法律声明

- 本课件包括演示文稿、示例、代码、题库、视频和声音等内容，小象学院和主讲老师拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意及内容，我们保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

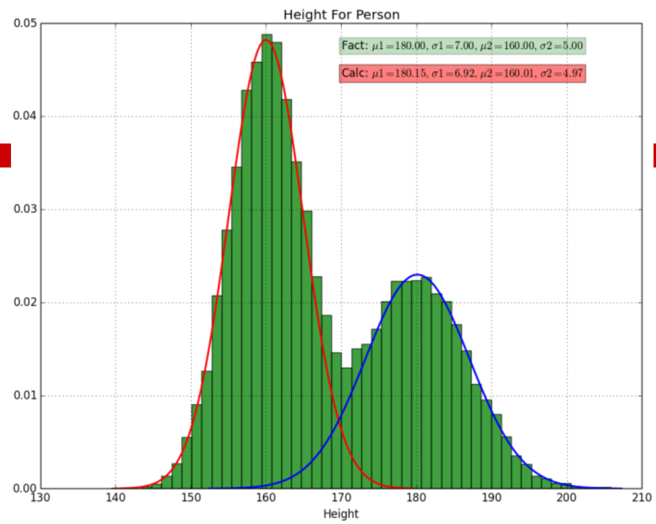
EM算法

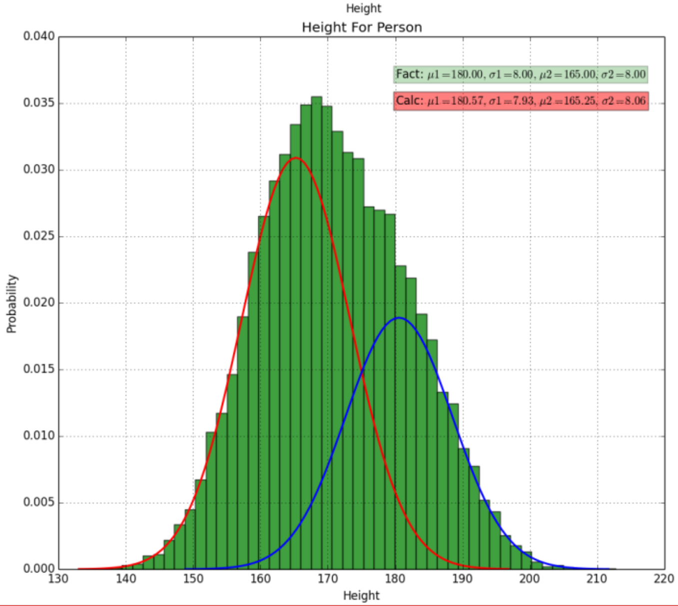
邹博

主要内容

- 通过实例直观求解高斯混合模型GMM
  - 适合快速掌握GMM，及编程实现
- 通过最大似然估计详细推导EM算法
  - 适合理论层面的深入理解
  - 用坐标上升理解EM的过程
- 推导GMM的参数φ、μ、σ
  - 复习多元高斯模型
  - 复习拉格朗日乘子法
- Arthur Dempster, Nan Laird, Donald Rubin,1977
  - C.F. Jeff Wu(1983)给出了收敛的进一步分析

EM Code





em3.py

```python
def calcEM(height):
    N = len(height)
    gp = 0.5     #girl probability
    bp = 0.5     #boy probability
    gmu,gsigma = min(height),1  #先验：直接取最大和最小值
    bmu,bsigma = max(height),1
    ggamma = range(N)
    bgamma = range(N)
    cur = [gp, bp, gmu, gsigma, bmu, bsigma]
    now = []

    times = 0
    while times < 100:
        i = 0
        for x in height:
            ggamma[i] = gp * gauss(x, gmu, gsigma)
            bgamma[i] = bp * gauss(x, bmu, bsigma)
            s = ggamma[i] + bgamma[i]
            ggamma[i] /= s
            bgamma[i] /= s
            i += 1

        gn = sum(ggamma)
        gp = float(gn) / float(N)
        bn = sum(bgamma)
        bp = float(bn) / float(N)
        gmu = averageWeight(height, ggamma, gn)
        gsigma = varianceWeight(height, ggamma, gmu, gn)
        bmu = averageWeight(height, bgamma, bn)
        bsigma = varianceWeight(height, bgamma, bmu, bn)

        now = [gp, bp,gmu,gsigma,bmu,bsigma]
        if isSame(cur, now):
            break
        cur = now
        print "Times:\t", times
        print "Girl mean/gsigma:\t", gmu,gsigma
        print "Boy mean/bsigma:\t", bmu,bsigma
        print "Boy/Girl:\t", bn, gn, bn+gn
        print "\n\n"
        times += 1
    return now
```

复习：Jensen不等式：若f是凸函数

- 基本Jensen不等式

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

- 若 $\theta_1, \ldots, \theta_k \ge 0,\ \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$
- 则 $f(\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k) \le \theta_1 f(x_1) + \cdots + \theta_k f(x_k)$

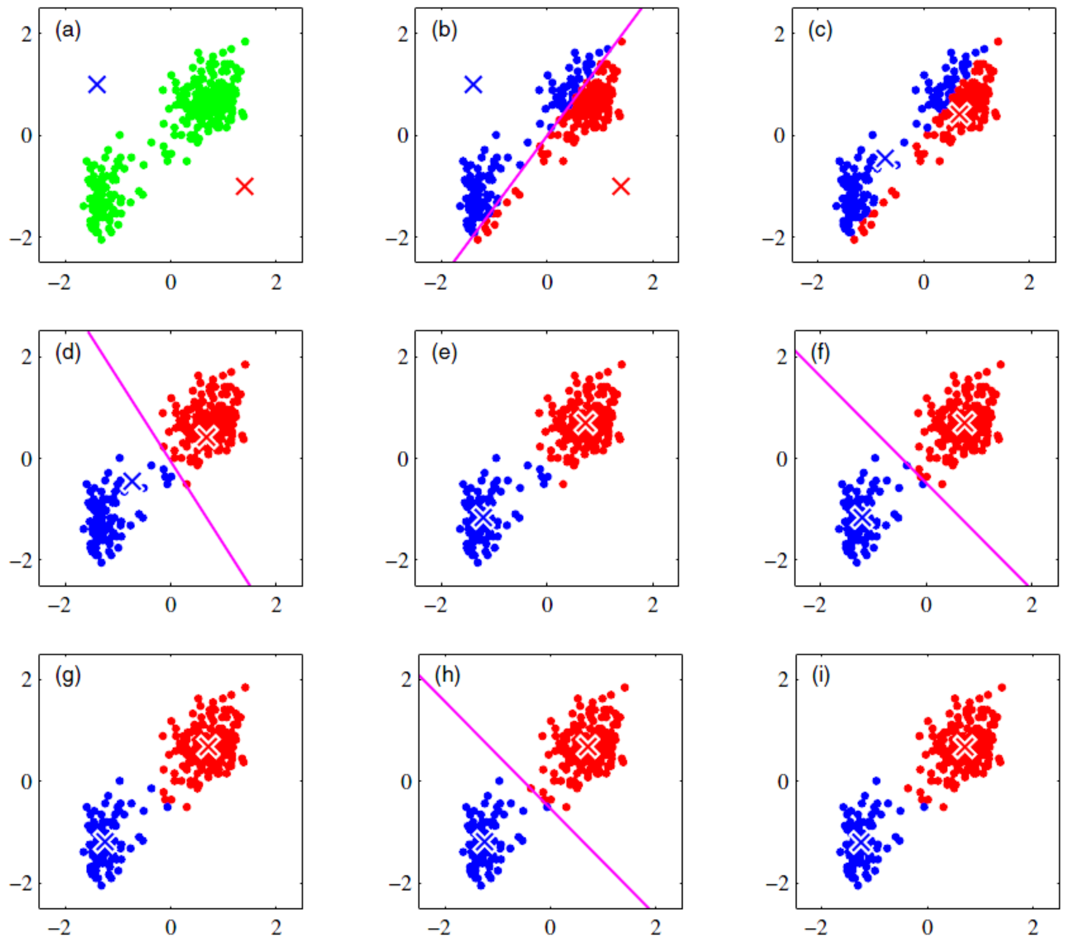
- 若 $p(x) \ge 0$ on $S \subseteq \mathbf{dom}\, f,\ \int_S p(x)\, dx = 1$
- 则 $f\left(\int_S p(x) x\, dx\right) \le \int_S f(x) p(x)\, dx$

$$f(\mathbf{E}\, x) \le \mathbf{E}\, f(x)$$

引子：K-means算法

- K-means算法，也被称为k-平均或k-均值，是一种广泛使用的聚类算法，或者成为其他聚类算法的基础。
- 假定输入样本为S=$x_1,x_2,\ldots,x_m$，则算法步骤为：
  - 选择初始的k个簇中心$\mu_1\mu_2\ldots\mu_k$
  - 将样本x_i标记为距离簇中心最近的簇：$label_i = \arg\min_{1\le j\le k}\left\|x_i-\mu_j\right\|$
  - 更新簇中心：$\mu_j = \frac{1}{|c_j|}\sum_{i\in c_j} x_i$
  - 重复最后两步，直到满足终止条件。
- 中止条件：迭代次数/簇中心变化率/最小平方误差MSE

K-means过程



思考

- 经典的K-means聚类方法，能够非常方便的将未标记的样本分成若干簇；
- 但无法给出某个样本属于该簇的后验概率。
- 其他方法可否处理未标记样本呢？

最大似然估计

- 找出与样本的分布最接近的概率分布模型。
- 简单的例子
  - 10次抛硬币的结果是：正正反正正正反反正正
- 假设p是每次抛硬币结果为正的概率。则：
- 得到这样的实验结果的概率是：

$$
\begin{aligned}
P &= pp(1-p)ppp(1-p)(1-p)pp \\
&= p^7(1-p)^3
\end{aligned}
$$

  - 最优解是：p=0.7

二项分布的最大似然估计

- 投硬币试验中，进行N次独立试验，n次朝上，N-n次朝下。
- 假定朝上的概率为p，使用对数似然函数作为目标函数：

$$f(n\mid p)=\log\left(p^{n}(1-p)^{N-n}\right)\xrightarrow{\Delta}h(p)$$

$$\frac{\partial h(p)}{\partial p}=\frac{n}{p}-\frac{N-n}{1-p}\xrightarrow{\Delta}0\quad\Rightarrow p=\frac{n}{N}$$

进一步考察

- 若给定一组样本$x_1,x_2...x_n$，已知它们来自于高斯分布$N(\mu,\sigma)$，试估计参数μ,σ。

按照MLE的过程分析

- 高斯分布的概率密度函数：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- 将X_i的样本值x_i带入，得到：

$$L(x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

化简对数似然函数

$$l(x)=\log\prod_i\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\sum_i\log\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\left(\sum_i\log\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)+\left(\sum_i-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$=-\frac{n}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i(x_i-\mu)^2$$

参数估计的结论

- 目标函数 $$l(x) = -\frac{n}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (x_i - \mu)^2$$
- 将目标函数对参数μ,σ分别求偏导，很容易得到μ,σ的式子：

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{1}{n}\sum_i x_i \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_i (x_i - \mu)^2 \end{cases}$$

符合直观想象

$$
\begin{cases}
\mu = \frac{1}{n}\sum_i x_i \\
\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_i \left(x_i - \mu\right)^2
\end{cases}
$$

- 上述结论和矩估计的结果是一致的，并且意义非常直观：样本的均值即高斯分布的均值，样本的伪方差即高斯分布的方差。
  - 该结论将作为下面分析的基础。

问题：随机变量无法直接(完全)观察到

- 随机挑选10000位志愿者，测量他们的身高：若样本中存在男性和女性，身高分别服从$N(\mu_1,\sigma_1)$和$N(\mu_2,\sigma_2)$的分布，试估计$\mu_1,\sigma_1,\mu_2,\sigma_2$。
- 给定一幅图像，将图像的前景背景分开
- 无监督分类：聚类/EM

从直观理解猜测GMM的参数估计

- 随机变量X是有K个高斯分布混合而成，取各个高斯分布的概率为$\pi_1\pi_2\ldots\pi_K$，第i个高斯分布的均值为μ_i，方差为Σ_i。若观测到随机变量X的一系列样本$x_1,x_2,\ldots,x_n$，试估计参数$\boldsymbol{\pi}$，$\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\Sigma}$。

建立目标函数

- 对数似然函数

$$l_{\pi,\mu,\Sigma}(x)=\sum_{i=1}^{N}\log\left(\sum_{k=1}^{K}\pi_k N(x_i \mid \mu_k,\Sigma_k)\right)$$

- 由于在对数函数里面又有加和，无法直接用求导解方程的办法直接求得最大值。为了解决这个问题，我们分成两步。

第一步：估算数据来自哪个组份

- 估计数据由每个组份生成的概率：对于每个样本x_i，它由第k个组份生成的概率为

$$\gamma(i,k)=\frac{\pi_k N(x_i \mid \mu_k,\Sigma_k)}{\sum_{j=1}^{K}\pi_j N(x_i \mid \mu_j,\Sigma_j)}$$

- 上式中的μ和Σ也是待估计的值，因此采样迭代法：在计算γ(i,k)时假定μ和Σ已知；
  - 需要先验给定μ和Σ。
  - γ(i,k) 亦可看成组份k在生成数据x_i时所做的贡献。

第二步：估计每个组份的参数

- 对于所有的样本点，对于组份k而言，可看做生成了 $\{\gamma(i,k)x_i \mid i=1,2,\Lambda\ N\}$ 这些点。组份k是一个标准的高斯分布，利用上面的结论：

$$
\begin{cases}
\mu = \dfrac{1}{n}\sum_i x_i \\
\sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum_i (x_i - \mu)^2
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
N_k = \sum_{i=1}^{N} \gamma(i,k) \\
\mu_k = \dfrac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N} \gamma(i,k) x_i \\
\Sigma_k = \dfrac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N} \gamma(i,k)(x_i - \mu_k)(x_i - \mu_k)^T \\
\pi_k = \dfrac{N_k}{N} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \gamma(i,k)
\end{cases}
$$

EM算法的提出

- 假定有训练集

$$\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \Lambda, x^{(m)}\right\}$$

- 包含m个独立样本，希望从中找到该组数据的模型p(x,z)的参数。

通过最大似然估计建立目标函数

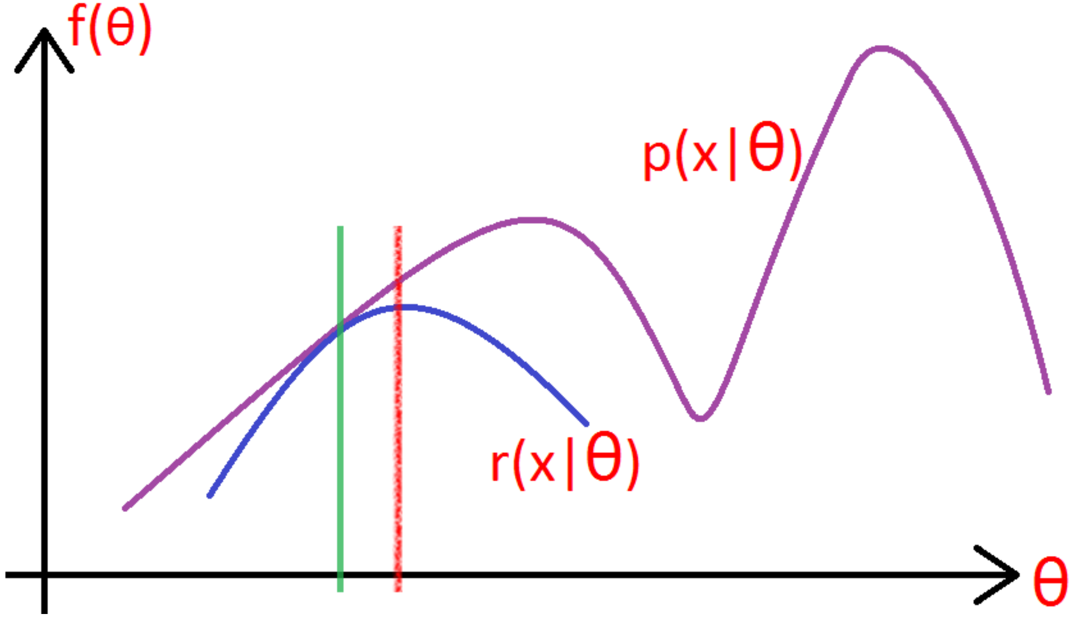
- 取对数似然函数

$$l(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\log p(x;\theta)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\log\sum_{z}p(x,z;\theta)$$

问题的提出 $l(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\log\sum_{z}p(x,z;\theta)$

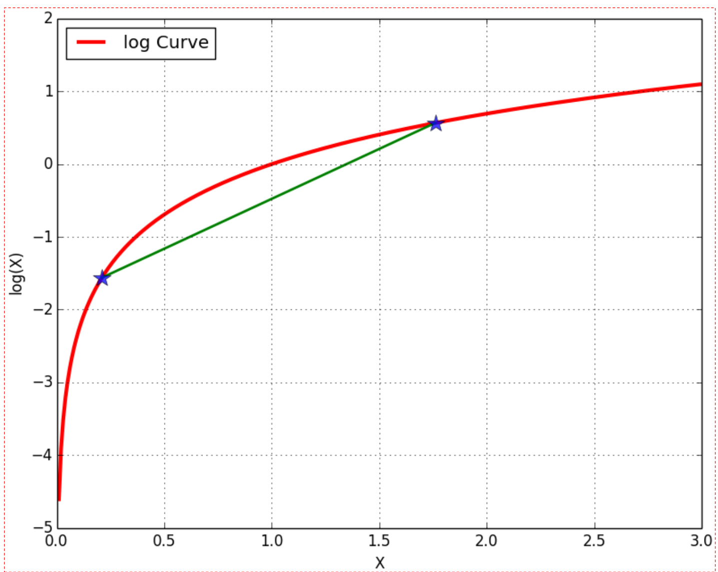
- z是隐随机变量，不方便直接找到参数估计。策略：计算l(θ)下界，求该下界的最大值；重复该过程，直到收敛到局部最大值。



Jensen不等式

- 令Qi是z的某一个分布，Qi≥0，有：

$$l(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\log\sum_{z}p(x,z;\theta)=\sum_{i=1}^{m}\log\sum_{z^{(i)}}p(x^{(i)},z^{(i)};\theta)$$



$$=\sum_{i=1}^{m}\log\sum_{z^{(i)}}Q_i(z^{(i)})\frac{p(x^{(i)},z^{(i)};\theta)}{Q_i(z^{(i)})}$$

$$\geq\sum_{i=1}^{m}\sum_{z^{(i)}}Q_i(z^{(i)})\log\frac{p(x^{(i)},z^{(i)};\theta)}{Q_i(z^{(i)})}$$

寻找尽量紧的下界

- 为了使等号成立

$$\frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{Q_i(z^{(i)})} = c$$

进一步分析

$$Q_i\left(z^{(i)}\right) \propto p\left(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta\right) \qquad \sum_z Q_i\left(z^{(i)}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} Q_i(z^{(i)}) &= \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{\sum_z p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)} \\ &= \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{p(x^{(i)}; \theta)} \\ &= p(z^{(i)} \mid x^{(i)}; \theta) \end{aligned}$$

EM算法整体框架

Repeat until convergence {

(E-step) For each i, set

$$Q_i(z^{(i)}) := p(z^{(i)}|x^{(i)};\theta).$$

(M-step) Set

$$\theta := \arg\max_\theta \sum_i \sum_{z^{(i)}} Q_i(z^{(i)}) \log \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \theta)}{Q_i(z^{(i)})}$$

}

坐标上升

Remark. If we define

$$J(Q,\theta)=\sum_i\sum_{z^{(i)}}Q_i(z^{(i)})\log\frac{p(x^{(i)},z^{(i)};\theta)}{Q_i(z^{(i)})},$$

the we know $\ell(\theta)\geq J(Q,\theta)$ from our previous derivation. The EM can also be viewed a coordinate ascent on J, in which the E-step maximizes it with respect to Q, and the M-step maximizes it with respect to θ.

EM的收敛性

Expectation-maximization works to improve $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)})$ rather than directly improving $\log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})$. Here is shown that improvements to the former imply improvements to the latter.

For any $\mathbf{Z}$ with non-zero probability $p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta})$, we can write

$$\log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}) = \log p(\mathbf{X},\mathbf{Z}|\boldsymbol{\theta}) - \log p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta}).$$

We take the expectation over possible values of the unknown data $\mathbf{Z}$ under the current parameter estimate $\theta^{(t)}$ by multiplying both sides by $p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta}^{(t)})$ and summing (or integrating) over $\mathbf{Z}$. The left-hand side is the expectation of a constant, so we get:

$$\begin{aligned}\log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{\mathbf{Z}} p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \log p(\mathbf{X},\mathbf{Z}|\boldsymbol{\theta}) - \sum_{\mathbf{Z}} p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \log p(\mathbf{Z}|\mathbf{X},\boldsymbol{\theta}) \\ &= Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) + H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}),\end{aligned}$$

where $H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)})$ is defined by the negated sum it is replacing. This last equation holds for any value of $\boldsymbol{\theta}$ including $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(t)}$,

$$\log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) = Q(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) + H(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}),$$

and subtracting this last equation from the previous equation gives

$$\log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}) - \log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) = Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - Q(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) + H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - H(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}),$$

However, Gibbs' inequality tells us that $H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \geq H(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\boldsymbol{\theta}^{(t)})$, so we can conclude that

$$\log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}) - \log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \geq Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}) - Q(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\boldsymbol{\theta}^{(t)}).$$

In words, choosing $\boldsymbol{\theta}$ to improve $Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(t)})$ beyond $Q(\boldsymbol{\theta}^{(t)}|\boldsymbol{\theta}^{(t)})$ can not cause $\log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})$ to decrease below $\log p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta}^{(t)})$, and so the marginal likelihood of the data is non-decreasing.

从理论公式推导GMM

- 随机变量X是有K个高斯分布混合而成，取各个高斯分布的概率为$\varphi_1\varphi_2\dots\ \varphi_K$，第i个高斯分布的均值为$\mu_i$，方差为$\Sigma_i$。若观测到随机变量X的一系列样本$x_1,x_2,\dots,x_n$，试估计参数$\varphi$，$\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\Sigma}$。

E-step

$$w_j^{(i)} = Q_i(z^{(i)} = j) = P(z^{(i)} = j | x^{(i)}; \phi, \mu, \Sigma)$$

M-step

- 将多项分布和高斯分布的参数带入：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{z^{(i)}} Q_i(z^{(i)}) \log \frac{p(x^{(i)}, z^{(i)}; \phi, \mu, \Sigma)}{Q_i(z^{(i)})}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} Q_i(z^{(i)} = j) \log \frac{p(x^{(i)}|z^{(i)} = j; \mu, \Sigma)p(z^{(i)} = j; \phi)}{Q_i(z^{(i)} = j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} w_j^{(i)} \log \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma_j|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^{(i)} - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x^{(i)} - \mu_j)\right) \cdot \phi_j}{w_j^{(i)}}$$

对均值求偏导

$$
\begin{aligned}
& \nabla_{\mu_l} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} w_j^{(i)} \log \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma_j|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^{(i)}-\mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x^{(i)}-\mu_j)\right) \cdot \phi_j}{w_j^{(i)}} \\
= & -\nabla_{\mu_l} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} w_j^{(i)} \frac{1}{2}(x^{(i)}-\mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x^{(i)}-\mu_j) \\
= & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} w_l^{(i)} \nabla_{\mu_l} 2\mu_l^T \Sigma_l^{-1} x^{(i)} - \mu_l^T \Sigma_l^{-1} \mu_l \\
= & \sum_{i=1}^{m} w_l^{(i)} \left(\Sigma_l^{-1} x^{(i)} - \Sigma_l^{-1} \mu_l\right)
\end{aligned}
$$

高斯分布的均值

- 令上式等于0，解的均值：

$$\mu_l := \frac{\sum_{i=1}^{m} w_l^{(i)} x^{(i)}}{\sum_{i=1}^{m} w_l^{(i)}}$$

高斯分布的方差：求偏导，等于0

$$\Sigma_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_j^{(i)} (x^{(i)} - \mu_j)(x^{(i)} - \mu_j)^T}{\sum_{i=1}^{m} w_j^{(i)}}$$

多项分布的参数

- 考察M-step的目标函数，对于φ，删除常数项

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} w_j^{(i)} \log \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma_j|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^{(i)}-\mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x^{(i)}-\mu_j)\right) \cdot \phi_j}{w_j^{(i)}}$$

- 得到

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} w_j^{(i)} \log \phi_j$$

拉格朗日乘子法

- 由于多项分布的概率和为1，建立拉格朗日方程

$$\mathcal{L}(\phi)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}w_j^{(i)}\log\phi_j+\beta(\sum_{j=1}^{k}\phi_j-1)$$

  - 求解的φ_i一定非负，不用考虑$\varphi_i \geq 0$这个条件

求偏导，等于0

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j}\mathcal{L}(\phi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_j^{(i)}}{\phi_j} + \beta$$

$$-\beta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} w_j^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} 1 = m$$

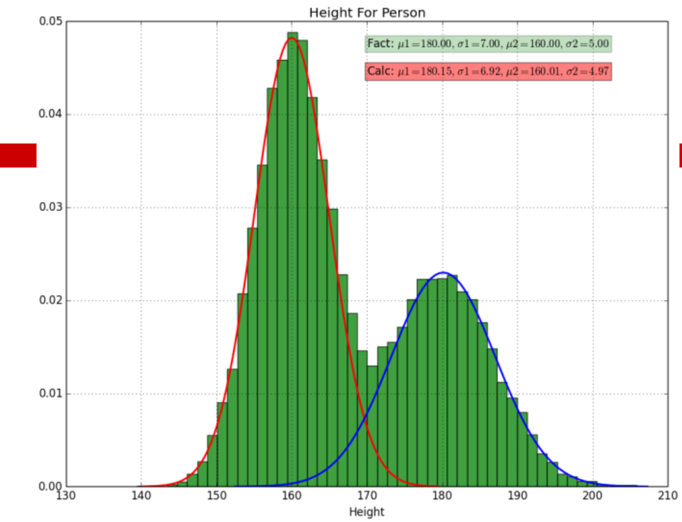
$$\phi_j := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} w_j^{(i)}$$

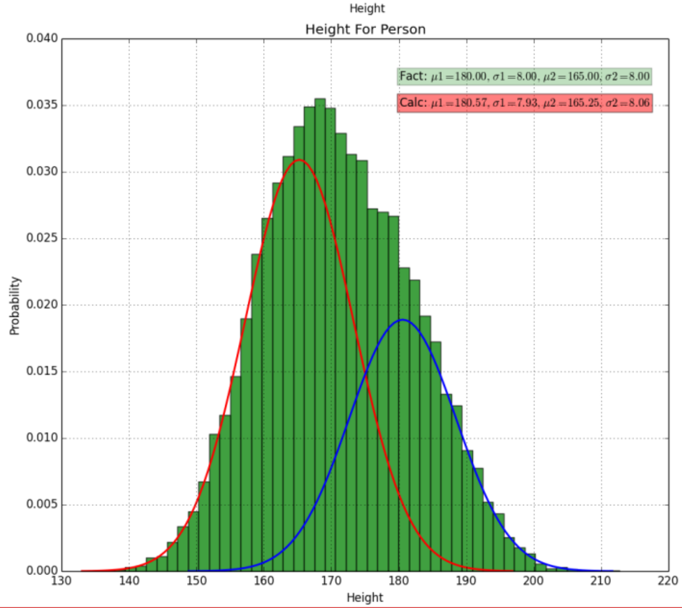
总结

- 对于所有的数据点，可以看作组份k生成了这些点。组份k是一个标准的高斯分布，利用上面的结论：$\{\gamma(i,k)x_i \mid i=1,2,\Lambda\ N\}$

$$\begin{cases}
\mu_k = \dfrac{1}{N_k}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\gamma(i,k)x_i \\
\Sigma_k = \dfrac{1}{N_k}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\gamma(i,k)(x_i-\mu_k)(x_i-\mu_k)^T \\
\pi_k = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\gamma(i,k) \\
N_k = N\cdot\pi_k
\end{cases}$$

EM Code

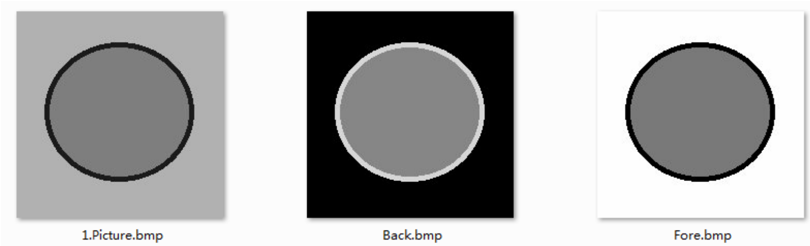


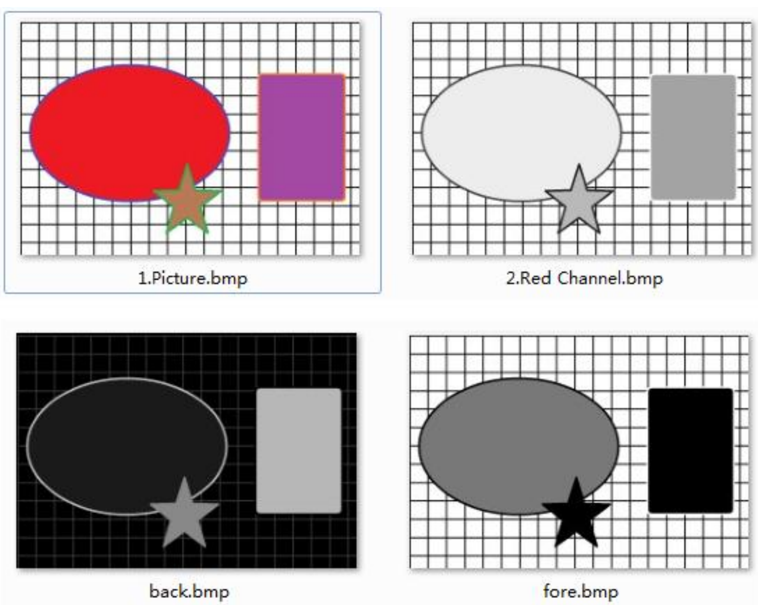


em3.py

```python
def calcEM(height):
    N = len(height)
    gp = 0.5     #girl probability
    bp = 0.5     #boy probability
    gmu,gsigma = min(height),1  #先验：直接取最大和最小值
    bmu,bsigma = max(height),1
    ggamma = range(N)
    bgamma = range(N)
    cur = [gp, bp, gmu, gsigma, bmu, bsigma]
    now = []

    times = 0
    while times < 100:
        i = 0
        for x in height:
            ggamma[i] = gp * gauss(x, gmu, gsigma)
            bgamma[i] = bp * gauss(x, bmu, bsigma)
            s = ggamma[i] + bgamma[i]
            ggamma[i] /= s
            bgamma[i] /= s
            i += 1

        gn = sum(ggamma)
        gp = float(gn) / float(N)
        bn = sum(bgamma)
        bp = float(bn) / float(N)
        gmu = averageWeight(height, ggamma, gn)
        gsigma = varianceWeight(height, ggamma, gmu, gn)
        bmu = averageWeight(height, bgamma, bn)
        bsigma = varianceWeight(height, bgamma, bmu, bn)

        now = [gp, bp,gmu,gsigma,bmu,bsigma]
        if isSame(cur, now):
            break
        cur = now
        print "Times:\t", times
        print "Girl mean/gsigma:\t", gmu,gsigma
        print "Boy mean/bsigma:\t", bmu,bsigma
        print "Boy/Girl:\t", bn, gn, bn+gn
        print "\n\n"
        times += 1
    return now
```

GMM与图像

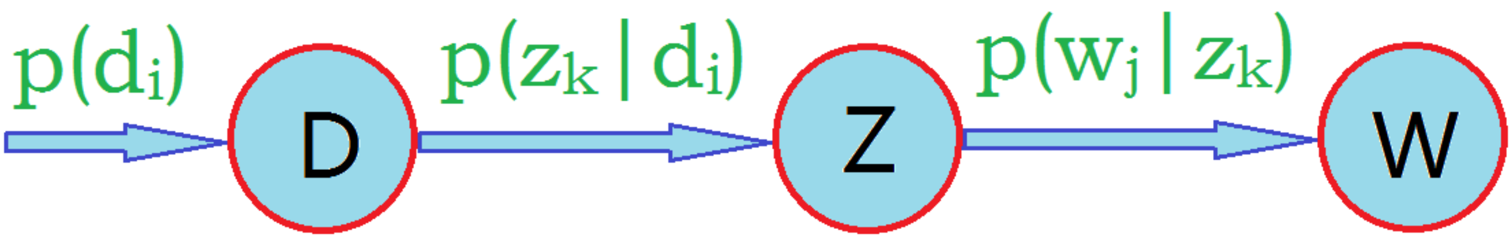




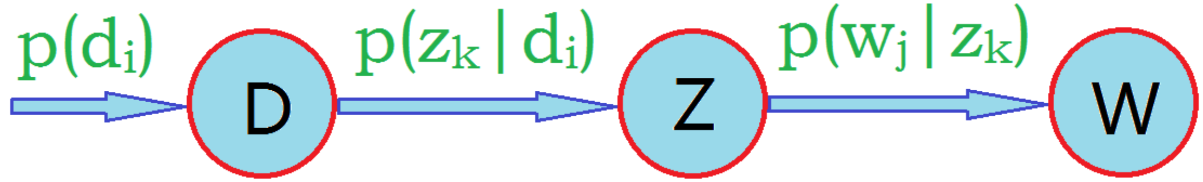

```python
def composite(band, parameter):
    c1 = parameter[0]
    mu1 = parameter[2]
    sigma1 = parameter[3]
    c2 = parameter[1]
    mu2 = parameter[4]
    sigma2 = parameter[5]

    p1 = []
    p2 = []
    for pixel in band:
        p1.append(c1 * gauss(pixel, mu1, sigma1))
        p2.append(c2 * gauss(pixel, mu2, sigma2))

    scale(p1)    #灰度均衡
    scale(p2)
    return [p1, p2]

if __name__ == "__main__":
    im = Image.open('.\\Pic\\test.bmp')
    print im.format, im.size, im.mode

    im = im.split()[0]   #只处理第一个通道
    nb = []              #处理后的新通道
    data = list(im.getdata())
    parameter = GMM(data)
    t = composite(data, parameter)

    im1 = Image.new('L', im.size)
    im1.putdata(t[0])
```

附：pLSA模型

- 基于概率统计的pLSA模型(probabilistic Latent Semantic Analysis，概率隐语义分析)，增加了主题模型，形成简单的贝叶斯网络，可以使用EM算法学习模型参数。

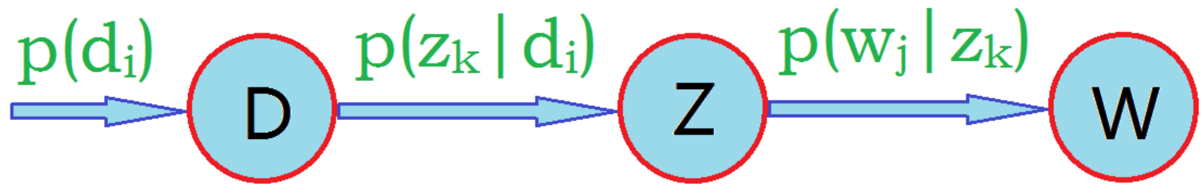


pLSA模型



- D代表文档，Z代表主题(隐含类别)，W代表单词；
  - $P(d_i)$表示文档d_i的出现概率，
  - $P(z_k|d_i)$表示文档d_i中主题z_k的出现概率，
  - $P(w_j|z_k)$表示给定主题z_k出现单词w_j的概率。
- 每个主题在所有词项上服从多项分布，每个文档在所有主题上服从多项分布。
- 整个文档的生成过程是这样的：
  - 以$P(d_i)$的概率选中文档d_i；
  - 以$P(z_k|d_i)$的概率选中主题z_k；
  - 以$P(w_j|z_k)$的概率产生一个单词w_j。

pLSA模型



- 观察数据为(d_i, w_j)对，主题z_k是隐含变量。
- (d_i, w_j)的联合分布为

$$P(d_i, w_j) = P(w_j \mid d_i) P(d_i)$$

$$P(w_j \mid d_i) = \sum_{k=1}^{K} P(w_j \mid z_k) P(z_k \mid d_i)$$

- 而$P(w_j \mid z_k), P(z_k \mid d_i)$对应了两组多项分布，而计算每个文档的主题分布，就是该模型的任务目标。

最大似然估计：w_j在d_i中出现的次数 $n(d_i, w_j)$

$$L = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} P(d_i, w_j) = \prod_i \prod_j P(d_i, w_j)^{n(d_i, w_j)}$$

$$l = \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(d_i, w_j)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(w_j \mid d_i) P(d_i)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log \left(\sum_{k=1}^{K} P(w_j \mid z_k) P(z_k \mid d_i) \right) P(d_i)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log \left(\sum_{k=1}^{K} P(w_j \mid z_k) P(z_k \mid d_i) P(d_i) \right)$$

$$P(d_i, w_j) = P(w_j \mid d_i) P(d_i)$$

$$P(w_j \mid d_i) = \sum_{k=1}^{K} P(w_j \mid z_k) P(z_k \mid d_i)$$

目标函数分析

- 观察数据为(d_i,w_j)对，主题z_k是隐含变量。
- 目标函数 $$l=\sum_i\sum_j n(d_i,w_j)\log\left(\sum_{k=1}^{K}P(w_j\mid z_k)P(z_k\mid d_i)P(d_i)\right)$$
- 未知变量/自变量 $P(w_j\mid z_k),P(z_k\mid d_i)$
- 使用逐次逼近的办法：
  - 假定$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$已知，求隐含变量z_k的后验概率；
  - 在(d_i,w_j,z_k)已知的前提下，求关于参数$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$的似然函数期望的最大值，得到最优解$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$，带入上一步，从而循环迭代；
  - 即：EM算法。

求隐含变量主题z_k的后验概率

- 假定$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$已知，求隐含变量z_k的后验概率；

$$P\left(z_k \mid d_i, w_j\right)=\frac{P\left(w_j \mid z_k\right)P\left(z_k \mid d_i\right)}{\sum_{l=1}^{K} P\left(w_j \mid z_l\right)P\left(z_l \mid d_i\right)}$$

- 在(d_i,w_j,z_k)已知的前提下，求关于参数$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$的似然函数期望的最大值，得到最优解$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$，带入上一步，从而循环迭代；

分析似然函数期望

- 在(d_i,w_j,z_k)已知的前提下，求关于参数$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$的似然函数期望的最大值，得到最优解$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$，带入上一步，从而循环迭代；

关于参数$P(z_k|d_i)P(w_j|z_k)$ 的似然函数期望

$$l = \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(d_i, w_j)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log\left(P(w_j \mid d_i) P(d_i)\right)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \left(\log P(w_j \mid d_i) + \log P(d_i)\right)$$

$$= \left(\sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(w_j \mid d_i)\right) + \left(\sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(d_i)\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$l_{new} = \left(\sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \log P(w_j \mid d_i)\right)$$

$$E(l_{new}) = \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \sum_{k=1}^{K} P(z_k \mid d_i, w_j) \log P(w_j, z_k \mid d_i)$$

$$= \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \sum_{k=1}^{K} P(z_k \mid d_i, w_j) \log P(w_j \mid z_k) P(z_k \mid d_i)$$

完成目标函数的建立

- 关于参数$P(z_k|d_i)$、$P(w_j|z_k)$的函数E，并且，带有概率加和为1的约束条件：

$$E=\sum_i\sum_j n\left(d_i,w_j\right)\sum_{k=1}^{K}P\left(z_k\mid d_i,w_j\right)\log P\left(w_j\mid z_k\right)P\left(z_k\mid d_i\right)$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{M}P\left(w_j\mid z_k\right)=1\\ \sum_{k=1}^{K}P\left(z_k\mid d_i\right)=1\end{cases}$$

- 显然，这是只有等式约束的求极值问题，使用Lagrange乘子法解决。

目标函数的求解

- Lagrange函数为：

$$Lag = \sum_i \sum_j n(d_i, w_j) \sum_{k=1}^{K} P(z_k \mid d_i, w_j) \log P(w_j \mid z_k) P(z_k \mid d_i)$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \tau_k \left(1 - \sum_{j=1}^{M} P(w_j \mid z_k)\right) + \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left(1 - \sum_{k=1}^{K} P(z_k \mid d_i)\right)$$

- 求驻点：

$$\frac{\partial Lag}{\partial P(w_j \mid z_k)} = \frac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)}{P(w_j \mid z_k)} - \tau_k \overset{令}{==} 0$$

$$\frac{\partial Lag}{\partial P(z_k \mid d_i)} = \frac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)}{P(z_k \mid d_i)} - \rho_i \overset{令}{==} 0$$

分析第一个等式

$$\frac{\partial Lag}{\partial P(w_j \mid z_k)} = \frac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)}{P(w_j \mid z_k)} - \tau_k \overset{令}{=\!=} 0$$

$$\Rightarrow \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j) = \tau_k P(w_j \mid z_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{M} \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j) = \sum_{m=1}^{M} \tau_k P(w_j \mid z_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{M} \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j) = \tau_k \sum_{m=1}^{M} P(w_j \mid z_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{M} \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j) = \tau_k$$

$$\xrightarrow{将\,\tau_k\,代回第二式} \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j) = \sum_{m=1}^{M} \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j) P(w_j \mid z_k)$$

$$\Rightarrow P(w_j \mid z_k) = \frac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)}{\sum_{m=1}^{M} \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)}$$

同理分析第二个等式

- 求极值时的解——M-Step：

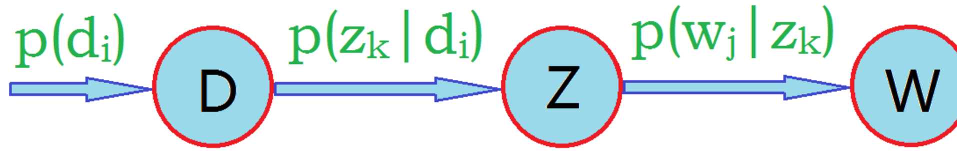
$$\begin{cases} P(w_j \mid z_k) = \dfrac{\sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)}{\sum_{m=1}^{M} \sum_i n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)} \\ P(z_k \mid d_i) = \dfrac{\sum_j n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)}{\sum_{k=1}^{K} \sum_j n(d_i, w_j) P(z_k \mid d_i, w_j)} \end{cases}$$

- 别忘了E-step： $P(z_k \mid d_i, w_j) = \dfrac{P(w_j \mid z_k) P(z_k \mid d_i)}{\sum_{l=1}^{K} P(w_j \mid z_l) P(z_l \mid d_i)}$

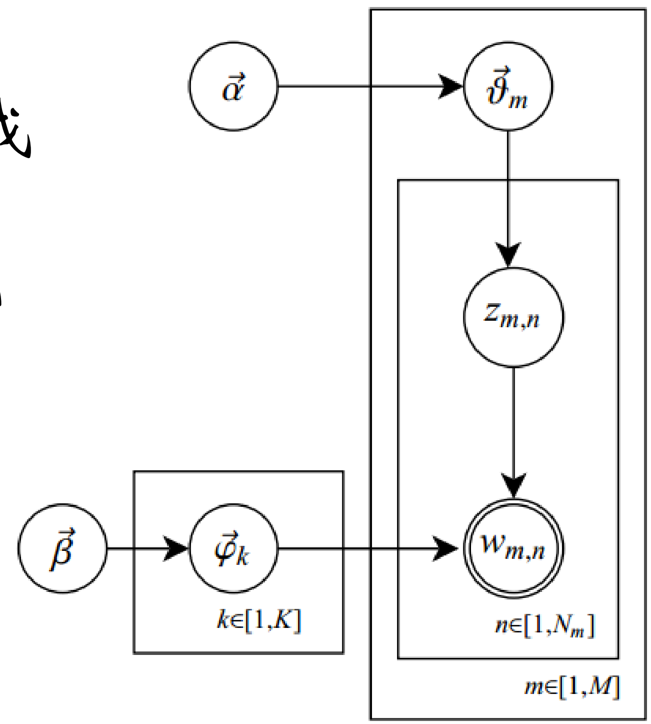
pLSA的总结

- pLSA应用于信息检索、过滤、自然语言处理等领域，pLSA考虑到词分布和主题分布，使用EM算法来学习参数。
- 虽然推导略显复杂，但最终公式简洁清晰，很符合直观理解，需用心琢磨；此外，推导过程使用了EM算法，也是学习EM算法的重要素材。

pLSA进一步思考



- 相对于“简单”的链状贝叶斯网络，可否给出“词”“主题”“文档”更细致的网络拓扑，形成更具一般性的模型？
- pLSA不需要先验信息即可完成自学习——这是它的优势。如果在特定的要求下，需要有先验知识的影响呢？
- 答：LDA模型；
  - 三层结构的贝叶斯模型
  - 需要超参数



参考文献

- Prof. Andrew Ng. *Machine Learning*. Stanford University
- https://en.wikipedia.org/wiki/Expectation–maximization_algorithm

我们在这里

- http://wenda.ChinaHadoop.cn
  - 视频/课程/社区
- 微博
  - @ChinaHadoop
  - @邹博_机器学习
- 微信公众号
  - 小象学院
  - 大数据分析挖掘

感谢大家！

恳请大家批评指正！