工科数学分析下册

课后习题解答

作者：仲英学辅

2020 年 9 月 1 日

仲英书院学业辅导中心

Zhong Ying Xue Fu

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

➤ **标题：** 工科数学分析下册 - 课后习题解答

➤ **作者：** 仲英学辅

➤ **校对排版：** 自动化 96 都凌志、电气 86 刘菁锐

➤ **出品时间：** 2020 年 9 月 1 日

➤ **总页数：** 69

工科数学分析下册题解

答案提供及勘误：大数据91张纵琛，自动化92张邵男，电气91孔文谦

审核：人工智能91张昊康，计算机91苏晗琛

排版人员：自动化96都凌志、电气86刘菁锐

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作，使本资料可以按时完工。由于编者们的能力与精力限制，以及本资料是仲英学业辅导中心采用LaTeX排版，难免有错误之处。如果同学们在本资料中发现错误，请联系仲英学业辅导中心：XJTUzyxuefu@163.com，我们将在修订时予以更正。

从第3周开始，**每晚19:30-21:30**，学辅志愿者在东21舍118学辅办公室值班，当面为学弟学妹们答疑。

同时，我们也有线上答疑平台——学粉群。

19级学粉群：902493560，756433480；

20级学粉群：598243135，1137961185.

期中考试与期末考试前，我们还会举办考前讲座。学辅还有新生专业交流会，转专业交流会，英语考试讲座等活动，消息会在学粉群和公众号上公布，欢迎同学们参与。

仲英书院学业辅导中心

2020年9月1日

学粉群 6.0

QQ 群号：598243135

学粉群 6.1

QQ 群号：1137961185

微信公众号

仲英学业辅导中心及薪火工作室

高数（下）题解

目录

第五章习题及解答

1. 选择题(在每个小题给出的选项中只有一个是正确的, 试选择正确的选项并说明理由)：

（1）二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0, \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点$\left(0,0\right)$处（　　）.

（A）连续，偏导数存在　　　　　　　（B）连续，偏导数不存在

（C）不连续，偏导数存在　　　　　　（D）偏导数存在且可微

答案：（C）

解析：连续性：对于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，取 $y=kx$ 代入可得，该极限不存在，故原函数在$\left(0,0\right)$不连续.

偏导数的存在性：$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f\left(0+\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=0$，$\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f\left(0,0+\Delta y\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta y}=0$，

故偏导数存在且 $f_x\left(0,0\right)=f_y\left(0,0\right)=0$.

可微性：由于 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f\left(\Delta x,\Delta y\right)-f_x\left(0,0\right)\Delta x-f_y\left(0,0\right)\Delta y-f\left(0,0\right)}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}$ 不存在，故原函数在$\left(0,0\right)$不可微. 故选（C）

（2）函数 $f\left(x,y\right)=\sqrt{|xy|}$ 在点$\left(0,0\right)$处（　　）.

（A）连续但偏导数不存在　　　　　　（B）偏导数存在但不可微

（C）可微　　　　　　　　　　　　　（D）可偏导且偏导数连续

答案：（B）

解析：连续性：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{|xy|}=0=f\left(0,0\right)$，故原函数在$\left(0,0\right)$连续.

偏导数的存在性：$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f\left(0+\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=0$，$\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f\left(0,0+\Delta y\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta y}=0$，

故偏导数存在且 $f_x\left(0,0\right)=f_y\left(0,0\right)=0$.

可微性：$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{f\left(\Delta x,\Delta y\right)-f_x\left(0,0\right)\Delta x-f_y\left(0,0\right)\Delta y-f\left(0,0\right)}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}$

$=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y=kx}}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{\dfrac{|k|}{1+k^2}}$，与 k 有关，故原函

数在$(0,0)$不可微.

偏导数的连续性：当$x>0$且$y>0$时，$f(x,y)=\sqrt{xy}$，$f_x(x,y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$，而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$不存在，故原函数在$(0,0)$偏导数不连续. 故选（B）

（3）二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数$f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$存在是$f(x,y)$在该点连续的（　　）.

（A）充分条件而非必要条件　　（B）必要条件而非充分条件
（C）充分必要条件　　（D）既非充分条件又非必要条件

答案：（D）

解析：偏导数存在不一定连续，举例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\0,\qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点$(0,0)$处偏导数存在且均为0，但$f(x,y)$在$(0,0)$不连续.

函数连续但偏导数不一定存在，举例：$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$连续，但是$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x},f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{|y|}{y}$均不存在. 故选（D）

（4）考虑二元函数的下面4条性质：

①$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；　②$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续；

③$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微；　④$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质P推出性质Q，则有（　　）.

（A）②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①　　（B）③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①
（C）③$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①　　（D）③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$④

答案：（A）

解析：由定理3.1及定理3.2可得.

（5）设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的邻域内有定义，且$f_x(0,0)=1,f_y(0,0)=2$，则（　　）.

（A）$f(0,y)$在$y=0$处不连续

（B） $df(x,y)\big|_{(0,0)}=dx+2dy$

（C） $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{(0,0)}=\cos\alpha+2\cos\beta$ ，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 l 方向的方向余弦

（D） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴负方向的方向导数为-1

答案：（D）

解析：（A）选项，根据偏导数存在无法判断函数的连续性，错误.（B）选项，可偏导不一定可微，错误.（C）选项，可偏导未必沿任一方向的方向导数存在，错误.（D）选项，函数沿 x 轴负方向的方向导数为 $-f_x(0,0)=-1$. 故选（D）

（6）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=1,$ 则（　　）.

（A） $dz\big|_{(0,0)}=3dx+dy$

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0，f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$

（C）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0，f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0，f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$

答案：（C）

解析：（A）选项，可偏导不一定可微，错误.（B）选项，由于不能保证可微，从而不能保证曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0，f(0,0))$ 处存在切平面. 即使有切平面，法向量为 $(3,1,-1)$.（C）选项，取 x 为参数，则曲线 $x=x$ ， $y=0$ ， $z=f(x,0)$ 在点 $(0,0，f(0,0))$ 处的切向量为 $(1,0,3)$ ，正确.（D）选项错误. 故选（C）

（7）已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$ ，则（　　）.

（A）点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

（B）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

（C）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

（D）根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

答案：（A）

解析：法一：令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，则由题设可知 $f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4)$. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\rho\to 0$. 由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近的值主要由 xy 决定，而 xy 在 $(0,0)$ 附近符号不定，故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，即应选（A）.

法二：取两条路径 $y=x$ 和 $y=-x$ 来考虑. 当 $|x|$ 充分小时，$f(x,x)=x^2+4x^4+o(x^4)>0$，$f(x,-x)=-x^2+4x^4+o(x^4)<0$. 故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，即应选（A）.

（8）设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有（　　）

（A）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　（B）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

（C）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　（D）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

答案：（B）

解析：$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$

故选（B）

（9）若 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　　）

（A）若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则 $f_y(x_0,y_0)=0$　（B）若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$

（C）若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0)=0$　（D）$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$

答案：(D)

解析：$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

根据拉格朗日函数极值点满足的条件，在 (x_0,y_0) 满足：

$$\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x=f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0---(1) \\ F_y=f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0---(2) \end{cases}$$

若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则由（1）可得，$\lambda=0$ 或 $\varphi_x(x_0,y_0)=0$.

当 $\lambda=0$ 时，由（2）可得，$f_y(x_0,y_0)=0$；

当 $\varphi_x(x_0,y_0)=0$ 时，由（2）可得，$f_y(x_0,y_0)\neq 0$，故选项（A）、选项（B）错误.

若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，由(1)可得 $\lambda\neq 0$. 再由(2)及 $\varphi_y(x,y)\neq 0$ 可得，$f_y(x_0,y_0)\neq 0$，故选项（D）正确.

（10）函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于（　　）

（A）i　（B）$-i$　（C）j　（D）$-j$

答案：(A)

解析：$\nabla f\Big|_{(0,1)}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(0,1)}=i$ ，故选项（A）正确.

2. 填空题

（1）设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f\left(x^y,y^x\right)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{f_1 yx^{y-1}+f_2 y^x\ln y}$

解析：求偏导问题，注意复合函数链式求导法则即可.

（2）$f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{f_{12}x+f_2+f_{22}xy}$

解析：求偏导问题，注意复合函数链式求导法则即可.

（3）设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{(2,1/\pi)}=$ $\underline{\dfrac{\pi^2}{e^2}}$

解析：$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-x}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\sin\frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{-x}\left(\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y}\right)$$

再将$\left(2,\frac{1}{\pi}\right)$代入即可.

（4）设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f,\varphi$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)}$

解析：求偏导问题，注意复合函数链式求导法则即可.

（5）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$ $\underline{-dx+2dy}$

解析：方程两边取全微分：

$$zdx+xdz+dz-2ydy=2xf(x-z,y)dx+x^2\left[f_1(dx-dz)+f_2dy\right]$$

代入 $x=0,y=1,z=1$ 得：$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

（6）函数 $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度=$\underline{\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9}\right)}$

解析：$\nabla u\big|_{(1,2,-2)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,2,-2)}=\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9}\right)$

（7）曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程是 $\underline{2x+4y-z=5}$

解析：$F(x,y,z)=z-x^2-y^2$

$F_x=-2x,F_y=-2y,F_z=1$

设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则切平面的法向量为 $(-2x_0,-2y_0,1)$

由题设可知，$\begin{cases}\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{4}=\frac{1}{-1}\\ z_0={x_0}^2+{y_0}^2\end{cases}$

解得，$x_0=1,y_0=2,z_0=5$

故切平面为：$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$, 即 $2x+4y-z=5$

（8）曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为 $\underline{x-1=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}}$

解析：$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$

$F_x=2x, F_y=4y, F_z=1-e^z$

则切平面的法向量为 $(1,-4,6)$

故法线方程为：$x-1=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$

（9）曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{2x+y-4=0}$

解析：$F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$

$F_x=2y, F_y=2x, F_z=1-e^z$

则切平面的法向量为 $(4,2,0)\parallel(2,1,0)$

故切平面方程为：$2x+y-4=0$

（10）在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线的个数为 $\underline{\quad 2 \quad}$

解析：切向量为：$(1,-2t,3t^2)$

给定平面的法向量为：$(1,2,1)$

则有：$1-4t+3t^2=0$

解得：$t_1=1, t_2=\frac{1}{3}$

当 $t=1$ 时，切线为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$，不在给定平面上，成立；

当 $t=\frac{1}{3}$ 时，切线为：$\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$，不在给定平面上，成立.

综上，满足条件的切线共有两条.

3. 设 $u=z^{y^x}$ ，求所有的一阶偏导数.

答案： $\frac{\partial u}{\partial x}=y^x z^{y^x}\ln y\ln z$ ， $\frac{\partial u}{\partial y}=xy^{x-1}z^{y^x}\ln z$ ， $\frac{\partial u}{\partial z}=y^x z^{y^x-1}$

解： $\frac{\partial u}{\partial x}=z^{y^x}\ln z\cdot y^x\ln y=y^x z^{y^x}\ln y\ln z$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z^{y^x}\ln z\cdot xy^{x-1}=xy^{x-1}z^{y^x}\ln z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y^x\cdot z^{y^x-1}=y^x z^{y^x-1}$$

解析：根据复合函数链式求导法则求导即可.

4. 设 $f(x,y)=x^3\cos(1-y)+(y-1)\sin\sqrt{\frac{x}{y}}$ ，求 $f_x(x,1),f_x(1,1),f_y(1,1)$.

答案： $f_x(x,1)=3x^2, f_x(1,1)=3, f_y(1,1)=\sin 1$

解：代入 $y=1$ ，可得$f(x,1)=x^3$,故$f_x(x,1)=3x^2$

代入 $x=1$,可得$f_x(1,1)=3$.

对于 $f(x,y)$ ，代入 $x=1$ ，则有 $f(1,y)=\cos(1-y)+(y-1)\sin\sqrt{\frac{1}{y}}$

$$f_y(1,y)=\sin(1-y)+\sin\sqrt{\frac{1}{y}}+(y-1)\cos\sqrt{\frac{1}{y}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{3}{2}}$$

故 $f_y(1,1)=\sin 1$.

解析：求关于某一个变量的偏导数，可以先直接将题目中给出的另一变量的已知常数代入，这样可以简化计算.

5. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $y=f(e^x,\cos x)$ ，求 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0},\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=0}$.

答案： $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}=f_1(1,1),\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=0}=f_1(1,1)+f_{11}(1,1)-f_2(1,1)$

解：由复合函数链式求导法则，

$$\frac{dy}{dx}=f_1e^x-f_2\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=f_1(1,1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f_1e^x+e^x\left(f_{11}e^x-f_{12}\sin x\right)-f_2\cos x-\sin x\left(f_{21}e^x-f_{22}\sin x\right)$$

$$=f_1e^x+e^{2x}f_{11}-2e^xf_{12}\sin x-f_2\cos x+f_{22}\sin^2 x$$

故 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=f_1(1,1)+f_{11}(1,1)-f_2(1,1)$

解析：求出函数对变量的偏导数，再代入具体的值即可.

6. 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，试讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微.

答案：可微.

解：由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)=0$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

由于 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，故 $f(0,0)=0$.

而 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x^2}\cdot x,$

其中 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=0,$

故 $f_x(0,0)=0,$ 同理 $f_y(0,0)=0.$

而：

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

解析：利用定义判断函数是否可微

7. 求函数 $f(x,y)=\left(1+e^y\right)\cos x-ye^y$ 的极值点及相应的极值.

答案：极大值点为$\left(2k\pi,0\right)$，$k\in Z$，极大值为 2；无极小值.

解：由$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\left(1+e^{y}\right)\sin x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\cos x\cdot e^{y}-e^{y}-ye^{y}=0\end{cases}$

解得驻点为：$\left(2k\pi,0\right)$和$\left(2k\pi+\pi,-2\right)$，其中$k\in\mathbb{Z}$

$$\begin{cases}f_{xx}=-\left(1+e^{y}\right)\cos x\\ f_{xy}=-e^{y}\sin x\\ f_{yy}=e^{y}\cos x-2e^{y}-ye^{y}\end{cases}$$

①在$\left(2k\pi,0\right)$处：

$A=-2,B=0,C=-1$

$AC-B^{2}=2>0,A<0$

故在该点处取极大值，且极大值为 2；

②在$\left(2k\pi+\pi,-2\right)$处：

$A=1+e^{-2},B=0,C=-e^{-2}$

$AC-B^{2}<0$

故在该点处无极值.

综上，极大值点为$\left(2k\pi,0\right)$，$k\in Z$，极大值为 2；无极小值点和极小值.

解析：此题为求无约束条件的极值点。利用一阶偏导数为 0 求出驻点，再利用 Hesse 阵判断即可.

8. 设函数 $f\left(u,v\right)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^{2}f}{\partial u^{2}}+\dfrac{\partial^{2}f}{\partial v^{2}}=1$，令 $g\left(x,y\right)=f\left(xy,\dfrac{1}{2}\left(x^{2}-y^{2}\right)\right)$，求$\dfrac{\partial^{2}g}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2}g}{\partial y^{2}}$.

答案：$\dfrac{\partial^{2}g}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2}g}{\partial y^{2}}=x^{2}+y^{2}$

解：$\dfrac{\partial g}{\partial x}=f_{1}y+f_{2}x$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\left(f_{11}y+f_{12}x\right)y+f_2+x\left(f_{21}y+f_{22}x\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=f_1x-f_2y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\left(f_{11}x-f_{12}y\right)x-y\left(f_{21}x-f_{22}y\right)-f_2$$

由题设可知， $f_{12}=f_{21}$

故 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\left(x^2+y^2\right)\left(f_{11}+f_{22}\right)=x^2+y^2$

解析：直接使用链式求导法则求解多元复合函数的偏导数.

9. 设 $z=z\left(x,y\right)$ 具有二阶连续偏导数，且在变换 $u=x-2y,v=x+ay$ 下可将方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a.

答案： $a=3$

解： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\left(a-2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

代入 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 并与 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ 比较可得：

$$\begin{cases}12+a-2+4a\neq 0\\6+a-a^2=0\end{cases}$$

解得： $a=3$

解析：z 是 u, v 的函数，而 u, v 都是 x 和 y 的函数，求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，再代入

$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 即可.

10. 函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（1）求 dz；（2）记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

答案：（1）$dz=\frac{2x-\varphi'}{\varphi'+1}dx+\frac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}dy$；（2）$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2\varphi''(1+2x)}{(1+\varphi')^3}$.

解：（1）方程两边取全微分：

$$2xdx+2ydy-dz=\varphi'(dx+dy+dz)$$

整理可得：

$$dz=\frac{2x-\varphi'}{\varphi'+1}dx+\frac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}dy$$

（2）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-\varphi'}{\varphi'+1},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}$

故 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{2}{1+\varphi'}$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2}{(1+\varphi')^2}\cdot\varphi''\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{2\varphi''(1+2x)}{(1+\varphi')^3}.$$

解析：（1）对于隐函数求微分，利用一阶微分形式不变性，对等式两边同时求积分即可；（2）φ 是 x,y,z 的函数，而 z 又是 x,y 的函数，利用复合函数链式求导法则求导即可

11. 设 $\varphi(u)$ 可导且 $\varphi(0)=1$，二元函数 $z=\varphi(x+y)e^{xy}$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$，求 $\varphi(u)$.

答案：$\varphi(u)=e^{-\frac{1}{4}u^2}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi' e^{xy}+\varphi y e^{xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi' e^{xy}+\varphi x e^{xy}$$

故 $2\varphi'+\left(x+y\right)\varphi=0$

令 $u=x+y$，则有：$2\varphi'+u\varphi=0$

即 $2\dfrac{d\varphi}{\varphi}=-udu$

而 $\varphi\left(0\right)=1$

解得：$\varphi\left(u\right)=e^{-\frac{1}{4}u^2}$.

解析：求导后利用等式解微分方程即可.

12. 已知函数 $f\left(x,y\right)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f\left(x,y\right),\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x\cos y,f\left(0,0\right)=0$，求 $f\left(x,y\right)$.

答案：$f\left(x,y\right)=e^x\sin y$

解：方程 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=e^x\cos y$ 两边同时对 y 积分：

$$f\left(x,y\right)=e^x\sin y+\varphi\left(x\right)$$

两边同时对 x 求导：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\sin y+\varphi'\left(x\right)=f\left(x,y\right)$$

故 $\varphi\left(x\right)=\varphi'\left(x\right)$

由 $f\left(0,0\right)=0$，得 $\varphi\left(0\right)=\varphi'\left(0\right)=0$

故 $\varphi\left(x\right)=0$

$$f\left(x,y\right)=e^x\sin y$$

解析：本题先对 y 进行积分，再对 x 求导，利用等式条件即可求出 $f\left(x,y\right)$，

13. 设 $z=z\left(x,y\right)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数。求 $z=z\left(x,y\right)$ 得极值点和极值.

答案：极小值 $z(9,3)=3$，极大值 $z(-9,-3)=-3$.

解：方程两边取全微分得：

$$xdx-3ydx-3xdy+10ydy-zdy-ydz-zdz=0$$

整理可得：

$$dz=\frac{x-3y}{y+z}dx+\frac{-3x+10y-z}{y+z}dy$$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z}$

由 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=3y\\ z=y\end{cases}$

代入原方程，解得：$y=\pm 3$

故驻点为：$(9,3),(-9,-3)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y+z-(x-3y)\frac{\partial z}{\partial x}}{(y+z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-3(y+z)-(x-3y)\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(y+z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(y+z)\left(10-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(-3x+10y-z)}{(y+z)^2}$$

①在点 $(9,3)$ 处：

$$A=\frac{1}{6},B=-\frac{1}{2},C=\frac{5}{3}$$

$$AC-B^2=\frac{1}{36}>0,A>0$$

故在该点取得极小值 3.

②在点 $(-9,-3)$ 处：

$$A=-\frac{1}{6},B=\frac{1}{2},C=-\frac{5}{3}$$

$$AC-B^2=\frac{1}{36}>0, A<0$$

故在该点取得极大值-3.

解析：利用一阶微分形式不变性求得 $z=z(x,y)$ 的全微分，即可得到 z 对 x,y 的偏导数，偏导数为零求得驻点，利用 Hesse 阵判断是否为极值。

14. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0, \\ x+y+3z=5 \end{cases}$ 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

答案：最远点 $(-5,-5,5)$，最近点 $(1,1,1)$.

解：本题即求 $u=z$ 在相应约束条件下的最值

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda\left(x^2+y^2-2z^2\right)+\mu(x+y+3z-5)$$

$$由\begin{cases} L_x=2x\lambda+\mu=0 \\ L_y=2y\lambda+\mu=0 \\ L_z=1-4z\lambda+3\mu=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-2z^2=0 \\ L_\mu=x+y+3z-5=0 \end{cases}$$

解得驻点为：$(1,1,1)$ 和 $(-5,-5,5)$

故最远点为 $(-5,-5,5)$，最近点为 $(1,1,1)$.

解析：求解有约束极值一般利用拉格朗日乘数法.

15. 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

（1）验证 $f''(u)+\frac{1}{u}f'(u)=0$；

（2）若 $f(1)=0$， $f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

答案：（2） $f(u)=\ln u$.

解：（1）证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$=f''\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

同理：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''+f'\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

令：$u=\sqrt{x^2+y^2}$，

则 $f''(u)+\frac{1}{u}f'(u)=0$，得证.

（2）令 $f'(u)=v$

则 $v'+\frac{1}{u}v=0$

解得：$v=\frac{C_1}{u}$

代入 $f'(1)=1$ 得，$C_1=1$，故 $v=\frac{1}{u}$，即 $f'(u)=\frac{1}{u}$

由 $f'(u)=\frac{1}{u}$ 解得：$f(u)=\ln u+C_2$

代入 $f(1)=0$ 得，$C_2=0$

故 $f(u)=\ln u$

解析：第（1）问求出偏导数带入已知等式即可；第（2）问是解微分方程问题.

16. 求曲面 $2^{x/z}+2^{y/z}=8$ 在点 $P(2,2,1)$ 处的切平面方程和法线方程.

答案：切平面方程：$x+y-4z=0$，法线方程：$x-2=y-2=\frac{1-z}{4}$.

解：方程两边取全微分得：$\ln 2\cdot 2^{x/z}\left(\dfrac{zdx-xdz}{z^2}\right)+\ln 2\cdot 2^{y/z}\left(\dfrac{zdy-ydz}{z^2}\right)=0$

即：$2^{x/z}zdx+2^{y/z}zdy-\left(x2^{x/z}+y2^{y/z}\right)dz=0$

故曲面在(x,y,z)处切平面的法向量为：$\left(2^{x/z}z,2^{y/z}z,-x2^{x/z}-y2^{y/z}\right)$

代入点$P(2,2,1)$，得法向量：$(4,4,-16)\,/\!/\,(1,1,-4)$

故切平面方程：$(x-2)+(y-2)-4(z-1)=0$，

即：$x+y-4z=0$

法线方程：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$即$x-2=y-2=\dfrac{1-z}{4}$.

解析：曲面切平面的法向量求法：若曲面为$F(x,y,z)=0$，则法向量$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

17. 已知函数$f(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x+y$，且$f(x,0)=x^2$，$f(0,y)=y$，求$f(x,y)$.

答案：$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{xy^2}{2}+x^2+y$.

解：设$z=f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\int_0^x(x+y)dx+\varphi_0(y)=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi_0(y)$$

$$z=\int_0^y\left(\frac{x^2}{2}+xy+\varphi_0(y)\right)dy=\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\varphi(y)+\psi(x)$$

其中$\varphi(y)=\int_0^y\varphi_0(y)dy$

由$f(x,0)=x^2$，得$\psi(x)=x^2$

由$f(0,y)=y$，得$\varphi(y)=y$

故$z=\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{xy^2}{2}+x^2+y$.

解析：已知偏导数求原函数使用积分方法.

18. 已知两平面曲线 $f(x,y)=0, g(x,y)=0$，又 (α,β) 和 (ξ,η) 分别为两曲线上的点，试证：如果这两点是两曲线上相距最近或最远的点，则下列关系成立

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x(\alpha,\beta)}{f_y(\alpha,\beta)}=\frac{g_x(\xi,\eta)}{g_y(\xi,\eta)}.$$

证明：构造 $h(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

其中 $\vec{x}_1=(x_1,y_1),\vec{x}_2=(x_2,y_2)$

约束条件为 $f(\vec{x}_1)=0, g(\vec{x}_2)=0$

$L=h(\vec{x}_1,\vec{x}_2)+\lambda f(\vec{x}_1)+\mu g(\vec{x}_2)$

$$\begin{cases} L_{x_1}=2(x_1-x_2)+\lambda f_{x_1}(x_1,y_1)=0 \\ L_{x_2}=2(x_1-x_2)+\mu g_{x_2}(x_2,y_2)=0 \\ L_{y_1}=2(y_1-y_2)+\lambda f_{y_1}(x_1,y_1)=0 \\ L_{y_2}=2(y_1-y_2)+\mu g_{y_2}(x_2,y_2)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f_{x_1}(\alpha,\beta)}{f_{y_1}(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}$$

$$\frac{g_{x_2}(\xi,\eta)}{g_{y_2}(\xi,\eta)}=\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}$$

故 $\dfrac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\dfrac{f_x(\alpha,\beta)}{f_y(\alpha,\beta)}=\dfrac{g_x(\xi,\eta)}{g_y(\xi,\eta)}$，得证.

解析：利用拉格朗日乘数法化简即可.

19. 已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

答案：3

解：$F=f_x^{\ 2}+f_y^{\ 2}=(1+y)^2+(1+x)^2$

$$L(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda\left(x^2+y^2+xy-3\right)$$

由 $\begin{cases} L_x=2x+2+2\lambda x+\lambda y=0 \\ L_y=2y+2+2\lambda y+\lambda x=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$

解得驻点为：$(1,1),(-1,-1),(2,-1),(-1,2)$

$F(1,1)=8$

$F(-1,-1)=0$

$F(2,-1)=F(-1,2)=9$

故 $\max\left\{\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x,y)\in C}\right\}=\max\sqrt{F}=\sqrt{\max F}=3$

即 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

解析：在任一点处，最大的方向导数是沿梯度方向的，其值为梯度的模，以 $F=f_x^{\ 2}+f_y^{\ 2}$ 为目标函数，利用拉格朗日乘数法可求得在曲线 C 上的方向导数的最大值.

总结：第 5 章多元函数微分学是一元函数微分学的推广，因此题目类型也有较多相似，学习和刷题过程中注意两者的关联能事半功倍。第 5 章习题中涉及概念较多，如多元函数的极限、连续性、偏导数、全微分、方向导数、梯度等，且对应题目大多有套路型方法，刷题前最好先把课本中的概念理解，刷题时注意总结套路。

第六章习题及解答

1. 选择题(在每小题给出的四个选项中只有一个是正确的,试选择正确的选项并说明理由.)

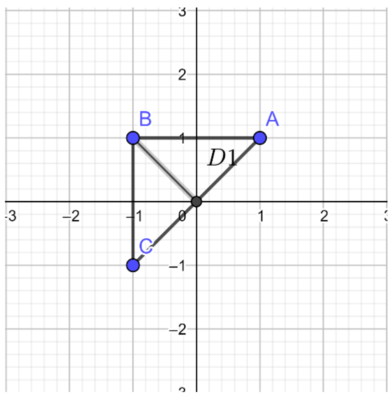
(1) 设(D)是xOy平面上以(1, 1), (−1, 1)和(−1, −1)为顶点的三角形区域, (D_1)是(D)在第一象限的部分, 则$\iint\limits_{(D)}(xy+\cos x\sin y)dxdy$等于( )

(A) $2\iint\limits_{(D_1)}\cos x\sin ydxdy$　　(B) $2\iint\limits_{(D_1)}xydxdy$

(C) $4\iint\limits_{(D_1)}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　(D) 0

答案:(A)

解析:如图,连接 OB,区域 OAB(记为(D_2))关于 y 轴对称



$\because f(x,y)=xy$ 对 x 为奇函数

$\therefore \iint\limits_{(D_2)}xydxdy=0$

$\because f(x,y)=\cos x\sin y$对 x 为偶函数

$\therefore \iint\limits_{(D_2)}\cos x\sin ydxdy=2\iint\limits_{(D_1)}\cos x\sin ydxdy$

区域 OBC(记为(D_3))关于 x 轴对称

$\because f(x,y)=xy$对 y 为奇函数, $f(x,y)=\cos x\sin y$对 y 为奇函数

$\therefore \iint\limits_{(D_3)}(xy+\cos x\sin y)dxdy=0$

$$\therefore \iint\limits_{(D)}\cos x\sin ydxdy=\iint\limits_{(D_2)}\cos x\sin ydxdy+\iint\limits_{(D_3)}(xy+\cos x\sin y)dxdy=2\iint\limits_{(D_1)}\cos x\sin ydxdy$$

(2) 设$f(x)$为连续函数, $F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$, 则$F'(2)$等于( ).

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$　　(C) $-f(2)$　　(D) 0

答案:(B)

解析:交换积分顺序

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx \\
&= \int_1^t dx \int_1^x f(x)dy \\
&= \int_1^t (x-1) f(x)dx
\end{aligned}
$$

$$\therefore F'(t) = (t-1) f(t)$$

$$\therefore F'(2) = f(2)$$

(3)设 $f(x)$ 是连续函数,已知 $\int_0^1 f(x)dx = A$(常数),则 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$ 等于( ).

(A) A (B) $\frac{A}{2}$ (C) A^2 (D) $\frac{A^2}{2}$

答案:(D)

解析:

法一:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy &= -\int_0^1 \int_x^1 f(y)dyd\left[\int_x^1 f(y)dy\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\int_x^1 f(y)dy\right]^2\Bigg|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}(0-A^2) = \frac{1}{2}A^2
\end{aligned}
$$

法二:

根据对称性:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy &= \int_0^1 dy\int_y^1 f(y)f(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^1 f(y)f(x)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}A^2
\end{aligned}
$$

(4) 设有空间区域 $(\Omega_1) = \left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2 \le R^2, z \ge 0\right\}$ 及空间区域 $(\Omega_2) = \left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\right\}$,则( ).

(A) $\iiint\limits_{(\Omega_1)} xdV = 4\iiint\limits_{(\Omega_2)} xdV$ (B) $\iiint\limits_{(\Omega_1)} ydV = 4\iiint\limits_{(\Omega_2)} ydV$

(C) $\iiint\limits_{(\Omega_1)} zdV = 4\iiint\limits_{(\Omega_2)} zdV$ (D) $\iiint\limits_{(\Omega_1)} xyzdV = 4\iiint\limits_{(\Omega_2)} xyzdV$

答案:(C)

解析:区域(Ω_1)关于xOz平面,yOz平面对称

根据奇偶性:$f(x,y,z)=z$关于 x、y 为偶函数

$$\therefore \iiint\limits_{(\Omega_1)} zdV = 4\iiint\limits_{(\Omega_2)} zdV$$

A、B、D 的被积函数关于 x(或 y)为奇函数,所以左侧为 0,选项错误

(5)设$(\Omega)=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 2y-2x\right\}$,则$\iint\limits_{(\Omega)}(x+y+z)dV$等于( ).

(A)0 (B)$\frac{4}{3}\pi$ (C)-$\frac{4}{3}\pi$ (D)$\frac{8}{3}\sqrt{2}\pi$

答案:(A)

解析:

法一:

$$(\Omega)=\left\{(x,y,z)\middle|(x+1)^2+(y-1)^2+z^2\le 2\right\}$$

被积函数 $f(x,y,z)=x+y+z=(x+1)+(y-1)+z$

进行坐标变换:$\begin{cases} X=x+1 \\ Y=y-1 \\ Z=z \end{cases}$

$$(\Omega')=\left\{(X,Y,Z)\middle|X^2+Y^2+Z^2\le 2\right\}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\iiint\limits_{(\Omega')}(X+Y+Z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}\right|dXdYdZ \\
&=\iiint\limits_{(\Omega')}(X+Y+Z)dXdYdZ \\
&=\iiint\limits_{(\Omega')}XdV+\iiint\limits_{(\Omega')}YdV+\iiint\limits_{(\Omega')}ZdV
\end{aligned}$$

积分域关于三个坐标平面都对称,且上式关于 X,Y,Z 为奇函数
所以原式结果为 0

法二:

利用形心坐标:

闭区域 $x^2+y^2+z^2\le 2y-2x$ 即 $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2\le 2$

设 (Ω) 的形心为 $(x_c,y_c,z_c)=(-1,1,0)$，体积为 $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

那么 原式 $=(x_c+y_c+z_c)\cdot V=0$

(6)设有曲面 $(S)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)\}$，$(S_1)$ 为 (S) 在第一卦限中的部分，则有( ).

(A) $\iint\limits_{(S)} xdS=4\iint\limits_{(S_1)} xdS$　　(B) $\iint\limits_{(S)} ydS=4\iint\limits_{(S_1)} xdS$

(C) $\iint\limits_{(S)} zdS=4\iint\limits_{(S_1)} zdS$　　(D) $\iint\limits_{(S)} xyzdS=4\iint\limits_{(S_1)} xyzdS$

答案:(C)

解析:区域(S)关于 xOz 平面，yOz 平面对称

根据奇偶性: $f(x,y,z)=z$ 关于 x、y 为偶函数

$$\therefore \iint\limits_{(S)} zdS=4\iint\limits_{(S_1)} zdS$$

A、B、D 的被积函数关于 x(或 y)为奇函数，所以左侧为 0，选项错误

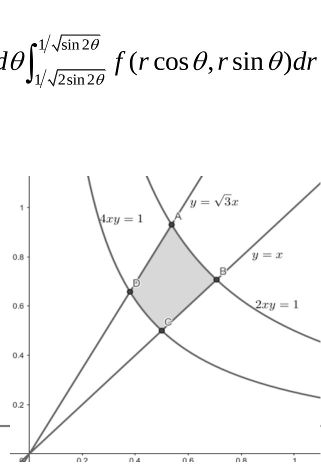
(7)设 D 是第一象限中曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy=$( ).

(A) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\int_{1/2\sin 2\theta}^{1/\sin 2\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　　(B) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\int_{1/\sqrt{2\sin 2\theta}}^{1/\sqrt{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\int_{1/2\sin 2\theta}^{1/\sin 2\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$　　(D) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\int_{1/\sqrt{2\sin 2\theta}}^{1/\sqrt{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

答案:(B)

解析:画出积分域草图如图



用极坐标表示为: $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\le\rho\le\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$$

$$\text{原式}=\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\theta\int_{1/\sqrt{2\sin2\theta}}^{1/\sqrt{\sin2\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$
$$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}d\theta\int_{1/\sqrt{2\sin2\theta}}^{1/\sqrt{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

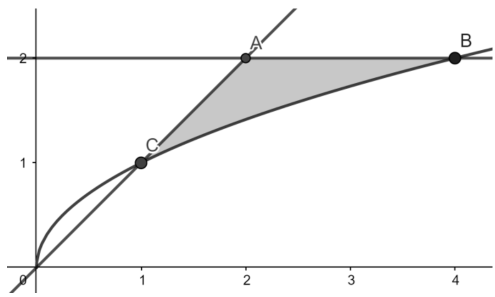
2. 计算 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$

答案: $\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{2}{\pi}+1\right)$

解:积分域如图所示

交换积分顺序

$$\text{原式}=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$$
$$=\int_1^2\left(-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\bigg|_y^{y^2}\right)dy$$
$$=\int_1^2\left(-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}\right)dy$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy$$
$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}y\sin\frac{\pi y}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi y}{2}\right)\bigg|_1^2$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{2}{\pi}+1\right)$$



解析:计算多重积分,所求结果的式子是多个积分的和或单多重积分按原有积分次序难以计算时,交换积分次序是一个常规选择,本题属于多个积分式子的情形.

3. 计算 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$

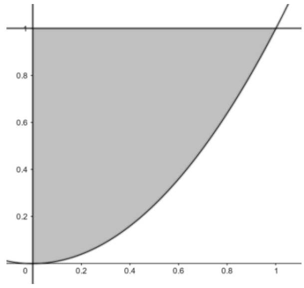
答案: $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

解:积分域对应的草图如图所示,考虑到被积函数不方便直接对 y 积分,所以交换积分顺序.

$$原式=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}dy$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$



解析:本题同第 2 题,本题属于单个多重积分按原有积分顺序难以计算的情形.

4. 计算 $\iint\limits_{(D)} ydxdy$, 其中(D)由直线 $x=-2$, $y=0, y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成.

答案: $4-\dfrac{\pi}{2}$

解:

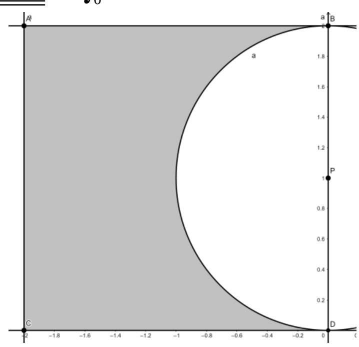
法一:直接积分

画出积分域草图,化为 Y-型区域更方便积分

$$\iint\limits_{(D)} ydxdy=\int_0^2 dy\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} ydx=\int_0^2\left(2-\sqrt{2y-y^2}\right)ydy$$

$$=y^2\Big|_0^2-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}dy\xlongequal{令y-1=\cos\theta}4-\int_0^{\pi}(\cos\theta+1)\sin^2\theta d\theta$$

$$=4-\frac{\pi}{2}$$



法二:利用形心坐标

设区域的形心坐标为 (x_c, y_c), 面积为 S

则其中 $y_c=1$, $S=2^2-\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2=4-\dfrac{\pi}{2}$

因此原式 $=y_c\cdot S=4-\dfrac{\pi}{2}$

解析:一般情况下,积分区域规则的多重积分,如果能使用形心坐标,往往是最简单且不易出错的做法.

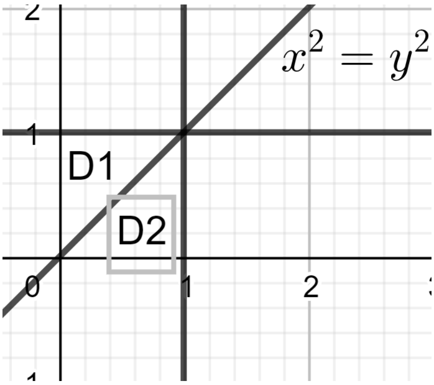
5. 计算二重积分 $\iint\limits_{(D)} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$, 其中 $(D)=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

答案: $e-1$

解:

法一:分类讨论直接计算

如图:将 (D) 划分为 D_1 和 D_2 两区域, 在 D_1 区域 $y^2\ge x^2$, 在 D_2 区域 $x^2\ge y^2$



$$\iint\limits_{(D_1)} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint\limits_{(D_1)} e^{y^2}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx$$

$$= \int_0^1 ye^{y^2}dy = \frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\iint\limits_{(D_2)} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint\limits_{(D_2)} e^{x^2}dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\therefore \iint\limits_{(D)} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint\limits_{(D_1)} e^{y^2}dxdy + \iint\limits_{(D_2)} e^{x^2}dxdy = e-1$$

法二:直接使用轮换对称性

$$\iint\limits_{(D_1)} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le x}} e^{x^2}dxdy + \iint\limits_{\substack{0\le y\le 1\\0\le x\le y}} e^{y^2}dydx = 2\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le x}} e^{x^2}dxdy = 2\int_0^1 e^{x^2}dx\int_0^x dy$$

$$= 2\int_0^1 xe^{x^2}dx = e-1$$

解析:求解二重甚至三重积分时,若可以,使用轮换对称性的应用往往能简化问题.

6. 物质均匀分布的平面薄板由 $x^2+y^2\le ax$ 和 $x^2+y^2\le ay\left(a>0\right)$ 的公共部分所确定,求其质心的坐标.

答案:$\left(\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}a\right)$

解:薄板面积 $S=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)a^2$

$$\iint\limits_{(D)} xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sin\theta}\rho\cos\theta\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho\cos\theta\rho d\rho$$

$$=\frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta d\sin\theta+\frac{1}{3}a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=a^3(\frac{\pi}{32}-\frac{1}{16})$$

$$\therefore x_0=\frac{\iint\limits_{(D)} xdx}{S}=\frac{1}{4}a$$

由对称性 $y_0=x_0=\frac{1}{4}a$

$\therefore$质心坐标为$\left(\frac{1}{4}a,\frac{1}{4}a\right)$

解析:本题所求叶形区域的形心其实可以通过画草图由对称性直接看出.

7. 设立体由曲面 $z=3x^2+y^2$ 与 $z=1-x^2$ 围成, 求该立体的体积.

答案: $\frac{\pi}{4}$

解:该立体在 xOy 平面上的投影为 $4x^2+y^2\le 1$

用先单后重法积分

$$V=\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma\int_{3x^2+y^2}^{1-x^2}dz=\iint\limits_{(\sigma)}\left(1-4x^2-y^2\right)dxdy$$

令$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$$\therefore V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|d\rho=2\pi\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\frac{1}{2}\rho d\rho=\frac{1}{4}\pi$$

解析:本题使用广义的极坐标变换简化计算.

8. 设函数 $f(x)$ 连续, 平面有界闭区域由 $|y|\le|x|\le 1$ 确定, 证明:

$$\iint\limits_{(D)} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\pi\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{x}\right)xf(x)dx.$$

证明:设 (D') 为 (D) 在第一象限的部分，根据对称性得

$$\iint\limits_{(D)} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = 4\iint\limits_{(D')} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

$$\iint\limits_{(D')} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} + \iint\limits_{(D_2)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho f(\rho) d\rho$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho f(\rho) d\rho \underline{\underline{\text{交换积分顺序}}} \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{4}} \rho f(\rho) d\rho = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\rho}\right) \rho f(\rho) d\rho$$

$$\therefore \iint\limits_{(D)} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \pi \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4\arccos\frac{1}{x}\right) x f(x) dx$$

得证.

解析: 先通过一定的对称性将积分域化到第一象限, 再由 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的形式想到转换成极坐标形式, 再根据等式右边有两项, 想到要交换积分次序.

9 计算 $\iiint\limits_{(\Omega)} e^{|z|} dV$, 其中 (Ω) 为球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

答案: 2π

解:

由于对称性, 原式 $= 2\iiint\limits_{(\Omega')} e^z dV$　　其中 $(\Omega') = \left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\right\}$

采用切片法积分(先重后单)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2\iiint\limits_{(\Omega')} e^z dV \\ &= 2\int_0^1 dz \iint\limits_{(x^2+y^2 \le 1-z^2)} e^z d\sigma \\ &= 2\int_0^1 \pi(1-z^2) e^z dz \\ &= 2\pi\left(e^z - z^2 e^z + 2z^2 e^z - 2e^z\right)\Big|_0^1 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

10. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f\left(x^2+y^2+z^2\right) dV}{\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right) d\sigma}, \quad G(t) = \frac{\iint\limits_{\mathrm{D}(t)} f\left(x^2+y^2\right) d\sigma}{\int_{-t}^{t} f\left(x^2\right) dx}.$$

其中$\Omega(t)=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le t^2\right\}, D(t)=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le t^2\right\}$.

(1)讨论$F(\mathrm{t})$在区间$(0,+\infty)$内的单调性;

(2)证明当$t>0$时，$F(t)>\frac{2}{\pi}\mathrm{G}(t)$.

解:

(1)

$$\iiint\limits_{\Omega(t)} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2\sin\varphi dr=4\pi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2dr$$

$$\iint\limits_{D(t)} f\left(x^2+y^2\right)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f\left(r^2\right)rdr=2\pi\int_0^t f\left(r^2\right)rdr$$

$$\therefore F(t)=2\frac{\int_0^t f\left(r^2\right)r^2dr}{\int_0^t f\left(r^2\right)rdr}$$

故

$$F'(t)=2\frac{t^2f\left(t^2\right)\int_0^t f\left(r^2\right)rdr-tf\left(t^2\right)\int_0^t f\left(r^2\right)r^2dr}{\left[\int_0^t f\left(r^2\right)rdr\right]^2}$$

$$=\frac{2tf\left(t^2\right)}{\left[\int_0^t f\left(r^2\right)rdr\right]^2}\cdot\int_0^t rf\left(r^2\right)(t-r)dr>0$$

$\therefore F(t)$在$(0,+\infty)$单调递增

(2)

$$G(t)=\frac{2\pi\int_0^t f\left(r^2\right)rdr}{\int_{-t}^t f\left(r^2\right)dr}=\frac{\pi\int_0^t f\left(r^2\right)rdr}{\int_0^t f\left(r^2\right)dr}$$

要证$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$

即证$\int_0^t f\left(r^2\right)r^2dr\cdot\int_0^t f\left(r^2\right)dr-\left(\int_0^t f\left(r^2\right)rdr\right)^2>0$

$$I=\int_0^t f\left(r^2\right)r^2dr\cdot\int_0^t f\left(r^2\right)dr-\left(\int_0^t f\left(r^2\right)rdr\right)^2$$
$$=\iint\limits_{(D_1)} x^2 f\left(x^2\right)f\left(y^2\right)dxdy-\iint\limits_{(D_1)} xyf\left(x^2\right)f\left(y^2\right)dxdy$$
$$=\iint\limits_{(D_1)}\left(x-y\right)xf\left(x^2\right)f\left(y^2\right)dxdy$$

其中$(D_1)=\{(x,y)|0\le x\le t,0\le y\le t\}$

$\because (D_1)$关于$y=x$对称

则$I=\iint\limits_{(D_1)}\left(y-x\right)yf\left(y^2\right)f\left(x^2\right)dxdy$

$\therefore I=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{(D_1)}\left(x-y\right)^2 f\left(x^2\right)f\left(y^2\right)dxdy>0$

$\therefore F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$

解析:本题证明充分利用了轮换对称性.

11. 指出区域$(V)=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 4z\right\}$的形心坐标, 并计算

$I=\iiint\limits_{(V)}\left(x+y+z\right)dV$.

答案:形心坐标$(0,0,2)$, $I=\dfrac{64}{3}\pi$

解:易知该区域为球域，故形心坐标即为球心坐标$(0,0,2)$.

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3=\frac{32}{3}\pi$$

$$x_0=\frac{\iiint\limits_{(V)} xdV}{V}=0\qquad \therefore \iiint\limits_{(V)} xdV=0$$

$$y_0=\frac{\iiint\limits_{(V)} ydV}{V}=0\qquad \therefore \iiint\limits_{(V)} ydV=0$$

$$z_0=\frac{\iiint\limits_{(V)} zdV}{V}=2 \quad \therefore \iiint\limits_{(V)} zdV=\frac{64\pi}{3}$$

$$\therefore I=\frac{64\pi}{3}$$

12. 计算$\iiint\limits_{(\Omega)}\left(x^2+y^2\right)dV$，其中$(\Omega)$是圆台体，其上、下底半径分别为$a,b\left(0<\mathrm{a}<b\right)$，

高为h，下底为xOy面内的圆域$x^2+y^2\le b^2$.

答案：$\dfrac{\pi h\left(a^5-b^5\right)}{10\left(a-b\right)}$

解：采用切片法积分

$$\sqrt{x^2+y^2}\le\frac{a-b}{h}\cdot z+b \qquad 记\, r=\frac{a-b}{h}\cdot z+b$$

$$\therefore 原式=\int_0^h dz\iint\limits_{\left(x^2+y^2\le r^2\right)}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$$

$$=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r \rho^3 d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^h\left(\frac{a-b}{h}\cdot z+b\right)^4 dz$$

$$=\frac{h\pi}{2\left(a-b\right)}\int_b^a t^4dt$$

$$=\frac{\pi h\left(a^5-b^5\right)}{10\left(a-b\right)}$$

解析：本题的关键在于写出积分域以及计算.

13. 设空间区域(Ω)由

$$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},0\le x\le y\le\sqrt{3}x$$

所确定，将三重积分$I=\iiint\limits_{(\Omega)} f\left(x,y,z\right)dV$化为球面坐标下的累次积分.

答案：$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 f\left(r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi dr$

解: $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$$0 \le x \le y \le \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

$$z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow 0 \le r \le 1$$

$$\therefore I = \iiint\limits_{(\Omega)} f(y,z)dV = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 f(r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr$$

解析:锥形域 $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ 和半球形域 $z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\,(z \ge 0)$ 形成一个冰激凌形域,条件 $0 \le x \le y \le \sqrt{3}x$ 相当于对其沿轴切分. 此外，本题的另一个要点在于确定θ, φ的取值范围。通过本题要学会写出类似区域的方法.

14. 设(L)是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 其周长记为 a, 求 $\oint_{(L)}(2xy+3x^2+4y^2)ds$.

答案: $12a$

解:由对称性知, $\oint_{(L)} 2xyds = 0$

$$\text{原式} = \oint_{(L)} 2xyds + 12\oint_{(L)}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)ds = 0 + 12\oint_{(L)} ds = 12a$$

解析:对于线面积分的计算, 合理地借助积分曲线或积分曲面化简被积式是常见的做法.

15. 计算曲面积分 $\iint\limits_{(\Sigma)} zdS$, 其中(Σ)为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2 \le 2x$ 内的部分.

答案: $\dfrac{32\sqrt{2}}{9}$

解:

法一:直接计算

(Σ)在 xOy 平面投影为 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 2x \\ z=0 \end{cases}$

$$\therefore \iint\limits_{(\Sigma)} zdS = \iint\limits_{(x^2+y^2\le 2x)} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{(x^2+y^2\le 2x)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

法二:使用曲面的参数方程

锥面(Σ)的一个参数方程为$\vec{r}(\theta,z)=(z\cos\theta,z\sin\theta,z)\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le z\le 2\cos\theta\end{pmatrix}$

故

$$\vec{r_\theta}(\theta,z)=(-z\sin\theta,z\cos\theta,0)$$

$$\vec{r_z}(\theta,z)=(\cos\theta,\sin\theta,1)$$

有$\left\|\vec{r_\theta}\times\vec{r_z}\right\|=\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0\\ \cos\theta & \sin\theta & 1\end{vmatrix}\right\|=\left\|(z\cos\theta,z\sin\theta,z)\right\|=\sqrt{2}z$

故

$$\iint\limits_{(\Sigma)} zdS=\iint\limits_{\substack{-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le z\le 2\cos\theta}} z\cdot\sqrt{2}zd\theta dz=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}z^2dz=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{3\times 1}\times 1=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

解析:本题是一个常规的第一型曲面积分计算问题,题目本身并不困难,但是笔者希望通过本题展示使用参数方程解决这类问题的一个思路.

16. 设有一高度为$h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化过程中,其表面满足方程$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为$cm$,时间单位为$h$),已知体积减小的速率为侧面积成正比(比例系数为 0.9),问高度为 130 cm 的雪堆全部融化需多少小时?

答案:100h
解:雪堆的体积为

$$V=\iint\limits_{\left(x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2\right)}\left(h-\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{h}\right)d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}h}\left(h-\frac{2\rho^2}{h}\right)\rho d\rho$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{2}h\rho^2-\frac{\rho^4}{2h}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}h}$$

$$=\frac{\pi h^3}{4}$$

雪堆的侧面积为

$$S=\iint\limits_{(\Sigma)}dS=\iint\limits_{\left(x^2+y^2\le\frac{1}{2}h^2\right)}\sqrt{1+\frac{16x^2+16y^2}{h^2}}d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}h}\sqrt{1+\frac{16\rho^2}{h^2}}\rho d\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{h^2}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{16\rho^2}{h^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}h}$$

$$=\frac{13}{12}\pi h^2$$

$$\because\frac{dV}{dt}=0.9S$$

$$\therefore\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=0.9\times\frac{13}{12}\pi h^2$$

$$\because\frac{dh}{dt}=\frac{39}{40}\times\frac{4}{3}=\frac{13}{10}$$

$\therefore$ h 从 130 减小到 0 所需时间为 $\frac{130}{1.3}=100h$.

解析:本题是应用多元函数积分学知识解决应用问题的一个典型实例,值得读者稍加关注.

17. 质点 P 沿着以 AB 为直径的下半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 F 作用,F 的大小等于点 P 到原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$,求变力 F 对质点 P 所做的功.

答案: $2\pi-2$

解: $\vec{F}=\left(\sqrt{x^2+y^2}\sin\theta,\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta\right)=(-y,x)$

$$W=\int_{(1,2)}^{(3,4)}\vec{F}\cdot\vec{ds}=\int_{(1,2)}^{(3,4)}-ydx+xdy$$

补由 B 到 A 的直线段 L'

下面利用格林公式计算:

$$W=\oint_{(L+L')}-\int_{(L')}$$

$$=2\iint_{(\sigma)}d\sigma+\int_1^3\left[-(x+1)+x\right]$$

$$=2\pi-2$$

解析:本题的核心在于求出力 $\vec{F}(x,y)$ 的函数表达式, 并补充路径运用格林积分公式简化计算.

18. 计算曲线积分 $I=\oint_{(L)}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 (L) 是不经过原点 $O(0,0)$ 的任一分段光滑的简单闭曲线的正向.

答案:当 (L) 不包围点 O 时, $I=0$;当 (L) 包围点 O 时, $I=\pi$.

解:

分所围区域包括原点和不包括原点两种情况，运用格林公式计算

①若闭曲线所围区域不包含原点

$$I=\oint_{(L)}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

令 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$

$$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

由格林公式得 $I=\iint_{(\sigma)}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

②若闭曲线所围区域包含原点

取 (L') 为 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$ 的逆时针方向, 其中 $\varepsilon>0$ 足够小, 以至于完全含在 (L) 内

$$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\therefore$ 积分与路径无关

$$\int \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int xdy - ydx = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint 2d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} * 2 * \pi * \frac{\varepsilon}{2} * \varepsilon = \pi$$

解析:本题需要分类讨论,且使用格林公式和闭路变形原理,这种构造特殊路径的方式值得读者关注.

19. 求 $I = \int\limits_{(L)} \left(e^x \sin y - b(x+y)\right)dx + \left(e^x \cos y - ax\right)dy$, 其中 a,b 为正的常数, (L) 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O\left(0,0\right)$ 的弧.

答案: $\left(\frac{\pi}{2}\left(b-a\right) + 2b\right)a^2$

解:补充路径, $\left(L'\right): y = 0\left(0 \le x \le 2a\right)$

$$\begin{aligned} I &= \oint\limits_{(L+L')} - \int\limits_{(L')} \\ &= \iint\limits_{(\sigma)} \left[\left(e^x \cos y - a\right) - \left(e^x \cos y - b\right)\right] d\sigma - \int_0^{2a} -bxdx \\ &= (b-a)\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma + \int_0^{2a} bxdx \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\left(b-a\right) + 2b\right)a^2 \end{aligned}$$

解析:本题是常规的平面内第二型线积分问题,一般做法有格林公式,闭路变形原理,利用积分与路径无关等.使用格林公式时,可能需要补充路径.

20. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x \end{cases}$,起点为 $A\left(0,\sqrt{2},0\right)$,终点为 $B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$,计算 $I = \int_L \left(y+z\right)dx + \left(z^2 - x^2 + y\right)dy + x^2 y^2 dz$.

答案: $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

解:

方法一:利用斯托克斯公式:

补充路径 L' 为从 B 到 A 的有向直线段

令 $\vec{A} = \left(y+z, z^2 - x^2 + y, x^2 y^2\right)$

则 $rot\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z & z^2-x^2+y & x^2y^2\end{vmatrix}=\left(2x^2y-2z,1-2xy^2,-2x-1\right)$

那么 $I=\int_L\vec{A}\cdot\vec{ds}=\left(\oint_{L+L'}-\int_{L'}\right)\vec{A}\cdot\vec{ds}$

其中

$$\oint_{L+L'}\vec{A}\cdot\vec{ds}=\iint_S rot\vec{A}\cdot\vec{dS}=\iint_S rot\vec{A}\cdot\vec{e_n}dS=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S\left(2x^2y-2z+2x+1\right)dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S\left(2x^2y+1\right)dS$$

(S 为平面 $z=x$ 在上半球 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le 2\\ z\ge 0\end{cases}$ 内的部分的下侧, $\vec{e_n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 为其单位法向量).

而由对称性知 $\iint_S x^2ydS=0$

又 $\iint_S dS=S=\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2=\pi$

故 $\oint_{L+L'}\vec{A}\cdot\vec{ds}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

又 $\int_{L'}\vec{A}\cdot\vec{ds}=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}ydy=0$

综上: $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

方法二:利用参数方程:

由条件, L 的一个参数方程为 $\vec{r}(t)=\left(\sin t,\sqrt{2}\cos t,\sin t\right),\left(0\le t\le\pi\right)$

故

$$I=\int_L\left(y+z\right)dx+\left(z^2-x^2+y\right)dy+x^2y^2dz$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\left(\sqrt{2}\cos t+\sin t\right)\cdot\cos t+\sqrt{2}\cos t\cdot\left(-\sqrt{2}\sin t\right)+\sin^2 t\cdot 2\cos^2 t\cdot\cos t\right]dt$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2}\cos^2 t-\sin t\cos t+2\sin^2 t\cos^3 t\right)dt$$

又

$$\int_0^{\pi}\cos^2 tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi}\sin t\cos t dt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin 2td2t=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin u du=0$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos^3 t dt=\int_0^{\pi}\sin^2 t\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t=\int_0^{0}u^2(1-u^2)du=0$$

故 $I=\sqrt{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

解析:本题使用两种解法解决一道相对复杂的第二型线积分问题.一般说来,解决此类问题的方法有斯托克斯公式(或格林公式),参数方程,转换为第一型线积分等方法,其中使用斯托克斯公式常常要补充路径.本题中使用斯托克斯公式计算更简便.在遇到这类题目时,可选用更容易计算的方法.

21. 计算 $\int_{(L)}\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+\left(ax+2y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right)dy$,其中 (L) 是从点 $A(0,R)$ 沿圆周 $x=-\sqrt{R^2-y^2}$ 到点 $B(0,-R)$ 的有向曲线段,常数 $a>0$.

答案: $\frac{a\pi R^2}{2}$

解:

由条件有: $P(x,y)=\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $Q(x,y)=ax+2y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

故

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=a+2y\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=a+\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

补充路径 (L') 为从 B 到 A 的有向直线段.

从而原式 $=\left(\oint_{(L)+(L')}-\int_{(L')}\right)Pdx+Qdy$.

其中 $\oint_{(L)+(L')}Pdx+Qdy=\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=a\iint_{(\sigma)}dxdy=a\sigma=a\cdot\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{a\pi R^2}{2}$

$\int_{(L')}Pdx+Qdy=\int_{-R}^{R}2y\ln a dy=0$.

综上:原式 $=\frac{a\pi R^2}{2}$.

解析:本题为平面内的第二型线积分问题,被积式形式复杂,显然难以使用参数方程法,重点在于观察到使用格林公式后可以将积分形式简化.

22. 计 算 $\int_{(L)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ ，其 中 (L) 是 抛 物 线 $y=4\pi\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ 上从点 $A(1,\pi)$ 到点 $B(2,\pi)$ 的有向曲线段.

答案:$1+\pi$

解:

法一：

有条件有 $P(x,y)=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x};Q(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$

故

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}\left(2y\cdot\cos\frac{y}{x}+y^2\cdot\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right)=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot y+y\left(\frac{-1}{x^2}\cdot\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\cdot\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}\right)=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}$ 故积分与路径无关

选取路径 (L') 为从 $A(1,\pi)$ 到 $B(2,\pi)$ 的有向直线段

则有:原式 $=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx=1+\pi\int_1^2\cos\frac{\pi}{x}d\left(\frac{\pi}{x}\right)=1+\pi\cdot\sin\frac{\pi}{x}\Big|_1^2=1+\pi$.

法二:

直接运用格林公式

选取路径 (L') 为从 $A(1,\pi)$ 到 $B(2,\pi)$ 的有向直线段

$$原式=\iint 0d\sigma-\int_1^2(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x})dx=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx=1+\pi\int_1^2\cos\frac{\pi}{x}d\left(\frac{\pi}{x}\right)=1+\pi\cdot\sin\frac{\pi}{x}\Big|_1^2=1+\pi$$

解法二与解法一本质上是一样的

解析:本题充分利用了积分与路径无关.

23.试确定正常数的值使曲线积分

$$\int_{(C)}xy^{\lambda}dx+x^{\lambda}ydy$$

与路径无关,并对所求出的 λ ,计算 $\int_{(1,1)}^{(0,2)}xy^{\lambda}dx+x^{\lambda}ydy$ 的值.

答案: $\lambda=2;-\frac{1}{2}$

解:

有条件有 $P(x,y)=xy^{\lambda};Q(x,y)=x^{\lambda}y$

故 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\lambda xy^{\lambda-1};\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\lambda x^{\lambda-1}y$

由积分与路径无关知,恒有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\lambda xy^{\lambda-1}\equiv\lambda x^{\lambda-1}y\Rightarrow\lambda=2.$

从而 $\int_{(1,1)}^{(0,2)}xy^{\lambda}dx+x^{\lambda}ydy=\int_{(1,1)}^{(0,2)}xy^{2}dx+x^{2}ydy=\int_{1}^{0}xdx+\int_{1}^{2}0dy=-\dfrac{1}{2}.$

解析:本题通过积分与路径无关的等价条件求得系数 λ,计算积分采用了折线积分的方式.另外本题还易凑出或积出相应的势函数,利用势函数在两点的函数值的差来求值.

24. 已知 $u(x,y)$ 是定义在 $(D)=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 上的二元函数,且 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^{2}}$ 是 $u(x,y)$ 的全微分,试求常数 a 的值及函数 $u(x,y)$.

答案: $a=2;u=\ln(x+y)+\dfrac{x}{x+y}+C$

解:

由条件, $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^{2}}$ 是 $u(x,y)$ 的全微分

令 $P(x,y)=\dfrac{x+ay}{(x+y)^{2}};Q(x,y)=\dfrac{y}{(x+y)^{2}}$

有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{a\cdot(x+y)^{2}-2(x+y)\cdot(x+ay)}{(x+y)^{4}}=\frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^{3}};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2y}{(x+y)^{3}}.$$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{(a-2)x-ay}{(x+y)^{3}}\equiv\dfrac{-2y}{(x+y)^{3}}\Rightarrow a=2$

从而 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x+2y}{(x+y)^{2}};\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{(x+y)^{2}}.$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{(x+y)^{2}}$ 对 y 积分得 $u=\int\dfrac{y}{(x+y)^{2}}dy=\ln(x+y)+\dfrac{x}{x+y}+\varphi(x)$

故$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x+y-x}{\left(x+y\right)^2}+\varphi'\left(x\right)=\dfrac{x+2y}{\left(x+y\right)^2}+\varphi'\left(x\right)=\dfrac{x+2y}{\left(x+y\right)^2}\Rightarrow\varphi'\left(x\right)=0$

从而$\varphi\left(x\right)=C$,(C 为常数)

综上$u(x,y)=\ln\left(x+y\right)+\dfrac{x}{x+y}+C$.

解析:.

25. 设函数 $Q\left(x,y\right)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_{(L)}2xydx+Q\left(x,y\right)dy$ 与路径无关,并且对于任意t恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q\left(x,y\right)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q\left(x,y\right)dy,$$

求$Q\left(x,y\right)$.

答案:$Q=x^2+2y-1$

解:

由条件,$P\left(x,y\right)=2xy$.

由积分$\int_{(L)}2xydx+Q\left(x,y\right)dy$ 与路径无关,

有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$

对x积分得$Q=\int 2xdx=x^2+\varphi\left(y\right)$

从而向量场$\vec{A}=\left(P\left(x,y\right),Q\left(x,y\right)\right)$的一个势函数为$u\left(x,y\right)=x^2y+\int_0^y\varphi\left(u\right)du$.

故

$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q\left(x,y\right)dy=u\left(x,y\right)\Big|_{(0,0)}^{(t,1)}=t^2+\int_0^1\varphi\left(u\right)du$

$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q\left(x,y\right)dy=u\left(x,y\right)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}=t+\int_0^t\varphi\left(u\right)du$

从而$t^2+\int_0^t\varphi\left(u\right)du=t+\int_0^1\varphi\left(u\right)du\overset{\text{对}t\text{求导}}{\Rightarrow}2t=1+\varphi\left(t\right)\Rightarrow\varphi\left(t\right)=2t-1$

综上$Q=x^2+2y-1$.

解析:本题也可以不求势函数,直接将两个积分的值按折线积分算出.

26. 设函数 $f\left(x,y\right)$满足$\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$,且 $f\left(0,y\right)=y+1$, L_t 是从点$\left(0,0\right)$到

点$(1,t)$的光滑曲线,计算曲线积分$I(t)=\int_{(L_t)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$,并求$I(t)$的最小值.

答案:$I'(t)=1-e^{2-t}$,最小值为3

解:

显然,向量场$\vec{A}=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$的一个势函数为$f(x,y)$

故积分$\int_{(L)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$与路径无关

故

$$I(t)=\int_0^t\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}dy+\int_0^1(2x+1)e^{2x-t}dx=\int_0^t 1\cdot dy+\int_0^1(2x+1)e^{2x-t}dx=t+e^{2-t}$$

求导得

$I'(t)=1-e^{2-t}$

$t\in(-\infty,2)$,$I'(t)<0$,$I(t)$严格单调递减;

$t\in(2,+\infty)$,$I'(t)>0$,$I(t)$严格单调递增.

故$I(t)$的最小值为$I(2)=3$.

解析:本题不必通过繁琐的积分运算等步骤先把$f(x,y)$求出来,只需根据题目的特点灵活处理积分方式,就可以事半功倍.

27.设流体的密度为1,流速$\vec{v}=xz^2\vec{i}+\sin x\vec{k}$,曲面$(S)$是由曲线$\begin{cases}y=\sqrt{1+z^2}\\x=0\end{cases}$,$(1\le z\le 2)$绕$Oz$轴旋转一周所形成的旋转面,$(S)$正侧的法向量与$Oz$轴正向的夹角为锐角,求单位时间内流向$(S)$正侧的流量.

答案:$-\frac{128}{15}\pi$

解:

由条件知,曲面(S)的方程为$x^2+y^2-z^2=1,(1\le z\le 2)$

补充曲面(S_1)为$\begin{cases}x^2+y^2\le 5\\z=2\end{cases}$的下侧,$(S_2)$为$\begin{cases}x^2+y^2\le 2\\z=1\end{cases}$的上侧

又$div\vec{v}=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=z^2+0+0=z^2$

那么流量 $Q=\iint_{(S)}\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}=\left(\oiint_{(S)+(S_1)+(S_2)}-\iint_{(S_1)}-\iint_{(S_2)}\right)\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}$.

其中

$$\oiint_{(S)+(S_1)+(S_2)}\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_{(V)}div\vec{v}dxdydz=-\iiint_{(V)}z^2dxdydz=-\int_1^2 z^2dz\iint_{x^2+y^2\le 1+z^2}dxdy$$

$$=-\pi\int_1^2 z^2\left(1+z^2\right)dz=-\frac{128}{15}\pi$$

注意：由于 (S) 正侧的法向量与 Oz 轴正向的夹角为锐角，在运用高斯公式时，要添上负号.

$$-\iint_{(S_1)}\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}=\iint_{(-S_1)}\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}=\iint_{(-S_1)}\sin xdx\wedge dy=\iint_{x^2+y^2\le 5}\sin xdxdy=0$$

$$\iint_{(S_2)}\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}=\iint_{(S_2)}\sin xdx\wedge dy=\iint_{x^2+y^2\le 2}\sin xdxdy=0$$

综上流量 $Q=-\dfrac{128}{15}\pi$.

解析:本题是第二型面积分的物理应用,补充平面后使用高斯公式可以简化运算.

28.计算曲面积分

$$I=\iint_{(\Sigma)}2x^3dy\wedge dz+2y^3dz\wedge dx+3\left(z^2-1\right)dx\wedge dy,$$

其中 (Σ) 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧.

答案: $-\pi$

解:

令 $\vec{A}=\left(2x^3,2y^3,3\left(z^2-1\right)\right)$

则

$$div\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=6x^2+6y^2+6z$$

补充 (Σ') 曲面 $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$ 为的下侧

那么 $I=\iint_{(\Sigma)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\left(\oiint_{(\Sigma)+(\Sigma')}-\iint_{(\Sigma')}\right)\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}$

其中

$$\oiint_{(\Sigma)+(\Sigma')}\vec{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\iiint_{(V)}div\vec{A}dxdydz=6\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2+z\right)dxdydz$$

$$\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z}\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-z}}\rho^3 d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(1-z)^2dz=\frac{\pi}{6}$$

$$\iiint\limits_{(V)}zdxdydz=\int_0^1 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z}dxdy=\pi\int_0^1 z(1-z)dz=\frac{\pi}{6}$$

而$-\iint\limits_{(\Sigma')}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\iint\limits_{(-\Sigma')}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\iint\limits_{(-\Sigma')}-3\overrightarrow{dS}=-3\times\pi=-3\pi$

综上$I=6\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)-3\pi=-\pi$.

解析:高斯公式的应用.

29. 计算 $I=\oint_{(L)}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(2z^2-x^2\right)dy+\left(3x^2-y^2\right)dz$,其中 (L) 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从z轴正向看去,为(L)逆时针方向.

答案:$I=-24$

解:

设$\overrightarrow{A}=\left(y^2-z^2,2z^2-x^2,3x^2-y^2\right)$

有

$$rot\overrightarrow{A}=\vec{\nabla}\times\overrightarrow{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}=\left(-2y-4z,-2z-6x,-2x-2y\right)$$

取(S)为平面$x+y+z=2$在柱面$|x|+|y|=1$内部的上侧

则其一个单位法向量$\overrightarrow{e_n}=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$

故

$$I=\oint_{(L)}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{ds}=\iint_{(S)}rot\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{dS}=\iint_{(S)}rot\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{e_n}dS$$

$$=-\frac{1}{\sqrt3}\iint_{(S)}\left(8x+4y+6z\right)dS=-\frac{1}{\sqrt3}\iint_{(S)}\left(2x-2y+12\right)dS$$

其中由对称性知$\iint_{(S)}xdS=\iint_{(S)}ydS$

又$\iint_{(S)}dS=\iint_{(\sigma_{xy})}\sqrt{1+1^2+1^2}dxdy=\sqrt3\sigma_{xy}=\sqrt3\times\sqrt2^2=2\sqrt3$

故 $I=-24$.

解析:本题要快速简便地做出来,关键在于熟练运用斯托克斯公式,以及一二型面积分之间的的转化.

30.设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分,其上任一点的密度为 $\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.记圆锥面与柱面的交线为 C ,(1)求 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程;(2)求 S 的质量 M .

答案:64

解:

(1)

在 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ 中消去 z 得 $(x-1)^2+y^2=1$

故交线的方程为 $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

(2)

由条件知,

$$M=\iint_S \mu dS=\iint_{\sigma_{xy}} 9\sqrt{x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=18\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta \quad .$$

$$=96\times\frac{2}{3\times 1}\times 1=64$$

$$(\int\cos^3\theta d\theta=\int\cos^2\theta d\sin\theta=\int(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta)$$

解析:第一型面积分的物理应用

总结与补充:

1.计算积分问题的思路

(1)二重积分

1)先 x 后 y

2)先 y 后 x

3)换元法(如极坐标)

(2)三重积分

1)先重后单

2)先单后重

3)换元法(如球坐标,柱坐标,考试重点)

(3)线积分

1)参数方程(直接计算)

2)格林公式(平面上第二型线积分,考试重点)

3)斯托克斯公式(空间中第二型线积分)

4)闭路变形原理(平面上常用)

5)一二型线积分之间的的转换

(4)面积分

1)直接计算

2)参数方程

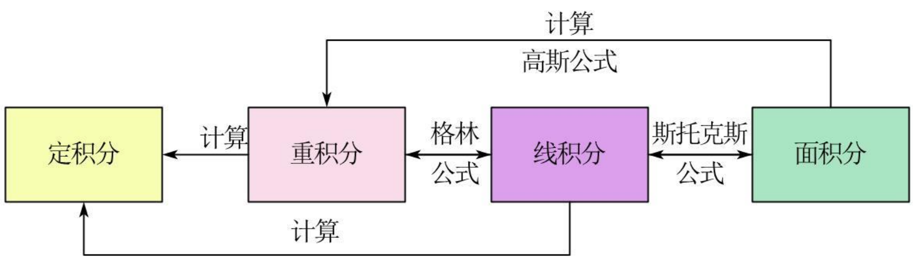
2)高斯公式(考试重点)

4)一二型面积分之间的的转换

格林公式的运用

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_L Pdx+Qdy$$

L 封闭时	积分区域内有点	直接利用公式化成二重积分
	积分区域外无点	用辅助曲线去掉奇点后利用公式，再减去辅助曲线上的积分
L 不封闭时	$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$	积分与路径无关，可以改变积分路径或选择简单的路径
	$\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial Q}{\partial y}$	用辅助曲线封闭化后利用公式，再减去辅助曲线上的积分



第七章习题及解答

1. 选择题(在每个小题给出的选项中只有一个是正确的,试选择正确的选项并说明理由.)

(1)设常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则下列级数中收敛的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$

答案:(D)

解析:(A)选项,反例:对$a_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$满足莱布尼兹准则,收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$由积分准则可证发散.(B)选项,反例:对$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$满足莱布尼兹准则,收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$为调和级数,发散.(C)选项,反例:对$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$满足莱布尼兹准则,收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1})$与调和级数同阶,发散.(D)选项,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-a_1$收敛.

(2)下列命题正确的是(　　).

(A)若$\forall n\in N_+$, $a_n\le b_n$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

(B)若$\forall n\in N_+$, $a_n\le b_n$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛

(C)若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛

(D)若 $a_n \le c_n \le b_n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛

答案：(D)

解析：(A)选项，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 未必收敛，不可比较．(B)(C)选项误用正项级数审敛准则，(B)选项，反例：$a_n = -1$，$b_n = \frac{1}{n^2}$，(C)选项，反例：$a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{1}{n}$，$b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$．(D)选项，构造正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - c_n)$ 即可证明．

(3)下列命题正确的是（　　）．

(A)若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$，则由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散可推得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

(B)若 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$，则由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(C)若 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一个收敛

(D)若 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一个发散

答案：(D)

解析：(A)(B)选项误用正项级数的审敛准则．(C)选项，反例：构造 $a_n = \begin{cases} 0, n\text{为奇数} \\ \frac{1}{n}, n\text{为偶数} \end{cases}$，$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, n\text{为奇数} \\ 0, n\text{为偶数} \end{cases}$，显然有 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散．(D)选项，反证法：假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，那么 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，由数列极限的有界性 $\exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n| < \frac{1}{2}, |b_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow |a_n b_n| < \frac{1}{4}$，与 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$ 矛盾，故二者中至少有一个是发散的．

(4) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 常数 $\lambda > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{a_n}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ (　　).

(A) 发散　　　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　　　(D) 收敛性与 λ 有关

答案:(C)

解析:由于 $0 \le \left|(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right| = |a_n| \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+\lambda}} \le \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2+\lambda}\right)$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\lambda}$ 均收敛, 故原级数绝对收敛.(本题使用基本不等式进行放缩.)

(5) 下列命题正确的是(　　).

(A) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $a_n \ge \frac{1}{n}(n > N)$

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛

答案:(C)

解析:(A) 选项, 反例:构造 $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散但 $a_n < \frac{1}{n}$. (B) 选项, 反例:构造 $a_n = (-1)^n$, 有 $a_{2n-1}+a_{2n}=0$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛, 但 $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. (D) 选项, 反例:构造 $a_n = \begin{cases} 1, n\text{为奇数} \\ 0, n\text{为偶数} \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 0, n\text{为奇数} \\ 1, n\text{为偶数} \end{cases}$, 则, 从而 $a_n b_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均发散. (C) 选项, 考虑其逆否命题:若 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛, 则 $0 \le |a_n| \le |a_n|+|b_n|$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 同理, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对

收敛, 故原命题成立.

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $a_n=\sqrt{n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx(n=1,2,\cdots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ( ).

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 发散　　(D) 敛散性与有关

答案: (B)

解析: 由于

$$0\le\left|a_n\right|=\left|\sqrt{n}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx\right| \overset{\text{积分中值定理}}{=} \sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left|f(\xi_n)\right|=\frac{\left|f(\xi_n)\right|}{\sqrt{n}(n+1)}\le\frac{M}{\sqrt{n}(n+1)},$$

其中, $\xi_n\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, $M=\max_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$ (闭区间上连续必有最值), 又

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{\sqrt{n}(n+1)}$ 收敛, 故原极限绝对收敛.

(7) 设 $0\le a_n<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$, 则下列级数中肯定收敛的是( ).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

答案: (D)

解析: (A)(C) 选项, 反例: $a_n=\frac{1}{2n}$. (B) 选项, 反例: $a_n=\frac{1+(-1)^n}{4n}$. (D) 由于

$0\le\left|(-1)^n a_n^2\right|=a_n^2\le\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 绝对收敛.

(8) 设 $u_n\ne 0(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ ( ).

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 敛散性不定

答案：(C)

解析：取 $u_n=n$ 可知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛，排除(B)选项. 又考虑级数收敛定义，有部分和数列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}}\right)=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n-1}}{u_{n+1}}$$

，若级数收敛，只需极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{u_{n+1}}$ 存在，而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{u_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{u_{n+1}}\right)=0$ 存在，故原级数收敛. 综上所述，原级数条件收敛.

(9) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则该级数在 $x=-2$ 处(　　).

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛
(C) 发散　　(D) 敛散性不能确定

答案：(C)

解析：对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其收敛半径为 $R>0$ 且 $R\neq+\infty$，那么对于任意的实数 x，若 $x\in(-R,R)$，必有级数绝对收敛；若 $x\in(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$，必有级数发散，故条件收敛的点只能在幂级数的收敛区间的端点处出现. 因此，题中幂级数收敛区间为 $(0,2)$，在 $x=-2$ 处级数发散.

(10) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+a)^n}{2^n}$ 在 $x=\ln\frac{1}{2}$ 处(　　).

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛
(C) 发散　　(D) 敛散性不能确定

答案：(A)

解析：易知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 仅在 $x=-1$ 处条件收敛，故 $-2-a=-1\Rightarrow a=-1$. 又幂

级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$收敛半径$R=2$，故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+a)^n}{2^n}$收敛区间为$(-3,1)$，故在$x=\ln\frac{1}{2}$处级数绝对收敛.

(11) 设 $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2-2x, \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x(-\infty<x<+\infty)$，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)dx(n=0,1,2,\cdots)$，则$S(-\frac{5}{2})$等于().

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $-\frac{3}{4}$

答案：(C)

解析：由题意，是对 f(x)作（0,1）上的偶延拓，周期为 2，再根据狄利克雷定理计算

$$S(-\frac{5}{2})\overset{\text{周期性}}{=}S(-\frac{1}{2})\overset{\text{偶函数}}{=}S(\frac{1}{2})\overset{\text{狄利克雷定理}}{=}\frac{f(\frac{1}{2}-0)+f(\frac{1}{2}+0)}{2}=\frac{3}{4}.$$

2. 在古代阿拉伯民间流传着一个有趣的故事：一个农民有17只羊，临终前立下遗嘱，把17只羊全部分给3个儿子，大儿子得$\frac{1}{2}$，二儿子得$\frac{1}{3}$，三儿子得$\frac{1}{9}$，但不得把羊杀死或卖掉. 三个儿子无法分，去请教邻居. 一个聪明的邻居带来了一只羊来，这样就有18只羊了. 他将$\frac{1}{2}$（即9只）分给老大，$\frac{1}{3}$（即6只）分给老二，$\frac{1}{9}$（即2只）分给老三，余下的一只自己带回，从而圆满地解决了这个难题. 试用级数理论说明这种分法的正确性.

答案：见解析

解析：三个儿子分得羊总数的$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$，剩余$\frac{1}{18}$，将剩余的$\frac{1}{18}$看作整体再次按原比例分，不断重复上述过程，那么实际参与分配的羊的数量应为

$17\times\left(1+\frac{1}{18}+\frac{1}{18^2}+\cdots\right)=17\times\frac{1}{1-\frac{1}{18}}=18(只)$, 故应多引入一只羊参与分配.

最终老大分得羊的数量为$18\times\frac{1}{2}$=9(只)

老二分得羊的数量为$18\times\frac{1}{3}$=6(只)

老三分得羊的数量为$18\times\frac{1}{9}$=2(只).

3. 患有某种心脏病的患者需要经常服用一种叫做洋地黄毒苷的药物. 假设每天给患者的服用量为$0.05mg$, 服用一天后大约有10%药物被排除. 若某患者连续服用10天, 问10天末体内药物的残留量是多少?如果长期不间断地服用(可假定服用的天数$t\to\infty$), 那么患者体内该药物的残留量还有多少?如果要使患者体内该药物的残留量再降低10%, 应当怎样改变每天给患者的服用量?

答案：10 天残留量是 0.3401mg, 长期残留量是 0.5mg, 要使患者体内该药物的残留量再降低10%, 应当每天服用 0.045mg.

解析: 设每天的服药量为xmg, 连续服用的天数为n, 距离最后一天末第k天服用的药的残余量为$a_k(x)$, 服药n天总的残余量为$S_n(x)mg$, 长期服药的残药量为$S(x)mg$.

那么$a_k(x)=x\cdot(1+10\%)^k=0.9^k x$.

体内残余量$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)=x\cdot(1+0.9+0.9^2+\cdots+0.9^n)=10(1-0.9^{n+1})x$

长期服用残药量$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=10x\lim_{n\to\infty}(1-0.9^{n+1})=10x$

10 天残余量为$S_{10}(0.05)=10\times0.05\times(1-0.9^{11})\approx0.3431(mg)$

长期服用药物的残余量$S(0.05)=0.5(mg)$

设每天服用x_0mg可以使残药量降低10%, 那么有

$(1-10\%)S(x_0)=S(0.05)\Rightarrow x_0=0.045(mg)$

4. 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\int_0^n\sqrt{1+x^4}dx}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

答案:

(1) 法一:

显然,级数为正项级数;

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\int_0^n\sqrt{1+x^4}dx}\bigg/\frac{\sqrt{n}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\int_0^n\sqrt{1+x^4}dx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^4}}=3$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ 收敛;

故原级数收敛.

法二: $\frac{\sqrt{n}}{\int_0^n\sqrt{1+x^4}dx}<\frac{\sqrt{n}}{\int_0^n xdx}=\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ 由第一比较准则知原级数收敛

(2) 由于 $(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}=(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{(n+1)\sqrt{n}}\right)=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}-(-1)^n\frac{2}{(n+1)\sqrt{n}}$

同时, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=0;\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 条件收敛;

同理,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(n+1)\sqrt{n}}$ 也条件收敛.

综上,原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(n+1)\sqrt{n}}$ 条件收敛.

解析:

正项级数在使用达朗贝尔检比法判断其敛散性时,关键在于寻找与原级数的项在 $n\to\infty$ 下的”同阶”p 级数.构造这个 p 级数,常常用到同阶无穷小,泰勒公式等方法进行比较.另外需要提醒的是,数列极限不可以使用洛必达法则,必须转化成为函数极限才可以使用.

对于项的形式复杂的级数的敛散性的判断,有时根据其结构拆成不同的几

个部分，分别判断每个部分的敛散性，从而根据级数收敛的性质，判断原级数的敛散性是容易的.

5. 已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$，证明：(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$ 绝对收敛；(2) $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$.

证：

(1) 由条件有：$0\le\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=f'(\xi_n)\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\frac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|$（其中 ξ_n 介于 x_n 与 x_{n-1} 之间，$n=2,3,\cdots$）

从而 $\left|x_{n+1}-x_n\right|\le\frac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\frac{1}{2^2}\left|x_{n-1}-x_{n-2}\right|\le\cdots\le\frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|$ 收敛，故原级数绝对收敛.

(2)

i) 证明极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在：

设级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)=\left(x_{n+1}-x_n\right)+\left(x_n-x_{n-1}\right)+\cdots+\left(x_2-x_1\right)=x_{n+1}-x_1$

由(1)可知，极限 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_1$ 存在，故极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

ii) 证明方程 $f(x)-x=0$ 在 $(0,2)$ 内有根：

令 $F(x)=f(x)-x=f(0)+f'(\xi)x-x=1+\left[f'(\xi)-1\right]x$，其中 ξ 介于 0 与 x 之间

又 $F(0)=1>0, F(2)=2f'(\xi)-1<0$

故方程在 $(0,2)$ 内有根.

iii) 证明 ii) 中的根是方程唯一的实根：

假设 t_1 和 t_2 是方程的两个不同的实根

那么 $t_1=f(t_1), t_2=f(t_2)$

便有 $\left|t_1-t_2\right|=\left|f(t_1)-f(t_2)\right|=f'(\eta)\left|t_1-t_2\right|\Rightarrow t_1=t_2$，矛盾（其中 η 介于 t_1 与 t_2 之间）

故上述实根是唯一实根

iv) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 就是上述唯一实根：

由 (1) 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1| = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n)-x_n\right)=0$

设 $t=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，则 $f(t)-t=0$，t 即为上述方程的唯一的根

综上可知，$0<\lim\limits_{n\to\infty} x_n<2$.

解析：本题实际考察的是压缩映射和不动点的有关知识，但是在这里我们提供了一种不使用压映原理的证明方法.

6. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 均收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

解：

由于 $0\le |a_n b_n| \le \frac{1}{2}\left(a_n^2+b_n^2\right)$

并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)$ 收敛

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

解析：基本不等式的运用.

7. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 是否收敛？为什么？

解：收敛，证明如下：

由条件知，$\forall n\in N_+, a_n\ge 0$，$\{a_n\}$ 下有界，又 $\{a_n\}$ 单调减少，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且非负

又极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$，否则，有莱布尼兹准则，将有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与条件矛盾

故极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = q$，其中 q 是正的常数

那么 $\exists N\in N_+, \forall n>N, a_n>\frac{q}{2}>0$

故$\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n<\left(\frac{1}{1+\frac{q}{2}}\right)^n$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{q}{2}}\right)^n$ 收敛

故原级数收敛.

（也可使用检根法得出，

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{1+a_n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+q}<1$，从而证得原级数收敛）

解析：充分利用莱布尼兹准则，单调有界原理，极限的保号性等结论证明问题.

8. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

证：

设的$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)$部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1}-a_k\right)=\left(a_{n+1}-a_n\right)+\left(a_n-a_{n-1}\right)+\cdots+\left(a_2-a_1\right)=a_{n+1}-a_1$$

由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)$收敛可知，极限$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}-a_1$存在

从而极限$\lim_{n\to\infty}a_n$存在

由数列极限的有界性有$\exists M>0,\forall n\in N_+,\left|a_n\right|<M$

故$0\le\left|a_nb_n\right|\le M\left|b_n\right|$

又$\sum_{n=1}^{\infty}M\left|b_n\right|$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_nb_n\right|$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

9. 设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上可导，且$\left|f'(x)\right|\le h<1$，对一切 $x\in\left[a,b\right]$ 有 $a\le f(x)\le b$．令

$u_{n+1}=f(u_n)$，其中$u_0\in\left[a,b\right]$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}-u_n\right)$绝对收敛.

证：

由条件有$\left|u_{n+1}-u_n\right|=\left|f(u_n)-f(u_{n-1})\right|=\left|f'(\xi_n)\right|\cdot\left|u_n-u_{n-1}\right|\le h\left|u_n-u_{n-1}\right|$

其中ξ_n介于u_n与u_{n-1}之间

故$|u_{n+1}-u_n|\le h|u_n-u_{n-1}|\le h^2|u_{n-1}-u_{n-2}|\le\cdots\le h^{n-1}|u_2-u_1|$

又$\sum_{n=1}^{\infty}h^{n-1}|u_2-u_1|$收敛, 从而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$收敛, 原级数绝对收敛.

解析:本题解法与第 5 题完全类似.

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛, 令 $a_n=\int_0^1 f(nx)dx$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n^{\alpha}}(\alpha>0)$ 收敛.

证:

由条件, $\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛, 令 $M=\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$

而 $a_n=\int_0^1 f(nx)dx\overset{t=nx}{\underset{x=\frac{t}{n}}{=}}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt$

故 $a_n^2=\left(\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt\right)^2=\frac{1}{n^2}\left(\int_0^n 1\cdot f(t)dt\right)^2=\frac{1}{n^2}\left(\int_0^n 1^2dt\int_0^n f^2(t)dt\right)=\frac{1}{n}\int_0^n f^2(t)dt\le\frac{M}{n}$

从而 $0\le\frac{a_n^2}{n^{\alpha}}\le\frac{M}{n^{1+\alpha}}$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^{1+\alpha}}$ 收敛, 故原级数收敛.

解析:需要运用定积分的换元法和柯西施瓦兹不等式.

11. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^p}$ 的收敛域, 其中 p 为任意常数.

解:

收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n n^p}\Big/\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^p}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=2$

故收敛区间为$(-2,2)$, 下讨论端点处的敛散性

i) 对 $x=2$, $\frac{x^n}{2^n n^p}=\frac{1}{n^p}$, 当且仅当 $p>1$时收敛

ii）对 $x=-2$，$\dfrac{x^n}{2^n n^p}=\dfrac{(-1)^n}{n^p}$，当且仅当 $p>0$ 时收敛

（$p>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=0$ 且 $\dfrac{1}{(n+1)^p}<\dfrac{1}{n^p}$，满足莱布尼兹准则，故级数收敛；$p\le 0$ 时，

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}\ne 0$，级数不收敛）

综上：

$p\le 0$ 时，收敛域为 $(-2,2)$；

$0<p\le 1$ 时，收敛域为 $[-2,2)$；

$p>1$ 时，收敛域为 $[-2,2]$.

解析：先求出收敛半径以及收敛区间，再讨论端点处敛散性随参数的变化.

12. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

解：

对 $f(x)$ 求导有 $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$

又 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(-1<=x<1)$

故 $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<=x<1)$

积分从而有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\int_0^x t^{2n}dt+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1<=x<1)$$

故 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1<=x<1)$

13. 将 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 展开成 x 的幂级数.

解：

对 $f(x)$ 求导有 $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

又

$$\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})}{2!}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{3!}x^3+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2\cdot 1!}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 2!}x^3+\cdots$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}x^n(-1\le x\le 1)$$

故 $f'(x)=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}x^{2n}(-1\le x\le 1)$

故

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}\int_0^x t^{2n}dt=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1\le x\le 1)$$

.

解析:要将形式复杂的函数展开成幂级数,常见的思路是通过求导和积分使函数的形式变得简单,通过换元法与已知其幂级数展开式的简单的函数联系,再通过积分或求导逆运算得到其幂级数.

14. 设 $f(x)=x^2\ln(1-2x)$,试求 $f^{(n)}(0)$.

解:

由于 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n(-1<x\le 1)$

故 $\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^n}{n}x^n(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2})$

从而 $f(x)=x^2\ln(1-2x)=x^2\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2^n}{n}x^{n+2}(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2})$

又 $f(x)\sim S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

故 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{2^{n-2}}{n-2}\Rightarrow f^{(n)}(0)=-\frac{2^{n-2}\cdot n!}{n-2}(n=3,4,\cdots)$

而 $n=1,2$ 时，$f^{(n)}(0)=0$.

综上:

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, n=1,2\\ -\dfrac{2^{n-2}\cdot n!}{n-2}, n=3,4,\cdots\end{cases}$$

解析:本题求函数在某点处的高阶导数,借助泰勒级数的定义,将函数展开成幂级数,与泰勒级数逐项对应相等.

15. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

解:

收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(4n)!}\Big/\frac{1}{(4n+4)!}=\lim_{n\to\infty}(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)=+\infty$

故收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

已知 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-\infty<x<+\infty)$

从而 $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n(-\infty<x<+\infty)$

故 $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}(-\infty<x<+\infty)$

又 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}(-\infty<x<+\infty)$

从而 $\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}x^{4n}(-\infty<x<+\infty)$

故 $S(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}(-\infty<x<+\infty)$

另解:

由条件 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}(-\infty<x<+\infty)$

依次求导得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}(-\infty<x<+\infty)$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}(-\infty<x<+\infty)$$

$$S'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}(-\infty<x<+\infty)$$

那么 $S'''(x)+S''(x)+S'(x)+S(x)=e^{x}$

解这个微分方程有 $S(x)=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+\frac{1}{4}e^{x}(-\infty<x<+\infty)$

(

$$S''''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}(-\infty<x<+\infty)$$

利用 $S''''(x)=S(x)$,同样可以解出

$$S(x)=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+\frac{1}{4}e^{x}(-\infty<x<+\infty)$$

)

又 $S''(0)=0, S'(0)=0, S(0)=1$

得 $C_1=\frac{1}{4}, C_2=\frac{1}{2}, C_3=0$

故 $S(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}e^{x}+\frac{1}{4}e^{-x}(-\infty<x<+\infty)$

解析:解法一利用常用函数的麦克劳林展开式,通过观察和函数的特点,即(1)偶函数(2)分母是对应项自变量幂次的阶乘,进而根据经验,构造出了和函数;方法二则通过求导的方式构造出一个微分方程,通过求解微分方程来获得和函数.在求解微分方程的时候,不要忘记隐藏的初值条件.

16. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

解:

设和函数为$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$收敛域为$(-\infty,+\infty)$

已知$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-\infty<x<+\infty)$

从而$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}(-\infty<x<+\infty)$

因此$\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}(-\infty<x<+\infty)$

即$S(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)(-\infty<x<+\infty)$

解析:本题解法同上一题完全类似,上一题的解法二也完全适用于本题,留给读者尝试.另外,这两题启发我们应熟记一些简单函数的麦克劳林展开式.现将部分函数的麦克劳林展开式列举如下:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots(-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2+\cdots(-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots(-1<x<1)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots$$

17. 将$f(x)=\arcsin(\sin x)$展开成以2π为周期的Fourier级数.

解:

显然$f(-x)=\arcsin(\sin(-x))=-\arcsin(\sin x)=-f(x)$,$f(x)$是奇函数

故$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$

在$[0,\pi]$内，有 $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x, \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi \end{cases}$

故

b_n

$=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$

$=\dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx\right)$.

$=\dfrac{4}{n^2\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}(n=1,2,\cdots)$

从而 $f(x)\sim S(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\sin nx=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x(-\infty<x<+\infty)$

18. 将 $f(x)=x^2$ 在$[0,2\pi]$上展成以 2π 为周期的 Fourier 级数. 并求常数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

解:

由条件:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nxdx=\frac{4}{n^2}(n=1,2,\cdots)$$

$$b_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nxdx=-\frac{4\pi}{n}(n=1,2,\cdots)$$

故 $f(x)\sim S(x)=\dfrac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}\cos nx-\dfrac{4\pi}{n}\sin nx\right)(-\infty<x<+\infty)$

从而:

$$S(0)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}=2\pi^2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$S(\pi)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=f(\pi)=\pi^2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n\right)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$

解析:利用函数项级数取特定值是求常数项级数的常用方法. 这里需要注意狄利克雷定理规定傅里叶展开式收敛于被展开函数的具体要求. 另外, 值得注意的是, 本题考察了求函数在一般区间上的傅里叶展开式的方法.

19. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n-1},0<x<\pi$

证:

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\le x\le 1)$

那么$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n(-1<x<1)$

又$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n(-1<t<1)$

故$S'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}(-1<x<1)$.

从而$S(x)=\int_0^x S'(t)dt+S(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x(-1\le x\le 1)$.

只需证明函数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=S(1)=\frac{\pi}{4}(0<x<\pi)$即可, 下证之.

对 $f(x)=k$ 作$(0,\pi)$上的奇延拓, 将 $f(x)$ 展开为正弦级数. 得:

$$a_0=0,a_n=0,b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}k\sin nxdx=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$f(x)=k=\sum_{1}^{\infty}\frac{4k\sin(2n-1)x}{(2n-1)\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

综上,等式得证.

解析:本证法采取自右向左证明.通过经验,构造一个函数项级数,使其在 $x=1$ 处的取值为等式右边的常数项级数,再构造一个 $\left(0,\pi\right)$ 上的常函数,将其按正弦级数展开,从而证明了等式左右两端相等.

20.将函数 $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ 展开成 Fourier 级数.

解:

显然,函数 $f(x)$ 是偶函数,从而 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$

又 $f(x)=\begin{cases}1,0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] 0,x=\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] -1,\dfrac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$.

故 $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-1dx\right)=0$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos nxdx\right)=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}(n=1,2,\cdots)$$

从而 $f(x)\sim S(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(2n-1\right)x.(-\infty<x<\infty)$.

解析:本题是一般的求解函数傅里叶展开式的问题,比较简单,但是计算较为复杂.

总结与补充:

1.判断级数收敛的方式

(1)级数收敛的定义

(2)级数收敛的必要条件*

(3)级数收敛的性质*

(4)柯西收敛原理

(5)正项级数的审敛准则

1)正项级数收敛的充要条件

2)比较审敛准则 I,II*(等比级数,p 级数的敛散性)

3)达朗贝尔检比法*

4)柯西检根法*

5)积分准则

(6)交错级数的审敛准则

1)莱布尼兹准则*

2)利用绝对收敛(一般项级数)

(7)函数项级数的一致收敛性

1)一致收敛的定义

2)柯西一致收敛原理

3)M 准则*

2.有关级数敛散性的常见命题及一些反例

(1)若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散(互为逆否)

(2)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛(基本不等式)

(3)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 不定(反例:$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$)

(4)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 不定(反例:$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$)

(5)若 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}a_n$ 不定(反例:$a_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}$)

(6)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1},\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 不定(反例:$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$)

(7)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n-1}-a_{2n}\right)$ 不定(反例:$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$)

(8)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 不定(反例:$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$)

(9)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n-1}+a_{2n}\right)$ 收敛(加括号性质)

(10)若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm a_{n+1}\right)$ 收敛(线性性质)

3.Fourier 级数

Fourier 级数的一般形式为： $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

周期为 2l

$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$ $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$