Introduction to Quantum Field Theory

Rotor
XJTU
2465547064@qq.com

Introduction

这是我的量子场论笔记,基于 Weinberg 和 Screnicki.

Table of Contents

1. Symmetry in Quantum Field Theory

本章我们将介绍 4-维 Lorentz 度规下 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$的 **时空对称性** 背景下是如何构造量子理论的.具体来说，我们将给出 Lorentz 群 $O(1,3)$的量子表示，并讨论它们的主要性质.

1.1. Lorentz Group and Poincaré Gruop

本书，我们取号差为 +2的 Lorentz 度规：本书，我们取号差为 +2的 Lorentz 度规：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

时空度规 $g_{\mu\nu}$诱导的一类时空对称性称作保度规变换 $\{\Lambda^\mu_\nu\}$：

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{1.2}$$

构成的 **保度规群** $\{\Lambda^\mu{}_\nu\}$. 当然，我们将其称为 **Lorentz 群** $O(1,3)$，每一个群元 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 被称为一个 **Lorentz 变换**.

Remark. $g^{\mu\nu}$ *记作度规* $g_{\mu\nu}$ *的逆，于是我们可以给出* 式 *(1.2) 的等价形式.*

首先注意到 式 *(1.2) 等式两边同乘* $g^{\sigma\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta$：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta &= g_{\rho\sigma}g^{\sigma\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta \\ &= \Lambda^\alpha{}_\rho \end{aligned} \tag{1.3}$$

即有：

$$g^{\mu\nu}\Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu = g^{\rho\sigma} \tag{1.4}$$

■

下面我们来验证$\{\Lambda^\mu{}_\nu\}$确实是一个群结构：

1. 显然恒等映射 I 是一个 Lorentz 变换；
2. 若 Λ_1，Λ_2[1]都是 Lorentz 变换，则

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\Lambda_1\Lambda_2)^\mu{}_\rho(\Lambda_1\Lambda_2)^\nu{}_\sigma &= g_{\mu\nu}\Lambda_1{}^\mu{}_\alpha\Lambda_2{}^\alpha{}_\rho\Lambda_1{}^\nu{}_\beta\Lambda_2{}^\beta{}_\sigma \\ &= g_{\mu\nu}\Lambda_1{}^\mu{}_\alpha\Lambda_1{}^\nu{}_\beta\Lambda_2{}^\alpha{}_\rho\Lambda_2{}^\beta{}_\sigma \\ &= g_{\alpha\beta}\Lambda_2{}^\alpha{}_\rho\Lambda_2{}^\beta{}_\sigma \\ &= g_{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{1.5}$$

即$(\Lambda_1\Lambda_2)$也是一个 Lorentz 变换；

[1]为了简洁，也用 Λ 表示 Lorentz 变换 $\Lambda^\mu{}_\nu$.

3. 注意到

$$\delta^{\rho}{}_{\alpha} = g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} = \Lambda_{\nu}{}^{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} \tag{1.6}$$

即

$$g_{\alpha\nu} g^{\beta\mu} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} \equiv \Lambda^{-1}{}^{\mu}{}_{\nu} \tag{1.7}$$

进一步：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \Lambda^{-1}{}^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{-1}{}^{\nu}{}_{\sigma} &= g_{\mu\nu} \Lambda_{\rho}{}^{\mu} \Lambda_{\sigma}{}^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} g_{\rho\alpha} g^{\mu\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} g_{\sigma\tau} g^{\nu\gamma} \Lambda^{\tau}{}_{\gamma} \\ &= g_{\mu\nu} g^{\mu\beta} g^{\nu\gamma} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \Lambda^{\tau}{}_{\gamma} g_{\rho\alpha} g_{\sigma\tau} \\ &= g^{\beta\gamma} \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \Lambda^{\tau}{}_{\gamma} g_{\rho\alpha} g_{\sigma\tau} \\ &= g^{\alpha\tau} g_{\rho\alpha} g_{\sigma\tau} \\ &= g_{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{1.8}$$

即Λ^{-1}也是 Lorentz 变换.

下面，我们注意到式 (1.2) 意味对于每一个 Λ：

$$[\det(\Lambda)]^2 = 1 \Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \tag{1.9}$$

以后我们称 $\det(\Lambda) = 1$ 的 Lorentz 变换为 **固有 Lorentz 变换**. (显然满足 $\det(\Lambda) = 1$ 的 Λ 构成 Lorentz 群的子群).

注意到取 式 (1.2) 的 $\rho = \sigma = 0$，则

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} = -\left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2 + \sum_i \left(\Lambda^{i}{}_{0}\right)^2 = -1 \tag{1.10}$$

即

$$\left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2 = 1 + \sum_i \left(\Lambda^{i}{}_{0}\right)^2 \tag{1.11}$$

于是我们可以取 $\Lambda^{0}{}_{0} \geq +1$ 的那一支 Lorentz 变换 构成 **正时 Lorentz 子群**.

Remark. *注意到若 Λ_1，Λ_2 都是正时的，则*

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_2 \Lambda_1\right)^{0}{}_{0} &= \Lambda_2{}^{0}{}_{\mu} \Lambda_1{}^{\mu}{}_{0} = \Lambda_2{}^{0}{}_{0} \Lambda_1{}^{0}{}_{0} + \sum_i \Lambda_2{}^{0}{}_{i} \Lambda_1{}^{i}{}_{0} \\ &\geq \Lambda_2{}^{0}{}_{0} \Lambda_1{}^{0}{}_{0} - \sqrt{\left(\Lambda_1{}^{0}{}_{0}\right)^2 - 1} \sqrt{\left(\Lambda_2{}^{0}{}_{0}\right)^2 - 1} \geq 1 \end{aligned} \tag{1.12}$$

倒数第二步利用了 Cauchy 不等式：

$$\left| \sum_i a_i b_i \right| \leq |a| \cdot |b| \tag{1.13}$$

而 $\sum_i \left(\Lambda^{0}{}_{i}\right)^2 = 1 - \left(\Lambda^{0}{}_{0}\right)^2$.最后一步如图 (1.1) 所示. ■

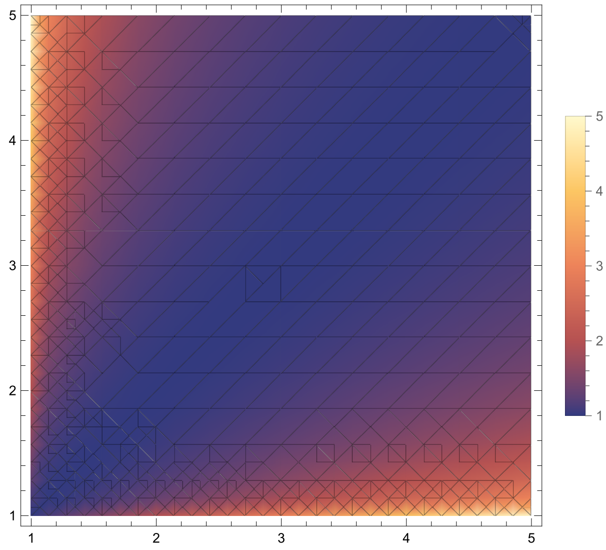

图 (1.1): $(\Lambda_2\Lambda_1)^0{}_0$ 密度图

同时考虑 $\det(\Lambda)=1$ 和 $\Lambda^0{}_0 \geq +1$，我们便得到 固有正时 Lorentz 子群 $SO_+(1,3)$，其是一个连通 Lie 群.我们可以通过宇称变换 $\mathcal{P}$ 和 时间反演 $\mathcal{T}$ 将 $O(1,3)$ 群的其他分支和 $SO(1,3)$ 联系起来，其中：

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)\\ \mathcal{T} &= \mathrm{diag}(-1,1,1,1)\end{aligned} \tag{1.14}$$

Lorentz 群和平移群 T^4 的半直积记作 Poincaré 群：

$$P = T^4 \rtimes O(1,3) \tag{1.15}$$

即有

$$P(\Lambda_1,a_1)P(\Lambda_2,a_2) = P(\Lambda_1\Lambda_2, a_1+\Lambda_1 a_2) \tag{1.16}$$

Remark. *我们有时也称 $O(1,3)$为齐次 Lorentz群，而 Paoincaré群 为非齐次 Lorentz群.* ■

Remark. *我们可以从以下角度给出 Poincaré 群定义为半直积的原因： 首先考虑对点 x^μ 作一次 Lorentz 变换再平移得到：*

$$x'^\mu = \Lambda_1{}^\mu{}_\nu x^\nu + a_1^\mu \tag{1.17}$$

紧接着：

$$x''^\mu = \Lambda_2{}^\mu{}_\nu x'^\nu + a_2^\mu = (\Lambda_2\Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu + \Lambda_2{}^\mu{}_\nu a_1^\nu + a_2^\mu \tag{1.18}$$

■

在本章中若未特意提及，我们将只限于讨论 $SO_+(1,3)$和 $T^4 \rtimes SO_+(1,3)$.

1.2. Poincaré Algebra

本节我们将给出连通 Lie 群 $T^4 \rtimes SO_+(1,3)$ 的 Lie 代数关系. 事实上，从几何上看，平直时空 $(\mathbb{R}^4, g_{\mu\nu})$ 保持最大的时空对称性，其包含 10 个独立的 Killing 矢量场：

$$
\begin{aligned}
P_\mu^a &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \\
(M_{\mu\nu})^a &= x_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a - x_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

同时，它们也是群 $T^4 \rtimes SO_+(1,3)$ 在单位元 I 上切空间的基矢量. 于是不难得到它们生成的 Lie 代数关系：

$$
\begin{aligned}
&[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = [g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - (\mu \longleftrightarrow \nu)] - (\rho \longleftrightarrow \sigma) \\
&[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = g^{\mu\sigma} P^\rho - (\rho \longleftrightarrow \sigma) \\
&[P^\mu, P^\nu] = 0
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

下面我们从代数上给出该结果，首先记 Poincaré 群的量子表示 为 $U(\Lambda, a)$.由于 Poincaré 群是包含单位元的连通群，其量子表示 一定是线性幺正的,[2]且有乘法关系：

$$
U(\Lambda_1, a_1) U(\Lambda_2, a_2) = U(\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1) \tag{1.21}
$$

注意到

$$
U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a) U(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1} a - \Lambda^{-1} a) = U(1, 0) = 1 \tag{1.22}
$$

于是我们有：

$$
U^{-1}(\Lambda, a) \equiv U^\dagger(\Lambda, a) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a) \tag{1.23}
$$

考察无穷小 Lorentz 变换：

$$
\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \tag{1.24}
$$

注意 $\omega^\mu{}_\nu \ll 1$，代入 式 (1.2) 得到

$$
g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\mu\nu} [\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho][\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma] = g_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + o(\omega^2) = g_{\rho\sigma} \tag{1.25}
$$

于是我们得到无穷小变换参数 $\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的：

$$
\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{1.26}
$$

于是对于 $\mathbb{R}^4$ 而言， $\omega_{\mu\nu}$共有 6 个独立参数.现在，我们可以考虑无穷小量子 Poincaré 变换：

$$
U(1 + \omega, \varepsilon) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - i \varepsilon_\mu P^\mu \tag{1.27}
$$

其中 $M^{\mu\nu}$, P^μ 是 Poincaré 群的 **无穷小生成元**，由于 U 本身是幺正的，于是配合叠加

[2]我们暂时认定该量子表示是普通表示的，附录一我们将给出如何排除投影表示.

系数 i，则 $M^{\mu\nu}$, P^{μ} 都是厄米的.[3]

考虑恒等式：

$$U^{-1}(\Lambda,a)U(1+\omega,\varepsilon)U(\Lambda,a)=U[1+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}\varepsilon+\Lambda^{-1}\omega a] \tag{1.28}$$

我们需要对等式两边将无穷小量子 Poincaré 变换展开，首先考虑等式右边：

$$\begin{aligned}U[1+(\Lambda)^{-1}\omega\Lambda,(\Lambda)^{-1}\varepsilon+(\Lambda)^{-1}\omega a]=1-i(\Lambda^{-1}\varepsilon+\Lambda^{-1}\omega a)_{\mu}P^{m}\\+\frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{1.29}$$

我们需要进一步拆解等式右边：

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}&=g_{\mu\tau}\big((\Lambda)^{-1}\omega\Lambda^{\tau}{}_{\nu}\big)=g_{\mu\tau}(\Lambda)^{-1\tau}{}_{\rho}\omega^{\rho}{}_{\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\\&=g_{\mu\tau}\Lambda_{\rho}{}^{\tau}\omega^{\rho}{}_{\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\\&=g_{\mu\tau}g_{\rho\alpha}g^{\tau\beta}g^{\rho\gamma}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\omega_{\gamma\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\\&=\delta_{\mu}^{\beta}\delta_{\alpha}^{\gamma}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\omega_{\gamma\sigma}\\&=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\omega_{\alpha\sigma}\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1}\varepsilon+(\Lambda)^{-1}\omega a)_{\mu}&=g_{\mu\nu}((\Lambda)^{-1}\varepsilon+(\Lambda)^{-1}\omega a)^{\nu}\\&=g_{\mu\nu}(\Lambda)^{-1\nu}{}_{\rho}\varepsilon^{\rho}+g_{\mu\nu}(\Lambda)^{-1\nu}{}_{\rho}\omega^{\rho}{}_{\sigma}a^{\sigma}\\&=g_{\mu\nu}\Lambda_{\rho}{}^{\nu}\varepsilon^{\rho}+g_{\mu\nu}\Lambda_{\rho}{}^{\nu}\omega^{\rho}{}_{\sigma}a^{\sigma}\\&=g_{\mu\nu}g_{\rho\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\gamma}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\omega_{\gamma\sigma}a^{\sigma}+g_{\mu\nu}g_{\rho\alpha}g^{\nu\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\varepsilon^{\rho}\\&=\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\omega_{\alpha\sigma}a^{\sigma}+\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\varepsilon_{\alpha}\\&=\frac{1}{2}(\omega_{\alpha\sigma}\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}a^{\sigma}+\omega_{\sigma\alpha}\Lambda^{\sigma}{}_{\mu}a^{\alpha})+\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\varepsilon_{\alpha}\\&=\frac{1}{2}\omega_{\alpha\sigma}(\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}a^{\sigma}-\Lambda^{\sigma}{}_{\mu}a^{\alpha})+\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\varepsilon_{\alpha}\end{aligned} \tag{1.31}$$

代入式 (1.29) 中，

$$\begin{aligned}U[1+(\Lambda)^{-1}\omega\Lambda,(\Lambda)^{-1}\varepsilon+(\Lambda)^{-1}\omega a]&=1+\frac{i}{2}((\Lambda)^{-1}\omega\Lambda)_{\mu\nu}M^{\mu\nu}-i((\Lambda)^{-1}\varepsilon+(\Lambda)^{-1}\omega a)_{\mu}P^{\mu}\\&=1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma}\\&-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^{\mu}{}_{\rho}a^{\nu}-\Lambda^{\nu}{}_{\rho}a^{\mu})P^{\rho}-i\varepsilon_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}P^{\rho}\end{aligned} \tag{1.32}$$

再考虑式 (1.28) 左边:

$$U^{-1}(\Lambda,a)U(1+\omega,a)U(\Lambda,a)=U^{-1}(\Lambda,a)\Big[1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}-i\varepsilon_{\rho}P^{\rho}\Big]U(\Lambda,a) \tag{1.33}$$

两式联立得到：

[3] P^{μ} 的系数 -1 来源于我们取度规号差为 -2.

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda,a)M^{\mu\nu}U(\Lambda,a) &= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma} - \Lambda^{\mu}{}_{\rho}P^{\rho}a^{\nu} + \Lambda^{\nu}{}_{\rho}P^{\rho}a^{\mu} \\
U^{-1}(\Lambda,a)P^{\mu}U(\Lambda,a) &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}
\end{aligned} \tag{1.34}
$$

取 $a^\mu = 0$,我们得到更简洁的形式:

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda)M^{\mu\nu}U(\Lambda) &= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \\
U^{-1}(\Lambda,a)P^{\mu}U(\Lambda,a) &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

我们看到 Lorentz 变换 Λ诱导的 Hilbert 空间算符 $M^{\mu\nu}, P^\mu$ 的变换符合一般张量的变换律.于是我们称 $M^{\mu\nu}$为一个 Lorentz 张量,而 P^μ为 Lorentz 矢量.

对于式式 (1.35) ,考虑第一式的无穷小形式：

$$
U^{-1}(1+\omega)M^{\mu\nu}U(1+\omega) = (1+\omega)^{\mu}{}_{\rho}(1+\omega)^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \tag{1.36}
$$

等式左边等价为：

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(1+\omega)M^{\mu\nu}U(1+\omega) &= \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\right)M^{\mu\nu}\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}\right) \\
&= M^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\mu\nu}M^{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}M^{\mu\nu} \\
&= M^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]
\end{aligned} \tag{1.37}
$$

等式右边等价为：

$$
\begin{aligned}
(1+\omega)^{\mu}{}_{\rho}(1+\omega)^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma} &= M^{\mu\nu} + \omega^{\mu}{}_{\rho}M^{\rho\nu} + \omega^{\nu}{}_{\sigma}M^{\mu\sigma} \\
&= M^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu}\omega_{\alpha\rho}M^{\rho\nu} + g^{\alpha\nu}\omega_{\alpha\rho}M^{\mu\rho} \\
&= M^{\mu\nu} + \omega_{\rho\sigma}(g^{\rho\mu}M^{\sigma\nu} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) \\
&= M^{\mu\nu} + \omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}) \\
&= M^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\omega_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}) + \omega_{\sigma\rho}(g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho})\right] \\
&= M^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}[g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}]
\end{aligned} \tag{1.38}
$$

综上，我们便得到

$$
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i[g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - (\mu \longleftrightarrow \nu)] - (\rho \longleftrightarrow \sigma) \tag{1.39}
$$

下面我们考察式 式 (1.35) 的第二式的无穷小形式：

$$
\begin{aligned}
U^{-1}(1+\omega,\varepsilon)P^{\mu}U(1+\omega,a) &= \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + i\varepsilon_{\rho}P^{\rho}\right) \\
&\times P^{\mu}\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} - i\varepsilon_{\gamma}P^{\gamma}\right) \\
&= P^{\mu} + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}P^{\mu}M^{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}P^{\mu} \\
&+ i\varepsilon_{\rho}P^{\rho}P^{\mu} - i\varepsilon_{\gamma}P^{\mu}P^{\gamma} \\
&= P^{\mu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[P^{\mu}, M^{\rho\sigma}] + i\varepsilon_{\rho}[P^{\rho}, P^{\mu}]
\end{aligned} \tag{1.40}
$$

$$\begin{aligned}(1+\omega)^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} &= P^{\mu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} = P^{\mu}+g^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}P^{\sigma} \\ &= P^{\mu}+\frac{1}{2}\left[\omega_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}P^{\sigma}+\omega_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}P^{\rho}\right] \\ &= P^{\mu}+\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}[g^{\mu\rho}P^{\sigma}-(\rho\longleftrightarrow\sigma)]\end{aligned} \tag{1.41}$$

即有：

$$[P^{\mu}, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\sigma}P^{\rho}-(\rho\longleftrightarrow\sigma)) \tag{1.42}$$

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0 \tag{1.43}$$

现在，我们完整的得到了 Poincaré 群的 Lie 代数关系式 (1.20). 注意 $M^{\mu\nu}, P^{m}u$一共仅包含 10个独立分量,我们将其特别取出:

$$P^{\mu} = \{H, \boldsymbol{P}\} \tag{1.44}$$

分别称作系统能量和动量.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J} &= (M^{23}, M^{31}, M^{2}) \\ \boldsymbol{K} &= (M^{01}, M^{02}, M^{03})\end{aligned} \tag{1.45}$$

称作系统的角动量和 Boost.

Remark. 对于哈密顿形式下的量子理论，我们称可观测量 A 是守恒的，若

$$[A, H] = 0 \tag{1.46}$$

一般而言，$\boldsymbol{K}$ 不与 H 对易，于是其不是守恒量.

3 − 角动量还可以如下构造：

$$J^{i} = \frac{1}{2}\varepsilon^{i}{}_{jk}M^{jk} \tag{1.47}$$

与之对应的 $K^{i} = K^{0i}$.在定义 $\omega_{\mu\nu}$ 的 1 − 形式为：

$$\theta^{i} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk}, \xi^{i} = -\omega_{0i} \tag{1.48}$$

于是无穷小 *Lorentz* 变换：

$$\begin{aligned}U(1+\omega) &= 1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \\ &= 1+i\left[\sum_{i}\omega_{0i}K^{0i}+\omega_{12}J^{12}+\omega_{13}J^{13}+\omega_{23}J^{23}\right] \\ &= 1-i\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{K}\end{aligned} \tag{1.49}$$

特别地，对于有限空间旋转，我们就有

$$U(R(\theta)) = \exp[-i\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\theta}] \tag{1.50}$$

■

利用如上定义的 10个独立生成元,我们重写 Pancaré 群的 Lie 代数关系为:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \tag{1.51}$$

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k \tag{1.52}$$

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}K_k \tag{1.53}$$

$$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k \tag{1.54}$$

$$[K_i, P_j] = -i\delta_{ij}H \tag{1.55}$$

$$[K_i, H] = -iP_i \tag{1.56}$$

$$[J_i, H] = 0 \tag{1.57}$$

前三者一起构成 Lorentz 群的 Lie 代数关系.我们若再定义一组算符：

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \\ N_i^\dagger &= \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \end{aligned} \tag{1.58}$$

不难证明其满足：

$$\begin{aligned} [N_i, N_j] &= i\varepsilon_{ijk}N_k \\ [N_i^\dagger, N_j^\dagger] &= i\varepsilon_{ijk}N_k^\dagger \\ [N_i, N_j^\dagger] &= 0 \end{aligned} \tag{1.59}$$

于是我们可以认为 Lie 代数 $\mathfrak{so}_+(1,3)$ 同构于 $\mathfrak{su}(2)$ 的直积，即：

$$\mathfrak{so}_+(1,3) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2) \tag{1.60}$$

于是 $\mathfrak{so}_+(1,3)$ 的每个有限维表示可以写作 (s_1, s_2) 的形式，$s_1, s_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, ...$ 其表示维度：

$$\dim(s_1, s_2) = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) \tag{1.61}$$

Remark. *注意由于 $SO_+(1,3)$是非紧致群，其每一个有限维表示并不是幺正的.* ■

现在，每一个 $SO_+(1,3)$ 的有限维表示都可以由生成元 $\mathcal{J}^i = \mathcal{N}^i + (\mathcal{N}^\dagger)^i$ 给出.我们也将每个 $SO_+(1,3)$ 的有限维表示标记为 (s_1, s_2)，则该表示可以直和分解为：

$$(s_1, s_2) = (s_1 + s_2) \oplus (s_1 + s_2 - 1)o \oplus \cdots \oplus |s_1 - s_2| \tag{1.62}$$

特别地，我们将 $(0,0)$ 表示称为 Lorentz 群的 **标量表示**，其自旋数 $s \equiv 0$. $(\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(0, \frac{1}{2})$ 称为 Lorentz 群的 **Weyl 旋量表示**，其自旋数 $s \equiv 1$.$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 称为 Lorentz 群的 **矢量表示**，其可以直和分解为$s = 1, 0$，分别对应于 $4-$ 矢量 V^μ 的空间部分 $\boldsymbol{V}$，和时间部分 V^0.

最后，我们可以通过 Inönü-Wigner 收缩的技巧从 Poincaré 代数关系直接得到 Galileo 代数关系.首先注意到对于质量为 M，速度为 $\boldsymbol{v} = 1$ 的单粒子，其角动量期待值为 $\boldsymbol{J} \sim 1$， 动量期待值为 $\boldsymbol{P} \sim M\boldsymbol{v}$， 能量期待值 $H \sim M + W$，其中 W 是单粒子的动能项 $(\sim Mv^2)$.此外，Galileo 群下的 boost 为：

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t \tag{1.63}$$

于是可以我们有：

$$K_i^a = t\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \sim \frac{1}{v} \tag{1.64}$$

现在，我们得到 Galileo 群的 Lie 代数关系：

$$\begin{aligned}
&[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, [K_i, K_j] = 0 \\
&[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k, [K_i, P_j] = -iM\delta_{ij}, [K_i, W] = -iP_i \\
&[J_i, W] = [P_i, W] = 0 \\
&[J_i, M] = [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0)
\end{aligned} \tag{1.65}$$

值得注意，考虑 Galileo 群的空间平移与 boost，我们有：

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{a} \tag{1.66}$$

但是其量子表示为：

$$\exp[-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}]\exp[-i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}] = \exp\left[i\frac{M\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right]\exp[-i(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a})] \tag{1.67}$$

其中我们利用了 BCH 公式：

$$\exp[A]\exp[B] = \exp[A+B]\exp\left[\frac{1}{2}[A,B]\right] \tag{1.68}$$

其中 $[A,B]$ 与 A,B 对易.

上式给出 Galileo 群的量子表示又是一个 **投影表示**.

1.3. Single Particle State

本节我们期望给出 Poincaré 的不可约表示，事实上，我们将要证明单粒子态 $|p,\sigma\rangle$ 就是 Poincaré 的不可约表示.

我们使用 $|p,\sigma\rangle$ 标记每一个单粒子态，其中 p 是粒子的 $4-$ 动量，σ 标记该粒子态的其余性质.最基本的，$|p,\sigma\rangle$ 是动量的本征态：

$$P^\mu|p,\sigma\rangle = p^\mu|p,\sigma\rangle \tag{1.69}$$

由于算符 P^μ 彼此对易，于是平移群 T^4 是 Poincaré 群的 Abel 子群.由此，有限平移操作作用于单粒子态 $|p,\sigma\rangle$，我们得到：

$$U(1,a)|p,\sigma\rangle = e^{\{-ip\cdot a\}}|p,\sigma\rangle \tag{1.70}$$

其中对于四维标量积，我们记 $p_\mu a^\mu \equiv p\cdot a$.

下面考察 Lorentz 变换如何改变单粒子态：

$$\begin{aligned}
P^\mu U(\Lambda)|p,\sigma\rangle &= U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda)|p,\sigma\rangle \\
&= U(\Lambda)\Lambda^\mu{}_\nu P^\nu|p,\sigma\rangle \\
&= \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu U(\Lambda)|p,\sigma\rangle
\end{aligned} \tag{1.71}$$

于是我们可以将 $U(\Lambda)|p,\sigma\rangle$ 看作 $|\Lambda p,\sigma'\rangle$ 的线性叠加，具体而言：

$$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma,\sigma'}(\Lambda,p)|\Lambda p,\sigma'\rangle \tag{1.72}$$

Remark. 我们将每个单粒子态 $|p,\sigma\rangle$ 看作表示空间的基矢，于是上述求和系数为 $C_{\sigma'\sigma}$，而不是 $C_{\sigma'\sigma}$. ■

为了得到 $C_{\sigma,\sigma'}(\Lambda,p)$ 的结构，我们首先注意到与 p^μ 相关的，所有在 $\Lambda\in SO_+(1,3)$ 下的不变量是 $p^2=-m^2$ 与 p^0 的符号，即 $p^0>0$。假设我们确定了 p^2 的值和 p^0 的符号，我们现寻找一个 **标准基矢** $k^\mu = k^{\mu(p^2,p^0)}$，我们可以通过一类 **标准 Lorentz 变换** $L^\mu{}_\nu$，使得任意满足要求的 p^μ 可以如下得到：

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu \tag{1.73}$$

现在，单粒子态 $|p,\sigma\rangle$ 可以 **定义为**：

$$|p,\sigma\rangle = N(p)U(L(p))|k,\sigma\rangle \tag{1.74}$$

其中 $N(p)$ 是归一化系数。考虑一个 Lorentz 变换施加其上：

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p,\sigma\rangle &= N(p)U(\Lambda)U(L(p))|k,\sigma\rangle = N(p)U(\Lambda L(p))|k,\sigma\rangle \\ &= N(p)U(\Lambda L(p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))|k,\sigma\rangle \end{aligned} \tag{1.75}$$

最后一步我们构造了一个 Lorentz 变换：

$$W = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \tag{1.76}$$

其相对于对 k^μ 施加了一次恒等变换：

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu \tag{1.77}$$

不难验证 $W^\mu{}_\nu$ 构成 Lorentz 群的一个子群，我们称为 **小群**。其对应的量子表示为：

$$U(W)|k,\sigma\rangle = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)|k,\sigma'\rangle \tag{1.78}$$

注意到：

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1)|k,\sigma'\rangle &= U(W_2W_1)|k,\sigma\rangle = U(W_2)U(W_1)|k,\sigma\rangle \\ &= U(W_2)\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_1)|k,\sigma''\rangle \\ &= \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W_1)D_{\sigma'\sigma''}(W_2)|k,\sigma'\rangle \end{aligned} \tag{1.79}$$

即 $D(W)$ 保持乘法关系：

$$D_{\sigma'\sigma}(W_2W_1) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(W_2)D_{\sigma''\sigma}(W_1) \tag{1.80}$$

于是 W 的量子表示 $D(W)$ 构成一个群结构。现在，单粒子态 $U(\Lambda)|p,\sigma\rangle$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p,\sigma\rangle &= N(p)U(\Lambda L(p))U(W)|k,\sigma\rangle \\ &= N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)U(\Lambda L(p))|k,\sigma\rangle \end{aligned} \tag{1.81}$$

注意到：

$$|\Lambda p,\sigma\rangle = N(\Lambda p)U(L(\Lambda p))|k,\sigma\rangle \tag{1.82}$$

于是进一步我们有：

$$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)|\Lambda p,\sigma\rangle \tag{1.83}$$

即

$$C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p) \equiv \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} D_{\sigma'\sigma}(W) \tag{1.84}$$

于是，确定 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ 结构的问题，等价于寻找小群 W 的量子表示问题.或者说，Poincaré 群的不可约表示问题等价于 $D(W)$ 的不可约表示问题.

为了确定这些小群, 我们需要考察物理上允许怎样的 p^2 取值和 p^0 符号.

1. 作为最平庸的情形, $p^\mu = 0$, 其描述了真空态. 其量子 Lorentz 表示自然取为恒等表示 $U(\Lambda) = 1$.
2. 对于质量粒子, 我们取 $p^2 = -M^2, p^0 > 0$, 其中 M 是粒子质量. 于是其对应的小群为 $SO(3)$, 而标准基矢为 $k^\mu = (M,0,0,0)$.
3. 对于无质量粒子, 我们取 $p^2 = 0, p^0 > 0$, 则其对应的小群为 $2-$ 维欧式群 $ISO(2)$, 标准基矢取为 $(0,0,\kappa,\kappa)$.

在进一步讨论小群性质之前, 我们考虑归一化系数 $N(p)$ 的取值. 首先将标准基矢归一化为:

$$\langle\sigma',k'|k,\sigma\rangle = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta_{\sigma\sigma'} \tag{1.85}$$

$$\begin{aligned} \langle\sigma',p'|p,\sigma\rangle &= N(p)\langle\sigma',p',|U(L(p))k,\sigma\rangle \\ &= N(p)\langle U^{-1}(L(p))p',\sigma'|k,\sigma\rangle \\ &= N(p)N^*(p')D^*_{\sigma'\sigma}(W)\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \end{aligned} \tag{1.86}$$

注意到对于 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}'$ 的情形, 我们有 $W = 1$, 于是实际上:

$$\langle\sigma',p'|p,\sigma\rangle = |N(p)|^2\ \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{1.87}$$

Remark. *注意上述操作我们默认小群 W 的量子表示 $D(W)$ 是线性幺正的, $SO(3)$ 群自然是紧致 Lie 群, 则其量子表示是幺正的. 但是 $ISO(2)$ 是非紧致的, 我们将在下文论述我们仍可以得到它的幺正表示.* ■

现在我们需要寻找联系 $\delta^3(\boldsymbol{k})$ 和 $\delta^3(\boldsymbol{p})$ 的因子. 首先注意到对于单粒子态, $\delta(p^2+m^2)$, $\theta(p^0)$ 都是 Lorentz 不变量, 于是考察 Lorentz 不变积分:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4p\,\delta(p^2+m^2)\theta(p^0)f(p) &= \int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}p^0\,\delta\Big(\boldsymbol{p}^2+m^2-\left(p^0\right)^2\Big)\theta(p^0)f(p) \\ &= \int \mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}p^0\,\frac{\delta\Big(p^0-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\Big)}{2|p^0|}f(p) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{2\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}}f\Big(\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2},\boldsymbol{p}\Big)\end{aligned} \tag{1.88}$$

于是我们得到 **Lorentz 不变体积元**:

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}} \tag{1.89}$$

下面再考察任意标量函数 $F(\boldsymbol{p})$:

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{p}) &= \int \mathrm{d}^3p'\,\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')F(\boldsymbol{p}') \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{\sqrt{\boldsymbol{p}'^2+m^2}}p'^0\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')F(\boldsymbol{p}')\end{aligned} \tag{1.90}$$

于是我们得到另一个 Lorentz 不变量:

$$p^0\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{1.91}$$

由此, 我们有:

$$p^0\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') = k^0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{1.92}$$

现在, 我们可以将归一化系数取作:

$$N(p) = \sqrt{\frac{k^0}{p^0}} \tag{1.93}$$

则每个单粒子态归一化到

$$\langle\sigma',p'|p,\sigma\rangle = \delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{1.94}$$

Remark. *注意该约定下的单粒子态归一化不是 Lorentz 不变的, 另一个常见的 Lorentz 不变的单粒子态为:*

$$\langle\sigma',p'|p,\sigma\rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\boldsymbol{p}}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{1.95}$$

■

1.3.1. Massive Particle States

我们现在考虑标准态矢 $k^\mu=(M,0,0,0)$, 使其不变的标准 Lorentz 变换自然只能是空间旋转, 于是其对应的小群为 $SO(3)$. 注意 $SO(3)$ 不是单连通的, 于是我们将其扩张为 $SU(2)$. 于是, 该小群表示是我们熟悉的 $D^j_{\sigma'\sigma}(R)$:

$$\begin{aligned} D^j_{\sigma'\sigma}(1+\theta) &= \delta_{\sigma'\sigma} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\left(\boldsymbol{J}^j\right)_{\sigma'\sigma} \\ \left(J^j_{\pm}\right)_{\sigma'\sigma} = \left(J^j_x \pm iJ^j_y\right)_{\sigma'\sigma} &= \delta_{\sigma',\sigma+1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)} \\ \left(J^j_3\right)_{\sigma'\sigma} &= \sigma\delta_{\sigma'\sigma} \end{aligned} \tag{1.96}$$

其中 $D^j_{\sigma'\sigma}(R)$ 构成 $SU(2)$ 的 $2j+1$ 维表示, $j=0,\frac{1}{2},1,....$ $\sigma=-j,-j+1,...,j$.

我们得到一类 Poincaré 群的不可约表示, 它们对应于 $SU(2)$ 群的不可约表示 $D^j_{\sigma'\sigma}$. 于此同时, 我们也可以将不可约表示 $D^j_{\sigma'\sigma}$ 与单粒子态 $|p,\sigma\rangle$ 的粒子等同, 其中 j 被称为粒子的 **自旋**. 而 $\sigma=-j,-j+1,...,j$ 记为粒子自旋在 z 方向的分量.

现在, 我们可以谈论质量为 M, 自旋为 j 的粒子, 其在 Lorentz 变换下满足:

$$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'} D^j_{\sigma'\sigma}(W)|\Lambda p,\sigma'\rangle \tag{1.97}$$

其中:

$$W(\Lambda,p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \tag{1.98}$$

下面我们选取一个 $L(p)$, 使其将标准基矢 k^μ 推动到具有 $3-$ 动量:

$$\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|\ (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{1.99}$$

事实上,

$$L(p) = \begin{pmatrix} \gamma & \hat{\boldsymbol{p}}_1\sqrt{\gamma^2-1} & \hat{\boldsymbol{p}}_2\sqrt{\gamma^2-1} & \hat{\boldsymbol{p}}_3\sqrt{\gamma^2-1} \\ \hat{\boldsymbol{p}}_1\sqrt{\gamma^2-1} & 1 & (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{p}}_1\hat{\boldsymbol{p}}_2 & (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{p}}_1\hat{\boldsymbol{p}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{p}}_2\sqrt{\gamma^2-1} & (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{p}}_2\hat{\boldsymbol{p}}_1 & 1 & (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{p}}_2\hat{\boldsymbol{p}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{p}}_3\sqrt{\gamma^2-1} & (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{p}}_3\hat{\boldsymbol{p}}_1 & (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{p}}_3\hat{\boldsymbol{p}}_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.100}$$

其中

$$\gamma = \frac{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+M^2}}{M}, \hat{\boldsymbol{p}}_i = \frac{p_i}{|\boldsymbol{p}|} \tag{1.101}$$

事实上, 将静止的粒子 $k^\mu=(M,0,0,0)$, 加速到 $p^\mu=(\gamma M,\boldsymbol{p})$ 只要先作一个 z 轴的 boost, 再将指向 z 轴动量旋转到实际 $\boldsymbol{p}$ 的方向. 于是, 取:

$$\begin{aligned} B(p) &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\gamma^2-1} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ R(\theta,\varphi) &= \exp(-iJ_z\varphi)\exp(-iJ_y\theta) \end{aligned} \tag{1.102}$$

我们就有:

$$L(p) \equiv R(\theta,\varphi)B(p)R^{-1}(\theta,\varphi) \tag{1.103}$$

下面考虑若只要一个空间旋转 $\mathcal{R}$ 施加在 $|p,\sigma\rangle$ 上, 则式 式 (1.97) 中的小群 W 变为:

$$W(\mathcal{R},p) = L^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}L(p) \setminus = R(\mathcal{R}p)B^{-1}(p)R^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}R(p)B(p)R^{-1}(p) \tag{1.104}$$

注意到 $R^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}R(p)$ 实际是绕 z 轴的一个旋转, 于是:

$$R_{z(\theta)} = R^{-1}(\mathcal{R}p)\mathcal{R}R(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.105}$$

再注意到 $R_{z(\theta)}B(p) = B(p)R_{z(\theta)}$, 则

$$W(\mathcal{R},p) = R(\mathcal{R}p)B^{-1}(p)R_{z(\theta)}B(p)R^{-1}(p) \setminus = R(\mathcal{R}p)R_{z(\theta)}R^{-1}(p) \setminus = \mathcal{R} \tag{1.106}$$

即一个运动的有质量单粒子态 $|p,\sigma\rangle$, 其空间旋转操作的量子表示就是 $D^{j}_{\sigma'\sigma}(\mathcal{R})$, 这就是我们在非相对论量子力学的结果. 进一步的, 当我们讨论角动量合成问题时, 我们可以直接引用 CG 系数的相关性质.

1.3.2. Massless Particle States

对于无质量粒子, 其标准基矢记作 $k^\mu = (\kappa,0,0,\kappa)$. 我们暂时不能直接看到其对应的小群是什么, 为此我们先取 $\kappa = 1$, 并考虑类时矢量 $t^\mu = (1,0,0,0)$. 注意到:

$$W^{\mu}_{;\nu}k^\nu = k^\mu \longleftrightarrow k_\nu (W^{-1})^{\nu}_{;\mu} = k_\mu \tag{1.107}$$

于是我们有:

$$(Wt)^\mu k_\mu = W^{\mu}_{;\nu}t^\nu k_\rho (W^{-1})^{\rho}_{;\mu} = t^\mu k_\mu = -1 \tag{1.108}$$

等式左右两边给出 $(Wt)^\mu$ 的标准形式可以写作:

$$(Wt)^\mu = (1+\xi,\alpha,\beta,\xi)^T \tag{1.109}$$

另一方面:

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = -1 \tag{1.110}$$

则

$$\xi = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \tag{1.111}$$

于是, 我们可以认为存在一个变换 S, 其满足:

$$St \equiv Wt \tag{1.112}$$

其中 S, W 是依赖 α, β 的函数. 我们可以选取:

$$W^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1+\xi & \alpha & \beta & -\xi \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \xi & \alpha & \beta & 1-\xi \end{pmatrix} \tag{1.113}$$

我们注意到:

$$S^{-1}Wt \equiv t, Sk \equiv k \tag{1.114}$$

前者说明 $S^{-1}W$ 是一个空间旋转, 后者进一步说明 $S^{-1}W$ 是一个绕 z 轴的空间旋转, 即

$$S^{-1}W = R_{z(\theta)} \tag{1.115}$$

于是我们得到小群:

$$W(\theta,\alpha,\beta) = S(\alpha,\beta)R_{z(\theta)} \tag{1.116}$$

我们进一步得到 $W(\theta,\alpha,\beta)$ 包含两个子群:

1. 取 $\theta = 0$, 则

$$S(\alpha_2,\beta_2)S(\alpha_1,\beta_1) = S(\alpha_2+\alpha_1,\beta_2+\beta_1) \tag{1.117}$$

于是 $S(\alpha,\beta)$ 是 $W(\alpha,\beta,\theta)$ 的一个子群. 另一方面注意到

$$R_z^{-1}(\theta)S(\alpha,\beta)R_{z(\theta)} = S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta, -\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta) \tag{1.118}$$

于是 $S(\alpha,\beta)$ 是 $W(\alpha,\beta,\theta)$ 的不变 Abel 子群.

2. 显然 $R_{z(\theta_2)}R_{z(\theta_1)} = R_{z(\theta_2+\theta_1)}$, 即 R_z 是 W 的 Abel 子群.

下面考察 $W(\alpha,\beta,\theta)$ 的无穷小参数 $\delta^{\mu}_{;\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$, 则

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & -\theta & -\alpha \\ \beta & \theta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \tag{1.119}$$

进一步:

$$g_{\mu\rho}\omega^{\rho}{}_{\nu} = \omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & 0 & -\theta & -\alpha \\ \beta & \theta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \tag{1.120}$$

下面我们考察 $W^{\mu}{}_{\nu}$ 的无穷小量子变换:

$$
\begin{aligned}
U(1+\omega) &= 1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \\
&= 1+\frac{i}{2}[-\alpha M^{01}+\alpha M^{10}-\alpha M^{13}+\alpha M^{31} \\
&-\beta M^{02}+\beta M^{20}-\beta M^{23}+\beta M^{32} \\
&-\theta M^{12}+\theta M^{21}] \\
&= 1+i\left[-\alpha K_x+\alpha J_y-\beta K_y-\beta J_x-\theta J_z\right]
\end{aligned}
\tag{1.121}
$$

则我们可以定义三组 $W^{\mu}_{;\nu}$ 量子表示的无穷小生成元:

$$
A=J_y-K_x, B=-J_x-K_y, J_z \tag{1.122}
$$

其满足对易关系:

$$
\begin{aligned}
[J_z, A] &= iB \\
[J_z, B] &= -iA \\
[A, B] &= 0
\end{aligned}
\tag{1.123}
$$

注意到 A, B 可对易, 于是单粒子态 $|k,a,b\rangle$ 可以同时对角化:

$$
A|k,a,b\rangle = a|k,a,b\rangle \setminus B|k,a,b\rangle = b|k,a,b\rangle \tag{1.124}
$$

下面考察式 式 (1.118) 对应的量子表示:

$$
U^{-1}\left(R_{z(\theta)}\right)U[S(\alpha,\beta)]U\left(R_{z(\theta)}\right) = U[S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta, -\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)] \tag{1.125}
$$

等式左右两边展开得到:

$$
\begin{aligned}
U^{-1}\left(R_{z(\theta)}\right)[1+i\alpha A+i\beta B]U\left(R_{z(\theta)}\right) &= 1+iA(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta) \\
&+iB(-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)
\end{aligned}
\tag{1.126}
$$

因此:

$$
\begin{aligned}
U^{-1}\left(R_{z(\theta)}\right)AU\left(R_{z(\theta)}\right) &= A\cos\theta+B\sin\theta \\
U^{-1}\left(R_{z(\theta)}\right)BU\left(R_{z(\theta)}\right) &= -A\sin\theta+B\cos\theta
\end{aligned}
\tag{1.127}
$$

考虑单粒子态:

$$
|k,a,b,\theta\rangle := U\left[R_{z(\theta)}\right]|k,a,b\rangle \tag{1.128}
$$

于是:

$$
\begin{aligned}
A|k,a,b,\theta\rangle &= AU\left[R_{z(\theta)}\right]|k,a,b\rangle \\
&= U\left[R_{z(\theta)}\right]U^{-1}\left[R_{z(\theta)}\right]AU\left[R_{z(\theta)}\right]|k,a,b\rangle \\
&= (a\cos\theta+b\sin\theta)|k,a,b,\theta\rangle
\end{aligned}
\tag{1.129}
$$

类似的:

$$
B|k,a,b,\theta\rangle = (-a\sin\theta+b\cos\theta)|k,a,b,\theta\rangle \tag{1.130}
$$

注意 θ 是连续变化的值, 于是我们得到任意 W 的小群表示其表示空间都是无限维的, 这正是 $ISO(2)$ 是非紧致 Lie 群导致的. 不论是实验上我们确实没有观测到 $|k,a,b,\theta\rangle$ 这般连续变换的态, 还是理论上我们希望得到一个无质量粒子的有限维不可约幺正表示, 我们约定 $a=b\equiv 0$. 此时小群 W 的表示空间仅由生成元 J_z 确定 [4] 即

$$\begin{aligned} J_z|k,\sigma\rangle &= \sigma|k,\sigma\rangle \\ D_{\sigma'\sigma}(W) &= \delta_{\sigma'\sigma}\exp[i\theta\sigma] \end{aligned} \tag{1.131}$$

无质量粒子小群 W 对应的 Lie 代数可以看作 $\mathfrak{SO}(2)$, 其仅有一维表示, 每一个 $\sigma\in\mathbb{R}$ 都对应一个不可约表示. 注意我们最后需要无质量粒子是 Lorentz 群的表示, 我们取

$$\exp[4\pi\sigma]=1 \tag{1.132}$$

即 $\sigma=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\ldots.$

对于无质量粒子, 其量子 Lorentz 变换作用其上, 得到:

$$U(\Lambda)|p,\sigma\rangle=\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\exp[i\sigma\theta(\Lambda,p)]|\Lambda p,\sigma\rangle \tag{1.133}$$

其中 $\theta(\Lambda,p)$ 来源于:

$$W(\Lambda,p)=L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)=S(\alpha,\beta)R_{z(\theta(\Lambda,p))} \tag{1.134}$$

其中 $L(p)$ 可以取作:

$$L(p)=R(\boldsymbol{p})B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right) \tag{1.135}$$

其中

$$B(u)=\begin{pmatrix} \frac{u^2+1}{2u} & 0 & 0 & \frac{u^2-1}{2u} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2-1}{2u} & 0 & 0 & \frac{u^2+1}{2u} \end{pmatrix} \tag{1.136}$$

其使得 $k^\mu=(\kappa,0,0,\kappa)$ 变为 $p^\mu=(|\boldsymbol{p}|,0,0,|\boldsymbol{p}|)$. 而 $R(\boldsymbol{p})$ 与式 (1.102) 定义的 $R(\theta,\varphi)$ 相同, 使得 z 轴方向指向 $\boldsymbol{p}$ 的方向.

1.4. Parity and Time Reversal

现在, 我们考虑曾提及的那些联系非固有正时 Lorentz 变换的离散 Lorentz 变换:

[4] 或者说, 无质量粒子的小群对应的 Lie 代数实际是 $\mathfrak{so}(2)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\
\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu} &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.137}
$$

首先, 我们需要强调以下两点, 宇称变换和时间反演并不是严格的对称性变换. 实验上已经观测到弱相互作用的宇称破缺, 同时, 存在一些证据表现了时间反演的对称性破缺. 但是, 在本文的大部分情形下 (不涉及弱相互作用), 宇称变换和时间反演仍可以近似看作一个对称性变换.

其次, 我们约定真空能 $E_0 \geq 0$, 于是任意确切的物理态的能量, 即 H 的本征值都将满足 $E \geq E_0 \geq 0$. 即在我们的约定下, **负能态** 是不存在的. 这一结果将告诉我们 $\mathcal{P}, \mathcal{T}$ 的量子表示是线性幺正的, 还是反线性反幺正的.

我们假定它们的量子表示 footnote{我们暂时不能确定其是线性幺正的还是反线性反幺正的}:

$$
P = U(\mathcal{P}), T = U(\mathcal{T}) \tag{1.138}
$$

且它们满足式 式 (1.28), 即:

$$
\begin{aligned}
P^{-1}U(\Lambda, a)P &= U(\mathcal{P}^{-1}\Lambda\mathcal{P}, \mathcal{P}^{-1}a) \\
T^{-1}U(\Lambda, a)T &= U(\mathcal{T}^{-1}\Lambda\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}a)
\end{aligned} \tag{1.139}
$$

其中 $U(\Lambda, a)$ 是任意固有正时 Poincaré 变换.

考虑无穷小量子变换 $U(1+\omega, \varepsilon)$, 我们有:

$$
\begin{aligned}
P^{-1}iJ^{\mu\nu}P &= i\mathcal{P}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{P}^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \\
P^{-1}iP^{\mu}P &= i\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} \\
T^{-1}iJ^{\mu\nu}T &= i\mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho}\mathcal{T}^{\nu}{}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \\
T^{-1}iH^{\mu}P &= i\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu}
\end{aligned} \tag{1.140}
$$

我们保留了虚数 i, 这是因为我们暂时不知道 P, T 是线性的, 还是反线性的.

取式 式 (1.140) 第二, 四式的指标 $\mu = 0$, 则

$$
\begin{aligned}
P^{-1}iHP &= iH \\
T^{-1}iHT &= -iH
\end{aligned} \tag{1.141}
$$

注意体系不存在负能态意味着 P, T 算符必须和 H 对易, 且反线性算符和 i 反对易. 因此, 我们有: P 是线性幺正算符, T 是反线性, 反幺正算符.

现在, 我们可以将 式 (1.140) 改写为具体的形式:

$$\begin{aligned} P^{-1}HP &= +H, T^{-1}HT = +H \\ P^{-1}\boldsymbol{P}P &= -\boldsymbol{P}, T^{-1}\boldsymbol{P}T = -\boldsymbol{P} \\ P^{-1}\boldsymbol{J}P &= +\boldsymbol{J}, T^{-1}\boldsymbol{J}T = -\boldsymbol{J} \\ P^{-1}\boldsymbol{K}P &= -\boldsymbol{K}, T^{-1}\boldsymbol{K}T = +\boldsymbol{K} \end{aligned} \tag{1.142}$$

下面我们分别考察 P,T变换对单粒子态的作用.

1.4.1. P Transformation

首先考虑有质量的粒子态 $|k,\sigma\rangle$, 其表示静止的, 质量为 M, 自旋为 j, 且 J_3 分量为 σ 的粒子. 由于 $\boldsymbol{p}=0$, 于是我们宇称变换 P 和 $H,\boldsymbol{P},J_3$ 都是对易的, 于是我们有:

$$P|k,\sigma\rangle = \eta_\sigma|k,\sigma\rangle \tag{1.143}$$

其中 η_σ 是一个相位因子. 注意到

$$J_\pm|k,\sigma\rangle = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}|k,\sigma\pm1\rangle \tag{1.144}$$

等式两边同时施加 P 变换, 即有:

$$P|k,\sigma\rangle \equiv P|k,\sigma\pm1\rangle \Rightarrow \eta_\sigma \equiv \eta_{\sigma\pm1} \tag{1.145}$$

于是宇称变换下的相因子 η_σ 与 σ 无关, 其只依赖于粒子的其他内禀性质.

利用式 式 (1.74), 我们得到有限动量态:

$$|p,\sigma\rangle = \sqrt{\frac{M}{p^0}}U(L(p))|k,\sigma\rangle \tag{1.146}$$

将 P 作用等式两边:

$$\begin{aligned} P|p,\sigma\rangle &= P\sqrt{\frac{M}{p^0}}U(L(p))|k,\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{M}{p^0}}PU(L(p))P^{-1}P|k,\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{M}{p^0}}U(\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1})P|k,\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{M}{p^0}}U(\mathcal{P}p)\eta_\sigma|k,\sigma\rangle \\ &= \eta_\sigma|\mathcal{P}p,\sigma\rangle \end{aligned} \tag{1.147}$$

即 P 作用于有质量粒子, 其仅逆转动量方向.

下面考虑无质量粒子 $|k,\sigma\rangle$, 此时情形复杂许多. 首先注意到:

$$\mathcal{P}k^\mu{}_\nu = (\kappa,0,0,-\kappa) \tag{1.148}$$

而 $\mathcal{P}$ 不会改变 J_3 的取值, 于是宇称变换逆转了 $|k,\sigma\rangle$ 的螺旋度 (动量在自旋方向的投影).

我们希望标准动量 k^μ 具有不变性, 为此注意到绕 y 轴 π 的旋转对 k^μ 的作用与 $\mathscr{P}$ 一致, 我们取

$$U(R_2) = \exp\left[i\pi J_y\right] \tag{1.149}$$

注意到对于旋转 $U(R_2^{-1}) = \exp\left[-i\pi J_y\right]$, 我们就有:

$$\begin{aligned} J_z \exp\left[-i\pi J_y\right]|k,\sigma\rangle &= \exp\left[-i\pi J_y\right]\exp\left[i\pi J_y\right] J_z \exp\left[-i\pi J_y\right]|k,\sigma\rangle \\ &= (-\sigma)\exp\left[-i\pi J_y\right]|j,\sigma\rangle \end{aligned} \tag{1.150}$$

其中我们利用了:

$$\exp\left[i\pi J_y\right] J_z \exp\left[-i\pi J_y\right] = J_z \cos\pi - J_x \sin\pi \tag{1.151}$$

于是我们说 $U(R_2^{-1})$ 反转了 J_3 的取值. 因此:

$$U(R_2^{-1})P|k,\sigma\rangle = \eta_\sigma|k,-\sigma\rangle \tag{1.152}$$

其中 η_σ 是空间反演的相位因子 (其未必不依赖 σ). 下面考察 式 (1.133) 定义的有限动量态:

$$\begin{aligned} P|p,\sigma\rangle &= P\sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left[R(\boldsymbol{p})B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right)\right]|k,\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left[R(\boldsymbol{p})B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right)\right]P|k,\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left(R(\boldsymbol{p})R_2B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right)\right)U(R_2^{-1})P|k,\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma U\left(R(\boldsymbol{p})R_2B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right)\right)|k,-\sigma\rangle \end{aligned} \tag{1.153}$$

第二步利用了 P 和 $U(R)$ 对易, 第三步利用了式 式 (1.136) 定义的 $B(u)$ 和 $U(R_2)$ 在作用于 k^μ 时是对易的.

我们注意到 $U(R(-\boldsymbol{p}))$ 满足:

$$U(R(-\boldsymbol{p})) = \exp[-i(\varphi\pm\pi)J_z]\exp\left[-i(\pi-\theta)J_y\right] \tag{1.154}$$

其中 $\varphi\pm\pi$ 的符号取决于 $\varphi\in(0,\pi)$ 还是 $\varphi\in(\pi,2\pi)$, 即 p_y 的符号.

现在我们有:

$$\begin{aligned} U^{-1}(R(-\boldsymbol{p}))U(R(\boldsymbol{p})R_2) &= \exp\left[+i(\pi-\theta)J_y\right]\exp[+i(\varphi\pm\pi)J_z] \\ &\quad\times\exp(-i\varphi J_3)\exp(-i\theta J_2)\exp(i\pi J_2) \\ &= \exp\left[+i(\pi-\theta)J_y\right]\exp[\pm i\pi J_z]\exp\left(i(\pi-\theta)J_y\right) \\ &= \exp[\pm i\pi J_z] \end{aligned} \tag{1.155}$$

最后一步利用了:

$$e^{i\pi J_z}J_y e^{-i\pi J_z} = J_x\sin\pi + J_y\cos\pi \tag{1.156}$$

于是,

$$
\begin{aligned}
P|p,\sigma\rangle &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\eta_\sigma U\left(R(-\boldsymbol{p})B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right)\right)\exp[\pm i\pi J_z]|k,-\sigma\rangle \\
&= \eta_\sigma \exp[\mp i\pi J_z]|\mathcal{P}p,-\sigma\rangle
\end{aligned}
\tag{1.157}
$$

其中相位 $\exp[\mp i\pi J_z]$ 取决于 p_y 的符号, 并不能被 η_σ 吸收.

Remark. *注意只有考虑半整数螺旋度的粒子时, 该相位才是有意义的. 好在我们暂时只观测到螺旋度为 $+\frac{1}{2}$ 的中微子.* ■

1.4.2. T Transformation

我们仍首先考虑有质量的单粒子态 $|k,\sigma\rangle$, 注意到:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}T|k,\sigma\rangle &= 0 \\
HT|k,\sigma\rangle &= MT|k,\sigma\rangle \\
J_zT|k,\sigma\rangle &= -\sigma|k,\sigma\rangle
\end{aligned}
\tag{1.158}
$$

于是我们看到 T 翻转了 $|k,\sigma\rangle$ 的 J_z 分量:

$$
T|k,\sigma\rangle = \xi_\sigma|k,-\sigma\rangle \tag{1.159}
$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
TJ_\pm|k,\sigma\rangle &= T(J_x \pm iJ_y)|k,\sigma\rangle = (-J_x \pm iJ_y)T|k,\sigma\rangle \\
&= (-J_x \pm iJ_y)\xi_\sigma|k,-\sigma\rangle \\
&= T\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}|k,\sigma\pm 1\rangle \\
&= \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\xi_{\sigma\pm 1}|k,-\sigma\mp 1\rangle
\end{aligned}
\tag{1.160}
$$

即

$$
(-J_x \pm iJ_y)\xi_\sigma|k,-\sigma\rangle = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\xi_{\sigma\pm 1}|k,-\sigma\mp 1\rangle \tag{1.161}
$$

再注意到

$$
\begin{aligned}
(-J_x \pm iJ_y)\xi_\sigma|k,-\sigma\rangle &= (-\xi_\sigma)J_\mp|k,-\sigma\rangle \\
&= (-\xi_\sigma)\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}|k,-\sigma\mp 1\rangle
\end{aligned}
\tag{1.162}
$$

因此我们得到相因子 ξ_σ 满足:

$$
-\xi_\sigma = \xi_{\sigma\pm 1} \tag{1.163}
$$

该方程解可以写作:

$$
\xi_\sigma = \xi(-1)^{j-\sigma} \tag{1.164}
$$

其中 ξ 是固定的相因子. 注意到物理态本身可以相差一个相因子, 因此固定的相因子 ξ 是没有物理意义的, 但是我们姑且先保留这个余地.

面考察有质量粒子有限动量态, 注意到:

$$
\mathcal{T}^{-1}L(p)\mathcal{T}^\mu{}_\nu = L(\mathcal{P}p^\mu{}_\nu) \tag{1.165}
$$

于是我们类似 式 (1.147) 的方法, 得到

$$T|p,\sigma\rangle = \xi(-1)^{j-\sigma}|p,-\sigma\rangle \tag{1.166}$$

对于无质量粒子态 $|k,\sigma\rangle$, 注意到:

$$\boldsymbol{P}T|k,\sigma\rangle = -\boldsymbol{p}T|k,\sigma\rangle \setminus J_zT|k,\sigma\rangle = -\sigma T|k,\sigma\rangle \tag{1.167}$$

于是 T 翻转了无质量粒子的 3 – 动量和 J_z 分量, 但是其没有改变螺旋度. 那么我们仍考察算符 $U(R_2^{-1})T$, 其保持了 k^μ 的不变性, 即:

$$U(R_2^{-1})T|k,\sigma\rangle = \xi_\sigma|k,\sigma\rangle \tag{1.168}$$

于是对于有限动量态:

$$\frac{\kappa}{p^0}U\left[R(\boldsymbol{p})B\left(|\boldsymbol{p}\frac{|}{\kappa}\right)\right]T^{-1}T|k,\sigma\rangle \setminus = \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left[R(-\boldsymbol{p})B\left(|\boldsymbol{p}\frac{|}{\kappa}\right)\right]T|k,\sigma\rangle \setminus = \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left[R(-\boldsymbol{p})R_2B\left(|\boldsymbol{p}\frac{|}{\kappa}\right)\right]U(R_2^{-1})T|k,\sigma\rangle \setminus = \xi_\sigma \mathrm{ex} \tag{1.169}$$

其中利用了作用于 $k^\mu = (\kappa,0,0,\kappa)$ 时, 算符直接具有交换性, 最后一步是 式 (1.155).

此时, 我们仍保留了一个相位因子 $\pm i\pi\sigma$, 取决于 p_y 的符号. 且 σ 是 J_z 分量而不是螺旋度.

1.4.3. T Transformation

我们仍首先考虑有质量的单粒子态 $|k,\sigma\rangle$, 注意到:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}T|k,\sigma\rangle &= 0\\
HT|k,\sigma\rangle &= MT|k,\sigma\rangle\\
J_zT|k,\sigma\rangle &= -\sigma|k,\sigma\rangle
\end{aligned} \tag{1.170}$$

于是我们看到 T 翻转了 $|k,\sigma\rangle$ 的 J_z 分量:

$$T|k,\sigma\rangle = \xi_\sigma|k,-\sigma\rangle \tag{1.171}$$

注意到:

$$\begin{aligned}
TJ_\pm|k,\sigma\rangle &= T(J_x \pm iJ_y)|k,\sigma\rangle = (-J_x \pm iJ_y)T|k,\sigma\rangle\\
&= (-J_x \pm iJ_y)\xi_\sigma|k,-\sigma\rangle\\
&= T\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}|k,\sigma\pm1\rangle\\
&= \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\xi_{\sigma\pm1}|k,-\sigma\mp1\rangle
\end{aligned} \tag{1.172}$$

即

$$(-J_x \pm iJ_y)\xi_\sigma|k,-\sigma\rangle = \sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\xi_{\sigma\pm1}|k,-\sigma\mp1\rangle \tag{1.173}$$

再注意到

$$\begin{aligned}
(-J_x \pm iJ_y)\xi_\sigma|k,-\sigma\rangle &= (-\xi_\sigma)J_\mp|k,-\sigma\rangle\\
&= (-\xi_\sigma)\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}|k,-\sigma\mp1\rangle
\end{aligned} \tag{1.174}$$

因此我们得到相因子 ξ_σ 满足:

$$-\xi_\sigma = \xi_{\sigma\pm1} \tag{1.175}$$

该方程解可以写作:

$$\xi_\sigma = \xi(-1)^{j-\sigma} \tag{1.176}$$

其中 ξ 是固定的相因子. 注意到物理态本身可以相差一个相因子, 因此固定的相因子 ξ 是没有物理意义的, 但是我们姑且先保留这个余地.

下面考察有质量粒子有限动量态, 注意到:

$$\mathcal{T}^{-1}L(p)\mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu} = L(\mathcal{P}p^{\mu}{}_{\nu}) \tag{1.177}$$

于是我们类似 式 (1.147) 的方法, 得到

$$T|p,\sigma\rangle = \xi(-1)^{j-\sigma}|p,-\sigma\rangle \tag{1.178}$$

对于无质量粒子态 $|k,\sigma\rangle$, 注意到:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}T|k,\sigma\rangle &= -\boldsymbol{p}T|k,\sigma\rangle \\ J_zT|k,\sigma\rangle &= -\sigma T|k,\sigma\rangle \end{aligned} \tag{1.179}$$

于是 T 翻转了无质量粒子的 $3-$ 动量和 J_z 分量, 但是其没有改变螺旋度. 那么我们仍考察算符 $U(R_2^{-1})T$, 其保持了 k^μ 的不变性, 即:

$$U(R_2^{-1})T|k,\sigma\rangle = \xi_\sigma|k,\sigma\rangle \tag{1.180}$$

于是对于有限动量态:

$$\begin{aligned} T|p,\sigma\rangle &= T\sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left[R(\boldsymbol{p})B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right)\right]T^{-1}T|k,\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left[R(-\boldsymbol{p})B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right)\right]T|k,\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}U\left[R(-\boldsymbol{p})R_2B\left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{\kappa}\right)\right]U(R_2^{-1})T|k,\sigma\rangle \\ &= \xi_\sigma\exp[\pm i\pi\sigma]|p,\sigma\rangle \end{aligned} \tag{1.181}$$

其中利用了作用于 $k^\mu = (\kappa,0,0,\kappa)$ 时, 算符直接具有交换性, 最后一步是 式 (1.155).

此时, 我们仍保留了一个相位因子 $\pm i\pi\sigma$, 取决于 p_y 的符号. 且 σ 是 J_z 分量而不是螺旋度.

下面我们考察著名的 Kramers 简并. 对于 T^2 作用于有限动量的有质量粒子态或者无质量粒子态, 都有:

$$\begin{aligned} T^2|p,\sigma\rangle_M &= T\xi(-1)^{j-\sigma}\big|\mathcal{P}p^\mu{}_\nu,-\sigma\big\rangle_M \\ &= \xi^*\xi(-1)^{2j}|p,\sigma\rangle_M \\ &= \xi(-1)^{2j}|p,\sigma\rangle_M \\ T^2|p,\sigma\rangle &= T\xi_\sigma e^{\pm i\pi\sigma}\big|\mathcal{P}p^\mu{}_\nu,\sigma\big\rangle \\ &= \xi_\sigma^* e^{\mp i\pi\sigma}T\big|\mathcal{P}p^\mu{}_\nu,\sigma\big\rangle \\ &= \xi_\sigma^*\xi e^{\mp 2i\pi\sigma}T|p,\sigma\rangle \end{aligned} \tag{1.182}$$

综上, 无论对于有质量还是无质量粒子态, 我们有:

$$T^2|p,\sigma\rangle = (-1)^{|2j|}|p,\sigma\rangle \tag{1.183}$$

其中 $j=0,\frac{1}{2},1,....$ 于是对于半整数自旋的粒子, 我们有:

$$T^2|p,\sigma\rangle = -|p,\sigma\rangle \tag{1.184}$$

这个结果将进一步推广到任意具有半整数自旋的量子态 $|\psi\rangle$, 其是 H 的本征态且 $[T,H]=0$. 那么 $T|\psi\rangle$ 显然也是 H 的本征态, 但是 $T^2|\psi\rangle=-|\psi\rangle$ 断言 $T|\psi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 不是一个物理态. 即对于半整数自旋的粒子, 时间反演不变的体系天生具有至少二重简并性, 我们称为 Kramers 简并.

1.5. Symmetry of Scattering Operator

在 Appendix A.2 这一节中，我们给出了散射过程的自由态 $|\varphi\rangle$，和入态（出态）$|\psi^\pm\rangle$. 其中 $|\varphi\rangle$ 是自由粒子态，其在 Lorentz 变换 $U_0(\Lambda,a)$[5] 下满足：

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,a)\big|\phi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;}\big\rangle &= \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\ldots}{p_1^0p_2^0\ldots}}\times e^{-ia_\mu\Lambda^\mu_\nu(p_1^\nu+p_2^\nu+\ldots)} \\ &\times\sum_{\sigma_{1'}\sigma_{2'}\ldots} D^{j_1}_{\sigma_{1'}\sigma_1}(W(\Lambda,p_1))D^{j_2}_{\sigma_{2'}\sigma_2}(W(\Lambda,p_2))\ldots \\ &\times|\Lambda p_1,\sigma_{1'},n_1;\Lambda p_2,\sigma_{2'},n_2;\ldots\rangle \end{aligned} \tag{1.185}$$

Remark. *对于无质量粒子，上述的 Wigner 转动 $D^{j_i}_{\sigma_{i'}\sigma_i}(W(\Lambda,p_i))$ 变为 $e^{i\sigma_i\theta(\Lambda,p_i)}$，其中 σ_i 是该粒子的螺旋度.* ■

下面我们希望考察 $|\psi^\pm\rangle$ 是否存在该 Lorentz 协变性.不妨考虑入态 $\big|\psi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots}\big\rangle$:

[5]我们有时也把 Poincaré 变换称作 Lorentz，而称原来的 Lorentz 变换为齐次 Lorentz 变换.

$$
\begin{aligned}
U(\Lambda,a)\left|\psi^+_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots}\right\rangle &\overset{t_0\to-\infty}{\widehat{=}} U(a)U(\Lambda)U(1,t_0)U^{-1}(1,t_0)\left|\psi^+_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots}\right\rangle \\
&= U(a)U(\Lambda)U(1,t_0)e^{-i(E_1+E_2+\cdots)t_0}\left|\psi^+_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots}\right\rangle \\
&= e^{-i(E_1+E_2+\cdots)t_0}U(1,\Lambda t_0)U(\Lambda,a)\left|\psi^+_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots}\right\rangle \\
&= e^{-i(E_1+E_2+\cdots)t_0}U(1,\Lambda t_0)e^{-ia_\mu\Lambda^\mu_\nu(p_1^\nu+p_2^\nu+\cdots)}\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots}{p_1^0p_2^0\cdots}} \\
&\times\sum_{\sigma_{1'}\sigma_{2'}\cdots}D^{j_1}_{\sigma_{1'}\sigma_1}(W(\Lambda,p_1))D^{j_2}_{\sigma_{2'}\sigma_2}(W(\Lambda,p_2))\cdots \\
&\times\left|\psi^+_{\Lambda p_1,\sigma_{1'},n_1;\Lambda p_2,\sigma_{2'},n_2;\cdots}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots}{p_1^0p_2^0\cdots}}e^{-ia_\mu\Lambda^\mu_\nu(p_1^\nu+p_2^\nu+\cdots)} \\
&\times\sum_{\sigma_{1'}\sigma_{2'}\cdots}D^{j_1}_{\sigma_{1'}\sigma_1}(W(\Lambda,p_1))D^{j_2}_{\sigma_{2'}\sigma_2}(W(\Lambda,p_2))\cdots \\
&\times\left|\psi^+_{\Lambda p_1,\sigma_{1'},n_1;\Lambda p_2,\sigma_{2'},n_2;\cdots}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{1.186}
$$

第一步利用了 $U^{-1}(1,-\infty)$ 是 $t\to-\infty$ 的时间演化算符， 此时 $|\psi^+\rangle$ 是自由态，可以按式 (1.185) 演化.第三步利用了：

$$
U(a)U(\Lambda)U(1,t_0)=U(\Lambda,a+\Lambda t_0)=U(1,\Lambda t_0)U(\Lambda,a) \tag{1.187}
$$

最后一步利用了 $(\Lambda t_0)_\mu(\Lambda p)^\mu\equiv t_0^\mu p_\mu$. 综上我们验证了入态（出态）也满足 Lorentz 协变性. 如此，我们可以进一步的讨论 $S-$ 矩阵和 S 算符的 Lorentz 协变性.

注意到，$S-$ 矩阵并不是时空或者内禀的对称性，于是其未必有直接的 Lorentz 协变性.即当我们考虑 对体系作一个 Lorentz 变换 $x\to\Lambda x+a$ 时，入态 $|\psi^+\rangle$ 对应的量子 Lorentz 变换为 $U_+(\Lambda,a)$，而出态 $|\psi^-\rangle$ 对应的量子 Lorentz 变换为 $U_-(\Lambda,a)$. 如果 $U_+(\Lambda,a)\equiv U_-(\Lambda,a)=U(\Lambda,a)$，则 $S-$ 矩阵满足：

$$
S_{\beta\alpha}=\langle\psi^-_\beta|\psi^+_\alpha\rangle=\langle\psi^-_\beta|U^\dagger(\Lambda,a)U(\Lambda,a)|\psi^+_\alpha\rangle \tag{1.188}
$$

利用式 式 (1.186)，我们有：

$$
\begin{aligned}
S_{p_{1'},\sigma_{1'},n_1;p_{2'},\sigma_{2'},n_2\cdots;p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2\cdots} &= \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots(\Lambda p_{1'})^0(\Lambda p_{2'})^0\cdots}{p_1^0p_2^0\cdots(p_{1'})^0(p_{2'})^0\cdots}} \\
&\times\exp\left[ia_\mu\Lambda^\mu_\nu((p_{1'})^\nu+(p_{2'})^\nu+\cdots-p_1^\nu-p_2^\nu-\cdots)\right] \\
&\times\sum_{\sigma_1\sigma_2\cdots}D^{j_1}_{\overline{\sigma_1}\sigma_1}(W(\Lambda,p_1))D^{j_2}_{\overline{\sigma_2}\sigma_2}(W(\Lambda,p_2))\cdots \\
&\times\sum_{\sigma_{1'}\sigma_{2'}\cdots}D^{j_{1'}}_{\overline{\sigma_{1'}}\sigma_{1'}}(W(\Lambda,p_{1'}))D^{j_{2'}}_{\overline{\sigma_{2'}}\sigma_{2'}}(W(\Lambda,p_{2'}))\cdots \\
&\times S_{\Lambda p_{1'},\overline{\sigma_{1'}},n_1;\Lambda p_{2'},\overline{\sigma_{2'}},n_2;\cdots;\Lambda p_1,\overline{\sigma_1},n_1;\Lambda p_2,\overline{\sigma_2},n_2\cdots}
\end{aligned}
\tag{1.189}
$$

注意到 $S_{\beta\alpha}$ 本身不依赖时间位置 x^μ，于是我们必须包含一个 $4-$ 动量守恒因子.

$$
S_{\beta\alpha}-\delta(\beta-\alpha)=-2\pi iM_{\beta\alpha}\delta^4(p_\beta-p_\alpha) \tag{1.190}
$$

当体系不包含相互作用时，则有 $M_{\beta\alpha}=0$，即 $S_{\beta\alpha}=\delta(\beta-\alpha)$.

下面回到我们的问题，即如何保证 $U_+(\Lambda,a)\equiv U_-(\Lambda,a)$.为此，考察 S 算符：

$$S_{\beta\alpha}=\langle\varphi_\beta|S\varphi_\alpha\rangle \tag{1.191}$$

此时 S 算符的 Lorentz 不变性等价于

$$\langle\varphi_\beta|S\varphi_\alpha\rangle \overset{x\to\Lambda x+a}{\widehat{=}} \langle U_0(\Lambda,a)\varphi_\beta|S|U_0(\Lambda,a)\varphi_\alpha\rangle \tag{1.192}$$

写出纯算符的形式，我们有：

$$U_0^{-1}(\Lambda,a)SU_0(\Lambda,a)=S \tag{1.193}$$

考虑无穷小 Lorentz 变换，则上式进一步等价于：

$$[H_0,S]=[\boldsymbol{P}_0,S]=[\boldsymbol{J}_0,S]=[\boldsymbol{K}_0,S]=0 \tag{1.194}$$

其中 H_0, $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{K}_0$, $\boldsymbol{J}_0$ 是体系趋于 $t=\pm\infty$ 时的 生成元算符.现在，我们的问题变成对于相互作用体系，当体系的生成元算符 H, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{J}$ 满足什么条件时，它们在 $t=\pm\infty$ 的性态如式 (1.194) 所示.为此，我们给出以下命题：

Proposition 1.1. *我们称体系是 Lorentz 不变的，若该体系的其生成元算符满足：*

1. *动量和角动量具有不变性：$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_0$.*
2. *$H=H_0+V$，其中 V 是* **相互作用项**，*满足：*

$$[V,\boldsymbol{P}]=[V,\boldsymbol{J}]=0 \tag{1.195}$$

且 $V(\pm\infty)=0$.

3. *$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{W}$，其中*

$$[\boldsymbol{K}_0,V]=-[\boldsymbol{W},H] \tag{1.196}$$

注意，该命题给出的生成元算符是被定义的，并不直接满足 Lorentz 代数下的 Lie 代数关系 (式 (1.51) - 式 (1.57)).但是 H_0, $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{J}_0$, $\boldsymbol{K}_0$ 是满足 该 Lie 代数关系的.由于 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_0$，以及 则这组生成元实际直接满足 式 (1.51), 式 (1.54), 式 (1.57) .另外注意到：

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{K},H]&=[\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{W},H_0+V]\\&=-i\boldsymbol{P}_0+[\boldsymbol{K}_0,V]+[\boldsymbol{W},H]\\&=-i\boldsymbol{P}\end{aligned} \tag{1.197}$$

倒数第二步利用了我们对 $\boldsymbol{W}$ 的定义.本节的最后，我们将给出其余关于 $\boldsymbol{K}$ 的 Lie 代数关系也是直接满足的. 因此 H, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$ 可以生成任意作用于 $|\psi^\pm\rangle$ 上的量子 Lorentz 变换 $U(\Lambda,a)$.

下面我们需要考察我们定义的这组算符是否可以给出 式 (1.194) .首先考虑时间演化算符：

$$U(\tau,\tau_0)=\exp[iH_0\tau]\exp[-iH(\tau-\tau_0)]\exp[-iH_0\tau_0] \tag{1.198}$$

由于 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$ 和 H, H_0 对易，则 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{J}$ 和 $U(\tau,\tau_0)$ 对易.再注意到 $S=U(+\infty,-\infty)$，则

$$[S,\boldsymbol{P}]=[S,\boldsymbol{J}]=0 \tag{1.199}$$

又因为 H_0, H 能谱相同，自然有 H, $U(\tau,\tau_0)$ 对易，则 $[H_0,S]=0$.

最后，我们只需要考察 $\boldsymbol{K_0}$ 和 S 的对易关系.首先注意到：

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{K}_0,\exp[iH_0t]]=t\boldsymbol{P}_0\exp[iH_0t]\\ [\boldsymbol{K},\exp[iHt]]=t\boldsymbol{P}\exp[iHt]=t\boldsymbol{P}_0\exp[iHt]\end{aligned} \tag{1.200}$$

于是：

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{K}_0,U(\tau,\tau_0)]&=\left[\boldsymbol{K}_0,e^{iH_0\tau}\right]e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0}+e^{iH_0\tau}\left[\boldsymbol{K}_0,e^{-iH(\tau-\tau_0)}e^{-iH_0\tau_0}\right]\\&=\tau\boldsymbol{P}_0U(\tau,\tau_0)+U(\tau,\tau_0)\tau\boldsymbol{P}_0+e^{iH_0\tau}\left[\boldsymbol{K}-\boldsymbol{W},e^{-iH(\tau-\tau_0)}\right]e^{-iH_0\tau_0}\\&=-e^{iH_0\tau}\left[\boldsymbol{W},e^{-iH(\tau-\tau_0)}\right]e^{-iH_0\tau_0}\\&=-\boldsymbol{W}(\tau)U(\tau,\tau_0)+U(\tau,\tau_0)\boldsymbol{W}(\tau_0)\end{aligned} \tag{1.201}$$

其中

$$\boldsymbol{W}(t)=e^{iH_0t}\boldsymbol{W}e^{-iH_0t} \tag{1.202}$$

注意到边界条件 $V(\pm\infty)=0$，则 式 (1.196) 对易关系给出 $\boldsymbol{W}(\pm\infty)=0$，于是

$$[\boldsymbol{K}_0,U(-\infty,+\infty)]=[\boldsymbol{K}_0,S]=0 \tag{1.203}$$

综上，我们完成验证，即在 Proposition 1.1 给定对相互作用系统生成元算符的约束下，任意 Lorentz 变换 $x\to\Lambda x+a$,其对应的量子变换 $U(\Lambda,a)$ 将同时施加于入态和出态 $|\psi^{\pm}\rangle$ 上，从而满足 $S-$ 矩阵的 Lorentz 协变性 式 (1.189).

A. Review of Quantum Mechanics

正如所强调的，量子场论（QFT）是一个在4维洛伦兹时空中的量子理论.在第一章，我们介绍了洛伦兹群及其表示理论.在本章中，我们将回顾量子力学的基本概念.特别地，我们将通过一些简单量子系统的例子，介绍费曼的路径积分量子化方法.

A.1. Basic Axioms of QM

完全公理化地构造量子力学并不简单，在本章我们将列举几条争议较少的 公理. 首先引入 Hilbert 空间:

Definition A.1. *Hilbert* 空间$\mathcal{H}$是$\mathcal{C}$上的**完备**内积空间，其上元素记作$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

为了避免歧义，给出如下说明：

Remark. $\mathcal{H}$ 上的内积满足如下性质：

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\psi\rangle &= \langle\psi|\varphi\rangle^* \\ \langle\varphi|a\psi + b\xi\rangle &= a\langle\varphi|\psi\rangle + b\langle\varphi|\xi\rangle \\ \langle a\varphi + b\xi|\psi\rangle &= a^*\langle\varphi|\psi\rangle + b^*\langle\xi|\psi\rangle \end{aligned} \tag{A.1}$$

■

Remark. $\mathcal{H}$的内积结构自然诱导度量函数：

$$d(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \sqrt{\langle\psi - \phi \mid \psi - \phi\rangle} \tag{A.2}$$

于是$\mathcal{H}$的完备性是说对于任意 *Cauchy* 序列 $\{|\psi_n\rangle : n = 1, 2, \cdots\}$,存在$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$，使得$\lim_{n\to\infty} |\psi_n\rangle = |\psi\rangle$. ■

下面我们利用 Hilbert 空间$\mathcal{H}$来给出量子力学中的物理态：

Axiom A.1. 每一个物理态都可以由相差一个相因子的 *Hilbert* 空间$\mathcal{H}$的矢量 族$\{e^{i\alpha}|\psi\rangle : \alpha \in \mathbb{R}, \langle\psi \mid \psi\rangle = 1\}$的任意一个元素表示.

Remark. 我们定义 *Hilbert* 空间$\mathcal{H}$的射线为：

$$\mathcal{R} = \{e^{i\alpha}|\psi\rangle : \alpha \in \mathbb{R}, \langle\psi \mid \psi\rangle = 1\} \tag{A.3}$$

于是我们又称每一个物理态是 $\mathcal{H}$中的一个射线. ■

Remark. 射线一词是并不陌生的，特别的对于 $\mathbb{R}$ 上的 n维线性空间，我们定义 $V/\{0\}$ 上的 等价类：

$$\{y \mid y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}, x \in V\} \tag{A.4}$$

该集合便是 V上的一条射线，这些射线的集合 $\boldsymbol{P}(V)$称为 V上的射线空间. ■

Remark. 我们不难发现处于同一射线 $\mathcal{R}$ 中的态矢量之间构成等价关系，于是 $\mathcal{R}$是 *Hilbert* 空间 $\mathcal{H}$中的一个 **等价类**.为了便利，我们以后不妨取 $\mathcal{R}$的一个代表元 $|\psi\rangle$ 表示由射线 $\mathcal{R}$对应的某个物理态. ■

事实上，任意态矢量 $|\psi\rangle$都不是实际的可观测量， 量子力学中的 textbf{可观测值} 是 $\mathcal{H}$ 中 **Hermitian 算符** 的本征值：

Axiom A.2. 物理上的可观测量都是 *Hilbert* 空间的 *Hermitian* 算符 A.实验上所有的**可观测值**是 *Hermitian* 算符 A 的本征值 a.

Remark. 我们成 A是 *Hermitian* 算符,若：

$$\langle \phi \mid A \mid \psi\rangle = \langle \phi \mid A^{\dagger} | \; \psi\rangle \equiv \langle A\phi \mid \psi\rangle \tag{A.5}$$

■

Remark. *Hermitian* 算符A的本征值$\{a_n\}$都是实数. ■

下面一个公理将给出量子力学的**概率诠释**：

Axiom A.3. 设系统处于态 $|\psi\rangle$,可观测量 A的本征矢 为 $|n\rangle$(对应的本征值为 a_n),则测得 物理态处于 $|n\rangle$的概率，即测量值为 a_n的概率为：

$$\mathcal{P}_n = |\langle n \mid \psi\rangle|^2 \tag{A.6}$$

Remark. 不难验证概率 $\mathcal{P}_n$满足归一性：

$$\sum_n \mathcal{P}_n = \sum_n \langle \psi \mid n\rangle\langle n \mid \psi\rangle = 1 \tag{A.7}$$

或者写成不依赖具体态矢(代表元)的形式：

$$\sum_n \mathcal{P}(\mathcal{P} \to \mathcal{P}_n) = 1 \tag{A.8}$$

■

下面我们考虑一个对称性变换是如何作用到量子态上的.

Definition A.2. 我们称 T是一个对称性变换：

$$T : \mathcal{R} \mapsto T\mathcal{R} = \mathcal{R}' \tag{A.9}$$

若其满足**测量概率不变性**：

$$\mathcal{P}(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = \mathcal{P}(\mathcal{R}' \to \mathcal{R}_n) \tag{A.10}$$

Wigner 定理给出任意对称性变换都可以用 Hilbert 空间的算符表示：

Theorem A.1. *设 T是一个对称性变换，则其对应的 Hilbert 空间的算符 U要么是线性幺正的，要么是反线性反幺正的.*

Remark. 我们称算符 U是线性幺正的，若：

$$\begin{aligned} \langle U\phi \mid U\psi\rangle &= \langle \phi \mid \psi\rangle \\ U\,|a\psi + b\phi\rangle &= aU\,|\psi\rangle + bU\,|\phi\rangle \end{aligned} \tag{A.11}$$

我们称算符 U是反线性反幺正的，若:

$$\begin{aligned} \langle U\phi \mid U\psi\rangle &= \langle \psi \mid \phi\rangle = \langle \phi \mid \psi\rangle^* \\ U\,|a\psi + b\phi\rangle &= a^*U\,|\psi\rangle + b^*U\,|\phi\rangle \end{aligned} \tag{A.12}$$

■

Remark. 对于反线性算符 U,其共轭如下定义：

$$\langle \phi \mid U^\dagger| \ \psi\rangle \equiv \langle U\phi \mid \psi\rangle^* = \langle \psi \mid U \mid \phi\rangle \tag{A.13}$$

于是反线性反幺正算符满足

$$\langle \phi \mid U^\dagger U \mid \psi\rangle = \langle U\psi \mid U\phi\rangle = \langle \phi \mid \psi\rangle \tag{A.14}$$

第二步利用了 I反幺正性，综上反线性反幺正算符 满足：

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{A.15}$$

■

Remark. 一般而言，物理上的对称性变换 T对应的算符 U总是 线性幺正的，只有当我们考察 *textbf{*时间反演*}*这样的操作时， U才是是反线性反幺正的.本章除非特别说明，一般默认 U是线性幺正的. ■

Remark. 为了简便,我们统称对称群 $\mathcal{T}$是线性幺正表示或者反线性反幺正表示为$\mathcal{T}$的**量子表示**，记作 $U(\mathcal{T})$. ■

Definition A.3. 我们称由一组对称性操作构成的集合$\{T\}$ 是一个对称群，若其满足：

1. 存在 $T = T_0 \in \{T\}$是恒等操作，即 $T_0\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}$;
2. 若 $T \in \{T\}$,则其逆变换 $T^{-1} \in \{T\}$,使得 $T^{-1}\mathcal{R}' = \mathcal{R}$;
3. 若 $T_1\mathcal{R} = \mathcal{R}'$,且 $T_2\mathcal{R}' = \mathcal{R}''$,则$T_2T_1\mathcal{R} = \mathcal{R}''$

下面我们考察对称群 $\mathcal{T}$对应的幺正算符 U 满足的性质.我们考察 $|\psi\rangle \in \mathcal{R}$, 则

$$U(T_1)\,|\psi\rangle \in \mathcal{R}' \tag{A.16}$$

进一步

$$U(T_2)U(T_1)\,|\psi\rangle = U(T_2)\,|U(T_1)\psi\rangle \in \mathcal{R}'' \tag{A.17}$$

注意到 T_2T_1是 $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}''$ 的映射，于是我们也有：

$$U(T_2T_1)\,|\psi\rangle \in \mathcal{R}'' \tag{A.18}$$

我们不应该直接断言 $U(T_2)U(T_1)\,|\psi\rangle$ 和 $U(T_2T_1)\,|\psi\rangle$，而是二者相差一个相位：

$$U(T_2)U(T_1)\,|\psi\rangle = U(T_2T_1)e^{i\phi(T_2,T_1)}|\psi\rangle \tag{A.19}$$

Remark. 我们可以验证相位 $e^{i\phi(T_2,T_1)}$不依赖态矢 $|\psi\rangle$的选择.为此，取 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathcal{R}$,则

$$\begin{aligned}
U(T_2T_1)e^{i\phi(T_2,T_1)}[|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle] &= U(T_2)U(T_1)[|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle] \\
&= U(T_2)U(T_1)\,|\psi_1\rangle + U(T_2)U(T_1)\,|\psi_2\rangle \\
&= e^{i\phi_1}U(T_2T_1)\,|\psi_1\rangle + e^{i\phi_2}U(T_2T_1)\,|\psi_2\rangle
\end{aligned} \tag{A.20}$$

等式两边同乘以 $U^{-1}(T_2T_1)$:

$$e^{i\phi(T_2,T_1)}[|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle] = e^{i\phi_1}\,|\psi_1\rangle + e^{i\phi_2}\,|\psi_2\rangle \tag{A.21}$$

因此，只有 $\phi_{T_2,T_1} = \phi_1 = \phi_2$时等式成立， 即相位 ϕ仅依赖于对称操作 T_1, T_2. ■

现在，我们得到了对称群 $\mathcal{T}$的量子表示满足如下乘法规则：

$$U(T_2T_1) = e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2)U(T_1) \tag{A.22}$$

我们将附带相因子的群表示 $U(\mathcal{T})$为对称群$\mathcal{T}$的**投影表示**. 特别的，当 $\phi(T_2,T_1) \equiv 0$时，我们便得到了对称群 $\mathcal{T}$的 **普通表示**：

$$U(T_2T_1) = U(T_2)U(T_1) \tag{A.23}$$

对于一个 Lie 群而言，我们有以下定理 决定其量子表示是投影表示还是普通表示：

Theorem A.2. 设 $\mathcal{T}$是一个 *Lie* 群，若：

1. 代数：$\mathcal{T}$的 *Lie* 代数 $\mathfrak{t}$无中心荷，或者可以通过重定义$\mathfrak{t}$的基矢 (即 $\mathcal{T}$的生成元)使得中心荷被消除；

2. 几何：$\mathcal{T}$对应的拓扑结构是**单连通的**.

则 $\mathcal{T}$的量子表示是**普通表示**.

Remark. 设 $\mathfrak{t}$是一个 *Lie* 代数，若其基矢的对应关系为：

$$[t_a, t_b] = if^a_{bc}t_c + iC_{ab}\mathbb{1} \tag{A.24}$$

我们称诸如C_{ab}，正比于单位元的项为 $\mathfrak{t}$的**中心荷**. ■

Remark. 我们称 *Lie* 代数$\mathfrak{t}$是**半单的**，若其不包含任意**不变 *Abel* 子代数**. 可以证明：任意半单 *Lie* 代数总是可以通过重定义基矢，使得中心荷被消除. ■

Remark. 直觉来说:我们称 *Lie* 群$\mathcal{T}$是单连通的，若任意点 $P \in \mathcal{T}$ 任意光滑曲线:

$$\gamma : [0,1] \mapsto \mathcal{T}, \gamma(0) = \gamma(1) = P \tag{A.25}$$

可以通过**连续变换**收缩到点 P. ■

第一章给出固有正时 Lorentz 群 $SO_+(1,3)$是复连通的 Lie 群，其 Lie 代数为 $\mathfrak{so}(1,3)$ 是半单的. 进一步固有正时 Poincare 群 $T^4 \rtimes SO_+(1,3)$ 不是半单的，因为T^4是$T^{\{4\}} \rtimes SO_+(1,3)$的不变 Abel 子群.但是它们的中心荷都是可以消除的，或者说它们都是无中心荷的.但是由于它们都包含复连通子群 $SO(3)$，于是 Lorentz 群和 Poincare 群的量子表示都是投影表示.

考察 $SO(3)$的拓扑结构，其是连通度为 2的复连通流形，于是尽管存在闭合路径 $\gamma(t)$，其连续变换无法收缩到一点.但是只要沿闭合曲线连续便利两次，得到的轨迹实际可以收缩到该闭合曲线的端点 P,即有：

$$U(\Lambda_2\Lambda_1)^{\{-1\}}U(\Lambda_2)U(\Lambda_1) \equiv \mathbb{I} \tag{A.26}$$

即 $SO(3)$的投影表示满足:

$$U(\Lambda_2\Lambda_1) = pmU(\Lambda_2)U(\Lambda_1) \tag{A.27}$$

当然 $SO_+(1,3)$和$T^{\{4\}} \rtimes SO_+(1,3)$的量子表示也满足上式.

Remark. 事实上，$T^{\{4\}} \rtimes SO_+(1,3)$包含的平移变换和 *Boost* 对应的流形分别是 $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3$，它们都是单连通的. ■

在第一章，我们给出来无质量粒子在量子 Lorentz 变换下满足：

$$|\psi\rangle' \propto \exp[i\sigma\theta]\ |\psi\rangle \tag{A.28}$$

其中 θ 表示粒子绕动量方向的旋转角度，利用我们刚刚给出的 $SO(3)$ 拓扑性质，必须有：

$$\exp[i(4\pi)\sigma] \equiv 1 \tag{A.29}$$

于是 $\sigma = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$.这即是说无质量单粒子态的螺旋度必须取整数或者半整数.对于有质量粒子， 式 A.27 取负号的情形则对应于诸如电子等自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子绕 z轴旋转 $2pi$的情形. 进一步，式 A.27 也暗含了**超选择定则**:

Theorem A.3. *总自旋为半整数和总自旋为整数的体系是不可混合的；等价地，自旋为半整数的态与自旋为整数的态是禁跃的.*

Remark. 不妨设 $|\psi_+\rangle$表示自旋为整数的粒子态， $|\psi_-\rangle$表示自旋为半整数的粒子态,则

$$\langle\psi_-|\,\psi_+\rangle = \langle\psi_-|\,U(2\pi)|\,\psi_+\rangle = -\langle\psi_-|\,\psi_+\rangle \Rightarrow \langle\psi_-|\,\psi_+\rangle = 0 \tag{A.30}$$

■

显然，投影表示式 A.27 为我们构建理论带来了诸多不易.为此，我们约定取 $SO(3)$ 的**通用覆盖群** $SU(2)$.等价地，取 $SO_+(1,3)$的**通用覆盖群** $SL(2,\mathbb{C})$.由于 $SL(2,\mathbb{C})$是单连通 Lie 群(其拓扑结构等价于 $\mathbb{R}^3 \times S^3$)，则我们得到普通表示：

$$U(\Lambda_2\Lambda_1) = U(\Lambda_2)U(\Lambda_1),\, \Lambda_1, \Lambda_2 \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{A.31}$$

$SU(2)$是 $SL(2,\mathbb{C})$的子群，同时也是 $SO(3)$的 **双覆盖**，即不可约表示的维度为 $2j+1, j = 0, \frac{1}{2}, 1, c\ldots$.于是，完全利用代数技巧我们就可以对有质量单粒子态进行分类.

Remark. 注意 $SO(3)$群只能取 $j = 0, 1, 2, c\ldots$，则我们不能在理论上预言存在半整数自旋的有质量粒子. ■

以上我们给出的量子力学三个基本公理，再包括超选择定则仅是对于单粒子体系而言.如果考察一个多粒子体系，我们需要再考察粒子的全同性问题.

Definition A.4. *若两粒子的***内禀属性***完全相同，则称这两个粒子为***全同粒子***.*

一般而言，我们用

$$\left|\psi_{p_1,\sigma_1,n;p_2,\sigma_2,n;\ldots}\right\rangle \tag{A.32}$$

标记由多个全同粒子构成的多粒子态.其中 p 标记 4 −动量， σ标记自旋(螺旋度) z方向的取值， n标记诸如粒子质量，电荷，自旋等内禀属性.

我们称 P是一个置换操作，若：

$$P\,|\psi_{p,\sigma,n;\cdots,p\prime,\sigma\prime,n;\cdots}\rangle = |\psi_{p\prime,\sigma\prime,n;\cdots,p,\sigma,n;\cdots}\rangle \tag{A.33}$$

全同性原理将断言置换操作只会使态矢多出一个 pm 因子：

Axiom A.4. 全同粒子体系在置换操作下，其态矢量要么不变，要么变号.前者对应于**玻色子**体系，后者对应于**费米子**}体系.进一步，玻色子的自旋一定是整数，费米子的自旋一定是半整数.

我们将在后文给出全同性原理的更多细节与诱导的重要结果.

最后，我们需要给出态矢量的动力学方程.然后，事实上对于不同自旋的粒子，其动力学方程不同(或者说量子场不同)，后文将证明它们都满足 **Klein-Gordon 方程**.在非相对论极限下，我们又可以得到 **Schrodinger 方程**：

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \tag{A.34}$$

A.2. Basic Concepts of Scattering Theory

本章前两节和第一章考虑了单粒子态的表示问题，本节开始我们考虑若干个粒子之间的相互作用.首先考虑无相互作用的多粒子态， 其可以看作多粒子态的直积：

$$|p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots\rangle = |p_1,\sigma_1,n_1\rangle\otimes|p_2,\sigma_2,n_2\rangle\otimes\cdots \tag{A.35}$$

其中 p_i,σ_i,n_i 分别标记第 i 个粒子的动量,自旋 z 分量和其他内禀属性(如质量，自旋，电荷等). 考虑一个固有正时 Poincare 变换作用于该多粒子态，我们有：

$$\begin{aligned} &U(\Lambda,a)|p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots\rangle = \exp\big(-i(a_\mu(\Lambda p_1)^\mu + a_\mu(\Lambda p_2)^\mu+\ldots)\big) \\ &= \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\ldots}{p_1^0p_2^0\ldots}}\sum_{\sigma_{1'}\sigma_{2'}\ldots} D^{(j_1)}_{\sigma_{1'}\sigma_1}(W(\Lambda,p_1))D^{(j_2)}_{\sigma_{2'}\sigma_2}(W(\Lambda,p_2))\cdots \\ &\times|\Lambda p_1,\sigma_{1'},n_1;\Lambda p_2,\sigma_{2'},n_2;\cdots\rangle \end{aligned} \tag{A.36}$$

其中 $W(\Lambda,p)$是 Winger 函数.当然，我们默认多粒子态都是有质量粒子， 对于无质量粒子，我们只要取：

$$D^{(j_i)}_{\sigma_{(i)'}\sigma_i}(W(\Lambda,p_i)) \Rightarrow \delta_{\sigma_{(i)'}\sigma_i}\exp(i\sigma_i\theta) \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned} &\langle p_{1'},\sigma_{1'}n_{1'};p_{2'},\sigma_{2'},n_{2'};\cdots|p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots\rangle = \delta^3(\boldsymbol{p_1}-\boldsymbol{p_{1'}})\delta_{\sigma_{1'}\sigma_1}\delta_{n_{1'}n_1} \\ &+\delta^3(\boldsymbol{p_2}-\boldsymbol{p_{2'}})\delta_{\sigma_{2'}\sigma_2}\delta_{n_{2'}n_2}\cdots + \sum_\pi(\pm1)^\pi\pi(\cdots) \end{aligned} \tag{A.38}$$

第二项包含了当我们交换了不同种类的粒子时，全同性原理要求其相差一个负号(正号).但是在本节，我们不需要讨论交换不同种粒子的问题.进一步，我们直接把多粒子态记为

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= |p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots\rangle \\ \langle\alpha'|\,\alpha\rangle &= \delta(\alpha'-\alpha) \end{aligned} \tag{A.39}$$

现在，我们可以把任意态矢 $|\psi\rangle$写作基矢 $|\alpha\rangle$的线性组合：

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{d}\alpha\,\langle\alpha\mid\psi\rangle|\alpha\rangle \tag{A.40}$$

其中

$$\int \mathrm{d}\alpha \equiv \sum_{n_1\sigma_1 n_2\sigma_2\cdots} \int \mathrm{d}^3 p_1 \mathrm{d}^3 p_2 \cdots \tag{A.41}$$

此积分测度应该理解成当对全同粒子交换时产生的不同构型时，我们只对彼此等价的一者纳入积分测度.

注意到无相互作用的多粒子态在时间平移下自然具有不变性，式 A.36 给出：

$$U(1,t)\ |\alpha\rangle = e^{iHt}\ |\alpha\rangle \propto |\alpha\rangle \tag{A.42}$$

于是自然有 $|\alpha\rangle$是 H的本征矢：

$$H\ |\alpha\rangle = E_\alpha\ |\alpha\rangle,\ E_\alpha = p_1^0 + p_2^0 + \cdots \tag{A.43}$$

下面我们要描述有相互作用的多粒子态，记作 $|\psi_\alpha\rangle$.而实际上我们并不关心粒子之间相互作用时 的细节，我们只关系在相互作用发生的无穷过去 $t \to -\infty$时的粒子态 $|\psi_\alpha^+\rangle$,和 在相互作用发生的无穷未来 $t \to \infty$时的粒子态 $|\psi_\alpha^-\rangle$. 实验上，我们可以测量的量也正是两个态的跃迁概率 $|\langle\psi_\alpha^-|\ \psi_\alpha^+\rangle|$. 习惯上，我们称$|\psi_\alpha^+\rangle$为**散射入态**,$|\psi_\alpha^-\rangle$为**散射出态**.

既然我们从时间演化的角度考察入态和出态，则我们不能直接把仅考虑一个能量本征态 $|\psi_\alpha\rangle$，其时间演化满足：

$$e^{-iH\tau}\ |\psi_\alpha\rangle = |-iE_\alpha\tau\rangle|\psi_\alpha\rangle \tag{A.44}$$

更加具体的，我们将有相互作用体系的哈密顿量写成自由哈密顿量和相互作用的 叠加：

$$H = H_0 + V \tag{A.45}$$

其中 H_0的自由哈密顿量：

$$\begin{aligned} H_0\ |\phi_\alpha\rangle &= E_\alpha\ |\phi_\alpha\rangle \\ \langle\phi_{\alpha'}|\ \phi_\alpha\rangle &= \delta(\alpha' - \alpha) \end{aligned} \tag{A.46}$$

这里我们假设 H_0和 H具有相同的能谱.(能量守恒!?)

进一步，我们把入态和出态定义为：

$$H\ |\psi_\alpha^\pm\rangle = E_\alpha\ |\psi_\alpha^\pm\rangle \tag{A.47}$$

$$\int \mathrm{d}\alpha\ e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha)\ |\psi_\alpha^\pm\rangle \overset{\tau\to\mp\infty}{\Longrightarrow} \int \mathrm{d}\alpha\ e^{-iE_\alpha\tau} g(\alpha)|\phi_\alpha^\pm\rangle \tag{A.48}$$

即 $\tau \to \mp\infty$时，散射入态和散射出态被看作没有相互作用的自由态.其等价于：

$$e^{-iH\tau} \int \mathrm{d}\alpha\ g(\alpha)\ |\psi_\alpha^\pm\rangle \overset{\tau\to\mp\infty}{\Longrightarrow} e^{-iH_0\tau} \int \mathrm{d}\alpha g(\alpha) g(\alpha)|\phi_\alpha^\pm\rangle \tag{A.49}$$

即

$$|\psi_\alpha^\pm\rangle = \Omega(\mp)\ |\phi_\alpha^\pm\rangle \tag{A.50}$$

其中 $\Omega(\mp)$被称为 Mollor 算符：

$$\Omega(\tau) = e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} \tag{A.51}$$

Remark. *在 Hesienberg 表象下，自由态 $|\phi\rangle$ 是 Schrodinger 表象下 $t=0$ 时刻的态矢. 于是 Mollor 算符在 $t=0$ 时，及正处于相互作用的时刻，先将自由态按无相互情形演化到 τ 时刻，再在有相互作用情形下将时间平移到 τ 时刻.*

于此，我们定义的入态和出态，在时间无穷远处，确实近似于一个自由态. ■

下面考察 $|\psi_\alpha^\pm\rangle$的正交性(A.48), 取内积得到：

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta e^{-iE_\alpha\tau}e^{iE_\beta\tau}g(\alpha)g^*(\beta)\langle\phi_\beta^\pm|\ \phi_\alpha^\pm\rangle\\ &\overset{\tau\to\infty}{\Longrightarrow}\int \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta e^{-iE_\alpha\tau}e^{iE_\beta\tau}g(\alpha)g^*(\beta)\langle\psi_\beta^\pm|\ \psi_\alpha^\pm\rangle\end{aligned} \tag{A.52}$$

即：

$$\langle\psi_\beta^\pm|\ \psi_\alpha^\pm\rangle=\langle\phi_\beta^\pm|\ \phi_\alpha^\pm\rangle=\delta(\alpha-\beta) \tag{A.53}$$

下面我们给出 $|\psi_\alpha^\pm\rangle$和自由态 $|\phi_\alpha\rangle$的联系，首先注意到：

$$H\ |\psi_\alpha^\pm\rangle=H_0|\psi_\alpha^\pm\rangle+V\ |\psi_\alpha^\pm\rangle=E_\alpha\ |\psi_\alpha^\pm\rangle \tag{A.54}$$

于是我们有：

$$(E_\alpha-H_0)|\psi_\alpha^\pm\rangle=V\ |\psi_\alpha^\pm\rangle \tag{A.55}$$

注意算符 $E_\alpha-H_0$作用于 $|\psi_\alpha^\pm\rangle$ 是不可逆的，于是我们将引入 $\pm i\varepsilon$避免该奇异性. 再考虑一个边界条件：

$$|\psi_\alpha^\pm\rangle\overset{V\to0}{\Longrightarrow}=|\phi_\alpha^\pm\rangle \tag{A.56}$$

于是该方程的解为：

$$|\psi_\alpha^\pm\rangle=|\phi_\alpha\rangle+\frac{1}{E_\alpha-H_0\pm i\varepsilon}V|\psi_\alpha\pm\rangle \tag{A.57}$$

我们称这个结果为 **Lippmann-Schwinger 方程**.进一步，我们插入自由态的完备性：

$$\begin{aligned}|\ \psi_\alpha^\pm\rangle&=|\ \phi_\alpha\rangle+\int\mathrm{d}\beta\ \frac{\langle\phi_\beta\mid V\mid\psi_\alpha^\pm\rangle}{E_\alpha-E_\beta\pm i\varepsilon}\mid\phi_\beta\rangle\\ &=|\ \phi_\alpha\rangle+\int\mathrm{d}\beta\ \frac{T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha-E_\beta\pm i\varepsilon}\mid\phi_\beta\rangle\end{aligned} \tag{A.58}$$

值得考察，该显示解是否满足入态和出态的边界条件， 不妨记：

$$\begin{aligned}|\ \psi_g^\pm(t)\rangle&=\int\mathrm{d}\alpha\ e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)\mid\psi_\alpha^\pm\rangle\\ |\ \phi_g(t)\rangle&=\int\mathrm{d}\alpha\ e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)\mid\phi_g\rangle\end{aligned} \tag{A.59}$$

带入式 A.58,得到：

$$|\psi_g(t)\rangle=|\phi_g(t)\rangle+\int\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\ \frac{e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha-E_\beta\pm i\varepsilon}|\phi_\beta\rangle \tag{A.60}$$

考察积分：

$$\mathcal{F}_{\beta}^{\pm}=\int \mathrm{d}\alpha \frac{e^{-iE_{\alpha}t}g(\alpha)T_{\beta\alpha}^{\pm}}{E_{\alpha}-E_{\beta}\pm i\varepsilon} \tag{A.61}$$

对于入态，此时 $tto-\inf$,我们取 $\operatorname{Im}E_{\alpha}>0$ 的上半圆，此时极点 $E_{\alpha}=E_{\beta}-i\varepsilon$.于是 $\mathcal{F}^{+}=0$,类似的 $\mathcal{F}-=0$(积分围道如 图 (1.1) 所示).即 LS 方程式 A.58 确实满足边界条件.

最后我们给出 $(E\pm i\varepsilon)^{-1}$一个常见表示：

$$\frac{1}{E\pm i\varepsilon}=\mathcal{P}\frac{1}{E}\mp i\pi\delta(E) \tag{A.62}$$

或者写作积分形式：

$$P\int \mathrm{d}x\,\frac{f(E)}{E}=\pm i\pi f(0)+\int \mathrm{d}x\,\frac{f(E)}{E\pm i\varepsilon} \tag{A.63}$$

此时积分围道将避开极点.

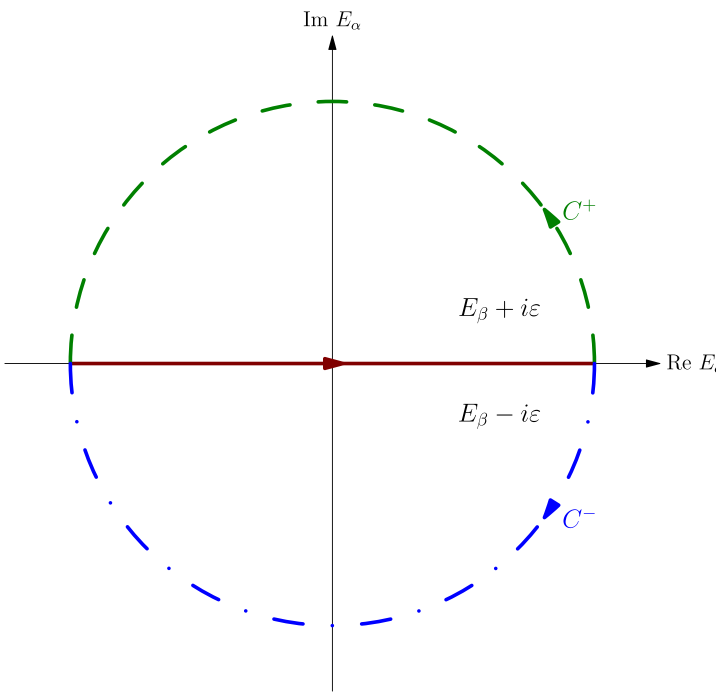

图 (1.1)： $\mathcal{F}^{\pm}$ 围道

A.3. The S-Matrix

上一节开头提及，实验可以观测的物理量依赖于 $\langle\psi_{\alpha}^{-}|\,\psi_{\alpha}^{+}\rangle$,由此我们定义一个矩阵：

$$S_{\beta\alpha}=\langle\psi_{\beta}^{-}|\,\psi_{\alpha}^{+}\rangle \tag{A.64}$$

其中 α,β标记了两个不同多粒子态.其中 $S_{\beta\alpha}$ 称为 $S-$矩阵元，而便利所有 α,β得到的矩阵就是 $S-$矩阵.

注意到总有一些粒子态直接没有相互作用，这意味着此时 $S_{\beta\alpha}=\delta_{\alpha\beta}$

利用入态和出态的正交性容易验证 S –矩阵的幺正性：

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\beta\ S^*_{\beta\gamma}S_{\beta\alpha} &= \int \mathrm{d}\beta\ \langle\psi^+_\gamma|\ \psi^-_\beta\rangle\langle\psi^-_\beta|\ \psi^+_\alpha\rangle \\ &= \langle\psi^+_\gamma|\ \psi^+_\alpha\rangle = \delta(\gamma-\alpha) \\ \Rightarrow S^\dagger S = \mathbf{1} \\ \int \mathrm{d}\beta\ S_{\alpha\beta}S^*_{\gamma\beta} &= \int \mathrm{d}\beta\ \langle\psi^-_\alpha|\ \psi^+_\beta\rangle\langle\psi^+_\beta|\ \psi^-_\gamma\rangle \\ &= \langle\psi^-_\alpha|\ \psi^-_\gamma\rangle = \delta(\gamma-\alpha) \\ \Rightarrow SS^\dagger = \mathbf{1}\end{aligned} \tag{A.65}$$

综上，我们有 $SS^\dagger=\mathbf{1}$,即 S矩阵确实是幺正矩阵.

Remark. 一般而言，$|\alpha\rangle$是连续取值的，于是 S是不可数无穷维矩阵. 其上未必有 $SS^\dagger = 1 \Rightarrow S^\dagger S = \mathbb{1}$. ■

下面我们再定义 S算符：

$$\langle\phi_\beta|\ S\ |\ \phi_\alpha\rangle = S_{\beta\alpha} \tag{A.66}$$

即 S 算符对应于自由态的矩阵元等价于出入态的跃迁振幅，即散射矩阵元 $S_{\beta\alpha}$.

利用 Mollor 算符：

$$S_{\beta\alpha}=\langle\psi^-_\beta|\ \psi^+_\alpha\rangle = \langle\phi_\beta|\ \Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty)\ |\ \phi_\alpha\rangle \tag{A.67}$$

即

$$S=\Omega^\dagger(+\infty)\Omega(-\infty)=U(+\infty,-\infty) \tag{A.68}$$

其中 U 是时间演化算符（相互作用绘景）:

$$U(t,t_0)=\Omega^{\dagger(t)}\Omega(t_0)=e^{iH_0t}e^{-iH(t-t_0)}e^{-iH_0t_0} \tag{A.69}$$

下面再给出 S 矩阵的一种表示.注意到式 A.61 中，对 $\mathcal{F}^+$取 $t\to+\infty$,则必须取 $\operatorname{Im}E_\alpha<0$,此时再利用留数定理得到：

$$\mathcal{F}^+_\beta \overset{t\to+\infty}{\Longrightarrow} (-2\pi i)e^{-iE_\beta t}\int \mathrm{d}\alpha\ \delta(E_\alpha-E_\beta)g(\alpha)T^+_{\beta\alpha} \tag{A.70}$$

进一步，式 A.59 给出

$$|\psi^+_g(t)\rangle \overset{t\to+\infty}{\Longrightarrow} \int \mathrm{d}\beta\ e^{-iE_\beta t}\ |\phi_\beta\rangle\left[g(\beta)-2\pi i\int \mathrm{d}\alpha\ \delta(E_\alpha-E_\beta)g(\alpha)T^+_{\beta\alpha}\right] \tag{A.71}$$

另一方面，我们考虑将 $|\psi^+_g(t)\rangle$按出态展开：

$$\begin{aligned}|\psi^+_g(t)\rangle &= \int \mathrm{d}\beta\ e^{-iE_\beta t}\ |\psi^-_\beta\rangle\int \mathrm{d}\alpha\ g(\alpha)S_{\beta\alpha} \\ &\overset{t\to+\infty}{\Longrightarrow} \int \mathrm{d}\beta\ e^{-iE_\beta t}\ |\phi_\beta\rangle\int \mathrm{d}\alpha\ g(\alpha)S_{\beta\alpha}\end{aligned} \tag{A.72}$$

由此， $|\psi^+_g\rangle$在 $t\to+\infty$两类渐进性质给出：

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) T^{+}_{\beta\alpha} \tag{A.73}$$

如果我们取：

$$T^{+}_{\beta\alpha} = \langle \phi_\beta | \ V \ | \ \psi^{+}_{\alpha} \rangle \approx \langle \phi_\beta | \ V \ | \ \phi_\alpha \rangle, |V| \ll 1 \tag{A.74}$$

于是我们得到了一阶 Born 近似：

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \phi_\beta | \ V \ | \ \phi_\alpha \rangle \tag{A.75}$$

A.4.

$\otimes$