北京大学光华管理学院期末答案

一 (每空 4 分, 共 20 分)

(1) 设 $\vec{a}=(2,-3,1),\vec{b}=(1,-1,3),\vec{c}=(1,-2,0)$, 则有$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\underline{(8,-16,0)}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\underline{\ 2\ }$,

(2) 给出满足下面条件的 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的例子：$f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处偏导数存在，但不连续，例子 $f(x,y)=\underline{\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}}$；函数 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但不可微, 例子 $g(x,y)=\underline{\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}}$.

(3) $f(x,y)=x^3-x^2+xy+x-y$ 在 $(1,-1)$ 点处的二阶泰勒公式(带Peano余项)为 $f(x,y)=\underline{1+(x-1)+2(x-1)^2+(x-1)(y+1)+0(\rho^2)}$, $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$.

二 (共 24 分)计算

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx=2\arctan\sqrt{x}+C.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(\arccos x)^2dx=\frac{\pi^2}{18}+(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\pi-1.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{\sin^3 x}=\frac{1}{3}.$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+2y)\ln(x^2+y^2)=0.$

$(|(x+2y)\ln(x^2+y^2)|\leq3\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)\to0).$

三 (10分) 设 $f(x,y,z)$ 有连续偏导数, $z=z(x,y)$ 是由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 确定的隐函数, 求函数 $u=f(x,y,z(x,y))$ 的微分.

$$du=(f_x+f_z\frac{e^x(x+1)}{e^z(z+1)})dx+(f_y-f_z\frac{e^y(y+1)}{e^z(z+1)})dy$$

四 (12分) 1. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

2. 设一平面经过原点及 $(6,-3,2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直, 求该平面的方程.

(1) 距离为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. 直线方程可化成 $\frac{x-1}{0}=y=z-2$, $P_0(1,0,2)$ 是直线上的点, $\vec{e}=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 是与直线平行的单位向量, $\overrightarrow{P_0P}=(2,-1,0)$, 距离等于

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{P_0P}|^2-|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{e}|^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2) 设平面方程为 $Ax+By+Dy=0$,

$$\begin{cases}6A-3B+2C=0\\4A-B+2C=0\end{cases}$$

得$A:B:C=1:1:-\frac{3}{2}$, 平面的方程位 $2x+2y-3z=0$

五 (10分) 证明不等式：$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$, $x>0$.

证明: 令 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\arctan x$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}+1-\frac{1}{1+x^2}>0$, $f(x)>f(0)=0$.

六 (14分) 设 $0<a<1$, 直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1; $y=ax$, $y=x^2$ 与直线 $x=1$ (三条线)所围成的图形面积为 S_2.

(1) 试确定 a 的值, 使得 S_1+S_2 达到最小.

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解: (1) $S_1+S_2=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$, 对 a 求导得 $a^2-\frac{1}{2}$, 显然 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时最小.

(2) S_1旋转得到的旋转体的体积

$$V_1=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\pi\Big(\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}x\Big)^2-x^4\Big)dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$$

S_2旋转得到的旋转体的体积

$$V_2=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\pi\Big(x^4\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}x\Big)^2\Big)dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}+\frac{\pi}{30}$$

所求体积为 $\frac{1+\sqrt{2}\pi}{30}$.

七 (10分)$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续下凸函数, 证明

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证明: 令 $g(t)=\frac{f(a)+f(t)}{2}(t-a)-\int_a^t f(x)dx$, 由于 $f(x)$ 是下凸函数 $g'(t)=\frac{1}{2}[f(a)-(f(t)-f'(t)(a-t))]\ge0$, $g(b)\ge g(a)=0$, 得右边的表达式.

令 $h(t)=\int_a^t f(x)dx-f(\frac{a+t}{2})(t-a)$, 由于 $f(x)$ 是下凸函数 $h'(t)=f(t)-[f(\frac{a+t}{2})+f'(\frac{a+t}{2})(t-\frac{a+t}{2})]\ge0$, $h(b)\ge h(a)=0$，得左边的表达式.