

工程电磁场导论

小助手

出品：仲英学辅

2020年9月1日

仲英书院学业辅导中心

ZHONG YING XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- 标题：工程电磁场导论 - 小助手
- 主编作者：电气 813 赖启平、电气 713 刘沁阳
- 校对排版：电气 86 刘菁锐、能动 B81 梁佳佳
- 出品时间：2020 年 9 月 1 日
- 总页数：54

许可证说明

 知识共享 (Creative Commons) BY-NC-ND 4.0 协议

本作品采用 **CC 协议** 进行许可。使用者可以在给出作者署名及资料来源的前提下对本作品进行转载，但不得对本作品进行修改，亦不得基于本作品进行二次创作，不得将本作品运用于商业用途。

前言



编写人员：电气 813 赖启平、电气 713 刘沁阳

排版人员：电气 86 刘菁锐、能动 B81 梁佳佳

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作，使本资料可以按时完工。由于编者们的能力与精力限制，难免有错误之处。如果同学们在本资料中发现错误，请联系仲英学业辅导中心：XJTUzyxuefu@163.com，我们将在修订时予以更正。

从第 3 周开始，每晚 19:30-21:30，学辅志愿者在东 21 舍 118 学辅办公室值班，当面为学弟学妹们答疑。

同时，我们也有线上答疑平台——学粉群。

19 级学粉群：902493560，756433480；

20 级学粉群：598243135，1137961185.

期中考试与期末考试前，我们还会举办考前讲座。学辅还有新生专业交流会，转专业交流会，英语考试讲座等活动，消息会在学粉群和公众号上公布，欢迎同学们参与。

仲英书院学业辅导中心

2020 年 9 月 1 日



学粉群 6.0
QQ 群号：598243135



学粉群 6.1
QQ 群号：1137961185



微信公众号
仲英学业辅导中心及薪火工作室

仲英书院学业辅导中心



撰写说明

电磁场导论是本校（西安交通大学）电气的同学必修的一门专业课程，相较于其他的专业课程，电磁场导论课程具有内容丰富、概念极其抽象等特点，同时也兼有一般数学课程内容深、考点多的性质。可以说，电磁场导论课程是电气学生在专业课程上所要翻越的一座「大山」。

2018 级电气 813 班的赖启平同学，于此方面做了相当好的工作，在学习本课程期间尽心尽力整理了十分详尽的课程笔记，基本上达到了以上所提到的要求。然而最初该份笔记是纸质版形成，对本笔记的推广十分不利。仲英书院辅导中心为方便之后的同学复习电磁场导论课程，组织电气 813 赖启平学长亲自编写，并且于 2020 年 7 月 1 日开始将原有的纸质笔记整理为电子版，补充了语言上的一些省略、缺失，增写了许多注记、说明，并扩充了一些新的条目，并定名为《电磁场导论小助手》。同时在编写的过程中，也得到了电气 713 刘沁阳学长对准静态电磁场章节的补充意见，在此对他表示衷心感谢！

除此之外，还要向授课的邹建龙老师，及编撰本校工程电磁场导论教材的冯慈璋、马西奎老师表示敬意。授课者们担负的责任异常重大，而他们的表现则异常令人钦佩！

帮助我们改进这份笔记

一本好的教科书，来自于相关教师历经数代、数十年的逐次再版改进；一份好的笔记，同样也需要长期的维护、改进才能够最终创造出来。本份笔记还未经这样久的磨砺，在内容、布局、细节等方面都相当欠缺；因此，恳请诸位读者在使用本份笔记时，留意以下几点：

- 检查正文中存在的笔误、错别字、公式错误等；
- 考察此份笔记是否缺少课程相关的知识点、章节内容；
- 评价本笔记中是否有详略不得体、描述不明晰的内容。

以上三点，「境界」逐次提高，却都能够有效提高这份笔记的可用程度。若读者在阅读过程中发现以上三点问题，请将问题整理好，与编者联系。电气 813 赖启平联系方式 QQ: 846506033@qq.com.

仲英书院学业辅导中心
2020 年 9 月 1 日



目录

0 绪论——电磁场概述..... 1

1 电磁场的数学基础..... 2

2 真空中静电场的描述..... 2

3 静电场方程和求解——电位..... 2

4 静电场方程和求解——场中有导体或电介质..... 3

5 静电场方程与求解——媒质分界面上的衔接条件..... 4

6 静电场方程与求解——泊松方程、拉普拉斯方程、边值问题及其求解..... 4

7 静电场方程与求解——静电场唯一性定理和分离变量法..... 6

8 静电场方程与求解——镜像法和电轴法..... 6

9 静电场的应用——电容和部分电容..... 8

10 恒定电场的定义和方程..... 9

11 恒定电场的分界面衔接条件和方程求解..... 11

12 恒定电场的应用——电导和部分电导..... 11

13 恒定磁场——基本定律和方程（真空中）..... 12

14 恒定磁场——磁矢位的定义和计算（真空中）..... 14

15 恒定磁场——导磁材料的磁化..... 15

16 恒定磁场——分界面衔接条件..... 16

17 恒定磁场——镜像法..... 17

18 恒定磁场——磁位、磁压、磁路..... 17

19 恒定磁场的应用——电感..... 18

20 时变电磁场——麦克斯韦方程组和分界面衔接条件..... 19

21 时变电磁场——动态位及其积分解..... 21

22 时变电磁场——正弦电磁场..... 21

23 平面电磁波——平面电磁波的简介与方程..... 21

24 平面电磁波——理想介质中的均匀平面电磁波..... 23

25 平面电磁波——导电媒质中的均匀平面电磁波..... 24

| | |
|-----------------------------------|----|
| 26 平面电磁波——平面电磁波的极化..... | 26 |
| 27 平面电磁波——平面电磁波的入射、反射、透射和驻波..... | 27 |
| 28 平面电磁波——平面电磁波的斜入射、反射和折射..... | 29 |
| 29 均匀传输线——无损耗均匀传输线的方程..... | 30 |
| 30 均匀传输线——无损耗均匀传输线的传播特性..... | 31 |
| 31 均匀传输线——无损耗均匀传输线中的反射和透射..... | 32 |
| 32 均匀传输线——无损耗均匀传输线的入端阻抗..... | 34 |
| 33 均匀传输线——无损耗均匀传输线的阻抗匹配..... | 36 |
| 34 均匀传输线——有损耗均匀传输线..... | 36 |
| 35 波导——波导简介及其方程..... | 37 |
| 36 波导——金属矩形波导..... | 38 |
| 37 波导——介质波导..... | 39 |
| 38 波导、谐振腔..... | 41 |
| 39 天线——天线简介和单元偶极子天线..... | 42 |
| 40 天线——细线天线和天线阵..... | 43 |
| 41 电磁场的能量——坡印廷定理..... | 43 |
| 42 电磁场的能量——时变电磁场的功率..... | 44 |
| 43 电磁场的能量——静电场和恒定磁场的能量和力..... | 44 |
| 44 准静态电磁场——准静态电磁场的概念、条件和求解思路..... | 46 |
| 44 准静态电磁场——电准静态场与电荷弛豫..... | 47 |
| 45 准静态电磁场——邻近效应..... | 48 |
| 45 准静态电磁场——涡流、涡流损耗、电磁屏蔽..... | 48 |

0 绪论——电磁场概述

1. 课程概况

- 电磁场是专业基础课和核心课（信号与系统、电磁场、电机学、自动控制原理、电力电子技术、电力系统稳态分析、高电压技术、电气材料基础、电力设备设计原理）。
- 总学时 72，授课 56，实验 8，上机 8；总学分 4。
- 总成绩构成：作业和平时 10 分，实验上机 10 分，期末 80 分。
- 电磁场是电气工程专业最难的几门课之一。

2. 课程要点

- 电磁场的概念
- 电磁场分析和求解方法
- 电磁场的应用
- 电磁场的核心要点：源（静止和移动的电荷）、场、材料、空间、边界、时间

3. 电磁场的应用

(1) 电磁场在生活中的应用：光、光纤、天线、手机、电视、计算机、电磁炉

(2) 电磁场在电气工程中的应用：

- 电机——发电机、电动机、变压器
- 电器——磁控真空开关
- 发电——输电线（传输线）
- 高压——高压放电、高压脉冲
- 绝缘——材料老化与击穿
- 电测——光纤传感
- 工企——电感、电磁干扰 EMI (Electromagnetic Interference)
- 电工原理——超材料（隐身衣）

4. 电磁场与电路的关系

- 电路属于电磁场的范畴，是电磁场应用的一个特例。
- 电路具体（物质层面），电磁场抽象（精神层面）。
- 电路简单（侧重宏观），电磁场复杂（侧重微观）。
- 电路用代数方程和微分方程描述，电磁场用偏微分方程描述。
- 电路基于 KCL 和 KVL 方程、电源和元件特性、初始条件求解；
电磁场基于麦克斯韦方程组、场源与物质特性、边界条件求解。
- 相通的概念方法：向量法、叠加定理、等效变换。

5. 电磁场中的数学知识

平面几何、立体几何、复数、微分、积分（一维、二维、三维、线积分、面积分）、旋度、散度、微分方程、偏微分方程、线性代数、算子。

1 电磁场的数学基础

- 标量与矢量
- 正交坐标系（直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系）
- 矢量的基本运算
- 哈密尔顿算子 ∇
- 标量的等值面（线）与梯度
- 通量和散度
- 环量和旋度
- 高斯散度定理和斯托克斯旋度定理
- 梯度散度旋度的两个常用恒等式
- 亥姆霍兹定理

2 真空中静电场的描述

- 静电场的定义：电荷静止且电量不随时间变化，产生的场称为静电场。
- 真空中的库仑定律与电场强度
- 叠加积分法求电场强度
- 电力线与等位面
- 真空中点电荷电场强度通量与高斯定律：在无限大真空静电场中的任意闭合曲面 S 上，电场强度 \mathbf{E} 的面积分等于曲面内总电荷的 $1/\epsilon$ 倍。
- 真空中静电场高斯定律的微分形式与积分形式

3 静电场方程和求解——电位

- 真空中静电场的电场强度环量（闭合线积分）为零。
- 真空中静电场的电场强度旋度为零（由斯托克斯定理导出）。
- 真空中静电场的基本方程（微分形式）（静电场为有散无旋场）。
- 为计算电场强度矢量而引入电位标量 φ （电场强度的旋度等于零 \rightarrow 标量梯度的旋度等于零），恰巧具有明确物理意义（电位正电荷从电场中某一点移动到参考点处，电场力所做的功），电位的数学定义和物理定义是等价的。
- 静电场中电场力做功与路径无关。
- 电位的计算（满足叠加定理）。

4 静电场方程和求解——场中有导体或电介质

1. 静电场中的导体

- 导体中有大量自由电子，可以自由移动。
- 达到稳态后，导体内部电场强度处处为零。
- 外加的电场导致电荷集中到导体表面，导体内部无电荷。
- 达到稳态后，导体表面上的电场强度垂直于导体表面。
- 导体内部电场处处为零，整个导体是个等位体，导体表面是等位面，电位处处相等。
- 电荷全部分布于导体表面，导体平滑处，电荷分布越稀疏；尖锐处，电荷分布越密集。

2. 静电场中的电介质

- 电介质就是俗称的绝缘体，自身无可自由移动的电荷。
- 在外加电场时，会形成有序排列的电偶极子。
- 有序排列的电偶极子会产生新的附加电场，称为极化电场。
- 电介质中总的电场由外加电场和极化电场叠加而成。

3. 电偶极子回顾

两个距离很近的等量异号电荷 $+q$ 和 $-q$ 相距为 d ，场点与源点距离 R 远大于 d 时，两个点电荷称为电偶极子。

4. 电极化强度

衡量电介质极化程度的指标是电极化强度 \mathbf{P} 。电极化强度的物理意义是电介质单位体积内所有电偶极矩的矢量和。

5. 根据电极化强度计算电偶极子产生的电位

- 为计算极化的电偶极子产生的电场强度，利用微元法，先计算微元产生的电位，再对微元进行积分。
- 体积 V 内电偶极子产生的电位可以等效为极化面电荷产生的电位与极化体电荷产生的电位之和。

6. 电介质等效的极化电荷面密度和体密度

体积 V 内电偶极子产生的电位可以等效为极化面电荷产生的电位与极化体电荷产生的电位之和。

7. 通过实验确定电极化强度

实验表明，介质电极化强度 \mathbf{P} 取决于电场强度 \mathbf{E} ，在各向同性的线性电介质中，电极化强度 \mathbf{P} 与电场强度 \mathbf{E} 成正比

8. 电位移矢量（电通量密度）的引入

由真空中静电场高斯定律的微分形式与电介质中电荷体密度等于自由电荷体密度+极化电荷体密度，并引入一个新的物理量 \mathbf{D} ，导出介质中高斯定律的微分形式与积分形式。

9. 电介质中电通量密度和电场强度的关系

引入电介质的介电常数与相对介电常数。

5 静电场方程与求解——媒质分界面上的衔接条件

1. 亥姆霍兹定理

在空间有限区域内的某一矢量，由该矢量的散度、旋度和边界条件唯一确定。

2. 高斯定律的积分形式

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

3. 静电场电场力做功与路径无关

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

4. 静电场媒质分界面的切向衔接条件

媒质分界面两侧电场强度的切向分量相等： $E_{1t} = E_{2t}$ 。

5. 静电场媒质分界面的法向衔接条件

媒质分界面两侧电通量密度的法向分量之差等于分界面上的自由电荷面密度：

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma。$$

6. 静电场媒质分界面的衔接条件——分界面无电荷且斜入射

$$D_{2n} - D_{1n} = 0, \quad E_{1t} = E_{2t}$$

媒质分界面上如果无面电荷，则满足静电场的折射定律： $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

在电介质与导体界面处，电场强度与电位移都垂直于导体表面，且电位移量值等于界面的电荷面密度。

$$D_{2n} = \sigma, \quad E_{1t} = E_{2t} = 0$$

6 静电场方程与求解——泊松方程、拉普拉斯方程、边值问题及其求解

1. 高斯定律的局限性

高斯定律的积分形式： $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$

高斯定律的微分形式： $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

- 矢量微积分繁琐复杂。
- 介质和导体上的电荷分布往往是未知的。

2. 静电场的泊松方程与拉普拉斯方程

- 如果能将矢量方程转化为标量方程, 且对电荷分布没有要求, 显然会有利于求解, 故利用电位函数导出了泊松方程与拉普拉斯方程。
- 泊松方程和拉普拉斯方程的变量只有一个标量——电位 φ 。
- 只要通过求解泊松方程或拉普拉斯方程得到电位, 就可以根据电位得到电场强度和电通量密度。

3. 拉普拉斯算子的引入与方程的表示

拉普拉斯算子是标量算子。

4. 静电场边值问题

(1) 对于泊松方程与拉普拉斯方程的求解称为静电场边值问题。

(2) 边值问题的构成

- 偏微分方程: 泊松方程、拉普拉斯方程。
- 边界条件: 空间条件, 包含场域边界条件、分界面衔接条件(关于电位)、自然边界条件 ($\lim_{r \rightarrow \infty} r\varphi$ 为有限值, 适用于场域延伸至无限远的情况)。
- 初始条件: 时间条件, 仅在时变电磁场中用到。

(3) 边值问题的构成

第一类边值问题: 已知边界上的电位值—— $\varphi|_S = f_1(s)$ 。

第二类边值问题: 已知边界上电位法向导数(相当于知道电荷密度 σ)——

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = f_2(s)。$$

第三类边值问题: 给定电位和法向导数线性组合的值—— $\left(\varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \Big|_S = f_3(s)。$

5. 泊松方程和拉普拉斯方程的求解

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

(1) 直接积分法

对于一维问题, 可用化为微分方程, 用直接积分法求解。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow \varphi = -\frac{\rho}{2\varepsilon} x^2 + Ax + B$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \rightarrow \varphi = Ax + B$$

结合边界条件求得待定系数（对于动态电磁场的求解需要初始条件求待定系数）

(2) 有限差分法

- 由于形状、材料、场源等的复杂性，大多数电磁场问题无法得到解析解，故需要进行数值求解，将连续问题转化为离散问题，即离散化后，利用计算机编程或软件进行仿真。
- 基本思想：将场域离散为许多网格，应用差分原理，将求解连续函数 φ 的微分方程问题转化为求解网格节点上 φ 的代数方程。
- 网格剖分：单元、节点、步距。
- 拉普拉斯方程的离散

场域内离散：五点差分格式（在某点的电位可近似取为周围相邻四点电位的平均值）。

- 有限差分法就是对场域边界内的每一点列写五点差分格式，从而形成一个代数方程组，通过迭代可求解出代数方程组的解，即场域内每个节点的电位值。

如：高斯—赛德尔迭代

7 静电场方程与求解——静电场唯一性定理和分离变量法

1. 静电场的唯一性定理：在静电场中，如果一个解满足电位偏微分方程和给定的边界条件，那么该解是唯一解。
2. 分离变量法思想：将一个变量变为多个变量（猜想）并相互分离、偏微分方程变成常微分方程、多维问题转化为一维问题。

8 静电场方程与求解——镜像法和电轴法

1. 镜像法的依据和思想

- 镜像法的依据是静电场的唯一性定理。
- 镜像法的思想是通过在场中引入合适的镜像电荷（保持静电场方程和边界条件相同），使得场中的导体和非无限大均匀电介质可以移走，变成无限大均匀介质（或空气），避开求解泊松方程和拉普拉斯方程，从而简化分析。

2. 镜像法的特点

- 镜像电荷是虚设的电荷，用来等效替代导体板上复杂分布的感应电荷的作用。
- 将多个电荷等效为一个电荷，等效后对外保持不变（即边界条件不变，方程不变）。即镜像法是一种等效变换，对外等效，对内不等效。
- 根据叠加原理，导体板上方有任意分布的电荷时也可以作相应的镜像。

3. 镜像法的适用范围

镜像法是求解静电场（恒定电场、恒定磁场）的一种巧妙但适用范围有限的方法。

- 只能用于静电场、恒定电场、恒定磁场。
- 只能用于几何结构较为简单，边界条件容易确定的问题。
- 镜像法的镜像电荷只能位于非求解区域。
- 常见镜像包括：平面、球面、介质镜像。

4. 镜像法的步骤

- (1) 合理猜测镜像电荷的个数、位置和电量。
- (2) 引入镜像电荷后，应保持原边界所满足的边界电位条件不变。
- (3) 外部区域（被求解区域）总的电场分布由点电荷及其镜像电荷共同产生。

5. 镜像法的举例

- (1) 求在接地无限大导体板上方点电荷 q 在空间中各点产生的电位。
- (2) 求夹在两个相互垂直相交接地无限大导体板之间的点电荷 q 在空间中各点产生的电位。
- (3) 求空气中点电荷 q 在地面引起的感应电荷分布和感应电荷总量。
- (4) 求接地球面导体外点电荷产生的电位。
- (5) 不接地金属球附近放置点电荷 q 时的电场分布。
- (6) 点电荷对无限大介质分界面的镜像。

6. 电轴法（广义镜像法）

- (1) 依据：静电场的唯一性定理
- (2) 思想：等效变换
- (3) 思路：
 - ① 猜测两个电轴的位置，则两个电轴中间位置为零电位，两个电轴一定分别位于 $-b$ 和 $+b$ 处。
 - ② 确定传输线半径 a （已知）。
 - ③ 确定传输线圆心与两个电轴中间位置的距离 b 。
 - ④ 满足 $a^2 + b^2 = h^2$ ，求出未知量。
 - ⑤ 求出 b 和 h 。
- (4) 电轴法例题
 - ① 已知两根长直平行双传输线单位长度电量为 $+\tau$, $-\tau$ ，求电轴位置。
 - ② 平行传输线之间电压为 U ，求电位分布。
 - ③ 不同半径平行长直导线的电轴位置
 - ④ 偏心电缆的电轴位置。

9 静电场的应用——电容和部分电容

1. 电容器是能够容纳电荷的器物，如平行板电容器。
2. 电荷可以形成电场和电位，因而电容器也可以。
3. 常见电容器一般为导体。
4. 电容是用来表征电容器容纳电荷能力的参数。
5. 电容等于电量除以电压 $C=q/U$ 。
6. 计算电容

- (1) 假定电量为 q 。
- (2) 根据高斯定律求 \mathbf{D} ，与 q 有关。
- (3) 再根据 \mathbf{D} 求 \mathbf{E} ，与 q 有关。
- (4) 由 \mathbf{E} 的线积分求 U ，与 q 有关。
- (5) 由 $C=q/U$ ，得到电容 C 。

- 平行板电容器电容 $C = \frac{\epsilon S}{d}$ 。

- 无限长同轴电缆电容 $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$ 。

- 同心球面电容 $C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a}$ 。

- 孤立导体球电容 $C = 4\pi\epsilon a$ 。

- 二线传输线的电容 $C = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}}$ 。

- 任意形状导体构成的电容。

写出静电场方程和边界条件，利用数值方法（如有限差分法），借助计算机得到任意一点电位、电场强度、电通量密度、导体表面电荷面密度、导体表面电荷总量。

7. 部分电容（分布电容）

- (1) 三个或三个以上导体之间需要用部分电容来表征。
- (2) 部分电容定义的前提是静电独立系统（与系统外带电体无关联，即电力线全部从系统发出，在系统内终止，系统内总电量为 0）。
- (3) 对于线性系统，根据叠加原理：

$$\varphi_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \quad q_1 = b_{11}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 + \cdots + b_{1n}\varphi_n$$

$$\varphi_k = a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + \cdots + a_{kn}q_n \rightarrow q_k = b_{k1}\varphi_1 + b_{k2}\varphi_2 + \cdots + b_{kn}\varphi_n \Leftrightarrow$$

$$\varphi_n = a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \cdots + a_{nn}q_n \quad q_n = b_{n1}\varphi_1 + b_{n2}\varphi_2 + \cdots + b_{nn}\varphi_n$$

$$q_1 = C_{10}\varphi_{10} + C_{11}\varphi_{11} + \cdots + C_{1n}\varphi_{1n}$$

$$q_k = C_{k0}\varphi_{k0} + C_{k1}\varphi_{k1} + \cdots + C_{kn}\varphi_{kn} \quad \text{令 } \varphi_0 = 0, \text{ 其中 } \varphi_{kj} = \varphi_k - \varphi_j, \quad C_{kj} = C_{jk}$$

$$q_n = C_{n0}\varphi_{n0} + C_{n1}\varphi_{n1} + \cdots + C_{nn}\varphi_{nn}$$

(4) n 个导体部分电容数量: C_n^2 。

(5) 很多部分电容值很小, 可以忽略不计 (与频率大小相关)。

(6) 计算举例: 考虑大地影响时, 求两线传输线单位长度的部分电容及等效电容。

8. 等效电容

多导体静电独立系统中, 把两导体作为电容的两个极板等效。

9. 静电屏蔽

10 恒定电场的定义和方程

1. 恒定电场

(1) 恒定电流场是由恒定电流产生的电场。

(2) 描述恒定电场电流的宏观量是电流 \mathbf{I} , 描述恒定电场电流的微观量是电流面密度 \mathbf{J} 。

2. 导电媒质中的电流和电流密度

(1) 电流的概念是宏观的描述, 无法描述每一个点的情况 $I = \frac{dq}{dt}$ 。

(2) 电流面密度 $dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}$ 。

3. 电荷守恒定律

假定一个封闭曲面中有电荷, 电荷流出曲面, 形成电流, 则闭合曲面的总电流等于曲面

内电荷随时间变化的减少率。 $I_{\text{总}} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$

4. 恒定电场中传导电流连续性方程

对于恒定电流场而言, 电流恒定, 任意封闭曲面的流入电流等于流出的电流, 因此任意封闭曲面的总电流等于零。(在电路中即体现为 KCL) $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。

5. 恒定电场

(1) 电流恒定, 电荷分布不随时间改变, 由此产生的不随时间变化的电场称为恒定电场。

(2) 恒定电场和静电场的区别

① 恒定电场中有推动自由电荷运动的电场存在, \mathbf{E} 不仅存在于导体外而且存在于导体中。

② 电流恒定说明流走的自由电荷被新的自由电荷补充, 空间电荷密度处于动态平衡, 故场分布类似于静电场 (但并不相同)。

③ 恒定电场可以产生磁场, 静电场不能产生磁场。

6. 电源电动势和局外场强

(1) 电源: 提供非静电力, 将其他形式的能量转化为电能 (正负电荷分离)。

(2) 局外场强: 作用于单位正电荷上的局外力 (非静电力)。 $E_{\text{external}} = \frac{F_{\text{external}}}{q}$ 。

(3) 电源中的总电场强度等于正负电荷之间的场强与局外场强之和, 且等于零。

(4) 电源电动势 (electromotive force): $\text{emf} = \int_l \vec{E}_{\text{external}} \cdot d\vec{l}$ 。

7. 电场强度的环路积分

(1) 电源内局外场强的线积分等于环路积分。 $\text{emf} = \int_l E_{\text{external}} \cdot dl = \oint_l E_{\text{external}} \cdot dl$ 。

(2) 常规电场强度的环路积分 (环路中不含电源时): $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。

(3) 若环路中有电源, 电场强度环路积分。对应于电路中的 KVL。

$$\oint_l (E_{\text{external}} + E) \cdot dl = \text{emf} \rightarrow \oint_l (-E_{\text{内常规场强}} + E) \cdot dl = \text{emf} \rightarrow \oint_l E_{\text{外常规场强}} \cdot dl = \text{emf}$$

8. 微观欧姆定律

(1) 宏观欧姆定律只能看整体, 不能看到每个点的特征。

(2) 微观欧姆定律: $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ 。

9. 恒定电场的基本方程

描述恒定电场的两个基本量是 \mathbf{J} 和 \mathbf{E} 。

(1) 电流连续性方程: $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$

(2) 电场强度的环路积分等于零: $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

(3) 微观欧姆定律 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ 。

微分形式: 无散场 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 、无旋场 $\nabla \times \vec{E} = 0$ 、微观欧姆定律 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ 。

11 恒定电场的分界面衔接条件和方程求解

1. 恒定电场微分形式基本方程

无散场 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 、无旋场 $\nabla \times \vec{E} = 0$ 、微观欧姆定律 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ 。

2. 恒定电场分界面上的衔接条件

$$J_{1n} = J_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t}, \quad \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

- 如果电场从良导体进入不良导体，不良导体在分界面附近电流一定垂直于分界面。
- 若从电场从良导体进入理想介质，则理想介质内无电流，良导体分界面电流一定平行于分界面。导线外理想介质中电场强度与导体表面不垂直。

3. 恒定电场的拉普拉斯方程及其边值问题

恒定电场满足拉普拉斯方程。

4. 电源外导电媒质中的恒定电场与无电荷分布区域静电场的比拟

- 静电场（无空间电荷区域）求解的所有方法和结论都可以对偶到恒定电场，如镜像法等。
- 恒定电场和静电场可以比拟的条件：方程相同、几何形状相同、边界条件相同。如果有

$$\text{媒质分界面，则需要满足 } \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}。$$

- 恒定电场和静电场比拟的用处：静电场便于计算，可用静电比拟方法计算恒定电场、恒定电场便于实验，因此某些静电场问题可以用恒定电场实验模拟。

5. 对偶原理

电压电流、电阻电导、电容电导、串联并联、回路结点、KVL、KCL、 γ ϵ 。

12 恒定电场的应用——电导和部分电导

1. 电导的定义：电流除以电压、电阻的倒数。

$$\text{圆柱形电导 } G = \frac{\gamma S}{l}, \quad \text{任意形状电导: } G = \frac{I}{U} = \frac{\int_S J \cdot dS}{\int_l E \cdot dl} = \frac{\gamma \int_S E \cdot dS}{\int_l E \cdot dl}。$$

2. 电导的计算

法一：

- (1) 假设电流 \mathbf{I} 。
- (2) 根据电流 \mathbf{I} 和电流面密度 \mathbf{J} 的积分关系，用 \mathbf{I} 表示 \mathbf{J} 。
- (3) \mathbf{J} 可用 \mathbf{I} 表示， \mathbf{E} 可用 \mathbf{J} 表示，所以 \mathbf{E} 可用 \mathbf{I} 表示。
- (4) \mathbf{U} 是 \mathbf{E} 的积分，所以 \mathbf{U} 可以根据 \mathbf{E} 计算， \mathbf{E} 可用 \mathbf{I} 表示，所以 \mathbf{U} 可用 \mathbf{I} 表示。
- (5) 求 \mathbf{I} 和 \mathbf{U} 的比值，得到电导。
- (6) 以上步骤也可以倒过来，即先假设电压 \mathbf{U} 。

$$\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}$$

法二：

- (1) 写出恒定电场关于电位的拉普拉斯方程。
- (2) 求解拉普拉斯方程，得到电位表达式。
- (3) 根据边界条件和分界面衔接条件求出待定系数，从而求出电位。
- (4) 根据电位与电场强度关系求出电场强度。
- (5) 根据电场强度与电流面密度 \mathbf{J} 关系求出 \mathbf{J} 。
- (6) 根据 \mathbf{J} 与电流 \mathbf{I} 关系求出 \mathbf{I} 。
- (7) 求 \mathbf{I} 与 \mathbf{U} 的比值，得到电导。

法三：

$$\frac{C}{G} = \frac{Q/U}{I/U} = \frac{\int_S D \cdot dS}{\int_S J \cdot dS} = \frac{\varepsilon \int_S E \cdot dS}{\gamma \int_S E \cdot dS} = \frac{\varepsilon}{\gamma}。$$

3. 接地电阻

- (1) 安全保护，即保护接地。
- (2) 电路工作需要，强制电位为零。
- (3) 深埋球形接地器，浅埋半球形接地器。

13 恒定磁场——基本定律和方程（真空中）

1. 对磁场的定性认识

运动的电荷产生磁场、磁场都是旋转的。

2. 对电流的再认识

- 线电流 I 。体电流 I 、体电流密度 \mathbf{J} 、电流面密度 \mathbf{J} 。面电流 I 、面电流密度 \mathbf{K} 、电流线密度 \mathbf{K} 。
- 元电流段： $I d\vec{l} = \vec{J} dV = \vec{K} dS$ 。

3. 真空中库仑定律和安培力定律

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_{21}, \quad \vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{e}_r)$$

4. 真空中的毕奥-萨伐尔定律

- $\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times (\frac{\mu_0}{4\pi r^2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{e}_r) = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_2$
- 其中, $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I dl \times \vec{e}_r$ 为任意元电流段产生的磁感应强度(磁通量密度), 即毕奥-萨伐尔定律。
- 另有: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{J} \times \vec{e}_r dV$ 、 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{K} \times \vec{e}_r dS$ 。

5. 真空中恒定磁场的高斯定律(磁通连续性原理)与安培环路定律

- 在真空中, 对任何磁感应强度进行闭合面积分, 必然为零: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 。(磁力线是闭合曲线)
- 在真空中, 任意取一个闭合路径, 则磁感应强度沿该闭合路径的积分等于该闭合路径所包围的电流乘以真空中的磁导率: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ 。
- 微分形式: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 、 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 。

6. 恒定磁场的基本方程

- 恒定磁场为有旋场: $\oint_l B dl = \mu_0 I$ 、 $\nabla \times B = \mu_0 J$ 。
- 恒定磁场为无散场: $\oint_S B \cdot dS = 0$ 、 $\nabla \cdot B = 0$ 。

7. 恒定磁场和静电场的对偶

B 与 E、 \times 与 \cdot 、 μ_0 与 $\frac{1}{\epsilon_0}$ 。

- $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ 、 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 。
- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 、 $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ 。
- $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{J} dV \times \vec{e}_r$ 、 $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \rho dV \cdot \vec{e}_r$

14 恒定磁场——磁矢位的定义和计算（真空中）

1. 磁矢位的引入

- 联想：静电场计算电场强度难，解决方法是引入标量电位的概念，将矢量计算转化为标量计算，计算标量电位就可以推导出矢量电场强度。

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}, \nabla \times (-\nabla \varphi) = \vec{0}, \vec{E} = -\nabla \varphi。$$

- $\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0, \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，可以先计算出磁矢位 \vec{A} （没有明确的物理意义），再计算磁感应强度 \vec{B} 。
- 引入磁矢位以解决复杂的问题，磁矢位满足泊松方程，易于通过数值方法求解，也就是通过计算机求解。

2. 真空中恒定磁场磁矢位满足的泊松方程

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \rightarrow \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

（其中 $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ ，令 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ 【库仑规范】）

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

3. 真空中磁矢位的计算公式

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \varphi = \int_V \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r} dV$$

$$\text{由对偶原理, } \vec{A} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{J} dV, \vec{A} = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi r} Id\vec{l}, \vec{A} = \int_S \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{K} dS$$

4. 磁矢位用于分析磁场

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l}, \vec{A} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{J} dV$$

5. 教材例 3-7 中的矢量恒等式的证明思路

$$\oint_l \alpha d\vec{l} = \iint_S (\vec{e}_n \times \vec{\nabla} \alpha) \cdot d\vec{S}$$

证明思路：假定回路 l 在一个平面 S 内，建立坐标系，令 \vec{e}_z 与 \vec{e}_n 重合，则：

$$\begin{cases} \vec{e}_n = \{0, 0, 1\} = \vec{e}_z \\ \oint_l \alpha dz = 0 \end{cases}$$

$$\text{等式左侧} = \oint_l \alpha d\vec{l} = \oint_l \alpha (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = \left(\oint_l \alpha dx \right) \vec{e}_x + \left(\oint_l \alpha dy \right) \vec{e}_y$$

$$(\text{令 } \alpha(x, y, z) = f(x, y)g(z) \text{ 后}) = \oint_l f(x, y)g(z)dx\vec{e}_x + \oint_l f(x, y)g(z)dy\vec{e}_y$$

$$(\text{提取 } g(z), \text{ 利用 Green 公式}) = g(z)\iint_S -\frac{\partial f}{\partial y}dS\vec{e}_x + g(z)\iint_S -\frac{\partial f}{\partial x}dS\vec{e}_y$$

$$(\text{由 } g(z)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(z)f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \alpha(x, y, z)}{\partial y} \text{ 及 } g(z)\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \alpha(x, y, z)}{\partial x})$$

$$= \iint_S -\frac{\partial \alpha}{\partial y}dS\vec{e}_x + \iint_S -\frac{\partial \alpha}{\partial x}dS\vec{e}_y$$

而等式右侧=

$$\oint_l \alpha d\vec{l} = \iint_S (\vec{e}_n \times \vec{\nabla} \alpha) \cdot d\vec{S} = \iint_S \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot d\vec{S} = \iint_S (-\frac{\partial \alpha}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\vec{e}_y) \cdot d\vec{S}$$

比较后发现以上两式相同。

事实上如果 S 不是一个平面，则可以将它分成许多无限小平面，然后求和。

15 恒定磁场——导磁材料的磁化

1. 基于磁化能力的材料分类

- (1) 抗磁材料：对外加磁场产生微乎其微的抵抗。
- (2) 顺磁材料：对外加磁场产生微乎其微的加强。
- (3) 铁磁材料：对外加磁场产生极为巨大的加强。
 - ① 硬磁材料：永磁铁，撤去外加磁场后仍能保留磁性。如：碳钢、钨钢、锰钢、钼铁硼。用途：耳机、指南针、永磁电机、磁电系仪表等。
 - ② 软磁材料：撤去外加磁场后磁性消失。如：纯铁、硅钢、铁氧体。用途：变压器、电机、电磁铁、电感（电抗器）等。
 - ③ 矩磁材料：+1 或 -1，起到二进制的作用。如：锰镁铁氧体、锂锰铁氧体。用途：磁盘存储、开关等。

2. 磁偶极子和磁偶极矩

- (1) 通以电流的极小圆环称为磁偶极子。

$$(2) \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2}, \vec{m} = I\pi a^2 \vec{e}_z = I\vec{S}, \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} (2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta).$$

3. 磁偶极子和电偶极子的对偶

$$(1) \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2}, \quad \vec{m} = I\pi a^2 \vec{e}_z = I\vec{S}.$$

$$(2) \quad \varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \vec{p} = q\vec{d}.$$

4. 材料的磁化

(1) 电子绕原子核运动，这是电荷的流动，电荷的流动形成了电流，称为分子电流（束缚电流）。

(2) 分子电流会产生磁场，无外加磁场时，分子电流磁场杂乱无章，总磁场为零，有外加磁场时，分子电流受力，方向趋同，产生不为零的总磁场。

(3) 单个分子电流的磁偶极矩为 $\vec{m} = I\pi a^2 \vec{e}_z = I\vec{S}$ 。

(4) 单位体积内的分子磁矩矢量和称为磁化强度 $\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}$ 。

(5) 大量磁偶极子的作用可以等效为磁化体电流和磁化面电流的共同作用

$$\vec{A} = \int_V \frac{\mu_0 \nabla \times \vec{M}}{4\pi r} dV + \oint_S \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{e}_n}{4\pi r} dS$$

$$\text{磁化体电流面密度 } \vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

$$\text{磁化面电流线密度 } \vec{K}_M = \vec{M} \times \vec{e}_n$$

(6) 导磁材料中的安培环路定律

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) \quad \vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

(7) **B** 与 **H** 的关系

当导磁材料为线性且各向同性时，**M** 与 **H** 成正比。

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

16 恒定磁场——分界面衔接条件

1. 恒定磁场基本方程

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{积分形式})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{微分形式})$$

2. 媒质分界面上的衔接条件

$$H_{1t} - H_{2t} = K \quad (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{e}_n = \vec{K} \quad B_{1n} = B_{2n}$$

$$\text{若分界面无面电流} \quad \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

铁磁媒质内磁力线几乎与分界面平行，空气中磁力线方向近似与分界面垂直。

3. 磁矢位在分界面上的衔接条件

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \quad H_{1t} - H_{2t} = \left(\frac{(\nabla \times \vec{A}_1)_t}{\mu_1} - \frac{(\nabla \times \vec{A}_2)_t}{\mu_2} \right) = K$$

17 恒定磁场——镜像法

1. 恒定磁场方程与静电场方程类似，边值问题类似，所以同样满足唯一性定理，可以用镜像法求解。
2. 镜像法计算例题

18 恒定磁场——磁位、磁压、磁路

1. 磁位的引入

磁位类似于电场中的电位，在恒定磁场无自由电流的区域 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = 0$ ，则可以定义

$$\text{磁位 } \vec{H} = -\nabla \varphi_m。$$

2. 磁位与磁压

- 与静电场类似，恒定磁场的磁位可以表示为磁场强度的线积分： $\varphi_{mA} = \int_A^{\text{参考点}} \vec{H} \cdot d\vec{l}$ 。
 - 两点之间的磁位差称为磁压（磁压与路径有关，具有多值性，为实现磁位的单值性，通常规定积分路径不得穿过磁屏障面[电流环]）： $U_{mAB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l}$ 。
3. 恒定磁场磁位满足的拉普拉斯方程和分界面衔接条件（类似于静电场）

$$\nabla^2 \varphi_m = 0$$

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}$$

4. 磁路

- (1) 利用铁磁材料制成的一定形状的回路（可包括气隙），其上饶有线圈，使磁通主要集中在回路中，该回路称为磁路。
- (2) 磁路是由磁场形成的通路，磁力线类似于电流线，流入=流出。
- (3) 磁路与电路是对偶的，关于电路的定律可以直接推广到磁路中。

- 电压 U —— 磁压 U_m
- 电流（电力线） I —— 磁通（磁力线） Φ
- 电压源 U_s —— 磁压源/磁势 F_m （由电流产生，等于 NI ）
- 电导率 γ —— 磁导率 μ
- 电阻 R —— 磁阻 $R_m = \frac{l}{\mu A}$ （满足欧姆定律 $U_m = R_m \Phi$ ）
- KCL —— 磁路基尔霍夫磁通量定律（对任意节点，磁通量代数和为零）
- KVL —— 磁路基尔霍夫磁压定律（对任意回路，磁压代数和为零）

19 恒定磁场的应用——电感

1. 电感

- (1) 电感就是能够储存磁能的元件。
- (2) 磁场需要电流产生，只要能通过电流产生磁场，就是电感。
- (3) 电感有自感和互感两种参数，是宏观参数。
- (4) 自感和互感反映了电感容纳磁场的能力。

2. 自感

- (1) 自身磁场的变化在自身产生感应电动势。
- (2) 定义：与回路（电流）交链的磁链与电流之比 $L = \frac{\Psi}{I}$ 。
- (3) 内自感：导体内部的磁场仅与部分电流交链的磁链（内磁链）与回路电流之比。
外自感：导体外部的磁场与全部电流交链的磁链（外磁链）与回路电流之比。
- (4) 计算步骤
 - ① 假设电流 \mathbf{I} 。
 - ② 根据电流计算 \mathbf{B} （安培环流定律）。

- ③ 根据 \mathbf{B} 计算磁通量 (积分)。
- ④ 根据磁通量计算磁链 ψ (乘上匝数)。
- ⑤ 求磁链与电流的比值得到自感值。

3. 互感

(1) 磁场变化在它处产生感应电动势。

(2) 一个电流回路与另一个回路的交链和该电流之比 $M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2}$ 。

(3) 计算步骤

- ① 假设电流 \mathbf{I} 。
- ② 根据电流计算 \mathbf{B} (安培环流定律)。
- ③ 根据 \mathbf{B} 计算耦合磁通量 (积分)。
- ④ 根据磁通量计算耦合磁链 ψ (乘上匝数)。
- ⑤ 求耦合磁链与电流的比值得到互感值。

4. 互感和自感的计算——Neumann 公式

$$M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$$

20 时变电磁场——麦克斯韦方程组和分界面衔接条件

1. 时变电磁场：随时间变化的电场和磁场称为时变电磁场。
2. 法拉第电磁感应定律：变化的磁场会产生感应电动势 emf (electromotive force)。

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S})}{dt} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

如果闭合回路或闭合回路的一部分相对于媒质有运动，由此产生的感应电动势 (动生电动势) 为： $\text{emf} = \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ 。

总感应电动势等于两种感应电动势之和。

3. 时变电磁场的安培环路定律——全电流定律

在时变电路中，电流变化，则极板上的电荷 (电量) 会产生变化，因此电通量也会产生变化，所以电通量随时间的变化率就相当于电量随时间的变化率，即为电流。极板间假想的电流称为位移电流，而常规的电流称为传导电流。

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{总}} = I_{\text{传导}} + I_{\text{位移}} = \int_S \vec{J} dS + \int_S \vec{J}_d dS$$

$$\text{电流连续性：} \oint_S (\vec{J} + \vec{J}_d) d\vec{S} = 0, \text{ 即 } \oint_S \vec{J} dS = -\oint_S \vec{J}_d dS$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d(\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S})}{dt} = -\oint_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S}, \text{ 则 } \oint_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S}, \text{ 所以 } \vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{最终得到全电流定律: } \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{总}} = I_{\text{传导}} + I_{\text{位移}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

4. 麦克斯韦方程组（积分形式）

- 全电流定律: $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{总}} = I_{\text{传导}} + I_{\text{位移}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

- 法拉第电磁感应定律: $\text{emf} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$

- 磁场高斯定律: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

- 电场高斯定律: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$

- 描述媒质特性方程组: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 、 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 、 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

5. 麦克斯韦方程组微分形式

- $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ——传导电流和位移电流（时变电场）都会产生旋转磁场，电流和变

化的电场是磁场的漩涡源，电与磁符合右手螺旋法则。

- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ——时变磁场将产生旋转电场，变化的磁场是电场的漩涡源，磁和电符

合左手法则。

- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ——磁场为无散场，磁力线为闭合曲线，任意闭合曲面的磁通量为零。

- $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ——电场为有散场，其散度源是电荷。

- $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 、 $\vec{B} = \mu \vec{H}$ 、 $\vec{J} = \gamma \vec{E}$

◇ 电磁场一旦产生，即便脱离场源，电场变化和磁场变化也会交替进行，从而形成电磁波。

6. 时变电磁场分界面上的衔接条件

$$E_{1t} = E_{2t}、D_{2n} - D_{1n} = \sigma、B_{1n} = B_{2n}、H_{1t} - H_{2t} = K$$

$$\text{时变电磁场折射定律（无面电荷和面电流）: } \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}、\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

理想导体（1）与介质（2）分界面衔接条件

导体内的 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 均为 $\mathbf{0}$ ，则：

$$E_{1t} = E_{2t} = 0, \quad D_{2n} = \sigma, \quad B_{1n} = B_{2n} = 0, \quad -H_{2t} = K$$

21 时变电磁场——动态位及其积分解

1. 动态位

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial(\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \\ \rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\nabla \varphi \rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

2. 达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

引入动态位和洛伦兹规范，避开了散度和旋度求解，实现了变量分离。

推导出的两个达朗贝尔方程形式相同，求解方法相同。

3. 达朗贝尔方程的解

22 时变电磁场——正弦电磁场

1. 正弦电磁场的引入

2. 正弦电磁场和相量法

3. 正弦电磁场的基本方程组

23 平面电磁波——平面电磁波的简介与方程

电磁场基本方程组表明，变化的电场和磁场之间存在着耦合，这种耦合以波动的形式存在于空间中，即空间中有电磁场的传播，变化电磁场在空间的传播称为电磁波。

1. 正弦电磁波

(1) 空间不传播的正弦波： $f(t) = F \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$ 。

(2) 空间传播的正弦波: $f(x, t) = F \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot x + \phi_0)$ 。

(3) 空间传播正弦波的传播方向: 右负左正。

(4) 空间传播正弦波的相位: $\phi = \omega \cdot t - \beta \cdot x + \phi_0$ 。

(5) 空间传播正弦波的相位常数 (波数): $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。

(6) 空间传播正弦波的相速度 (波速):

$$f(x, t) = F \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_0\right) \quad v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi T} = \frac{\omega}{\beta}。$$

2. 平面电磁波和均匀平面电磁波

$$E(x, t) = E_m \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot x + \phi_0) \quad H(x, t) = H_m \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot x + \phi_0)$$

(1) 等相位面: 电磁波传播过程中, 对应于每一时刻 t , 空间 \mathbf{E} 或 \mathbf{H} 具有相同相位的点构成等相位面, 或称波阵面。实际中电磁波等相位面大多为球面, 而远离发射源的等相位面可以近似为平面。

(2) 平面电磁波: 等相位面为平面的电磁波。

(3) 均匀平面电磁波: 平面电磁波的等相位面的每一点上, \mathbf{E} 相同、 \mathbf{H} 相同, 这样的电磁波称为均匀平面电磁波。

3. 均匀平面电磁波方程的推导

- 设均匀平面电磁波的等相位面 (波阵面) 与 yOz 平面平行, 则 $H = H(x, t)$, $E = E(x, t)$ 。
- 均匀平面电磁波是横电磁波 (TEM 波), 即 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 均与传播方向垂直 (无传播方向分量), 相对于传播方向为横向。
- 电磁波的电场 \mathbf{E} 的方向、磁场 \mathbf{H} 的方向和波的传播方向三者相互垂直, 且满足右手螺旋关系。
- 均匀平面电磁波可以分解为两组电磁波 (E_y 和 H_z 、 E_z 和 H_y), 二者形式类似, 分

别独立, 以后仅讨论 E_y 和 H_z 构成的平面电磁波。

$$\begin{cases} -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \gamma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \gamma E_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial H_z}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial E_z}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

4. 任意脱离场源电磁波的电磁波动方程

电磁波脱离场源后，在媒质为线性、各向同性和均匀的空间中，电磁场满足的方程称为电磁波动方程。

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \vec{E} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

24 平面电磁波——理想介质中的均匀平面电磁波

1. 理想介质就是电导率为零的电介质，理想介质无损耗。
2. 理想介质中均匀平面电磁波的一维波动方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$$

3. 理想介质中一维波动方程的解及其物理意义

$$E_y(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad H_z(x, t) = g_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

$$\text{入射波: } E_y^+(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{反射波: } E_y^-(x, t) = f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

$$\text{波的传播速度: } v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n}$$

理想介质的波阻抗：（真空中波阻抗为 $120\pi \approx 377\Omega$ ）

$$\frac{E_y^+(x,t)}{H_z^+(x,t)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0 \quad \frac{E_y^-(x,t)}{H_z^-(x,t)} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = -Z_0$$

$$\frac{E_z^+(x,t)}{H_y^+(x,t)} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = -Z_0 \quad \frac{E_z^-(x,t)}{H_y^-(x,t)} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0$$

4. 无限大理想介质中的正弦均匀平面电磁波

无限大理想介质中均匀平面正弦电磁波波动方程:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \rightarrow \frac{d^2 \dot{E}_y}{dx^2} = \mu\varepsilon(j\omega)^2 \dot{E}_y$$

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dx^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \dot{E}_y = 0 \quad \frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \dot{H}_z = 0$$

$$\text{得到 } \dot{E}_y(x) = \dot{E}_y^+ e^{-j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}x} + \dot{E}_y^- e^{j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}x}$$

$$\text{且无限大理想介质中无反射, 则: } \dot{E}_y(x) = \dot{E}_y^+ e^{-j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}x} \quad \dot{H}_z(x) = \dot{H}_z^+ e^{-j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}x}$$

$$\text{相位常数: } \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{传播常数: } k = j\beta$$

电场强度和磁场强度同相位: $\phi_E = \phi_H$, 可取 $\phi_E = \phi_H = 0$

$$E_y(x,t) = E_y^+(x,t) = \sqrt{2}E_y^+ \cos(\omega t - \beta x)$$

$$H_z(x,t) = H_z^+(x,t) = \sqrt{2}H_z^+ \cos(\omega t - \beta x)$$

25 平面电磁波——导电媒质中的均匀平面电磁波

1. 导电媒质 (电导率不为 0) 中均匀平面电磁波的波动方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial H_z}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0$$

2. 导电媒质中正弦均匀平面电磁波波动方程的相量形式

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dx^2} - j\omega\mu\gamma \dot{E}_y - (j\omega)^2 \mu\varepsilon \dot{E}_y = 0 \quad \frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} - j\omega\mu\gamma \dot{H}_z - (j\omega)^2 \mu\varepsilon \dot{H}_z = 0$$

3. 无限大导电媒质中正弦均匀平面电磁波波动方程的解

$$E_y(x,t) = E_y^+(x,t) = \text{Re}[\sqrt{2}\dot{E}_y^+(x)e^{-j\omega t}] = \sqrt{2}E_y^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_E)$$

$$H_z(x, t) = H_z^+(x, t) = \operatorname{Re}[\sqrt{2}\dot{H}_z^+ e^{-kx} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}H_z^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_H)$$

(1) 导电媒质中的正弦电磁波呈现衰减振荡的特点。

衰减常数、相位常数。

(2) 相速度和色散

- 若 $\gamma = 0$, $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 与频率无关, 无色散, 多频正弦波信号叠加后无畸变传输,

即理想介质为非色散媒质。

- 若 $\gamma > 0$, v_p 与频率有关, 出现色散, 多频正弦波信号叠加后出现畸变, 即导电媒质为色散媒质。

(3) 无限大导电媒质的波阻抗和复介电常数

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dx^2} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{E}_y = 0 \quad \frac{d^2 \dot{E}_y}{dx^2} + \omega^2 \mu \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{E}_y = 0 \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{H}_z = 0 \quad \frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} + \omega^2 \mu \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right) \dot{H}_z = 0 \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = |Z| e^{j\varphi}$$

- 其中 $\epsilon' = \epsilon + \frac{\gamma}{j\omega}$ 称为导电媒质的复介电常数。

- 波阻抗是一复数, 表明电场和磁场在空间同一位置存在着相位差, 在时间上磁场 H 比电场 E 落后的相位为 φ , 即 $\phi_E - \phi_H = \varphi$ 。

4. 无限大良导体中的正弦均匀平面电磁波的特点

$$\text{良导体: } \frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1, \quad \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{j\frac{\omega\mu}{\gamma}}{1 + j\frac{\omega\epsilon}{\gamma}}} \approx \sqrt{j\frac{\omega\mu}{\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}(1 + j) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ \Omega$$

$$\alpha x = 1, \text{ 即 } e^{-\alpha x} = e^{-1} \approx 0.368, \text{ 得集肤效应透入深度 } x = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = d$$

- 高频电磁波在良导体中的衰减常数很大, 电场和磁场的振幅发生急剧衰减, 以致电磁波无法进入良导体深处, 集肤效应非常显著。(理想导体透入深度为 0)
- 电场和磁场不同相, 磁场相位滞后电场 45° 。
- 良导体中电磁波的相速和波长都比较小。

- 良导体 γ 值很大, 波阻抗值很小, 故电场能密度远小于磁场能密度。说明良导体中的电磁波以磁场为主, 传导电流是电流的主要成分。

5. 无限大低损耗介质中的正弦均匀平面电磁波的特点

低损耗介质是一种良好的但电导率不为零的非理想绝缘材料, 其相位常数和波阻抗近似等于理想介质中的相应值, 电场磁场近似同相位, 但是有衰减。在这样的介质中, 位移电流代表了电流的主要特征。

$$\text{低损耗介质 } \frac{\gamma}{\omega\epsilon} \ll 1 \quad \alpha \approx \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

26 平面电磁波——平面电磁波的极化

1. 均匀平面电磁波的极化 (光学中称为偏振)

均匀平面电磁波是由两组电磁波组成的。

均匀平面电磁波的极化是指在空间中某一点, 电场强度矢量端点在垂直于波传播方向的平面内的轨迹 (顺着波传播方向看)。

$$\vec{E}(x, t) = E_y(x, t)\vec{e}_y + E_z(x, t)\vec{e}_z$$

$$E_y(x, t) = E_{ym} \cos(\omega t - \beta x + \phi_y) \quad E_z(x, t) = E_{zm} \cos(\omega t - \beta x + \phi_z)$$

2. 直线极化

$$\text{若 } \phi_y = \phi_z, \text{ 有 } \frac{E_y(x, t)}{E_z(x, t)} = \frac{E_{ym}}{E_{zm}}; \text{ 若 } \phi_y = \phi_z + \pi, \text{ 有 } \frac{E_y(x, t)}{E_z(x, t)} = -\frac{E_{ym}}{E_{zm}}。$$

3. 圆极化

$$\text{若 } \phi_y = \phi_z \pm \frac{\pi}{2}, E_{ym} = E_{zm}, \text{ 则有:}$$

$$\left[\frac{E_y(x, t)}{E_{ym}} \right]^2 + \left[\frac{E_z(x, t)}{E_{zm}} \right]^2 = 1 \rightarrow [E_y(x, t)]^2 + [E_z(x, t)]^2 = C$$

4. 椭圆极化

$$\text{若 } \phi_y = \phi_z \pm \frac{\pi}{2}, E_{ym} \neq E_{zm}, \text{ 则有: } \left[\frac{E_y(x, t)}{E_{ym}} \right]^2 + \left[\frac{E_z(x, t)}{E_{zm}} \right]^2 = 1。$$

5. 左旋极化和右旋极化

(1) 右旋极化波: 旋转转向与波传播方向符合右手法则。

(2) 左旋极化波: 旋转转向与波传播方向符合左手法则。

6. 平面电磁波极化的用途

- (1) 收音机天线调整到与入射电场强度平行时, 收听效果最佳, 广播电台发射的电磁波极化电场强度垂直于大地, 因此收音机天线宜采用竖向。
- (2) 电视台发射的是水平极化波, 因此电视机接收天线应水平。
- (3) 液晶显示器的材料在施加电压时可以扭转极化波的方向, 控制施加电压的大小, 可以改变扭转的角度, 从而改变出射光的强度 (即像素明暗)。
- (4) 火箭、卫星等飞行器姿态不断变化, 其天线方向也不断改变, 因此不能采用线极化波, 否则火箭、卫星接收不到信号, 此时应采用圆极化波。

27 平面电磁波——平面电磁波的入射、反射、透射和驻波

1. 实际中不存在无限大均匀媒质, 且同时存在多种媒质。存在多种媒质时, 平面电磁波在分界面上会出现反射、折射和透射 (如光的反射、折射和透射)。

2. 无限大媒质均匀平面电磁波的解

$$E_y(x, t) = E_y^+(x, t) = \text{Re}[\sqrt{2}\dot{E}_y^+ e^{-kx} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}E_y^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_E)$$

$$H_z(x, t) = H_z^+(x, t) = \text{Re}[\sqrt{2}\dot{H}_z^+ e^{-kx} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}H_z^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_H)$$

3. 从理想介质到理想导体的正入射

(1) 正入射平面电磁波在理想介质和理想导体分界面上的衔接条件

理想导体 $\gamma = \infty$ (电场强度和磁场强度均为零)、理想介质 $\gamma = 0$

$$E_{1t} = E_{2t} = 0, \quad H_{1t} - H_{2t} = K$$

$$E_{1n} = E_{2n} = 0, \quad H_{1n} = H_{2n} = 0 \quad (\text{均匀平面电磁波无传播方向分量})$$

(2) 入射波和反射波

$$\text{理想导体 } \gamma = \infty, \quad \alpha = \infty, \quad E_{y2}(x, t) = \sqrt{2}E_{y2}^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_E) = 0$$

$$\dot{E}_{y1}^- = -\dot{E}_{y1}^+ \quad \dot{H}_{z1}^- = \dot{H}_{z1}^+$$

(3) 电场强度和磁场强度表达式

$$E_{y1}^+(x, t) = \sqrt{2}E_{y1}^+ \cos(\omega t - \beta_1 x)$$

$$E_{y1}^-(x, t) = \sqrt{2}E_{y1}^+ \cos(\omega t + \beta_1 x + \pi)$$

(4) 驻波的形成

磁场相位超前电场 90 度, 在空间上错开了 $\lambda/4$ 。

$$E_{y1}(x, t) = E_{y1}^+(x, t) + E_{y1}^-(x, t) = 2\sqrt{2}E_{y1}^+ \sin(\beta_1 x) \sin(\omega t)$$

$$H_{z1}(x, t) = H_{z1}^+(x, t) + H_{z1}^-(x, t) = \frac{2\sqrt{2}E_{y1}^+}{Z_1} \cos(\beta_1 x) \cos(\omega t)$$

4. 从理想介质到理想介质的正入射

(1) 正入射平面电磁波在理想介质和理想介质分界面上的衔接条件

理想介质 $\gamma = 0$

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad H_{1t} = H_{2t}$$

$$E_{1n} = E_{2n} = 0, \quad H_{1n} = H_{2n} = 0 \quad (\text{均匀平面电磁波无传播方向分量})$$

(2) 反射系数和透射系数

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

(3) 电场和磁场表达式

$$\textcircled{1} \quad \text{反射: } \dot{E}_{y1}(x) = \dot{E}_{y1}^+ e^{-j\beta_1 x} + \Gamma \dot{E}_{y1}^+ e^{j\beta_1 x} \quad \dot{H}_{z1}(x) = \frac{\dot{E}_{y1}^+ e^{-j\beta_1 x} - \Gamma \dot{E}_{y1}^+ e^{j\beta_1 x}}{Z_1}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{透射: } \dot{E}_{y2}(x) = T \dot{E}_{y1}^+ e^{-j\beta_2 x} \quad \dot{H}_{z2}(x) = \frac{T \dot{E}_{y1}^+ e^{-j\beta_2 x}}{Z_2}$$

(4) 行波与驻波

$$\dot{E}_{y1}(x) = (1 + \Gamma) \dot{E}_{y1}^+ e^{-j\beta_1 x} + 2j\Gamma \dot{E}_{y1}^+ \sin(\beta_1 x)$$

$$\dot{H}_{z1}(x) = \frac{(1 - \Gamma) \dot{E}_{y1}^+ e^{-j\beta_1 x} - 2j\Gamma \dot{E}_{y1}^+ \sin(\beta_1 x)}{Z_1}$$

(5) 最值与反射系数

$$\left| \dot{E}_{y1}(x) \right|_{\max} = \left| \dot{E}_{y1}^+ \right| (1 + |\Gamma|) \quad \left| \dot{E}_{y1}(x) \right|_{\min} = \left| \dot{E}_{y1}^+ \right| (1 - |\Gamma|)$$

(6) 驻波比

$$S = \frac{\left| \dot{E}_{y1}(x) \right|_{\max}}{\left| \dot{E}_{y1}(x) \right|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

5. 3层理想介质的正入射、入端阻抗

$$Z_2(x) = \frac{\dot{E}_{y2}(x)}{\dot{H}_{z2}(x)} = Z_2 \frac{Z_3 \cos \beta_2 x - jZ_2 \sin \beta_2 x}{Z_2 \cos \beta_2 x - jZ_3 \sin \beta_2 x}$$

$$\Gamma_1 = \frac{Z_2(-d) - Z_1}{Z_2(-d) + Z_1} \quad T_1 = \frac{2Z_2(-d)}{Z_2(-d) + Z_1}$$

无反射波条件:

$$\text{若 } Z_1 = Z_3 \neq Z_2, \quad d = \frac{n\lambda_2}{2}; \quad \text{若 } Z_1 \neq Z_3, \quad d = (2n+1)\frac{\lambda_2}{4}, \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}。$$

28 平面电磁波——平面电磁波的斜入射、反射和折射

1. 入射面

含波传播路径的平面称为入射面。

2. 平面电磁波的传播方向和波矢量

- 当平面电磁波出现反射和折射时，波的传播方向会改变，不能再假定平面电磁波沿 x 方向传播。

- 为了便于确定平面电磁波的传播方向，将相位常数 β 看成一个矢量，记作 $\vec{\beta}$ ， $\vec{\beta}$ 的方向就是波的传播方向，称为波矢量。 $\vec{\beta} = \beta_x \vec{e}_x + \beta_y \vec{e}_y$ ， $|\vec{\beta}| = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 。

- 当波沿 xy 平面任意方向传播，其在任意一点的相位为 $\vec{\beta} \cdot \vec{r}$ ，则有 $\dot{E}(\vec{r}) = \dot{E}e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}}$ 。

3. 平面电磁波的极化与反射、折射

平行极化波：电场与入射面平行，磁场与入射面垂直。

垂直极化波：电场与入射面垂直，磁场与入射面平行。

4. 平面电磁波斜入射的反射定律和折射定律

$$\theta_1 = \theta_1' \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

5. 平面电磁波斜入射波的反射系数和折射系数

菲涅耳公式与波的极化相关，反映了不同介质分界面上反射波、折射波与入射波电场的关系。

$$\text{平行极化波: } \Gamma_{//} = \frac{\dot{E}_{1//}^-}{\dot{E}_{1//}^+} = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} \quad T_{//} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1}$$

$$\text{垂直极化波: } \Gamma_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \quad T_{\perp} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}$$

$$\text{正入射时有: } \theta_1 = \theta_2 = 0, \text{ 则 } \Gamma_{\perp} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \Gamma_{//} \quad T_{\perp} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = T_{//}$$

6. 平面电磁波在理想介质界面上的全反射

$|\Gamma_{//}|=1$ 或 $|\Gamma_{\perp}|=1$ 称为全反射, 此时 $\cos\theta_2=0$ 或等于纯虚数。

- 当 $\cos\theta_2=0$, $\sin\theta_2=1$, 则 $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$
- 当 $\cos\theta_2$ 等于纯虚数时, $\sin\theta_2>1$, 则 $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}$, 即 $\sin\theta_1=\sin\theta_2\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}>\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$
- 全反射条件 1: $\theta_1\geq\theta_c=\arcsin\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$
- 全反射条件 2: $\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}<\sin\theta_1<1$ (全反射需要从光密介质射向光疏介质)

7. 平面电磁波在理想介质界面上的全折射

$|\Gamma_{//}|=0$ 称为全折射, $\Gamma_{//}=\frac{\dot{E}_{1//}^-}{\dot{E}_{1//}^+}=\frac{Z_2\cos\theta_2-Z_1\cos\theta_1}{Z_2\cos\theta_2+Z_1\cos\theta_1}=0\rightarrow Z_2\cos\theta_2-Z_1\cos\theta_1=0$

$$\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}=\frac{Z_1}{Z_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}=1 \quad \theta_1+\theta_2=90^\circ$$

$$\text{布儒斯特角 } \theta_B=\arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\theta_1$$

垂直极化波必有反射。

8. 平面电磁波在良导体表面的反射与折射

平面电磁波在良导体表面近似可认为是全反射, 少量折射波方向垂直于良导体表面。

29 均匀传输线——无损耗均匀传输线的方程

(传输线的知识还会在“传输线理论和实验 (Transmission Line Theory and Practice)”和“电力系统稳态分析”中出现)

1. 常见的传输线类型

两平行线传输线、两平行板传输线 (微带传输线)、同轴电缆传输线。

2. 无损耗传输线

- 传输线: 引导电磁波以达到高效率地把能量或信息定向地从一点传输到另一点的系统。
- 狭义传输线: 两平行导体, 导体长度可以与电磁波波长比拟, 间距远小于波长。
- 广义传输线: 只要能引导电磁波就是传输线。

- 均匀传输线：若传输线的导体材料、横截面形状和尺寸、相对位置及周围介质沿线都无变化，则称之为均匀传输线。
 - 无损耗均匀传输线：若均匀传输线的导体是理想导体、线间介质是理想介质，则称之为无损耗均匀传输线。
 - 导行电磁波：通过传输线系统传播的电磁波。
3. 无损耗均匀传输线的电磁波基本方程
无损耗传输线传输的是 TEM 波（可由动态位证明），满足的基本方程与理想介质中的平面电磁波方程相同。
 4. 无损耗均匀传输线的电报方程与分布参数电路模型

$$\text{传输线中有电压电流: } \frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$\text{得到电报方程: } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

$$\text{能量守恒关系: } \frac{\partial}{\partial x}(UI) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}C_0 U^2 + \frac{1}{2}L_0 I^2\right)$$

30 均匀传输线——无损耗均匀传输线的传播特性

1. 无损耗均匀传输线的瞬态解

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

$$U(x, t) = U^+\left(t - \frac{x}{v}\right) + U^-\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad I(x, t) = I^+\left(t - \frac{x}{v}\right) + I^-\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{U^+\left(t - \frac{x}{v}\right)}{I^+\left(t - \frac{x}{v}\right)} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_0 \quad \frac{U^-\left(t + \frac{x}{v}\right)}{I^-\left(t + \frac{x}{v}\right)} = -\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = -Z_0$$

$$I(x, t) = \frac{U^+\left(t - \frac{x}{v}\right) - U^-\left(t + \frac{x}{v}\right)}{Z_0}$$

2. 无损耗均匀传输线的正弦稳态解

$$\text{由: } \frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} + \omega^2 L_0 C_0 \dot{U}(x) = 0 \quad \frac{d^2 \dot{I}(x)}{dx^2} + \omega^2 L_0 C_0 \dot{I}(x) = 0$$

得到: $\dot{U}(x) = \dot{U}^+ e^{-j\beta x} + \dot{U}^- e^{j\beta x} \quad \dot{I}(x) = \frac{\dot{U}^+ e^{-j\beta x} - \dot{U}^- e^{j\beta x}}{Z_0}$

其中 $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$

3. 含无损耗均匀传输线电路的分析 (传输线上的电压、电流表达式)

(1) 已知始端的分析

$$\dot{U}(-l) = \dot{U}^+ e^{j\beta l} + \dot{U}^- e^{-j\beta l} = \dot{U}_1 \quad \dot{I}(-l) = \frac{\dot{U}^+ e^{j\beta l} - \dot{U}^- e^{-j\beta l}}{Z_0} = \dot{I}_1$$

$$\dot{U}^+ = 0.5(\dot{U}_1 + Z_0 \dot{I}_1) e^{-j\beta l} \quad \dot{U}^- = 0.5(\dot{U}_1 - Z_0 \dot{I}_1) e^{j\beta l}$$

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cos(\beta x + \beta l) - j Z_0 \dot{I}_1 \sin(\beta x + \beta l)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_1 \cos(\beta x + \beta l) - j \frac{\dot{U}_1}{Z_0} \sin(\beta x + \beta l)$$

(2) 已知终端的分析

$$\dot{U}(0) = \dot{U}^+ + \dot{U}^- = \dot{U}_2 \quad \dot{I}(0) = \frac{\dot{U}^+ - \dot{U}^-}{Z_0} = \dot{I}_2$$

$$\dot{U}^+ = 0.5(\dot{U}_2 + Z_0 \dot{I}_2) \quad \dot{U}^- = 0.5(\dot{U}_2 - Z_0 \dot{I}_2)$$

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cos(\beta x) - j Z_0 \dot{I}_2 \sin(\beta x)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cos(\beta x) - j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin(\beta x)$$

31 均匀传输线——无损耗均匀传输线中的反射和透射

1. 两级联无损耗传输线分界处的反射和透射——反射和透射系数

$$\frac{\dot{U}_1^-}{\dot{U}_1^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \Gamma_L \quad \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1^+} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \tau$$

2. 两级联无损耗传输线分界处的反射和透射——反射和透射电压电流

$$\dot{U}_1(x) = \dot{U}_1^+ e^{-j\beta_1 x} + \Gamma \dot{U}_1^+ e^{j\beta_1 x} \quad \dot{I}_1(x) = \frac{\dot{U}_1^+ e^{-j\beta_1 x} - \Gamma \dot{U}_1^+ e^{j\beta_1 x}}{Z_1}$$

$$\dot{U}_2(x) = T\dot{U}_1^+ e^{-j\beta_2 x} \quad \dot{I}_2(x) = \frac{T\dot{U}_1^+ e^{-j\beta_2 x}}{Z_2}$$

3. 无损耗传输线终端为阻抗的反射

$$\text{由: } \dot{U}(x) = \dot{U}^+ e^{-j\beta x} + \dot{U}^- e^{j\beta x} \quad \dot{I}(x) = \frac{\dot{U}^+ e^{-j\beta x} - \dot{U}^- e^{j\beta x}}{Z_0}$$

$$\text{有: } \dot{U}(0) = \dot{U}^+ + \dot{U}^- \quad \dot{I}(0) = \frac{\dot{U}^+ - \dot{U}^-}{Z_0} \quad Z_L = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)}$$

$$\text{则终端反射系数: } \Gamma_L = \frac{\dot{U}^-(0)}{\dot{U}^+(0)} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\text{沿传输线任意点的反射系数 (反射与入射电压比): } \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{U}^- e^{j\beta x}}{\dot{U}^+ e^{-j\beta x}} = \Gamma_L e^{j2\beta x}$$

4. 行波

- 当负载阻抗与传输线特性阻抗相等、或两端级联传输线特性阻抗相等 (阻抗匹配) 时, 计算得反射系数为零, 即传输线中无反射, 仅含有行波。
- 传输线为无限长, 则线上只存在入射波。
- 行波状态下, 沿线电压电流振幅不变且相位相同, 能量传输效率最高。

$$\dot{U}_1(x) = \dot{U}_1^+ e^{-j\beta_1 x} \quad \dot{I}_1(x) = \frac{\dot{U}_1^+ e^{-j\beta_1 x}}{Z_1}$$

5. 驻波

当负载短路、开路或为纯电抗性负载时, 传输线沿线仅有驻波。

$$\text{短路: } \Gamma_L = \frac{\dot{U}_1^-}{\dot{U}_1^+} = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1$$

$$U(x, t) = 2\sqrt{2}U^+ \sin \beta x \sin \omega t \quad I(x, t) = \frac{2\sqrt{2}}{Z_0} U^+ \cos \beta x \cos \omega t$$

$$\text{开路: } \Gamma_L = \frac{\dot{U}_1^-}{\dot{U}_1^+} = \frac{\infty - Z_0}{\infty + Z_0} = 1$$

$$\text{纯电抗: } \Gamma_L = \frac{\dot{U}_1^-}{\dot{U}_1^+} = \frac{jX_L - Z_0}{jX_L + Z_0} = 1 \angle \varphi_L$$

短路时, 电流超前电压 90 度。

6. 行驻波

当负载阻抗不等于传输线特性阻抗, 也不是开路、短路或纯电抗时, 传输线沿线为行驻

波。

$$\dot{U}_1(x) = (1 + \Gamma)\dot{U}_1^+ e^{-j\beta_1 x} + 2j\Gamma\dot{U}_1^+ \sin(\beta_1 x)$$

$$\dot{I}_1(x) = \frac{(1 - \Gamma)\dot{U}_1^+ e^{-j\beta_1 x} - 2j\Gamma\dot{U}_1^+ \sin(\beta_1 x)}{Z_1}$$

$$\text{驻波比: } S = \frac{|\dot{U}_1(x)|_{\max}}{|\dot{U}_1(x)|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (\Gamma = 0, S = 1 \text{ 时全行波, } |\Gamma| = 1, S = \infty \text{ 时全驻波})$$

32 均匀传输线——无损耗均匀传输线的入端阻抗

1. 无损耗传输线的入端阻抗（已知终端求始端）

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_L \sin \beta l} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} l}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} l}$$

2. 终端接匹配负载或匹配传输线时的入端阻抗

传输线的入端阻抗和特性阻抗相等，且与线长无关，即沿线各处入端阻抗和特性阻抗都相等。

$$\text{代入 } Z_L = Z_0, \text{ 得: } Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_0, \quad \Gamma_L = \frac{\dot{U}_L^-}{\dot{U}_L^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0 \quad (\text{纯行波})$$

3. 终端短路时的入端阻抗

$$\Gamma_L = \frac{\dot{U}_L^-}{\dot{U}_L^+} = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1 \quad (\text{纯驻波}) \quad X_{in} = Z_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} l$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_0 \frac{0 \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j0 \sin \beta l} = jZ_0 \tan \beta l = jZ_0 \tan 2\pi \frac{l}{\lambda} = jX_{in}$$

- $l < \frac{\lambda}{4}$ 时, $X_{in} > 0$ (纯电感)
- $l = \frac{\lambda}{4}$ 时, $X_{in} = \infty$ (开路、LC 并联谐振)
- $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ 时, $X_{in} < 0$ (纯电容)

- $l = \frac{\lambda}{2}$ 时, $X_{in} = 0$ (短路、LC 串联谐振)

实际中可用短于四分之一波长的终端短路线实现超高频电感元件、等于四分之一波长的短路线作为理想的并联谐振电路。

4. 终端开路时的入端阻抗

$$\Gamma_L = \frac{\dot{U}_1^-}{\dot{U}_1^+} = \frac{\infty - Z_0}{\infty + Z_0} = 1 \quad (\text{纯驻波}) \quad X_{in} = -Z_0 \cot 2\pi \frac{l}{\lambda}$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_0 \frac{\infty \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j\infty \sin \beta l} = -jZ_0 \cot \beta l = -jZ_0 \cot 2\pi \frac{l}{\lambda} = jX_{in}$$

- $l < \frac{\lambda}{4}$ 时, $X_{in} < 0$ (纯电容)
- $l = \frac{\lambda}{4}$ 时, $X_{in} = 0$ (短路、LC 串联谐振)
- $\frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$ 时, $X_{in} > 0$ (纯电感)
- $l = \frac{\lambda}{2}$ 时, $X_{in} = \infty$ (开路、LC 并联谐振)

实际中可用短于四分之一波长的终端开路线实现超高频电容元件、等于四分之一波长的开路线作为理想的串联谐振电路。

5. 终端为纯电抗时的入端阻抗

$$\Gamma_L = \frac{\dot{U}_1^-}{\dot{U}_1^+} = \frac{jX_L - Z_0}{jX_L + Z_0} = 1 \angle \varphi_L \quad (\text{纯驻波})$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_0 \frac{jX_L \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l - X_L \sin \beta l} = jZ_0 \frac{X_L + Z_0 \tan \beta l}{Z_0 - X_L \tan \beta l}$$

6. 终端为纯电阻时的入端阻抗

$$\Gamma_L = \frac{\dot{U}_1^-}{\dot{U}_1^+} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_0 \frac{R_L \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jR_L \sin \beta l} = Z_0 \frac{R_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jR_L \tan \beta l}$$

$$\text{负载电阻和传输线驻波比关系: } S = \frac{\max\{R_L, Z_0\}}{\min\{R_L, Z_0\}}$$

◇ 通过测量一段传输线在终端短路和终端开路情况下的入端阻抗,便可以计算出该传输线

$$\text{的特性阻抗和传播常数。 } Z_0 = \sqrt{Z_{ins} Z_{in0}} \quad \beta = \frac{1}{l} \arctan \sqrt{-\frac{Z_{ins}}{Z_{in0}}}$$

33 均匀传输线——无损耗均匀传输线的阻抗匹配

1. 当负载阻抗与传输线特性阻抗相等、或两端级联传输线特性阻抗相等(阻抗匹配)时,计算得反射系数为零,即传输线中无反射,仅含有行波。此时,信号不会失真、能量全部传到负载,传输效率最高。

2. 阻抗匹配的实现

(1) 负载为纯电阻时串联四分之一波长阻抗变换器

$$Z_{in}\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\dot{U}_1\left(-\frac{\lambda}{4}\right)}{\dot{I}_1\left(-\frac{\lambda}{4}\right)} = Z_1 \frac{R_L + jZ_1 \tan \frac{\pi}{2}}{Z_1 + jR_L \tan \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_1^2}{R_L} = Z_0, \text{ 则 } Z_1 = \sqrt{Z_0 R_L}$$

◇ 只适用于电阻负载,所以如果是非电阻负载,可先通过一段传输线与负载连接,使得入端阻抗为纯电阻,然后再进行阻抗匹配,或在四分之一波长处再并联一导纳。

(2) 并联单短截线阻抗变换器实现无损耗传输线的阻抗匹配(并联终端短路的传输线)

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_{i1}} + \frac{1}{Z_{i2}} \quad \frac{1}{Z_{i1}} = \frac{1}{Z_0} + jB_{i1} \quad \frac{1}{Z_{i2}} = jB_{i2} = -jB_{i1}$$

◇ 传输线的入端阻抗与波的频率有关,所以传输线的任何一种匹配方法都有频率有关,当频率改变时,匹配线的长度和接入位置也要改变。

34 均匀传输线——有损耗均匀传输线

实际传输线是有损耗的,损耗主要是导体电阻和介质漏电导,这个电阻和电导若均匀连续地分布在整个传输线的长度上,则该传输线为有损耗均匀传输线。

1. 有损耗均匀传输线的分布参数等效电路及其方程

$$\frac{\partial U}{\partial x} + L_0 \frac{\partial I}{\partial t} + R_0 I = 0 \quad \frac{\partial I}{\partial x} + C_0 \frac{\partial U}{\partial t} + G_0 U = 0$$

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - k^2 \dot{U} = 0 \quad \frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} - k^2 \dot{I} = 0 \quad k = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

$$\dot{U} = \dot{U}^+ e^{-kx} + \dot{U}^- e^{kx} \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}^+ e^{-kx} - \dot{U}^- e^{kx}}{Z_0}$$

$$U(x, t) = \sqrt{2} U^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_+) + \sqrt{2} U^- e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_-)$$

$$I(x, t) = \frac{\sqrt{2} I^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_+) - \sqrt{2} I^- e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_-)}{Z_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

2. 低损耗传输线

$$R_0 \ll \omega L_0; G_0 \ll \omega C_0, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

$$\alpha \approx \frac{1}{2} (R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}) \quad \beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

3. 无畸变传输线

衰减常数与频率无关、相位速度与频率无关。

$$\text{无畸变条件: } \frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}$$

$$k = \sqrt{R_0 G_0} \left(1 + \frac{j\omega L_0}{R_0} \right) \quad \alpha = \sqrt{R_0 G_0} \quad \beta = \omega L_0 \sqrt{\frac{G_0}{R_0}} = \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

35 波导——波导简介及其方程

1. 波导

- (1) 广义波导：能导引电磁波的东西；狭义波导：除了狭义传输线之外的波导。
- (2) 常见波导：金属矩形波导、介质波导。
- (3) 狭义传输线要求两线间距远小于电磁波波长，当电磁波频率很高时，波长很短，线间距非常小，传输线制造困难，传输功率也小；且实际的狭义传输线导体为非理想导体，当频率很高时，电磁波衰减非常快，无法传输。故波导应用于高频电磁波的导引。

2. 电路、传输线和波导——传输能量和信息

3. TEM 波、TE 波、TM 波

- (1) TEM 波：横电磁波——电场和磁场均无 z（传播方向）分量。
- (2) TE 波：横电波——电场无 z 分量，磁场有 z（传播方向）分量。
- (3) TM 波：横磁波——磁场无 z 分量，电场有 z（传播方向）分量。
- (4) 传输线中传输的是 TEM 波、波导中传输的通常是 TE 波和 TM 波。

4. 波导中电磁波满足的波动方程

$$\text{无源电磁波波动方程: } \nabla^2 \dot{E} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{E} = 0 \quad \nabla^2 \dot{H} + \omega^2 \mu \epsilon \dot{H} = 0$$

$$\text{波导中电磁波只能沿 } z \text{ 方向传播: } \dot{E} = \dot{E}(x, y)e^{-jz} \quad \dot{H} = \dot{H}(x, y)e^{-jz} \quad (\gamma \text{ 为传播常数})$$

$$\text{波导中电磁波波动方程} \quad k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (\text{本征值/截止波数})$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z(x, y)}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{E}_z(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{H}_z(x, y) = 0$$

36 波导——金属矩形波导

1. 矩形波导中的 TM 波

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z(x, y)}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{E}_z(x, y) = 0$$

$$k_c = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad \dot{E}_z(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

2. 矩形波导中的 TE 波

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x, y)}{\partial y^2} + k_c^2 \dot{H}_z(x, y) = 0$$

$$k_c = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad \dot{H}_z(x, y) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

3. 矩形波导的截止频率

$$\dot{E} = \dot{E}(x, y)e^{-jz} \quad \dot{H} = \dot{H}(x, y)e^{-jz} \quad \gamma = \alpha + j\beta \quad k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\gamma^2 = k_c^2 - \omega^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon < 0$$

$$\text{则: } \omega > \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \quad \text{即 } f > \frac{1}{2\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}$$

$$\text{矩形波导的截止频率: } f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}$$

$$\text{矩形波导的截止波长: } \lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}}$$

$$\text{波导波长: } \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} \quad \text{波导内波传播相速度: } v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}$$

4. 矩形波导的模式

$$\text{TM 波: } \dot{E}_z(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (m, n \text{ 均不能为零})$$

$$\text{TE 波: } \dot{H}_z(x, y) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (m, n \text{ 不能同时为零})$$

(1) TM_{mn} 和 TE_{mn} 称为波导的模式, 分别称为 TM_{mn} 模和 TE_{mn} 模, 一般来说, 不同的模式对应于不同的截止频率, 而具有相同截止频率的模式称为简并模式。

(2) 设 $a \geq b$, 则 $m=1, n=0$ 时, 截止波长最长, 为 $2a$, 即对应于 TE_{10} 模, 称为主模, 其他模式称为高次模。

(3) 矩形波导中可以传输很多种模式, 也可以只传输一种模式。如: 若令 $b=a/2$, 则仅次于最长截止波长的波长为 a (对应于 TE_{01} 模), 则当工作波长在 a 与 $2a$ 之间时, 只能传输 TE_{10} 模, 从而实现单模传输 (为使相速度不变, 应使 m 和 n 唯一, 所以要进行单模传输)。

37 波导——介质波导

1. 介质波导

由介质构成的波导，相比于金属波导可以传输更高频率的波。

2. 平板介质波导的方程和解的形式

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z(x)}{\partial x^2} + k_c^2 \dot{E}_z(x) = 0 \quad \frac{\partial^2 \dot{H}_z(x)}{\partial x^2} + k_c^2 \dot{H}_z(x) = 0$$

$$\dot{E}_z = \dot{E}_z(x)e^{-jz} \quad \dot{H}_z = \dot{H}_z(x)e^{-jz}$$

$$\text{空气中: } k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = -k_1^2 \quad \dot{E}_z(x) = Ae^{-k_1|x|} \quad \dot{H}_z(x) = Be^{-k_1|x|}$$

$$\text{介质板中: } k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \varepsilon = k_2^2 \quad \dot{E}_z(x) = C_1 \sin(k_2 x) + C_2 \cos(k_2 x)$$

$$\dot{H}_z(x) = D_1 \sin(k_2 x) + D_2 \cos(k_2 x) \quad k_1^2 + k_2^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)$$

3. 平板介质波导中的 TE 波

$$(1) \text{ 偶模: } \dot{H}_z(x) = Be^{-k_1|x|} \quad \dot{H}_z(x) = D_2 \cos(k_2 x)$$

由介质分界面衔接条件：磁场切向分量 \dot{H}_z 、 \dot{H}_y 连续。

$$Be^{-k_1 d} = D_2 \cos(k_2 d) \quad \frac{\mu_0}{k_1} Be^{-k_1 d} = -\frac{\mu_0}{k_2} D_2 \sin(k_2 d)$$

$$\text{则 } k_1 = -k_2 \cot k_2 d, \text{ 又由 } k_1^2 + k_2^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)$$

$$(2) \text{ 奇模: } \dot{H}_z(x) = Be^{-k_1|x|} \quad \dot{H}_z(x) = D_1 \sin(k_2 x)$$

由介质分界面衔接条件：磁场切向分量 \dot{H}_z 、 \dot{H}_y 连续。

$$Be^{-k_1 d} = D_1 \sin(k_2 d) \quad \frac{\mu_0}{k_1} Be^{-k_1 d} = \frac{\mu_0}{k_2} D_1 \cos(k_2 d)$$

$$\text{则 } k_1 = k_2 \tan k_2 d, \text{ 又由 } k_1^2 + k_2^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)$$

◇ k_1 、 k_2 ，即二者是离散值，只有特定模式的波可以传播。

◇ 按照 k_1 由小到大排列，依次称为 TE_0 模、 TE_1 模……

4. 平板介质波导的截止频率（TE 波与 TM 波有相同的截止频率）

$$(1) \text{ TE 波偶模截止频率: } f_c = \frac{2n+1}{4d\sqrt{\mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}}$$

$$(2) \text{ TE 波奇模截止频率: } f_c = \frac{2n}{4d\sqrt{\mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}}$$

(3) 第一个出现的模式是 TE_0 模，即 $n=0$ 的奇模，截止频率为 0。

(4) 第二个出现的模式是 TE_1 模，即 $n=0$ 的偶模，截止频率为 $f_c = \frac{1}{4d\sqrt{\mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}}$ 。

(5) 当 $f < \frac{1}{4d\sqrt{\mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}}$ 时可以实现 TE_0 模的单模传输。

38 波导、谐振腔

1. LC 谐振产生振荡信号。低频无线电技术采用 LC 回路产生电磁振荡，当频率较高时，这种振荡回路有强烈的辐射损耗和焦耳损耗，不能有效地产生高频振荡。
2. 谐振腔是一种适用于高频的谐振元件，是由理想导体围成的空腔。
3. 金属矩形谐振腔是金属构成的长方体空盒子，作用是通过谐振产生振荡的电场和磁场。
4. 矩形谐振腔中 TE 波的振荡模式

- (1) 谐振腔中存在着无穷多个 TE 振荡模式，即对不同的 (m, n, p) 值，有不同的场分布，用 TE_{mnp} 表示振荡模式。（ $p \neq 0$ ，否则 H_z 为零，不是 TE 波； m 和 n 不能同时为零，否则电场强度为零）
- (2) 矩形腔中的电磁波沿 x 、 y 、 z 方向都是驻波，表现出振荡现象。
- (3) $a > b$ 时，最低模式为 TE_{101} 。

$$\dot{H}_z(x, y, z) = -j2A^+ \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)$$

5. 矩形谐振腔中 TM 波的振荡模式
 - (1) 谐振腔中存在着无穷多个 TM 振荡模式，即对不同的 (m, n, p) 值，有不同的场分布，用 TM_{mnp} 表示振荡模式。（ m 、 n 都不能为零，否则 E_z 为零，不是 TM 波； p 可以为零）
 - (2) 最低模式为 TM_{110} 。
6. 矩形谐振腔的谐振频率、谐振波长

$$\text{谐振角频率: } (\omega_0)_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}$$

$$\text{谐振频率: } (f_0)_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}$$

$$\text{谐振波长: } (\lambda_0)_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$

7. 实际矩形谐振腔的品质因数（素）

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_T} = 2\pi \frac{W}{P_L T} = \frac{\omega W}{P_L}$$

39 天线——天线简介和单元偶极子天线

1. 天线就是能在空间中辐射或接收电磁波的装置。

2. 单元偶极子天线的结构

单元偶极子天线是一段通有电流的极短极细的导线，是一种最简单的天线，线形天线可视为很多单元偶极子天线串联而成。

3. 单元偶极子天线工作特点

4. 单元偶极子天线的电场强度和磁场强度

5. 单元偶极子天线近场分析与远场分析

近区场（ $r \ll \lambda$ ）：

忽略含有 r/λ 的高次幂项，磁场和毕-萨定律求得的磁场相同，电场和由库仑定律求出的电偶极子的电场相同。

远区场（ $r \gg \lambda$ ）：

忽略含有 r/λ 的低次幂项。推迟效应不能忽略，电场和磁场均具有波的性质，空间上电场、磁场和波的传播方向相互垂直。电场和磁场同相位，坡印廷矢量只有实部，只有不断向外辐射的能量。

6. 单元偶极子天线方向图

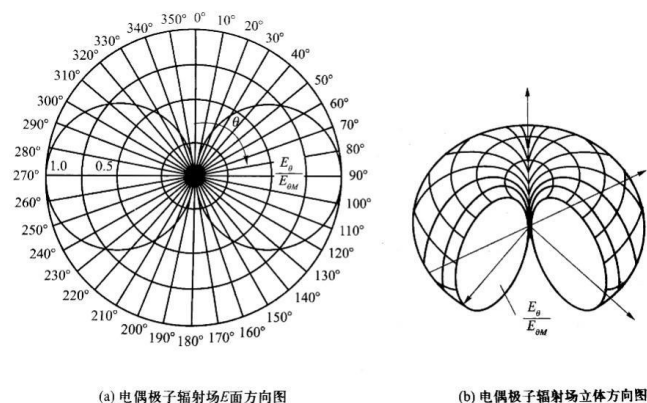


图 4-8 单元偶极子天线的方向图

40 天线——细线天线和天线阵

1. 细线天线是由传输线演变而来的。
2. 直线对称阵子天线的电场强度和方向图。
3. 天线阵——由多个相同的天线按照一定规律排列组合而成。

二元天线阵是由两个相同天线同方向组合而成。

41 电磁场的能量——坡印廷定理

1. 坡印廷定理反映电磁场能量守恒定律（能量和功率是守恒的）
2. 坡印廷定理：
$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = 0$$
3. 坡印廷矢量： $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ （单位面积上的功率密度，功率流动方向满足右手法则）
4. 正弦稳态电磁场的复坡印廷矢量和平均功率密度

正弦稳态电磁场的复坡印廷矢量（类似于正弦稳态电路的复功率）： $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$

正弦稳态电磁场的平均功率密度（类似正弦稳态电路的平均功率）： $S_{av} = \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$

5. 坡印廷定理的复数形式： $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = P + jQ$

$$\text{无电源时: } -\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\vec{S} = \int_V \left(\frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma} \right) dV + j \left[\int_V (\omega \mu |\dot{\mathbf{H}}|^2) dV + \int_V (-\omega \varepsilon |\dot{\mathbf{E}}|^2) dV \right]$$

6. 电磁能量的储存者和传递者都是电磁场, 导线仅起引导电磁能流的作用, 称为导波系统。

42 电磁场的能量——时变电磁场的功率

1. 理想介质中均匀平面电磁波的能量密度和坡印廷矢量

$$w'_e = \frac{1}{2} \varepsilon (E_y^+)^2 \quad w'_m = \frac{1}{2} \mu (H_z^+)^2 \quad w'_e = w'_m \quad w'_{\text{总}} = w'_m + w'_e = \mu (H_z^+)^2$$

$$\text{入射波坡印廷矢量 } \vec{S}^+ = \vec{E}^+ \times \vec{H}^+ = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (H_z^+)^2 \vec{e}_x = v w'_{\text{总}} \vec{e}_x$$

2. 理想介质中正弦均匀平面电磁波坡印廷矢量的平均值

$$\text{入射波坡印廷矢量平均值 } \vec{S}_{av} = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = E_y^+ H_z^+ \vec{e}_x$$

3. 导电媒质中正弦均匀平面电磁波坡印廷矢量的平均值

$$\text{坡印廷矢量平均值 } \vec{S}_{av} = \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = E_y^+ H_z^+ e^{-2\alpha x} \cos(\phi_E - \phi_H) \vec{e}_x$$

4. 均匀传输线功率

$$\dot{U}(x) = \dot{U}^+ e^{-j\beta x} + \dot{U}^- e^{j\beta x} \quad \dot{I}(x) = \frac{\dot{U}^+ e^{-j\beta x} - \dot{U}^- e^{j\beta x}}{Z_0}$$

$$P = \text{Re}[\dot{U}(x) \dot{I}^*(x)] = \frac{(U^+)^2}{Z_0} - \frac{(U^-)^2}{Z_0}$$

5. 单元偶极子天线的辐射功率和辐射电阻

$$P = \oint_S \text{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\vec{S} = I^2 [80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2] \quad R_e = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2$$

43 电磁场的能量——静电场和恒定磁场的能量和力

1. 静电场能量密度和整个空间的静电能量

$$\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \text{ 为磁场能量密度、 } w'_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \text{ 为电场能量密度。}$$

$$W_e = \int_V \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} dV \text{ 为静电场的静电能量 (对全空间积分)}$$

2. 离散电荷系统的静电能量

$$\varphi_{jk} = \frac{W_{jk}}{q_j} \rightarrow W_{jk} = q_j \varphi_{jk}, \text{ 则有 } W_e = \frac{1}{2} \sum_k \varphi_k q_k。$$

3. 连续体电荷系统的静电能量

$$dW = \frac{1}{2} dq \varphi = \frac{1}{2} \rho \varphi dV, \quad W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV \quad (\text{对含电荷空间积分})$$

4. 电容的静电能量

$$U = \frac{dW_e}{dq} \rightarrow dW_e = U d(CU) \rightarrow W_e = \frac{1}{2} CU^2$$

5. 静电力——静电场中带电体受到的力

静电场力的简便计算：先计算能量，再利用能量和力的关系来计算力。

6. 广义坐标和广义力

广义坐标：确定系统中各导体的形状、尺寸与位置的一组独立的几何量，如距离、面积、体积、角度。

广义力：企图改变某一个广义坐标的力，其正方向为广义坐标增加的方向。

7. 虚位移法（微扰法）求静电力

(1) 能量守恒——外源提供能量=静电能量增量+电场力所作的功。

(2) 广义力所作的功=广义力×广义坐标改变量（无穷小）。

(3) 令广义坐标有一无穷小的改变量（虚位移），广义力可以近似认为不改变。

(4) 外源提供能量=静电能量增量+广义力做功： $dW = dW_e + f_e dg$

8. 虚位移法求静电力——常电荷

$$0 = dW_e + f_e dg \rightarrow f_e = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial g} \right|_{q_k = \text{const}}$$

9. 虚位移法求静电力——常电位

$$dW = \sum \varphi_k dq_k \quad dW_e = \frac{1}{2} \sum \varphi_k dq_k$$

$$\sum \varphi_k dq_k = \frac{1}{2} \sum \varphi_k dq_k + f_e dg \rightarrow f_e dg = \frac{1}{2} \sum \varphi_k dq_k = dW_e \rightarrow f_e = \left. \frac{\partial W_e}{\partial g} \right|_{\varphi_k = \text{const}}$$

✧ 外源提供的能量有一半用于静电能量的增量，另一半用于电场力做功。

10. 恒定磁场的能量和力

利用对偶原理可由静电场的能量和力得到恒定磁场的能量和力。

$$w'_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad W_m = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_k I_k \psi_k \quad W_e = \frac{1}{2} LI^2$$

(1) 虚位移法（微扰法）求磁场力

- ① 能量守恒——外源提供能量=磁场能量增量+磁场力所作的功。
- ② 广义力所作的功=广义力×广义坐标改变量（无穷小）。
- ③ 令广义坐标有一无穷小的改变量（虚位移），广义力可以近似认为不改变。
- ④ 外源提供能量=磁场能量增量+广义磁场力做功： $dW = dW_m + f_m dg$

(2) 虚位移法求磁场力——常磁链

$$f_m = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{\psi_k = \text{const}}$$

(3) 虚位移法求磁场力——常电流

$$f_m = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{I_k = \text{const}}$$

44 准静态电磁场——准静态电磁场的概念、条件和求解思路

1. 准静态电磁场

- (1) 准静态电磁场是时变电磁场的范畴，但求解方法可借助静态场的求解方法。
- (2) 在满足一定条件下，可以不考虑电磁波的传播过程，即不考虑推迟效应（推迟效应非常弱，可以近似忽略）。
- (3) 准静态电磁场包括电准静态场和磁准静态场。

2. 电准静态场

忽略 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

磁场不影响电场，电场的方程与静电场相同，可借助静电场求解方法求解。

3. 磁准静态场

忽略 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \vec{J}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

位移电流不影响磁场, 磁场的方程与恒定磁场相同, 可借助恒定磁场求解方法求解。

4. 电准静态场的条件

低频交流下平板电容器中的电磁场属于电准静态场。

5. 磁准静态场的条件

良导体中, $\frac{\omega \varepsilon}{\gamma} \ll 1$, 位移电流可以忽略。磁准静态场又称涡流场。理想介质中, 场点到源

点距离远小于波长时, 时变电磁场也可按磁准静态场处理。

6. 电准静态场的求解方法

7. 磁准静态场的求解方法

44 准静态电磁场——电准静态场与电荷弛豫

$$1. \quad \frac{\gamma}{\varepsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rho = \rho_0(x, y, z) e^{-t/\tau_e} \quad \tau_e = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad \varphi = \varphi_0(x, y, z) e^{-t/\tau_e}$$

45 准静态电磁场——集肤效应与导体交流内阻抗

1. 磁准静态场求解方法

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \nabla^2 \vec{J} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

2. 集肤效应

当交变电流流过导线时, 导线周围变化的磁场也要在导线中产生感应, 从而使沿导线截面的电流分布不均匀。尤其是当频率较高时, 电流集中在导线表面附近的薄层流动。这

一现象称为集肤效应。集肤效应透入深度: $d = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}}$ 。

3. 导体交流内阻抗

(1) 直流或交流频率非常低时, 电流均匀分布, 直流电阻为: $R = \frac{l}{\gamma S}$ 。

(2) 由于集肤效应, 交流且频率不低时, 导体内电流非均匀分布, 主要集中在导体表面

附近,导致导体实际流过电流的面积减小,从而导致导体阻抗与直流或低频交流不

同,所以需要引入等效交流阻抗 $R = \frac{h}{\gamma ad}$ 。

45 准静态电磁场——邻近效应

1. 相互靠近的导体通有交变电流时,各导体中电流分布会受到邻近别的导体的影响,这种现象称为邻近效应。

45 准静态电磁场——涡流、涡流损耗、电磁屏蔽

1. 涡流:当导体置于交变的磁场中,与磁场正交的曲面上将产生闭合的感应电流,称为涡流。涡流具有热效应、去磁效应。

2. 涡流损耗:涡流在导体板中引起的损耗称为涡流损耗,不仅引起能量损耗,而且造成升温影响电气设备的正常工作。

3. 电磁屏蔽:在电磁场工程中,用于减弱由某些源产生的空间某个区域内电磁场的结构。