.

多元函数的极值和最值

- 定义：$f(x,y)$ 在集合 D 上定义，(x_0,y_0) 是 D 的内点. 若存在 (x_0,y_0) 的一个领域 U_δ 使得

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in U_\delta$$

成立，则称 (x_0,y_0) 为 f 的一个极大值点, $f(x_0,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的一个极大值. 类似可定义极小值点与极小值. 极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

- 定义：$f(x,y)$ 在集合 D 上定义，若 $(x_0,y_0) \in D$ 满足

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in D,$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值, (x_0,y_0) 为 f 在 D 上的最大值点. 类似可定义最小值点与最小值.

极值的必要条件

- 定理（极值的必要条件）：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ 均存在，则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

  证明：$x = x_0$ 是 $f(x, y_0)$ 的极值点，且在 $x = x_0$ 处可导，因此

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) = 0.$$

- 注：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则 $t = 0$ 是 $\phi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 的极值点. 若 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\big|_{(x_0,y_0)}$ 存在，即 $\phi(t)$ 在 0 点可导，则有 $\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\big|_{(x_0,y_0)} = 0$.
- 定义：满足 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 称为 f 的稳定点.

极值的必要条件

- 定理（极值的必要条件）：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$ 均存在，则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
  证明：$x = x_0$ 是 $f(x, y_0)$ 的极值点，且在 $x = x_0$ 处可导，因此
$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) = 0.$$
- 注：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则 $t = 0$ 是 $\phi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 的极值点. 若 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)}$ 存在，即 $\phi(t)$ 在 0 点可导，则有 $\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)} = 0$.
- 定义：满足 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 称为 f 的稳定点.

极值的必要条件

- 定理（极值的必要条件）：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ 均存在，则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
  证明：$x = x_0$ 是 $f(x, y_0)$ 的极值点，且在 $x = x_0$ 处可导，因此

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) = 0.$$

- 注：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则 $t = 0$ 是 $\phi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 的极值点. 若 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)}$ 存在，即 $\phi(t)$ 在 0 点可导，则有 $\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)} = 0$.
- 定义：满足 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 称为 f 的稳定点.

极值的必要条件

- 定理（极值的必要条件）：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ 均存在, 则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
  证明：$x = x_0$ 是 $f(x, y_0)$ 的极值点, 且在 $x = x_0$ 处可导, 因此
  $$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) = 0.$$
- 注：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点, $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, 则 $t = 0$ 是 $\phi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 的极值点. 若 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)}$ 存在, 即 $\phi(t)$ 在 0 点可导, 则有 $\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)} = 0$.
- 定义：满足 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 称为 f 的稳定点.

一元函数极值点的判别方法

- 设 $f'(x_0)=0$，若两边单调性相反，则是极值点.
- 设 $f'(x_0)=0$，若 $f'(x)$ 在 x_0 两边的符号相反，则是极值点.
- 设 $f'(x_0)=0$，若 f 在 x_0 处有二阶导数. 若 $f''(x_0)<0$, 则 x_0 为极大点; 若 $f''(x_0)>0$, 则 x_0 为极小点. ($f''(x_0)=0$, 不定)

二次多项式的极值

- 若 $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, 当 $B^2\neq AC$ 时 $(0,0)$ 是唯一的稳定点，当 $A\neq 0$ 时,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\frac{1}{A}[(Ax+By)^2+(AC-B^2)y^2],$$

若 $C\neq 0$ 时,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\frac{1}{C}[(AC-B^2)x^2+(Bx+Cy)^2].$$

$A=C=0$ 时, $f(x,y)=2Bxy$.
若 $B^2<AC$, 则当 $A>0$ 时，$(0,0)$ 是极小点 (也是最小点)；当 $A<0$ 时, $(0,0)$ 是极大点 (也是最大点).
$B^2>AC$, $(0,0)$ 一定不是极值点.

多元函数极值点的判别定理

- 设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$. 记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$.

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2)+o(\rho^2).$$

- 定理：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.
  (1) 若 $B^2<AC$, 则当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值；当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极大值.
  (2) $B^2>AC$, $f(x_0,y_0)$ 一定不是极值点.
  (3) $B^2=AC$, 不定.

多元函数极值点的判别定理

- 设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$. 记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$.

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2)+o(\rho^2).$$

- 定理：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.
  (1) 若 $B^2<AC$, 则当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值；当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极大值.
  (2) $B^2>AC$, $f(x_0,y_0)$ 一定不是极值点.
  (3) $B^2=AC$, 不定.

- (1) 的证明：由二元函数的 Taylor 公式，存在 $\theta \in (0.1)$，使得 $P_\theta = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ 满足

$$
\begin{aligned}
& f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\
& \qquad = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(P_\theta)\Delta x^2 + 2f_{xy}(P_\theta)\Delta x\Delta y + f_{yy}(P_\theta)\Delta y^2)
\end{aligned}
$$

记 $\tilde{A} = f_{xx}(P_\theta)$，$\tilde{B} = f_{xy}(P_\theta)$，$\tilde{C} = f_{yy}(P_\theta)$. 由函数 $(f_{xy})^2 - 4f_{xx}f_{yy}$ 和 f_{xx} 的连续性，当 $(f_{xy})^2 - 4f_{xx}f_{yy}|_{(x_0,y_0)} = B^2 - AC < 0$，$f_{xx}|_{(x_0,y_0)} = A > 0$ 时，存在 $\delta > 0$，使得当 $|\Delta x| < \delta$，$|\Delta y| < \delta$ 时，$(f_{xy})^2 - 4f_{xx}f_{yy}|_{P_\theta} = \tilde{B}^2 - \tilde{A}\tilde{C} < 0$，$f_{xx}|_{P_\theta} = \tilde{A} > 0$，则有

$$
\tilde{A}\Delta x^2 + 2\tilde{B}\Delta x\Delta y + \tilde{C}\Delta y^2 = \frac{1}{\tilde{A}}[(\tilde{A}\Delta x + \tilde{B}\Delta y)^2 + (\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2)\Delta y^2] \geq 0.
$$

判别法的证明 1

- (1) 的证明：由二元函数的 Taylor 公式，存在 $\theta \in (0.1)$，使得 $P_\theta = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ 满足

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ & \qquad = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(P_\theta)\Delta x^2 + 2f_{xy}(P_\theta)\Delta x\Delta y + f_{yy}(P_\theta)\Delta y^2) \end{aligned}$$

记 $\tilde{A} = f_{xx}(P_\theta)$，$\tilde{B} = f_{xy}(P_\theta)$，$\tilde{C} = f_{yy}(P_\theta)$. 由函数 $(f_{xy})^2 - 4f_{xx}f_{yy}$ 和 f_{xx} 的连续性，当 $(f_{xy})^2 - 4f_{xx}f_{yy}|_{(x_0,y_0)} = B^2 - AC < 0$，$f_{xx}|_{(x_0,y_0)} = A > 0$ 时，存在 $\delta > 0$，使得当 $|\Delta x| < \delta$，$|\Delta y| < \delta$ 时，$(f_{xy})^2 - 4f_{xx}f_{yy}|_{P_\theta} = \tilde{B}^2 - \tilde{A}\tilde{C} < 0$，$f_{xx}|_{P_\theta} = \tilde{A} > 0$，则有

$$\tilde{A}\Delta x^2 + 2\tilde{B}\Delta x\Delta y + \tilde{C}\Delta y^2 = \frac{1}{\tilde{A}}[(\tilde{A}\Delta x + \tilde{B}\Delta y)^2 + (\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2)\Delta y^2] \geq 0.$$

- (1) 的证明续：也可用 Peano 余项的 Taylor 公式证明.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

其中 $R_2 = o(\rho^2)$. 若 $B^2 < AC$, $A > 0$, 存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 \geq \epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

事实上只要取 ϵ 满足 $B^2 < (A-\epsilon)(C-\epsilon)$ 即可. 取 $\delta > 0$, 使得当 $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ 时, $|R_2| \leq \frac{1}{2}\epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2)$.
当 $B^2 < AC$, $A < 0$ 时, 证明类似.

判别法的证明 2

- (1) 的证明续：也可用 Peano 余项的 Taylor 公式证明.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

其中 $R_2 = o(\rho^2)$. 若 $B^2 < AC$, $A > 0$, 存在 $\epsilon > 0$, 使得

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 \geq \epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

事实上只要取 ϵ 满足 $B^2 < (A-\epsilon)(C-\epsilon)$ 即可. 取 $\delta > 0$, 使得当 $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ 时, $|R_2| \leq \frac{1}{2}\epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2)$.
当 $B^2 < AC$, $A < 0$ 时, 证明类似.

判别法的证明 3

- (2) 的证明：利用 Peano 余项的 Taylor 公式，

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

其中 $R_2 = o(\rho^2)$.

当 $B^2 > AC$，$A > 0$ 时，取足够小的 $\epsilon > 0$，存在 δ，当 $\Delta x = -\frac{B}{A}\Delta y$ 且 $0 < |\Delta y| < \delta$ 时，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2 \\
\le\ &\frac{1}{2A}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 - (B^2 - AC)\Delta y^2] + \epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2) \\
\le\ &-\frac{1}{2A}(B^2 - AC)\Delta y^2 + \epsilon(1 + \frac{B^2}{A^2})\Delta y^2 < 0
\end{aligned}$$

判别法的证明 3

- (2) 的证明：利用 Peano 余项的 Taylor 公式，

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

其中 $R_2 = o(\rho^2)$.
当 $B^2 > AC$, $A > 0$ 时，取足够小的 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 当 $\Delta x = -\frac{B}{A}\Delta y$ 且 $0 < |\Delta y| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2 \\
\leq &\frac{1}{2A}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 - (B^2 - AC)\Delta y^2] + \epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2) \\
\leq &-\frac{1}{2A}(B^2 - AC)\Delta y^2 + \epsilon(1 + \frac{B^2}{A^2})\Delta y^2 < 0
\end{aligned}$$

判别法的证明 4

- 当 $B^2 > AC$, $A > 0$ 时, 取足够小的 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 当 $\Delta y = 0$ 且 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时,

$$\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2 \geq \frac{1}{2}A\Delta x^2 - \epsilon\Delta x^2 > 0$$

  因此 (x_0, y_0) 不是极值点.

- $A < 0$ 时类似证明. 若 $C \neq 0$ 时, 利用

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{1}{C}[(AC - B^2)\Delta x^2 + (B\Delta x + C\Delta y)^2].$$

- 若 $A = C = 0$, 则 $B \neq 0$, $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = 2B\Delta x\Delta y$. 考虑 $\Delta x = \Delta y$, $\Delta x = -\Delta y$.

判别法的证明 4

- 当 $B^2 > AC$, $A > 0$ 时, 取足够小的 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 当 $\Delta y = 0$ 且 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时,

$$\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2 \geq \frac{1}{2}A\Delta x^2 - \epsilon\Delta x^2 > 0$$

因此 (x_0, y_0) 不是极值点.

- $A < 0$ 时类似证明. 若 $C \neq 0$ 时, 利用

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{1}{C}[(AC - B^2)\Delta x^2 + (B\Delta x + C\Delta y)^2].$$

- 若 $A = C = 0$, 则 $B \neq 0$, $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = 2B\Delta x\Delta y$. 考虑 $\Delta x = \Delta y$, $\Delta x = -\Delta y$.

判别法的证明 4

- 当 $B^2 > AC$, $A > 0$ 时, 取足够小的 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 当 $\Delta y = 0$ 且 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时,
$$\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2 \geq \frac{1}{2}A\Delta x^2 - \epsilon\Delta x^2 > 0$$
因此 (x_0, y_0) 不是极值点.
- $A < 0$ 时类似证明. 若 $C \neq 0$ 时, 利用
$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{1}{C}[(AC - B^2)\Delta x^2 + (B\Delta x + C\Delta y)^2].$$
- 若 $A = C = 0$, 则 $B \neq 0$, $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = 2B\Delta x\Delta y$. 考虑 $\Delta x = \Delta y$, $\Delta x = -\Delta y$.

判别法的证明 5

- (3) 的证明：考虑 $f(x,y)=(x+y)^2$ 和 $g(x,y)=(x+y)^2+x^3$，在 $(0,0)$ 点，$A=B=C=2$，都满足 $B^2=AC$.

- $f(x,y) = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$. 求极值点.
- 解：解方程组 $\begin{cases} f_x = y + x^2 = 0 \\ f_y = x + y^2 = 0 \end{cases}$ 得到稳定点 $(0,0), (-1,-1)$.

  二阶偏导数 $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2y$. 在 $(0,0)$ 点，$B^2 - AC > 0$, 不是极值点. 在 $(-1,-1)$ 点，$B^2 - AC < 0$, $A < 0$ 是极大值点.
- 注：上例中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点 $(-1,-1)$，但不是最值点.

极值点的判别 –例

- $f(x, y) = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$. 求极值点.
- 解：解方程组 $\begin{cases} f_x = y + x^2 = 0 \\ f_y = x + y^2 = 0 \end{cases}$ 得到稳定点 $(0, 0), (-1, -1)$.

  二阶偏导数 $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2y$. 在 $(0, 0)$ 点，$B^2 - AC > 0$, 不是极值点. 在 $(-1, -1)$ 点，$B^2 - AC < 0$, $A < 0$ 是极大值点.
- 注: 上例中 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点 $(-1, -1)$，但不是最值点.

极值点的判别 –例

- $f(x,y) = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$. 求极值点.
- 解：解方程组 $\begin{cases} f_x = y + x^2 = 0 \\ f_y = x + y^2 = 0 \end{cases}$ 得到稳定点 $(0,0), (-1,-1)$.
  二阶偏导数 $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2y$. 在 $(0,0)$ 点，$B^2 - AC > 0$, 不是极值点. 在 $(-1,-1)$ 点，$B^2 - AC < 0$, $A < 0$ 是极大值点.
- 注: 上例中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点 $(-1,-1)$，但不是最值点.

极值点的判别 –例

- $f(x,y) = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$. 求极值点.
- 解：解方程组 $\begin{cases} f_x = y + x^2 = 0 \\ f_y = x + y^2 = 0 \end{cases}$ 得到稳定点 $(0,0), (-1,-1)$.

  二阶偏导数 $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2y$. 在 $(0,0)$ 点，$B^2 - AC > 0$, 不是极值点. 在 $(-1,-1)$ 点，$B^2 - AC < 0$, $A < 0$ 是极大值点.
- 注: 上例中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点 $(-1,-1)$，但不是最值点.

二次多项式的极值和最值

- 若 $f(x,y)$ 是二次多项式, (x_0,y_0) 是任意一点, 则 $f(x,y)$ 可表示为

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ + \frac{1}{2}(A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2) \end{aligned}$$

  这里 $A = f_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f_{yy}(x_0,y_0)$.

- 若 (x_0,y_0) 是稳定点. 当 $B^2 < AC$ 时, 若 $A > 0$, (x_0,y_0) 是极小值点, 也是最小值点; 若 $A < 0$, (x_0,y_0) 是极大值点, 也是最大值点. $B^2 > AC$ 时 (x_0,y_0) 不是极值点. 当 $B^2 = AC$ 时稳定点 (构成一条直线) 都是极值点, 且当 A 或 C 大于零时, 所有稳定点是极小点 (也是最小点).

二次多项式的极值和最值

- 若 $f(x,y)$ 是二次多项式, (x_0,y_0) 是任意一点, 则 $f(x,y)$ 可表示为

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ + \frac{1}{2}(A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2)$$

这里 $A = f_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f_{yy}(x_0,y_0)$.

- 若 (x_0,y_0) 是稳定点. 当 $B^2 < AC$ 时, 若 $A > 0$, (x_0,y_0) 是极小值点, 也是最小值点; 若 $A < 0$, (x_0,y_0) 是极大值点, 也是最大值点. $B^2 > AC$ 时 (x_0,y_0) 不是极值点. 当 $B^2 = AC$ 时稳定点 (构成一条直线) 都是极值点, 且当 A 或 C 大于零时, 所有稳定点是极小点 (也是最小点).

多元函数的最值

- 有界闭区域 $\bar{D}$ 上的连续函数存在最大值点和最小值点. 在 D 内部的最值点必是极值点. 事实上一个连续函数限制到一个有界闭集上必然有界. 且存在最大值点和最小值点
- 有界闭区域 $\bar{D}$ 上最值的求法:
  1. 求出内部的驻点, 2. 求出边界上的最值. 3. 比较函数在内部驻点处的取值和边界上最值点处的取值, 得到函数的最值.

- 有界闭区域 $\bar{D}$ 上的连续函数存在最大值点和最小值点. 在 D 内部的最值点必是极值点. 事实上一个连续函数限制到一个有界闭集上必然有界. 且存在最大值点和最小值点
- 有界闭区域 $\bar{D}$ 上最值的求法:
  1. 求出内部的驻点, 2. 求出边界上的最值. 3. 比较函数在内部驻点处的取值和边界上最值点处的取值, 得到函数的最值.

最小二乘法 1

- 最小二乘法: 变量 y 是变量 x 的函数，由实验测得当 x 取 x_1, x_2, $\cdots, x_n$ 时，对应 y 的值分别为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 找一个近似公式 $y = ax + b$，使得 $u(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ 最小.
- 解：要求函数 $u(a,b)$ 的最小值点. 先求驻点:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

最小二乘法 1

- 最小二乘法: 变量 y 是变量 x 的函数，由实验测得当 x 取 x_1, x_2, $\cdots, x_n$ 时，对应 y 的值分别为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 找一个近似公式 $y = ax + b$，使得 $u(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ 最小.
- 解：要求函数 $u(a,b)$ 的最小值点. 先求驻点:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

- 解（续）：上面方程组整理得

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

上面二元线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \neq 0,$$

因此方程组有唯一解 (a_0, b_0). 又 $u_{aa} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $u_{ab} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $u_{bb} = 2n$, $AC - B^2 = 4\sum\limits_{i<j}(x_i - x_j)^2 > 0$, 因此 (a_0, b_0) 是极小值点，也是最小值点.

最小二乘法 2

- 解（续）：上面方程组整理得

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

上面二元线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \neq 0,$$

因此方程组有唯一解 (a_0, b_0). 又 $u_{aa} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $u_{ab} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $u_{bb} = 2n$, $AC - B^2 = 4\sum\limits_{i<j}(x_i - x_j)^2 > 0$, 因此 (a_0, b_0) 是极小值点，也是最小值点.

- 解（续）：上面方程组整理得

$$\begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

上面二元线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \neq 0,$$

因此方程组有唯一解 (a_0, b_0). 又 $u_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $u_{ab} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$, $u_{bb} = 2n$, $AC - B^2 = 4\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 > 0$, 因此 (a_0, b_0) 是极小值点，也是最小值点.

求最值 —例 1

- 例：$f(x,y)=x^2y(4-x-y)$，$\bar{D}=\{(x,y)|x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 6\}$．求 f 在 $\bar{D}$ 上的最值.
- 解：先求驻点:

$$\begin{cases} f_x = 2xy(4-x-y)-x^2y = xy(8-3x-2y)=0 \\ f_y = x^2(4-x-y)-x^2y = x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$$

得内部驻点 $(2,1)$，$f(2,1)=4$.

求最值 —例 1

- 例：$f(x,y) = x^2y(4-x-y)$，$\bar{D} = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 6\}$. 求 f 在 $\bar{D}$ 上的最值.
- 解：先求驻点:

$$\begin{cases} f_x = 2xy(4-x-y) - x^2y = xy(8-3x-2y) = 0 \\ f_y = x^2(4-x-y) - x^2y = x^2(4-x-2y) = 0 \end{cases}$$

得内部驻点 $(2,1)$，$f(2,1) = 4$.

- 例 (续):

  $f(x,y)$ 在边界 $y=0(0\le x\le 6)$,

  $x=0(0\le y\le 6)$ 上恒为 0.

  在 $x+y=6(0\le x\le 6)$ 上

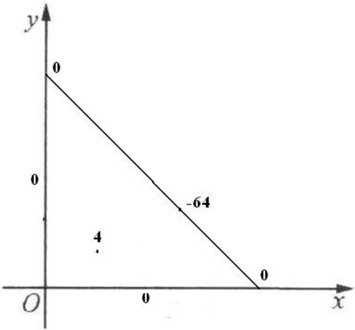
  $$f(x,y)=2x^2(x-6),$$

  $x=0,6$ 时

  取最大值 0, $x=4$ 时取最小值 -64.

  综上可知 $f(x,y)$

  的最大值为 4, 最小值为 -64.

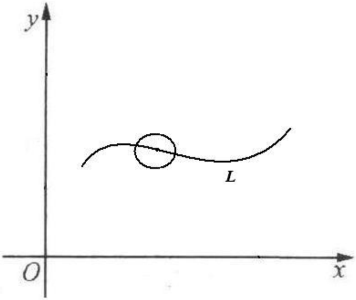


一个条件下二元函数的条件极值 1

- $z = f(x,y)$ 在条件 $\phi(x,y) = 0$ 下的条件极值: 设

$$L = \{(x,y)|\phi(x,y) = 0\},$$

L 一般表示一条曲线. 设 (x_0,y_0) 为 L 上的一内点（即不是端点）. 若存在 (x_0,y_0) 的邻域 U_δ, 使得



$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0), \forall (x,y) \in U_\delta \cap L.$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的条件极小值.

一个条件下二元函数的条件极值 2

- 设 $f(x,y)$, $\phi(x,y) \in C^1$, 且 $\phi_x^2 + \phi_y^2 \neq 0$, 则 $\phi(x,y) = 0$ 表示光滑曲线. 若 $x = x(t)$, $y = y(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0)$ 是曲线 L 的参数方程, 则有

$$\phi(x(t), y(t)) \equiv 0 \Longrightarrow \phi_x x'(t) + \phi_y y'(t) = 0.$$

问题转化为求一元函数 $z = f(x(t), y(t))$ 的极值点, 稳定点满足

$$\begin{cases} \phi_x x'(t) + \phi_y y'(t) = 0, \\ \frac{dz}{dt} = f_x x'(t) + f_y y'(t) = 0. \end{cases}$$

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y), (ϕ_x, ϕ_y) 均与 $(x'(t), y'(t))$ 垂直，因此必然共线，即存在 λ, 使得 $(f_x, f_y) = -\lambda(\phi_x, \phi_y)$.
- 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, 则稳定点 (x, y) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

- 稳定点不一定是极值点, 如 $f(x, y) = x^2 y$, $\phi(x, y) = x - y$, 则 $(0, 0)(\lambda = 0)$ 是稳定点, 显然不是极值点.

一个条件下二元函数的条件极值 3

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y), (ϕ_x, ϕ_y) 均与 $(x'(t), y'(t))$ 垂直，因此必然共线，即存在 λ, 使得 $(f_x, f_y) = -\lambda(\phi_x, \phi_y)$.
- 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, 则稳定点 (x, y) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

- 稳定点不一定是极值点, 如 $f(x, y) = x^2y$, $\phi(x, y) = x - y$, 则 $(0, 0)(\lambda = 0)$ 是稳定点, 显然不是极值点.

一个条件下二元函数的条件极值 3

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y), (ϕ_x, ϕ_y) 均与 $(x'(t), y'(t))$ 垂直，因此必然共线，即存在 λ, 使得 $(f_x, f_y) = -\lambda(\phi_x, \phi_y)$.
- 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, 则稳定点 (x, y) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

- 稳定点不一定是极值点, 如 $f(x, y) = x^2y$, $\phi(x, y) = x - y$, 则 $(0, 0)(\lambda = 0)$ 是稳定点, 显然不是极值点.

一个条件下三元函数的条件极值 1

- $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\phi(x, y, z) = 0$ 下的条件极值. $\phi(x, y, z) = 0$ 一般表示一张曲面. 条件极值即为曲面上的局部最值.
- 设 $f(x, y, z)$, $\phi(x, y, z) \in C^1$, 且 $\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 \neq 0$, 则 $\phi(x, y, z) = 0$ 确定一光滑曲面. 若 $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ 是该曲面的参数方程，则有 $\phi(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \equiv 0$, 求偏导数得方程

$$\begin{cases} \phi_x \frac{\partial x}{\partial s} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial s} + \phi_z \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ \phi_x \frac{\partial x}{\partial t} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial t} + \phi_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

问题转化为求 $u = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ 的极值点，因此满足稳定点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s} + f_z \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} + f_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

一个条件下三元函数的条件极值 1

- $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\phi(x,y,z)=0$ 下的条件极值. $\phi(x,y,z)=0$ 一般表示一张曲面. 条件极值即为曲面上的局部最值.
- 设 $f(x,y,z)$, $\phi(x,y,z)\in C^1$, 且 $\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2\neq 0$, 则 $\phi(x,y,z)=0$ 确定一光滑曲面. 若 $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $z=z(s,t)$ 是该曲面的参数方程, 则有 $\phi(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\equiv 0$, 求偏导数得方程

$$\begin{cases} \phi_x\frac{\partial x}{\partial s}+\phi_y\frac{\partial y}{\partial s}+\phi_z\frac{\partial z}{\partial s}=0, \\ \phi_x\frac{\partial x}{\partial t}+\phi_y\frac{\partial y}{\partial t}+\phi_z\frac{\partial z}{\partial t}=0. \end{cases}$$

问题转化为求 $u=f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$ 的极值点, 因此满足稳定点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s}=f_x\frac{\partial x}{\partial s}+f_y\frac{\partial y}{\partial s}+f_z\frac{\partial z}{\partial s}=0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}=f_x\frac{\partial x}{\partial t}+f_y\frac{\partial y}{\partial t}+f_z\frac{\partial z}{\partial t}=0. \end{cases}$$

一个条件下三元函数的条件极值 1

- $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\phi(x,y,z) = 0$ 下的条件极值. $\phi(x,y,z) = 0$ 一般表示一张曲面. 条件极值即为曲面上的局部最值.
- 设 $f(x,y,z)$, $\phi(x,y,z) \in C^1$, 且 $\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 \neq 0$, 则 $\phi(x,y,z) = 0$ 确定一光滑曲面. 若 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$ 是该曲面的参数方程, 则有 $\phi(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \equiv 0$, 求偏导数得方程

$$\begin{cases} \phi_x \frac{\partial x}{\partial s} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial s} + \phi_z \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ \phi_x \frac{\partial x}{\partial t} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial t} + \phi_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

问题转化为求 $u = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ 的极值点, 因此满足稳定点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s} + f_z \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} + f_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

一个条件下三元函数的条件极值 2

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y, f_z), (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) 均垂直于 (x_s, y_s, z_s) 和 (x_s, y_s, z_s)，因此必然共线，即存在 λ, 使得

$$(f_x, f_y, f_z) = -\lambda(\phi_x, \phi_y, \phi_z).$$

- 作辅助函数 $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$, 则稳定点 (x, y, z) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda\phi_z = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

一个条件下三元函数的条件极值 2

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y, f_z), (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) 均垂直于 (x_s, y_s, z_s) 和 (x_s, y_s, z_s)，因此必然共线，即存在 λ, 使得

$$(f_x, f_y, f_z) = -\lambda(\phi_x, \phi_y, \phi_z).$$

- 作辅助函数 $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$, 则稳定点 (x, y, z) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda\phi_z = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

- 求 $f(x, y, z) = xyz$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (x > 0, y > 0, z > 0)$ 上的最值.
- 解：设 $F(x, y, z) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$.

$$\begin{cases} F_x = yz + 2\lambda x = 0 \\ F_y = xz + 2\lambda y = 0 \\ F_z = xy + 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \end{cases}.$$

解得 $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$. 由于 f 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ 上的最值存在，且边界上的值为 0，故 (x_0, y_0, z_0) 点必为最大值点. 最大值为 $\frac{R^3}{3\sqrt{3}}$.

一个条件下的条件极值 -例

- 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x>0,y>0,z>0)$ 上的最值.
- 解：设 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

$$\begin{cases} F_x = yz+2\lambda x = 0 \\ F_y = xz+2\lambda y = 0 \\ F_z = xy+2\lambda z = 0 \\ F_\lambda = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0 \end{cases}.$$

解得 $x_0=y_0=z_0=\frac{R}{\sqrt{3}}$. 由于 f 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0)$ 上的最值存在，且边界上的值为 0，故 (x_0,y_0,z_0) 点必为最大值点. 最大值为 $\frac{R^3}{3\sqrt{3}}$.

一个条件下的条件极值 -例续

- 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x>0,y>0,z>0)$ 上的最值.
- 解：利用球坐标 $x=R\sin\phi\cos\theta$, $y=R\sin\phi\sin\theta$, $z=R\cos\phi$,

$$f(x,y,z)=R^3\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta\sin\theta,\ 0<\phi<\frac{\pi}{2},0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

当 $\sin\phi=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin^2\phi\cos\phi$ 取最大值 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, $\cos\theta\sin\theta$ 取最大值 $\frac{1}{2}$, $f(x,y,z)$ 有最大值 $\frac{R^3}{3\sqrt{3}}$.

- 注：由不等式 $xyz\le(\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^{\frac{3}{2}}$ 直接可得.

一个条件下的条件极值 -例续

- 求 $f(x,y,z) = xyz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2 (x>0, y>0, z>0)$ 上的最值.
- 解：利用球坐标 $x = R\sin\phi\cos\theta$, $y = R\sin\phi\sin\theta$, $z = R\cos\phi$,

$$f(x,y,z) = R^3 \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta\sin\theta,\ 0<\phi<\frac{\pi}{2}, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

当 $\sin\phi = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin^2\phi\cos\phi$ 取最大值 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos\theta\sin\theta$ 取最大值 $\frac{1}{2}$, $f(x,y,z)$ 有最大值 $\frac{R^3}{3\sqrt{3}}$.

- 注：由不等式 $xyz \le (\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^{\frac{3}{2}}$ 直接可得.

一个条件下的条件极值 -例续

- 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x>0,y>0,z>0)$ 上的最值.
- 解：利用球坐标 $x=R\sin\phi\cos\theta$, $y=R\sin\phi\sin\theta$, $z=R\cos\phi$,

$$f(x,y,z)=R^3\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta\sin\theta,\ 0<\phi<\frac{\pi}{2},0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

当 $\sin\phi=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin^2\phi\cos\phi$ 取最大值 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, $\cos\theta\sin\theta$ 取最大值 $\frac{1}{2}$, $f(x,y,z)$ 有最大值 $\frac{R^3}{3\sqrt{3}}$.
- 注：由不等式 $xyz\le(\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^{\frac{3}{2}}$ 直接可得.

- 条件 $\phi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ 下 $u=f(x,y,z)$ 的条件极值 (这里假设 (ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z) 和 (ψ_x,ψ_y,ψ_z) 不共线). 设 $\phi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ 确定的曲线的参数方程 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, 则极值点满足

$$\begin{cases}\phi_x x'+\phi_y y'+\phi_z z'=0,\\ \psi_x x'+\psi_y y'+\psi_z z'=0,\\ f_x x'+f_y y'+f_z z'=0.\end{cases}$$

因此 (f_x,f_y,f_z), (ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z) 和 (ψ_x,ψ_y,ψ_z) 均与 $(x'(t),y'(t),z'(t))$ 垂直, 即三个向量 (f_x,f_y,f_z), (ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z) 和 (ψ_x,ψ_y,ψ_z) 共面, 存在 λ_1, λ_2 使得

$$(f_x,f_y,f_z)=-\lambda_1(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})-\lambda_2(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}).$$

多个条件下的条件极值 2

- 作辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\phi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z),$$

则稳定点 (x,y,z) 和 λ_1,λ_2 满足

$$\begin{cases} F_x=f_x+\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\\ F_y=f_y+\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y}=0\\ F_z=f_z+\lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial z}=0\\ F_{\lambda_1}=\phi=0\\ F_{\lambda_2}=\psi=0 \end{cases}$$

多个条件下的条件极值 3

- 求 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 条件在 $\phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 (k = 1, 2, \cdots, m < n)$ 下的条件极值.
- 作辅助函数

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&\quad + \lambda_1 \phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_m \phi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n),
\end{aligned}
$$

则驻点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 满足

$$
\begin{cases}
F_{x_i} = f_{x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}, & i = 1, 2, \cdots, n. \\
F_{\lambda_k} = \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, & k = 1, 2, \cdots, m.
\end{cases}
$$

多个条件下的条件极值 3

- 求 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 条件在 $\phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0(k = 1, 2, \cdots, m < n)$ 下的条件极值.
- 作辅助函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ + \lambda_1\phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_m\phi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

则驻点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 满足

$$\begin{cases} F_{x_i} = f_{x_i} + \lambda_1\frac{\partial\phi_i}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial x_i}, & i = 1, 2, \cdots, n. \\ F_{\lambda_k} = \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, & k = 1, 2, \cdots, m. \end{cases}$$

多个条件下的条件极值 3

- 求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 条件在 $\phi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(k=1,2,\cdots,m<n)$ 下的条件极值.
- 作辅助函数

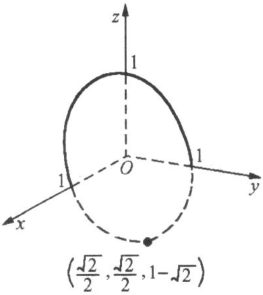
$$
\begin{aligned}
F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m) &= f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
&\quad+\lambda_1\phi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+\lambda_m\phi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n),
\end{aligned}
$$

则驻点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 满足

$$
\begin{cases}
F_{x_i}=f_{x_i}+\lambda_1\frac{\partial\phi_i}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial x_i}, & i=1,2,\cdots,n.\\
F_{\lambda_k}=\phi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, & k=1,2,\cdots,m.
\end{cases}
$$

- 平面 $x+y+z=1$ 截圆柱面 $x^2+y^2=1$ 得到一个椭圆，求该椭圆上到原点的最近点与最远点.
- 解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+z-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$.

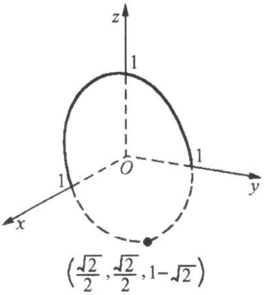
$$\begin{cases} F_x = 2x+\lambda_1+2\lambda_2 x = 0 \\ F_y = 2y+\lambda_1+2\lambda_2 y = 0 \\ F_z = 2z+\lambda_1 = 0 \\ F_{\lambda_1} = x+y+z-1 = 0 \\ F_{\lambda_2} = x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$



得驻点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$.
最近点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$，最远点为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$.

- 平面 $x+y+z=1$ 截圆柱面 $x^2+y^2=1$ 得到一个椭圆，求该椭圆上到原点的最近点与最远点.
- 解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+z-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$.

$$\begin{cases} F_x = 2x+\lambda_1+2\lambda_2 x = 0 \\ F_y = 2y+\lambda_1+2\lambda_2 y = 0 \\ F_z = 2z+\lambda_1 = 0 \\ F_{\lambda_1} = x+y+z-1 = 0 \\ F_{\lambda_2} = x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$



得驻点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$.
最近点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$，最远点为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$.

多个条件下的条件极值 -例 2

- 注：上例用椭圆周的参数方程更简单:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t,$$

代入得

$$f(x, y, z) = 1 + (1 - \cos t - \sin t)^2 = 1 + [1 - \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})]^2.$$

则有当 $\sin(t+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $t = 0, \frac{\pi}{2}$ 时最小, 最近点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$, 当 $\sin(t+\frac{\pi}{4}) = -1$, 即 $t = \pi + \frac{\pi}{4}$ 时最大, 得最远点为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$.

- 注：上例用椭圆周的参数方程更简单:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t,$$

代入得

$$f(x, y, z) = 1 + (1 - \cos t - \sin t)^2 = 1 + [1 - \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})]^2.$$

则有当 $\sin(t+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $t = 0, \frac{\pi}{2}$ 时最小, 最近点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$，当 $\sin(t+\frac{\pi}{4}) = -1$, 即 $t = \pi + \frac{\pi}{4}$ 时最大, 得最远点为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$.

复习

- 利用洛比达法则，泰勒公式求极限，多元函数的极限.
- 中值定理及其应用：函数单调性，函数的凸凹性，不等式证明，拐点，渐近线。
- 一元函数和多元函数的泰勒公式
- 一元函数和多元函数的极值和最值.
- 空间解析几何：向量运算，平面与直线方程，二次曲面. 曲面的切平面与法向量
- 多元函数的连续性，偏导数存在性，可微性.
- 隐函数存在定理，多元函数（或隐函数确定的函数）的偏导数，微分，方向导数，梯度.

期末考试

- 关于期末考试范围

期末考试

- 关于缓考：学生因病或其他特殊原因不能参加考试时，须在考试前申请缓考。未申请缓考或申请未准而不参加考试的，按旷考处理。
- 考试纪律: 复习资料不能留在座位旁边或随身携带。携带本身就违规了，按规定属考试作弊行为，不是看了用了才算作弊。以往案例中，常见携带手机、智能手表、与考试课程相关材料等物品。除非主考教师另有规定，学生只能携带必要的文具参加考试，其它所有物品（包括空白纸张、手机等电子设备）不得带入座位；已经带入考场的手机等电子设备必须关机，与其他物品一起集中放在监考人员指定位置，不得随身携带或带入座位及旁边。