1、若 $\alpha_1, \cdots \alpha_s$ 可被 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性表示，且 $s > t$.
则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.

2. 求 $\begin{vmatrix} & 1 & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n} & & & & \end{vmatrix}_{n\times n}$ 的所有代数余子式的和.

3、齐次线性方程组 $x_1\vec{\alpha_1}+\cdots+x_n\vec{\alpha_n}=\vec{0}$

有非0解，问：

$x_1\vec{\alpha_1}+\cdots+x_n\vec{\alpha_n}=\vec{\beta}$ 是否一定有解？

4、在 $\mathbb{R}^5$ 中考虑 $V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ $W=\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle$

其中

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\\1\end{pmatrix}\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}3\\1\\3\\1\\3\end{pmatrix}\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\quad \beta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

证：$V+W$ 和 $V\cap W$ 是 $\mathbb{R}^5$ 的线性子空间，

并分别给出 $V+W$ 和 $V\cap W$ 的一个基。

5、证：$\forall\ x_0, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ 互不相同，

$\forall\ y_0, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$，$\exists$ 唯一一个次数 $\leq n$ 的多项式

$f(x)$. s.t. $f(x_i)=y_i \quad i=0,1,\cdots,n$

6. 若 $A=\{\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_s\}$ 可由 $B=\{\vec{\beta}_1,\cdots,\vec{\beta}_t\}$ 线性表出，且 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$，问：B 是否能被 A 线性表出？

7. $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0$ $(i=1,2,\cdots s,)$ 的一个基础解系，若 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{t-1}$ 也是其 $t-1$ 个线性无关的解，是否一定 $\exists j$，s.t. $\eta_j,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{t-1}$ 是方程组的基础解系？

8、$D=(a_{ij})_{10\times10}$，若 $\forall i,j$．a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 相等，则 rank(D) 可能为多少？

9、$\alpha_1=(1,2,7,6)$ $\alpha_2=(-1,1,5,3)$

$\alpha_3=(0,-1,-4,-3)$ $\alpha_4=(1,0,-2,-1)$

$\alpha_5=(1,2,9,8)$ 求 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_5\}$ 的一个极大无关组，并用其表示其余向量

10. 已知

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ a_1x_1 + (a_2+b)x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ \cdots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + (a_n+b)x_n = 0 \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$

(1) 求系数矩阵行列式

(2) 方程组何时仅有零解，何时有非零解？

(3) 有非零解时，给出一个基础解系