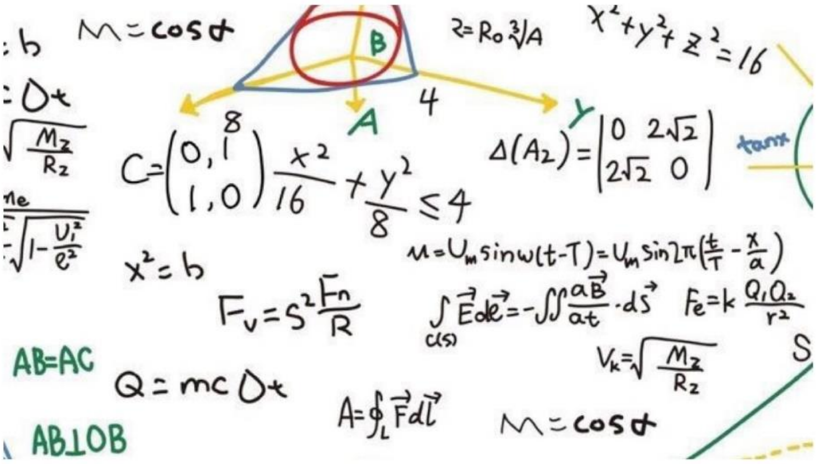
2019年第一学期版

高数

期 末 小 助 手



仲英学业辅导中心出品

学辅公众号

学粉群 5.1

工科数学分析基础 (上) 期末小助手

编写人员:(根据编写章节顺序排名) 自动化 81 夏诗淇、自动化 84 岳浩、电气 84 韩健乐、电气 812 王锴、机类 805 仇文昭、电气 86 刘菁锐、电气 812 赵国庆、自动化 81 潘林波

排版人员: 能动 B71 杨松

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作, 使本资料可以按时完工. 由于编者们的能力与精力限制, 以及本资料是仲英学业辅导中心首次采用 LaTeX 排版, 难免有错误之处. 如果同学们在本资料中发现错误, 请联系仲英学业辅导中心：**XJTUzyxuefu@163.com**, 我们将在修订时予以更正.

从第 3 周开始, **每晚 19:30-21:30**, 学辅志愿者在东 21 舍 118 学辅办公室值班, 当面为学弟学妹们答疑.

同时, 我们也有线上答疑平台——学粉群.

18 级学粉群：646636875, 928740856;

19 级学粉群：902493560,756433480.

期中考试与期末考试前, 我们还会举办考前讲座. 学辅还有新生专业交流会, 转专业交流会, 英语考试讲座等活动, 消息会在学粉群和公众号上公布, 欢迎同学们参与.

仲英书院学业辅导中心

2019 年 9 月 23 日

目录

1 一元函数积分学及其应用

1.1 定积分的概念和存在条件 $\star$

对于工科学生而言，定积分的存在条件通常考试并不作太高要求，只需要简要了解即可，一般也只有 mooc 题目中会有相关的问题，详情可参考课本 175-180 页.

定积分的概念往往会在求极限中考察，例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ ，求这些极限的关键是先提取出一个 $1/n$，然后把求和符号 $\sum$ 里的式子写成 $f(\frac{k}{n})$ 的样子.

1.2 定积分的性质

1.2.1 知识点

定积分的性质比较多，课本上一共列出了 6 条.（详情参考课本 p180-p184）

以下设出现的函数均在给定的区间上可积.

1. 线性性质：$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.\star\star\star$

2. 单调性：若对于 $[a,b]$ 上的可积函数 f,g 恒有 $f(x)\le g(x)$，那么 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$，这个结论有一个直接推论：若在区间 $[a,b]$ 内 $m\le f(x)\le M$，则有 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.（有界性）$\star\star\star$

3.$|\int_a^b f(x)dx|\le\int_a^b|f(x)|dx\star\star\star$

4. 对区间的可加性：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.\star\star\star$

5. 乘积性质：若 $f(x),g(x)$ 均在区间 $[a,b]$ 内可积，那么 $f(x)g(x)$ 也是这个区间上的可积函数.$\star$

6. 积分中值定理：设 $f(x)\in C[a,b]$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，那么至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.\star\star\star\star$

此定理的一个直接推论就是取 $g(x)=1$ 时至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$，通常这里的 $f(\xi)$ 被称为积分均值.$\star\star\star\star$

注：以上 6 条基本性质是课本上给出的，通常来说这些定理很少单独使用，都是组合在一起出现，性质 1 和 4 最为简单基础，使用时有一定技巧性的是性质 2 和 6，在考试的较难的证明题里会出现. 这两个性质体现的是在不具体计算的情况下对积分值的估计.

1.2.2 性质补充

1. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积，那么：

当 $f(x)$ 为奇函数时：$\int_{-a}^a f(x)dx=0$，

当 $f(x)$ 为偶函数时：$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.\star\star\star$

2.（Cauchy 不等式）设 $f,g\in C[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)g(x)dx\le(\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}.\star\star$

1.2.3 例题

[例 3.1]（性质 4 的使用）设 f 是周期为 T 的周期函数，且在任一有限区间上可积，求证：$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

解析：为了利用周期函数这样一个条件，我们将其转化为 $f(x)=f(x+T)$，再写成积分形式就是 $\int_T^{a+T}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$，那么我们只要利用性质 4 构造出这样一个式子即可.

证明：

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_T^{a+T}f(x)dx+\int_a^T f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_a^T f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$$

[例 3.2]（比较积分值）比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ 的大小.

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx - \cos x}{1+x^2}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx$$

$$= \sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx)$$

接下来在第二项中用 $\frac{\pi}{2}-x$ 替代 x：

$$= \sqrt{2}(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}dx)$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{2}sin(x-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-2x)}{(1+x^2)(1+(\frac{\pi}{2}-x)^2)}dx < 0$$

于是：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$$

评注：在比较积分值的题目中本题稍微有些难度，在课本上遇到的那些（例如比较 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx$ 和 $\int_0^1 \ln(1+x)dx$，详情参见课本 p185）两个函数之间的大小关系都比较容易建立，本题是另一种情况：给定区间里前一半第二个大，后一半第一个大，那么我们试图看看：哪个大的部分更多，由于 $\frac{\sin x}{1+x^2}$ 和 $\frac{\cos x}{1+x^2}$ 的大小分界点是在 $\frac{\pi}{4}$，因此想到以这个点作为积分区域的拆分点.

考试中遇到比较积分值的题目时应首先考虑两个被积函数在给定区间里的大小是否可以直接进行比较，再考虑本题里的情况.

[例 3.3]（估计积分值的大小）求证：$2e^{-\frac{1}{4}} < \int_0^2 e^{x^2-x}dx < 2e^2$

解析：估计积分值可以用积分的单调性，我们先考虑 e^{x^2-x} 在 $[0,2]$ 上的范围.

证明：$x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$，于是当 $x\in[0,2]$ 时，$-\frac{1}{4}\le x^2-x\le 2$，故有：$e^{-\frac{1}{4}}\le e^{x^2-x}\le e^2$，直接得到：

$$2e^{-\frac{1}{4}} < \int_0^2 e^{x^2-x}dx < 2e^2$$

评注：对于考试中出现的估计积分值大小的题目通常我们只要求出被积函数在给定区间上的最大值和最小值然后直接放缩即可.

[例 3.4]（罗尔定理和积分中值定理）设函数 f 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 上可导，且 $8\int_{\frac{7a}{8}}^a f(x)dx = af(0)$，求证：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f'(\xi)=0$.

解析：目标是证明区间内存在一点使得导数为 0，很容易联想到罗尔定理，为了使用该定理的条件，我们需要在区间内找到两个函数值相等的点，从题中给出的这个积分值的条件为突破口.

证明：根据积分中值定理，存在 $\eta\in(\frac{7}{8}a,a)$，使得 $\int_{\frac{7a}{8}}^a f(x)dx=\frac{a}{8}f(\eta)$，再根据已知 $8\int_{\frac{7a}{8}}^a f(x)dx = af(0)$，可得 $f(\eta)=f(0)$，由洛尔定理可知存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

评注：积分中值定理常常与微分学中的拉格朗日定理，洛尔定理相联系构成组合题，更多类似的题目会在下一小节给出.

1.3 微积分基本公式和基本定理

1.3.1 Newton-Leibniz 公式 ⋆⋆⋆⋆⋆

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积且有原函数 $F(x)$（即 $F'(x)=F(x)$），那么：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)|_a^b$$

推论：原函数 $F(x)$ 一定在这个区间上连续.

评注：此公式非常重要，它将积分和导数联系到了一起，同样也简化了求积分值的过程. 它把求积分归结为求导的逆运算，是微积分的基本公式. 同学们务必要熟悉理解这个公式.

[例 3.5] 若

$$f(x)=\begin{cases} x^2, x\in[0,1] \\ x+1, x\in[1,2] \end{cases}$$

求：$\int_0^2 f(x)dx$

解：由于 $x=1$ 是该函数的间断点，我们不能直接利用 Newton-Leibniz 公式计算，将函数分段之后再进行计算.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (1+x)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\bigg|_0^1 + \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2 = \frac{17}{6}\end{aligned}$$

评注：当被积函数在区间上不连续时，我们需要在间断点处对积分进行分段，这样才能使用牛莱公式.

1.3.2 微积分第一基本定理 ⋆⋆⋆⋆

设 $f\in C[a,b]$，则 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$ 在 $[a,b]$ 上可导（且导数连续），且 $\Phi'(x)=f(x)$，相应的也有 $d\Phi(x)=f(x)dx$.

评注：此公式实际上还是牛莱公式的推论，它把积分的原函数也函数化，也就是把变上限的积分看成一个函数，该公式主要运用在变上限积分的求导上，它的一个推论是连续函数一定存在原函数.

注意这里的 dx 里的 x 是被积数，而积分符号上的 x 则是积分上限，两个 x 的意义不同，不要混淆.

[例 3.6] 设 $f(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的连续函数，$F(x)=\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$，求 $F'(x)$.

解析：积分式子内部除了 t 还有 x，不适合直接用第一定理，我们先考虑展开对各项分别求导，注意到对于 t 来说 x 是一个常数，因此在写积分式子的时候 x 可以提到积分符号的外面.

解：

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_a^x (x-t)^2 f(t)dt = \int_a^x x^2 f(t)dt - \int_a^x 2txf(t)dt + \int_a^x t^2 f(t)dt \\ &= x^2\int_a^x f(t)dt - 2x\int_a^x tf(t)dt + \int_a^x t^2 f(t)dt\end{aligned}$$

$$F'(x) = x^2 f(x) + 2x\int_a^x f(t)dt - 2\int_a^x tf(t)dt - 2x^2 f(x) + x^2 f(x)$$

$$= \int_a^x 2(x-t)f(t)dt$$

评注：在解决这种表达式未给出的函数的求导时，我们先要把积分符号内部的式子化成只有一个变量，将相对的常数变量提取到积分号外面. 再进行求导. 本题中细心的人会发现 $F'(x) = \int_a^x [(x-t)^2]' f(t)dx$，其中这里的求导符号指对 x 的求导，在学习了多重积分之后同学们会对这个结论有更深的理解.

[例 3.7] 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt}{\sqrt{x}}$

解析：本题考察用洛必达法则求极限和变上限积分求导的方法.

解：$\Phi(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$ 可以看成是 $g(u) = \int_0^u \cos t^2 dt$ 和 $u = \varphi(x) = \sqrt{x}$ 复合而成的函数，因此：

$$\Phi'(x) = g'(u)\varphi'(x) = \frac{d}{du}(\int_0^u \cos t^2 dt)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$$

根据洛必达法则，原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 1$

评注：求极限是变上限积分求导的一个重要应用，做题的时候心里明白要把 $\int_a^x f(x)dx$ 看成一个函数即可，一般来说，容易证明以下的式子：

$$\frac{d}{dx}(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

1.3.3 微积分第二基本定理 ⋆⋆⋆

设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，C 是任意常数，那么 $F + C$ 是 f 在 I 上的所有原函数.

评注：该定理是不定积分的理论基础，它说明了不定积分的结果实际上是一个集合，因此我们在写不定积分的结果时必须要加上常数 C. 考试时对于该定理主要是考察常数 C 的确定，通常是依据给出的等式和初值.

[例 3.8] 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x^2 + \int_0^1 xf(x)dx$，求 $f(x)$ 的表达式.

解析：题中所给的条件看似复杂，但一个关键信息就是 $f(x)$ 一定具有 $x^2 + C$ 的形式，其中 C 是一个待定的常数，于是我们只要把这个形式代入到已知的等式里就可以得到一个关于 C 的方程，解出 C 确定表达式.

解：设 $f(x) = x^2 + C$，代入已知等式得：

$$C = \int_0^1 x(x^2 + C)dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}C$$

解得：$C = \frac{2}{3}$，因此 $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}$.

1.4 不定积分 ⋆⋆⋆⋆⋆

不定积分是考试对于积分这一块的考试重点，属于必考题型，在复习备考时应在熟练掌握基本积分表的基础上大量练习，这一块往往有很强的技巧性，平时练习必须多加总结. 对于工科学生来说考试中求不定积分也往往是求定积分的唯一途径. 这部分的计算对细心也有一定要求.

1.4.1 基本积分表

在此处不再给出，详见课本 p192-p193，下面给出对于积分表的一些补充：

表 1: 积分表的一些补充

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$
$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|+C$	$\int \tan x dx = \ln\|\sec x\|+C$
$\int \cot x dx = \ln\|sinx\|+C$	$\int \sec x dx = \ln\|\sec x+\tan x\|+C$
$\int \csc x dx = \ln\|\csc x+\cot x\|+C$	$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

1.4.2 基本的积分方法

1) 拆分后各个积分：

理论依据 $\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$

作用：将被积式子拆分成几个相对容易直接积分的式子，更便于观察.

[例 3.9] 求 $\int \frac{1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{7}{3}}}{x^2}dx$

解：

$$\int \frac{1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{7}{3}}}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x^2}+\int x^{-\frac{5}{3}}dx+\int x^{\frac{1}{3}}dx = -\frac{1}{x}-\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$$

2) 换元积分法

a) 换元法则 1：

理论依据（课本 p197）：设 f 是连续函数，φ 有连续的导数，且 φ 的值域含于 f 的定义域，那么：$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left(\int f(u)du\right)_{u=\varphi(x)}$

评注：这个法则是通过代换 $u=\varphi(x)$ 来简化被积式. 通常为了使用该法则我们需要把待求的 $\int f(x)dx$ 中的 $f(x)$ 变成两个式子的乘积，使得其中一个因子与 dx 的乘积可以凑成 $d\varphi(x)$ 的形式，实际计算时往往要凑微分.

[例 3.10] 求 (1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$(2) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

解：

$$(1)\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}$$

$$(2)\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x} = 2\left(\int \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}du\right)_{u=\sqrt{x}}$$

$$= 2\int \arcsin u d(\arcsin u) = (\arcsin u)^2+C = (\arcsin\sqrt{x})^2+C$$

评注：在用换元法则 1 求解积分时，务必要对一些微分式十分熟悉，例如 $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x$ 、$\frac{dx}{x} = d\ln x$、$\frac{dx}{1+x^2} = d\arctan x$ 等，掌握这些等式的基础是记住基本积分表，在解题时也需要有意识的创造这些式子的出现.

[例 3.11] 求 (1) $\int \frac{\sin x dx}{5+\sin^2 x}$(2) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$

解：

$$(1)\int \frac{\sin x dx}{5+\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{6-\cos^2 x} = \left(\int \frac{du}{u^2-6}\right)_{u=\cos x} = \int \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{du}{u-\sqrt{6}}-\frac{du}{u+\sqrt{6}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{6}}{u+\sqrt{6}}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{6}}{\cos x+\sqrt{6}}\right|+C$$

$$(2)\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin x\cos^2 x} = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} - \int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}) + C$$

评注：在处理由三角函数组成的积分式时，注意 $sinx$ 和 $cosx$ 之间的求导周期关系，在分子分母上同时乘上一个 $sinx$ 或 $cosx$，有意识的凑出 $dsinx$ 或 $dcosx$，然后使用换元. 尤其是在求 $\int \sin^m x\cos^n x dx (m,n\in Z)$ 这种积分时，通过凑出 $dsinx$ 或 $dcosx$ 往往可以把三角积分化成多项式的积分（多项式积分是所有积分中最简单的一种）.

$b)$ 换元法则 2：

理论依据（课本 p202）：我们将换元法则 1 的式子反过来写就变成了 $\int f(x)dx = (\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt)_{t=\varphi^{-1}(x)}$，与法则 1 里我们把 $f(x)$ 的一部分放进微分里不同，法则 2 里我们是通过代换使得被积式里出现了新的乘积项 $\varphi'(t)$. 两种换元法则的最终目的都是简化被积式，使其变成容易积分的形式.

换元法则 2 这部分需要记忆几个常用的换元情况. 下面作出介绍：

• 被积式中含有根式：

∗ 根式形如 $\sqrt{ax^2+bx+c}(a\neq 0)$

由于可以通过代换 $t = x + \frac{b}{2a}$ 使得根式变成 $\sqrt{at^2+l}$ 的形式，我们接下来只讨论一次项不存在的情况，用表格形式给出：

表 2: 换元法则 2 的部分代换方法

根式的形式	代换方法
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a\tan\theta, \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 或 $x = a\cot\theta, \theta\in[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta, \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 或 $x = a\csc\theta, \theta\in[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\cos\theta, \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 或 $x = a\sin\theta, \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

三角代换是常用的代换，同学们务必熟记，采用这种代换方法往往可以把难以处理的根式化成三角有理式.

[例 3.12] 求：(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$(2) $\int \sqrt{1-x^2}dx$(3) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

解：(1)$\sqrt{ax^2+bx+c}(a\neq 0)$ 的形式，我们先化成 $\sqrt{at^2+l}$.

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}, x = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta - \frac{1}{2}$$

原积分可化简为：

$$\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{1-\sin^2\theta} = \int \frac{d\sin\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta}\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\ln(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}) + C$$

再作逆代换 $\theta = \arctan(\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+\frac{1}{2}))$，原积分为

$$\ln(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}(2x+1)^2+1}) + C$$

(2) 直接作代换 $x = cos\theta$：

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sin\theta d\cos\theta = -\int \sin^2\theta d\theta = \frac{\int(\cos 2\theta - 1)d\theta}{2} = \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2} - \arccos x}{2} + C$$

(3) 直接作代换：$x = sec\theta$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{d\sec\theta}{\tan^3\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + C = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C$$

$*$ 根式形如 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}(n \in N^+)$

使用三角代换的局限性是只能处理根式是二次根式的情况，当根式次数超过二次时，对于 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}(a \neq 0, n \in N^+)$ 这种特殊形式我们可以令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，将被积函数化成用 t 表示的有理式.

这种形式的两种特殊情况是形如 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[n]{\frac{1}{cx+d}}$，处理方法相同.

[例 3.13] 求 (1) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+2}}$(2) $\int \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}dx$(3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x+1}}$

解：(1) 令 $t = \sqrt{x+2}$，那么 $x = t^2 - 2$，因此：

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+2}} = \int \frac{2tdt}{t^2+t-2} = \int \frac{2}{3}(\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t+2})dt = \frac{2}{3}\ln(\left|(t-1)(t+2)^2\right|) + C$$

$$= \frac{2}{3}\ln(\left|\sqrt{x+2}-1\right|) + \frac{4}{3}\ln(\sqrt{x+2}+2) + C$$

(2) 令 $t = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$，那么 $x = \frac{1-2t^2}{t^2+1}$ 因此：

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}dx = -\int \frac{6t^2dt}{(t^2+1)^2} = -(\int \frac{6\tan^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta+1)})_{t=\tan\theta}$$

$$= -6\int \sin^2\theta d\theta = 3\sin 2\theta - 6\theta + C$$

这里化成第二步的形式之后用了三角代换，其目的是简化分母上的 $(t^2+1)^2$，接下来我们只要用 $x = \cos^2\theta - 2\sin^2\theta = \frac{3\cos 2\theta - 1}{2}$ 的逆代换，即可得到最终的结果：

$$\sqrt{9-(2x+1)^2} - 3\arccos\frac{2x+1}{3} + C$$

(3) 令 $t = \sqrt[4]{x+1}$，那么 $x = t^4 - 1$，因此：

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[4]{x+1}} = \int \frac{4t^3dt}{1+t} = \int (\frac{4(t^3+1)}{t+1} - \frac{4}{1+t})dt$$

$$= \int 4(t^2-t+1)dt - \int \frac{4dt}{1+t} = \frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + 4t - 4\ln(1+t) + C$$

$$= \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{x+1} + 4\sqrt[4]{x+1} - 4\ln(1+\sqrt[4]{x+1}) + C$$

评注：对于 (2)，我们实际上历经了两次代换，其等价于一步的代换 $x = \cos^2\theta - 2\sin^2\theta$，实际

上对于形如 $\sqrt{\frac{b-x}{x+c}}$ 的式子，我们还可以使用 $x=b\cos^2\theta-c\sin^2\theta$ 这种代换来简化根式，不过这也只适用于根式是二次的情况，如果原题里被积函数是 $\sqrt[3]{\frac{1-x}{2+x}}$，那么这种代换就不再适用了. 代换后我们只能用下面的待定系数法处理.

在用三角变换处理时我们也会发现，三角代换不仅仅可以用来消除根式，它的根本作用是缩项，在消去根式的时候，它是把形如 $\sqrt{at^2+l}$ 的式子变成了 $\sqrt{au^2}$ 使得根式被去掉了，在没有根式的式子里，例如对形如 $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ 进行积分，我们也可以用三角代换使其变成 $\int\sin^m\theta\cos^l\theta d\theta$ 这种相对容易处理的形式.

- 被积式中含有三角函数：

在对被积式进行三角代换之后往往根式可能消除了，但是随之而来的就是大量 $sinx, cosx$ 的出现，很多时候积分并没有简化，这时我们可以用万能代换把三角有理式化成代数有理式. 通常使用这种代换方法总是可以把目标变成可以处理的有理式积分，但是之后的计算往往可能很繁琐，因此用这种代换做积分往往是被积式无从下手之后的下下策.

令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 那么 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$ 这样所有的三角式都变成了有理分式.

[例 3.14] 求 (1) $\int\frac{d\theta}{1+2\sin\theta}$(2) $\int\frac{\cos\theta d\theta}{1+3\sin\theta}$

解：(1) 令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，则 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$，于是原式变为：

$$\int\frac{d\theta}{1+2\sin\theta}=\int\frac{2d\arctan t}{1+\frac{4t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{t^2+4t+1}$$

$$=\int\frac{2dt}{(t+2)^2-3}=\int\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{t+2-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+2+\sqrt{3}})dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(|\frac{t+2-\sqrt{3}}{t+2+\sqrt{3}}|)+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(|\frac{\tan\frac{\theta}{2}+2-\sqrt{3}}{\tan\frac{\theta}{2}+2+\sqrt{3}}|)+C$$

(2) 令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，则 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$、$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，于是原式变为：

$$\int\frac{\sin\theta d\theta}{1+3\cos\theta}=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{3-3t^2}{1+t^2}}=\int\frac{4tdt}{(t^2+1)(4-2t^2)}$$

$$=\int\frac{dt^2}{(t^2+1)(2-t^2)}=\frac{1}{3}\int(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{t^2-2})dt^2=\frac{2}{3}\ln|\frac{1+t^2}{t^2-2}|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+3\cos\theta|+C$$

评注：对于（2），也可以采用凑微分的方法.

3) 分部积分法

理论依据：（课本 p208 页）（条件略写）

$$\int udv=uv-\int vdu$$

这个公式的意义主要在于当积分 $\int udv$ 不易求得，但 $\int vdu$ 易求得时可以用分部来将这两个不定积分相互转化.

在实际应用时往往要与凑微分法一起使用，我们要在 $\int f(x)dx$ 中的 $f(x)$ 拆出一个量 $\varphi(x)$ 将它写成 $d\int\varphi(x)dx$，原积分式写成 $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}d\int\varphi(x)dx$ 然后进行分部. 通常作为分部 u 的函数往往是 $\ln x, \sin x, e^x$ 和多项式.

[例 3.15] 求 (1) $\int x^3 \ln x dx$(2) $\int \arctan x dx$

解：(1)

$$\int x^3 \ln x dx = \int \ln x d\frac{x^4}{4} = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4 d\ln x}{4} = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^3 dx}{4}$$

$$= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

(2)

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

评注:如果被积式可以写成 $P(x)Q(x)$,其中 $q(x)$ 是 $arcsinx, arccosx, arctanx, lnx$ 之一,$P(x)$ 的积分较易求得，那么我们分部时就会尽量写成 $\int P(x)q(x)dx = \int q(x)d\int P(x)dx = q(x)\int P(x)dx - \int P(x)dq(x)$ ，这是因为像 $arcsinx, arccosx, arctanx, lnx$ 这样较难处理的超越式，在通过一次求导之后就会变成形如 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{1}{x}, \frac{1}{1+x^2}$ 这样的代数（有理）式，积分会相对容易一些.

当然，仅对于含有反三角函数的积分而言，我们也可以直接令 $t = arcsinx$，然后将积分式化为关于 t 的三角积分.

[例 3.16] 求

$$(1)\int x^2 \sin x dx (2)\int x^2 e^x dx (3)\int e^x \sin x dx$$

解：

$$(1)\int x^2 \sin x dx = -\int x^2 d\cos x = \int 2x\cos x dx - x^2\cos x = \int 2x d\sin x - x^2 \cos x$$

$$= 2x\sin x - 2\int \sin x dx - x^2 cosx = 2x\sin x + 2\cos x - x^2\cos x + C$$

$$(2)\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2 e^x - 2\int x de^x$$

$$= x^2e^x + 2\int e^x dx - 2xe^x = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

$$(3)\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = \sin x e^x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$$

移项可得：

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

评注：无论是哪种积分方法最终目的都是简化积分，像 $e^x, \sin x, \cos x$ 这种式子它们的 n 重积分和 n 阶导数都很容易求得，如果当我们遇到 $\int P(x)q(x)dx$ 这样的积分（其中 $P(x)$ 是多项式，$q(x)$ 是 $e^x, \sin x, \cos x$ 之一），那么我们可以考虑对这个式子分部积分使得多项式被多次求导最后化为常数.

如果遇到的式子是形如上面例题（3）中 $e^x, \sin x, \cos x$ 的组合，我们也要利用好这类函数导数的周期性，一直对其中一项进行分部直到出现与初始式子相同的式子.

- 定积分里的分部

定积分里的分部常常被用来作一些定积分等式的推导，在求递推时也很有用.（课本 p211 页）设

u, v 均在区间 $[a,b]$ 上有连续导数，那么：

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

此部分主要是先求不定积分再用牛莱公式，例题不再赘述，课本 p212 页给出了一个重要结论（建议记忆，可以加速求定积分）：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx$$

当 n 为奇数时，原式 $= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot ... \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$

当 n 为偶数时，原式 $= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot ... \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

4) 其他积分方法（待定系数法 $\star\star\star$）

（课本上没有明确提及）在用万能公式对三角积分进行代换时，常常会遇到被积函数变成了 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 的形式，其中 $P(x), Q(x)$ 都是多项式，一般来说这种式子总是可积的，处理的一种一般方法就是将 $Q(x)$ 进行因式分解（写成一次式的乘积）. 由于该方法有多种情况，会涉及复数范围的因式分解，我们只讨论最简单的一种情况：若 $Q(x) = a(x+b_1)(x+b_2)\dots(x+b_n)$，那么我们可设：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x+b_1} + \frac{c_2}{x+b_2} + ... + \frac{c_n}{x+b_n}$$

其中 $c_1, c_2, ..., c_n$ 是待定的常数，具体的值会根据最后通分之后的式子分子应该与 $P(x)$ 完全相等来确定.

[例 3.17] 求 (1) $\int \frac{x+4}{(x+1)(x-3)}dx$(2) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

解：(1) 设 $\frac{x+4}{(x+1)(x-3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} = \frac{(a+b)x+b-3a}{(x+1)(x-3)}$

根据恒等式可得：

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b-3a=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{7}{4} \end{cases}$$

因此：

$$\int \frac{x+4}{(x+1)(x-3)}dx = \int (\frac{7}{4(x-3)} - \frac{3}{4(x+1)})dx = \frac{7}{4}\ln|x-3| - \frac{3}{4}\ln|x+1| + C$$

(2) 设 $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}$

根据恒等式可得：

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

因此：

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2})dx = \ln|\frac{x}{x+1}| + \frac{1}{x+1} + C$$

评注：对形如（2）中的式子进行待定系数时，如果出现了类似 $(x+1)^2$ 这样的重根，待定系数时我们考虑将其看成 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{(x+1)^2}$ 两个因子构成，同理，如果是 $\frac{1}{(x+1)^3}$，那就是 $\frac{1}{x+1}, \frac{1}{(x+1)^2}, \frac{1}{(x+1)^3}$ 三个因子.

1.4.3 不定积分方法总结

1) 先观察有没有根式，有的话试试能不能用代换将其消去.

2) 如果原式中明显可以凑出一个微分式出来先把微分式写上，例如：看到 $\frac{dx}{\sqrt{x}}$，就要想到 $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$.

3) 对于代换处理后的式子，如果是分子分母全部由多项式组成，尝试用待定系数法将原式拆成几个简单的式子之和.

4) 如果式子符合分部积分的几种特殊情况之一，尝试分部.

5) 实在无从下手看看能不能猜一下最终结果的形式，尝试待定系数.

6) 将中间的代换代回原来的式子，注意我们最终结果是要求一个关于 x 的式子，中途若有 $x = \varphi(t)$ 的代换最后 t 也不可以出现在结果里.

7) 对结果进行求导检验（可省略），看看有没有少某一项或者常数 C.

注：求解定积分的方法和不定积分类似，只是我们要注意定积分式子里的范围，因为求解不定积分的最终结果里常常有绝对值，而定积分里必须要注意去这些绝对值. 为了避免错误，事先可以先大概估计一下目标定积分的大概范围（是否大于 0 或是否大于 1）这样就不会出现一些奇葩的错误.

1.5 定积分的应用

1.5.1 知识点

1) 建立积分表达式的微元法：分、匀、合、精（$\star\star$），详情参考课本 p217-218

2) 求解平面曲线的长度，旋转体的面积，体积，曲线围成图形的面积.

具体公式以表格形式给出：（$\star\star\star$）

表 3: 定积分的应用常见公式

几何量（设曲线都在 x 轴上方）	积分表示的结果
$y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上和 x 轴围成图形的面积	$\int_a^b y dx$
$y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 这段的长度	$\int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx$
$y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一段绕 x 轴旋转形成几何体的体积	$\int_a^b \pi y^2 dx$
$y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一段绕 x 轴旋转形成几何体的侧面积	$\int_a^b 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx$

注意当曲线方程是以参数方程形式给出时，以上公式依然成立，导数的求法请参考第二章里对参数方程的求导. 极坐标可以看成特殊的参数方程.

3) 掌握定积分在物理中的应用，例如求解力做的功，物体的质量等等.（$\star\star$）

这部分知识点比较难说清，关键在于合理使用微元法，认识到在 dx 的微元里，作用在各部分的力，质量都近似看成相等.

1.5.2 例题

[例 3.18] 求曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 与坐标轴围成图形的面积.

解析：给出的方程直接写成的形式较繁琐，我们用参数方程来表示.

解：考虑这个方程的参数方程：

$$\begin{cases} x = am^2 \\ y = a(1-m)^2 \end{cases}$$

其中参数满足 $0 \le m \le 1$.

因此面积为：

$$S = \int_0^a y dx = \int_0^1 a(1-m)^2 d(am^2) = 2a^2 \int_0^1 m(1-m)^2 dm = \frac{a^2}{6}$$

评注：很多时候曲线的方程是以隐函数的形式给出的，如果写成 $y = f(x)$ 的形式很繁琐甚至不可以写出. 这时就需要我们引入参数用参数方程来刻画这个曲线，参数的选取具有较强的技巧性，但这超出了本小册子讨论的范围. 我们只需要对简单的几种参数选取有一定印象即可. 另外取 $y = tx$（然后选取 t 为参数）是一种常用的参数表示法.

[例 3.19] 求心形线 $\rho = 4(1+\cos\theta)$ 被射线 $\theta = 0$ 和射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所夹的那部分围绕极轴旋转产生的旋转体的体积.

解析：极坐标方程是特殊的参数方程，$\rho = \rho(\theta)$ 等价于：

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

这是一个关于 θ 的参数方程.

解：考虑该曲线用 θ 表示的参数方程：

$$\begin{cases} x = 4(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = 4(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

即可得到：

$$V = \int_0^4 \pi y^2 dx = |\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\pi \sin^2\theta(1+\cos\theta)^2 d(4\cos\theta + 4\cos^2\theta)|$$

$$= 64\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta(1+2\cos\theta)(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= -64\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)(1+\cos\theta)^2 d\cos\theta$$

$$= 64\pi(\int_0^1 (1-t^2)(1+2t)(1+t)^2 dt)_{t=\cos\theta} = 160\pi$$

评注：在求解一些不知名曲线的旋转体积，长度问题时有时画一个草图会对解题很有帮助.（草图可以用描点法来画，选取上面 5 个点，结合对称性.）

这些问题的关键还是写出参数方程，然后把参数方程直接带入即可.

[例 3.20] 有一直角三角形板，其直角顶点到斜边高的距离是 h. 两条直角边长分别是 a 和 b，将其铅直放入水中.

（1）如果直角顶点在水面，斜边在水下且与水面平行

（2）如果斜边与水面相齐.

分别求出这两种情况下该板一侧受到的水压力.

解析: 问题中板受到的压力不可以直接用公式“压强 $\times$ 受力面积”来计算，主要是板上不同深度的点随水下深度的不同而变化，我们可以把板分成许多水平细条，由于各细条上的点到水面的距离近似相等，所以细条上个点处压强也近似相等，可用公式“压强 $\times$ 受力面积”算出各细条受到压力的近似值，将其积分即可得到整块板所受的压力.

题目要求求解两种不同摆法的板受到的压力，先依题意画出草图.

解：我们设该直角三角形其中一个直角大小是 θ.

(1) 此时板在水中的情况如图 1（见下页）所示：

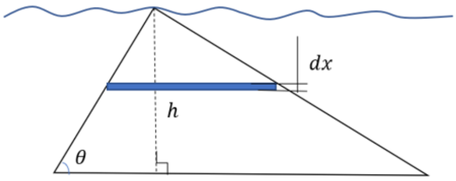


图 1: 例 3.20 图 1

我们考虑把整块板分成宽为 dx 的一个个小矩形，对于每个小矩形，当 $dx \to 0$ 时可以近似看成矩形上的压力处处相等，设矩形对应的深度是 x，那么每个点受到的压强都是 ρgx，其中 ρ 是水的密度，g 是重力加速度，矩形受到的力：

$$dF = pS = \rho gx \cdot x(\tan\theta + \cot\theta)dx = \rho gx^2(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})dx$$

于是整个矩形受到的力：

$$F = \int dF = \int_0^h \rho gx^2(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})dx = \frac{\rho gh^3(a^2+b^2)}{3ab}$$

(2) 此时板在水中的情况如图 2 所示：

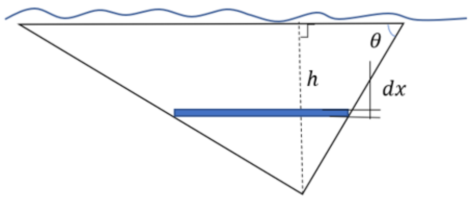


图 2: 例 3.20 图 2

与（1）类似，只是深度为 x 的矩形受到的压强变成了 $\rho g(h-x)$，因此每个矩形受到的力变成了 $dF = \rho gx(h-x)(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})dx$，那么整个板受到的力：

$$F = \int dF = \int_0^h \rho gx(h-x)(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})dx = \frac{\rho gh^3(a^2+b^2)}{6ab}$$

此处答案与课本答案略有不同，原因是 h 和 a, b 之间本身存在等式关系.

1.6 反常积分

1.6.1 知识点

1) 了解两种反常积分的概念（$\star\star\star$）：

（考试时常常出判断题，判别反常积分一个重要方法就是根据定义）

具体概念请参照课本 p228 和 p230

无穷积分是否存在关键看 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ 这个极限是否不存在，而无界函数的积分是否存在看 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$（如果 c 是奇点）这两个极限是否都存在，注意对于无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$，如果它要求收敛必须要 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 和 $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_b^c f(x)dx$ 两个极限同时存在，这里的 a 和 c 是任意选取的两个常数.

特别注意的是设 $f(x)$ 的原函数是 $F(x)$，那么 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 不存在不等价于 $\lim\limits_{x\to\infty}(F(x)-F(-x))$ 存在（课本 p240 页第 7 题），同样对于奇点是 c 的反常积分 $\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^b f(x)dx$ 存在不等价于 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx)$ 存在（课本 p241 页 B 组第 1 题）. 这两种情况常常被用来出判断敛散性的判断题.

2) 理解几种收敛比较准则

（这是判断一个给定函数是否收敛的主要方法，也是考试常考简答题的）

摘自课本 p234 和 p233，由于无穷积分和无界函数积分比较准则表达类似，所以我们这里只列出一种.

比较准则 I（$\star\star\star\star$）:

设 f, g 在 $[a,+\infty)$ 上连续，并且 $0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a,+\infty)$，那么：

（1）当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

（2）当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

比较准则 II（$\star\star\star\star$）:

设 f, g 在 $[a,+\infty)$ 上非负连续，而且 $g(x) > 0$，设 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$（有限或无穷），那么：

（1）当 $\lambda > 0$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散.

（2）当 $\lambda = 0$ 时，当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

（3）当 $\lambda = +\infty$ 时，当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散.

绝对收敛准则（$\star\star\star$）

设 $f \in C[a,+\infty)$，如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛（此时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛）

1.6.2 三种准则的相互对比

比较准则 I 是根本的比较准则，另外两种准则都是根据它推导出来的.

比较准则 II 的实现需要一个极限的存在，但是在我们遇到的题目中往往比比较准则 I 更加好用，因为它考虑的是除法的结果，复杂的函数作减法往往比较难判断符号，但是除法之后求极限比较就相对容易一些.

两种准则都有两个要求：

（1）必须要有一把“尺子“函数 $g(x)$，它与 $f(x)$ 之间的大小极限关系要容易判断，且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 的敛散性已知.

（2）无论是 $f(x)$ 还是 $g(x)$，它在目标区间上的符号都不能改变.

但是两种准则的优势也很明显，它将判断 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性归结于另一个已知敛散性的积分（我们甚至不需要计算 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的值），这在 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 的表达式很复杂时十分有效.

对于在给定区间上符号会改变的函数，只能用绝对收敛准则，由于取绝对值之后的函数始终是正数，因此我们可以对 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 应用比较准则 I 和比较准则 II（注意 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛并不是 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的必要条件）. 对于考试中的题目而言，这三种比较准则已经基本够用.

1.6.3 关于 $\int x^p dx$ 的反常积分（⋆⋆⋆⋆）

在使用比较准则 I 和比较准则 II 寻找"尺子"时，一种经常找的比较函数就是 $x^p(p\neq 0, p\in R)$，对于它的反常积分我们有有如下结论：

表 4: p 积分相关结论

积分名	参数 p 的范围	敛散性
$\int_1^{+\infty} x^p dx$	$p\geq -1$	发散
$\int_1^{+\infty} x^p dx$	$p< -1$	收敛
$\int_0^{1} x^p dx$	$p> -1$	收敛
$\int_0^{1} x^p dx$	$p\leq -1$	发散

由于 $\int x^p dx$ 的反常积分比较容易判断，是我们首先考虑的"尺子".

1.6.4 例题

[例 3.21] 判断下列反常积分的敛散性：(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

解：(1) 取 $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x-1}}, g(x)=x^{-\frac{3}{2}}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}=1$$

而 $\int_1^{+\infty}x^{-\frac{3}{2}}dx$ 收敛.

根据比较准则 II，原反常积分收敛.

(2) 被积函数在给定区间上符号不断改变，考虑用绝对收敛准则.

由于 $|\sin x|\leq 1$，因此 $\int_1^{+\infty}|\frac{\sin x}{x^2}|dx<\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，根据比较准则 I，原反常积分收敛.

(3) 明显可以看出 $\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$，直接根据定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

那么原反常积分收敛.

评注：当遇到（3）这种原函数很容易求出的，优先考虑求出原函数然后用定义求，虽然（1）的原函数也可以求，但表达形式较复杂，用比较准则更好. 当然（3）也可以与 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 作比较.

[例 3.22] 判断 $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}(b>a>0)$ 的敛散性，如果收敛，求其值.

解：此题中奇点有两个，要分开讨论.

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

对于左边的奇点 $x=a$，我们取 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-a}}$，那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{b-x}}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

而 $\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x-a}}$ 收敛，因此 $\int_a^{\frac{a+b}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 收敛（比较准则 II）.

对于右边的奇点 $x=b$，我们取 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},g(x)=\frac{1}{\sqrt{b-x}}$，那么

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

而 $\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\frac{dx}{\sqrt{b-x}}$ 收敛，因此 $\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 收敛（比较准则 II）.

综上可知，原积分收敛.

为了求 $\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 的值，我们当然可以直接积分求出它的原函数然后代入 a 和 b 的值来求极限，此方法较复杂，此处给出另一种方法，注意到这里的 $a<x<b$，那么考虑令 $x=a\cos^2t+b\sin^2t$，这里 $0<t<\frac{\pi}{2}$（这时 x 的范围也恰好是 (a,b)）

故有：

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(b-a)\sin t\cos t dt}{\sqrt{(b-a)\sin^2t}\cdot\sqrt{(b-a)\cos^2t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dt=\pi$$

评注：这里求值的代换 $x=a\cos^2t+b\sin^2t$ 并非空穴来风，之前我们针对 $\sqrt{\frac{b-x}{x+c}}$ 使用过类似的代换，通过代换去除了根号之后积分式明显简化了.

1.6.5 反常积分方法总结

1) 首先判断这个积分里的“反常”之处有哪些，如果奇点不止一个或者既有奇点又有无穷区间那么要分段来考虑.

2) 再观察这个式子的不定积分是不是可以直接积出，若可以，直接用定义解决.（这种情况比较少见）

3) 然后看它在给定区间上是否变号，若不变号，先试试可不可以用合适的 p 积分来进行比较. 若不断变号，那么考虑用绝对收敛准则.（考试不会很为难你，一般这种变号的取绝对值之后都很好判断）

4) 当 p 积分难以充当“尺子”时，再根据经验选取其他函数（如 $\int\frac{dx}{x\ln^p x}$ 等）.

2 常微分方程

2.1 几类简单的微分方程

2.1.1 常微分方程的基本定义 ⋆

如果方程中的未知函数 y 是自变量 x 的一元函数，则该方程称为常微分方程.

阶：微分方程中所含未知函数的最高阶导数（或微分）的阶数

通解：微分方程中含有等于该方程阶数个相互独立的常数的解称为微分方程的通解.（注意通解不一定包含所有解）

定解条件：确定通解中任意常数的附加条件

2.1.2 可分离变量的一阶微分方程 ⋆⋆⋆⋆

形如 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 的方程，化为 $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$，然后分别对两边积分，即可求出通解，此方法称为分离变量法. 注意对 $g(y)=0$ 的情况单独讨论，若该情况可以包含在通解中，则无需单独列出，否则需要将此情况单独写出.

注意：注意题目要求，若题目中要求求解通解，则无需考虑 $g(y)=0$ 的情况.

[例 4.1] 解微分方程 $(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$
解：等式两边除以 x^2-1 和 y^2+1 变为：

$$\frac{x\cdot dx}{x^2-1}=\frac{y\cdot dy}{y^2+1}$$

等式两边分别积分得到：

$$1+y^2=C\left(1-x^2\right)$$

由于 y^2+1 恒不为 0，因此该解即为该方程的解.

2.1.3 一阶线性微分方程 ⋆⋆⋆⋆

未知函数及其导数都是一次的一阶微分方程称为一阶线性微分方程，其一般形式为 $y'+P\left(x\right)\cdot y=Q\left(x\right)$，称为非齐次线性微分方程. 当 $Q(x)=0$ 时，该方程变为 $y'+P\left(x\right)y=0$，称为齐次线性微分方程.

一阶线性齐次方程是可分离变量的方程. 对于形如 $y'+P\left(x\right)y=0$ 的方程，分离变量得到 $\frac{dy}{y}=-P\left(x\right)dx$，两边积分得到通解，通解形式为 $y=C\cdot e^{-\int P(x)dx}$.

对于形如 $y'+P\left(x\right)\cdot y=Q\left(x\right)$ 的方程，解的一般形式为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

（C 是任意常数）.

求解此方程还可以使用常数变易法，主要方法为先求出非齐次微分方程对应齐次微分方程的通解，再将通解中的常数 C 用 $h(x)$ 代换，带入原方程即可求出 $h(x)$. 此方法计算量略大，建议在熟悉公式的基础上直接代入求解公式进行求解.

在套用公式时，注意先把方程化为上述标准形式，建议在草稿纸上写出 $P(x)$ 与 $Q(x)$，然后代入该公式，防止出错.

[例 4.2] 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y^3+x}$ 的通解
解：求解微分方程时，先看是哪种形式. 求通解可以求 $x=f(y)$ 的形式.
将原方程求倒数得：

$$\frac{dx}{dy}=y^2+\frac{x}{y},P\left(y\right)=\frac{1}{y},Q\left(y\right)=y^2$$

通解为：

$$x=\frac{y^3}{2}+Cy$$

[例 4.3] 求解方程 $x\cdot y'-y\cdot\ln y=x^2\cdot y$
解：出现 lny，不属于学过的任何一种形式. 目标是对方程进行处理，使它成为学过的形式.
等式两边除以 xy，得到：

$$\frac{y'}{y}-\frac{\ln y}{x}=x'$$

注意 lny 的导数是 $\frac{1}{y}$，方程可变为：

$$\left(\ln y\right)'-\frac{1}{x}\left(\ln y\right)=x$$

原方程变成了一阶非齐次微分方程. 解得：$lny=x(x+C)$，即 $y=e^{x(x+C)}$.

2.1.4 变量代换法 ⋆⋆⋆

1) 齐次微分方程

形如 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一阶微分方程称为齐次微分方程.

此方程的求解方法：令 $u=\frac{y}{x}$，即可转化为一个可分离变量的方程，求解得到 u 之后代入 $u=\frac{y}{x}$ 得原方程通解.

[例 4.4] 解微分方程 $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}, y\,|_{x=-1}=2$

解：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y'=x\cdot\frac{du}{dx}+u$. 代入原方程得：

$$u\cdot du=\frac{dx}{x}$$

等式两边积分得：$u^2=\ln x+c$，即 $y^2=2x^2\cdot(\ln x+c)$.

将定解条件带入可得：$C=2$.

2)$Bernoulli$ 方程

形如 $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}(\alpha\neq 0,1)$ 的方程

解法：等式两边同除以 y^{α} 得到：$y'\cdot y^{-\alpha}+P\left(x\right)y^{1-\alpha}=Q\left(x\right)$. 令 $u=y^{1-\alpha}$，则 $y'=\frac{u'}{1-\alpha}$，代入原方程得：$u'+\left(1-\alpha\right)P\left(x\right)\cdot u=\left(1-\alpha\right)Q\left(x\right)$. 原方程变为一阶微分非齐次方程. 求解出 u，进而求解 y.

[例 4.5] 求微分方程 $yy'+2xy^2-x=0$ 的通解

解：令 $u=y^2$，则 $yy'=\frac{du}{2dx}$. 原式可化简为：

$$u'+4xu=2x$$

解得：

$$u=Ce^{-2x^2}+\frac{1}{2}, y^2=Ce^{-2x^2}+\frac{1}{2}$$

[例 4.6] 求微分方程 $3y^2y'-y^3=x+1$ 的解

解：令 $u=y^3$，原方程变为：

$$u'-u=x+1$$

$$P(x)=-1, Q(x)=x+1$$

解得：$u=Ce^{x}-x-2$，即 $y^3=Ce^{x}-x-2$.

3) 其他可用变量代换法的一阶微分方程

[例 4.7] 求解微分方程 $(3x^2+x+y^2)dx+ydy=0$

解：原方程变形可得：

$$(3x^2+x+y^2)+yy'=0$$

$$y^2+\frac{1}{2}(y^2)'=-3x^2-x$$

将 y^2 视作整体，求解可得：

$$y^2=-3x^2+\frac{5}{2}x-\frac{5}{4}+Ce^{-2x}$$

小结：当题目中的方程不属于所给的任何一种形式时，注意对方程进行转化，绝大部分题目均可转化为常见类型，然后套用公式即可求解.

2.1.5 可降阶的高阶微分方程 ⋆⋆⋆⋆

1)$y''=f(x)$ 型，积分两次即可，较为简单.

2)$y''=f(x,y')$ 型，不显含 y，此类题型的一般求解方法是令 $p=y'$，将原方程化为以 p 为未知函数的一阶微分方程 $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$，求解此方程可解出 y.

[例 4.8] 求微分方程 $(1+x^2)\,y''=2xy'$ 的通解

解：此方程属于不含 y 的类型

令 $p=y'$，原方程变为：

$$\left(1+x^2\right)p'-2xp=0$$

分离变量得：

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}\cdot dx$$

解得：

$$p=C_1\left(1+x^2\right),y'=C_1\left(1+x^2\right)$$

两端再次积分可得：

$$y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$$

3)$y''=f(y,y')$ 型，不显含 x，令 $p=y'$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，原方程可化为 p 与 y 的一阶微分方程 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，由此方程求解 p 之后代入原方程可解得 y.

[例 4.9] 求微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的通解

解：此方程属于不含 x 的类型，令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，代入原方程可得：

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$$

当 $p=0$ 时，$y=C$.

当 $y\frac{dp}{dy}-p=0$ 时，解得 $p=\frac{dy}{dx}=C_1y$，即 $y=C_2e^{C_1x}$.

2.2 高阶线性微分方程

2.2.1 线性微分方程的基本定义与解的存在唯一性定理 ⋆

形如 $p_0(t)x^{(n)}(t)+p_1(t)x^{(n-1)}(t)+...+p_{n-1}(t)\dot{x}(t)+p_n(t)x(t)=f(t)$ 的微分方程称为线性微分方程.

若该方程中的系数 $p_0(t),p_1(t),...,p_n(t),f(t)$ 均在区间 (a,b) 内连续,，则该方程存在唯一的满足初值条件的解 $x(t)$，称为解的存在唯一性定理.

2.2.2 解的叠合性，线性相关与线性无关，解的线性无关判别法 ⋆⋆

若 $x_1,x_2,...,x_n$ 均为该线性齐次方程的解，则这些解的任意线性组合仍为该齐次方程的解，称为解的叠合性.

线性相关与线性无关：与线性代数中的相关定义相同.

解的线性无关判别法：设 $x_1,x_2,...,x_n$ 均为该线性齐次方程定义在区间 I 内的解，则它们线性无关的充要条件是：在 I 上存在一点使这 n 个解及其各阶导数在 t_0 处构成的 $Wronski$ 行列式 $\omega(t_0)$

的值不为 0.

$$\omega(t_0)=\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) & \cdots & \dot{x}_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{(n-1)}(t_0) & {x_2}^{(n-1)}(t_0) & \cdots & {x_n}^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

2.2.3 高阶常系数线性齐次微分方程的解法 ⋆⋆⋆⋆⋆

当该方程中的系数 $p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)$ 均为常数时，该方程称为常系数微分方程. 该类方程的求解方式是先. 求解该方程对应的特征方程，求出其特征根与特征值，然后根据特征根的情况代入下表求解.

表 5: 特征根与对应通解

特征根	通解中对应项
单实根 λ	$Ce^{\lambda t}$
k 重实根 λ	$e^{\lambda t}(C_1+C_2t+...+C_kt^{k-1})$
一对共轭单复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$
一对 k 重共轭复根 $\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha t}[(C_{11}+C_{12}t+...+C_{1k}t^{k-1})\cos\beta t$ $+(C_{21}+C_{22}t+...+C_{2k}t^{k-1})\sin\beta t]$

2.2.4 高阶常系数线性非齐次微分方程的解法 ⋆⋆⋆⋆⋆

非齐次微分方程的求解方法为先求出该方程对应的齐次方程的通解，然后再求出该非齐次微分方程的任一特解，两者之和为所求方程的解. 特解的求解方法见下表：表中 Z, Z_1, Z_2 均为与 φ 同次

表 6: 特解的求法

$f(t)$ 的类型	特征根的情况	应设特解 $x^*(t)$ 的形式
m 次多项式 $\varphi(t)$	0 不是特征根	$x^* = Z(t)$
m 次多项式 $\varphi(t)$	0 是 k 重特征根	$x^* = t^k Z(t)$
$\varphi(t)e^{\mu t}$	μ 不是特征根	$x^* = Z(t)e^{\mu t}$
$\varphi(t)e^{\mu t}$	μ 是 k 重特征根	$x^* = t^k Z(t)e^{\mu t}$
$\varphi(t)e^{\mu t}\cos\nu t$, $or\varphi(t)e^{\mu t}\sin\nu t$	$\mu + i\nu$ 不是特征根	$x^* = e^{\mu t}[Z_1(t)\cos\nu t$ $+Z_2(t)\sin\nu t]$
$\varphi(t)e^{\mu t}\cos\nu t$, $or\varphi(t)e^{\mu t}\sin\nu t$	$\mu + i\nu$ 是 k 重特征根，$\left(1 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right]\right)$	$x^* = t^k e^{\mu t}[Z_1(t)\cos\nu t$ $+Z_2(t)\sin\nu t]$

数的多项式.

有关常系数线性微分方程，建议以课本为基础，通过大量做课后习题对此部分公式加以记忆，也建议在考前晚上对此部分公式加以重点记忆，防止混淆.

[例 4.10] 求 $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ 的通解

解：

与方程对应的齐次方程为 $y'' - 4y' + 4y = 0$

特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

特征方程的根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

从而特征方程的解为 $C_1(x+1)e^{2x}$

由于 2 是重特征根，因此原方程的特解可以写为 $y^* = kx^2e^{2x}$，代入原方程求得 $k = 3/2$，因此原方程的通解为：

$$y = C_1(x+1)e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

[例 4.11] 求微分方程 $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = te^{2t}$ 的通解

解：特征方程的特征根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, 因此齐次方程的通解为 $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$ 由于 $\mu = 2$ 是该特征方程的单根，因此设 $x^* = t(B_0 + B_1t)e^{2t}$，代入该方程可解得 $B_0 = -1, B_1 = -1/2$，因此特解 $x^* = -(t + 1/2t^2)e^{2t}$，原方程通解为：

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \left(t + \frac{1}{2}t^2\right)e^{2t}$$

2.2.5 常见的高阶变系数线性微分方程的解法（Euler 方程）⋆⋆⋆

$Euler$ 方程的一般形式：

$$t^n\frac{d^nx}{dt^n} + a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1}t\frac{dx}{dt} + a_nx = f(t)$$

求解方法：通过变换 $t = e^\tau$ 或 $\tau = \ln t(t > 0)$ 化为常系数线性微分方程.

[例 4.12] 求微分方程 $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$ 的通解

解：

此方程符合 $Euler$ 方程形式，直接套用基本步骤即可

令 $t=e^{\tau}$，则有：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right)$$

代入原方程，化简可得：

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}-2\frac{dx}{d\tau}+x=0$$

可求得其通解为 $x=\left(C_1\tau+C_2\right)e^{\tau}$，代入 $\tau=\ln t$ 可求得其通解：

$$x=\left(C_1\ln t+C_2\right)t$$

2.3 线性微分方程组

2.3.1 齐次线性微分方程组 ⋆

基本性质：

1. $x(t)$ 0 是该方程组的解，称为零解或平凡解.
2. 若解 $x(t)$ 满足初值条件，则恒有 $x(t)$ 0.
3. 满足解的叠合性.

2.3.2 基解矩阵以及线性无关判别法 ⋆

此部分概念较为繁琐，且考察较少，在复习时可有选择的对课本知识进行复习.

[例 4.13] 已知微分方程组：

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t-1\\ \frac{1}{2}\sin 2t+1 & \sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

其通解为：

$$x=C_1\begin{pmatrix}e^t\cos t\\e^t\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

求下列方程组满足初值条件 $x_1(0)=0,x_2(0)=1$ 的特解.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t-1\\ \frac{1}{2}\sin 2t+1 & \sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

解：对于此类给出齐次方程组通解进而要求求相应的非齐次方程特解的问题，先写出齐次方程组的基解矩阵，再通过课本中的关于非齐次方程组解的定理代入即可求得所要求的特解.

由题意可知，其基解矩阵如下：

$$X=\begin{pmatrix}e^t\cos t & -\sin t\\ e^t\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

容易求得其逆矩阵如下：

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

从而代入公式可得：

$$\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

于是通解为：

$$X = \begin{pmatrix} e^t\cos t & -\sin t \\ e^t\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

又注意到：

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

代入通解即可求得题目中所要求的特解：

$$X(t) = \begin{pmatrix} (e^t-1)\cos t - \sin t \\ (e^t-1)\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

2.3.3 常系数线性齐次微分方程组的求解方法 ⋆⋆⋆⋆

1) 基本理论：

对于形如 $\frac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (i=1,2,...,n)$ 的方程，记系数矩阵为 A，向量形式为 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.

假设有形如 $\vec{x} = \vec{r}\cdot e^{\lambda t}$ 代入上式得：

$$\vec{r}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda t} = \vec{r}\cdot\vec{A}\cdot e^{\lambda t} \Rightarrow (\vec{A}-\lambda\vec{E})\vec{r} = 0$$

λ 为 $\vec{A}$ 的特征值，$\vec{r}$ 为 $\vec{A}-\lambda\vec{E}$ 的特征向量.

有两个解题必须的定理：

【定理 1】设 n 阶矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$,它们对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$，则矩阵 $\vec{X}(t) = (\vec{r}_1\cdot e^{\lambda_1 t}, \vec{r}_2\cdot e^{\lambda 2t}, ..., \vec{r}_n\cdot e^{\lambda_n t})$ 为原方程组的一个基解矩阵.

【定理 2】设 λ_i 是矩阵 A 的 n_i 重特征向量，则该方程组必存在 n_i 个形如

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda_i t}(\vec{r}_0 + \frac{t}{1!}\vec{r}_1 + \frac{t^2}{2!}\vec{r}_2 + ... + \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{r}_{n_i-1})$$

的线性无关特解，其中 $\vec{r}_0$ 为

$$(\vec{A}-\lambda_{n_i}\vec{E})^{n_i}\vec{r} = 0$$

的非零解

$$\vec{r}_1 = (\vec{A}-\lambda_i\vec{E})\vec{r}_0$$

$$\vec{r}_2 = (\vec{A}-\lambda_i\vec{E})\vec{r}_1$$

$$...$$

$$\vec{r}_{n_i-1} = (\vec{A}-\lambda_i\vec{E})\vec{r}_{n_i-2}$$

2) 解题方法

首先求解系数矩阵特征值，若特征值均为单特征值或者重特征值的特征向量数等于特征重数，则采用【定理 1】求解，若特征向量数不等于特征重数，则采用【定理 2】求解.

[例 4.14] 求下列方程组的通解：

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}\vec{x}$$

解：系数矩阵特征值与特征向量为

$$\lambda_1=4,\vec{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\lambda_3=-2,\vec{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\vec{x}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

通解为：

$$C_1\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}e^{4t}+C_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}e^{-2t}+C_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}e^{-2t}$$

注：此部分题目必须熟练掌握课本 304-309 页例题 3.3-3.6.

2.3.4 常系数线性非齐次微分方程组的求解方法 $\star$

对于：

$$\frac{d\vec{X}}{dt}=\vec{A}\vec{x}+\overrightarrow{f(t)}$$

其通解为：

$$X(t)=X(t)C+\int_{t_0}^{t}X(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

满足 $\overrightarrow{x(t_0)}=\vec{x_0}$ 的特解为：

$$\overrightarrow{X(t)}=\overrightarrow{X(t-t_0)}\overrightarrow{X_0}+\int_{t_0}^{t}\overrightarrow{X(t-\tau)}\overrightarrow{f(\tau)}d\tau$$

其中 $\overrightarrow{X(t)}$ 为所对应的齐次方程组满足 $\overrightarrow{X(0)}=\vec{E}$ 的基解矩阵.

此公式形式较为复杂，且考察频率较低，建议在考前对此公式进行记忆，考试时直接套用公式即可.

3 各章习题举例

3.1 第一章习题

3.1.1 选择题

1. 设 $f(1-\cos x)$= $\sin^2 x$，$f(x)=$

$A.x^2+2x$

$B.x^2-2x$

$C. -x^2+2x$

$D. -x^2-2x$

2. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 为

$A.$ 奇函数

$B.$ 偶函数

$C.$ 非奇非偶函数

$D.$ 既是奇函数又是偶函数

3. 下列函数是有界函数的是
$A.x^{-\frac{1}{2}}$
$B.e^{-x^2}$
$C.\frac{\cos x}{x}$
$D.x\sin x$
$4.f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$ 为
$A.$ 奇函数
$B.$ 偶函数
$C.$ 非奇非偶函数
$D.$ 周期函数
5. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，则 a,b 的值分别为
$A.-7,5$
$B.5,-7$
$C.-7,6$
$D.6,-7$
$6.\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2+2-1}}=$
$A.1$
$B.-1$
$C.-\infty$
$D.0$
7. 下列说法正确的是
$A.$ 若 $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}x_n{=}A$，且 $x_n>0$，则必有 $A>0$
$B.$ 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=e^{1/x}$ 的左右极限均存在
$C.f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 有两条水平渐近线
$D.\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$
$E.$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$
8. 设 $x\to 0$ 时，$\frac{e^{x\cos x^2}-e^x}{x^n}$ 为一非零常数，则 n 为
$A.5$
$B.3$
$C.2$
$D.4$

9. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}(\frac{\sin t}{\sin x})^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，则 $x=k\pi(k\in\{0,\pm1...\})$ 为 $f(x)$ 的
$A.$ 第二类间断点
$B.$ 无穷间断点
$C.$ 跳跃间断点
$D.$ 可去间断点
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\sqrt{n^2+n}\pi)$=
$A.1$
$B.$ 不存在
$C.0$
$D.\infty$
11. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+f(x)}{x^3}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+f(x)}{x^3}$ 为
$A.1$
$B.2$
$C.11/6$
$D.13/6$
12.$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}[(\frac{2+\cos x}{3})^x-1]=$
$A.1/3$
$B.-1/3$
$C.-1/6$
$D.1/6$
13. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2dt, g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的
$A.$ 等价无穷小
$B.$ 同阶但非等价的无穷小
$C.$ 高阶无穷小
$D.$ 低阶无穷小

3.1.2 填空题

1. 画出 $y=arcsin(sinx)$ 与 $y=arccos(cosx)$ 的图像
2. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(arctan(2x))$ 的定义域为
3. 设 $\alpha>0,\beta\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2]=\beta$，则 $(\alpha,\beta)=$
4. 若极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(2x)}=2$，则极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(4x)}{x}=$
5. 已知 $\frac{f(x)}{x^2}=2$，$f(x)$ 二阶可导，求 $f(0)=,f'(0)=,f''(0)=$
6. 设以下函数在 $x=0$ 处可导，则 a,b,c 的值为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2},x>0\\ a,x=0\\ \frac{\sin bx}{x}+cx,x<0\end{cases}$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=$
8. 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln[1+\frac{f(x)}{\sin x}]}{a^x-1}=A$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=$
9. 设 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$，其中 $x\neq0,x\neq1$，则 $f(x)=$

3.1.3 计算题

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}$，（$a,b,c$ 为非负常数）

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$

3. 求 $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+x^{\frac{1}{3}}}$

3.1.4 证明题

1. 设 $x_1=1,x_2=2$,$x_{n+2}=\sqrt{x_nx_{n+1}}(n=1,2,...)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值

2. 设 $0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,...)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求极限

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,...)$

1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值

2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{{x_n}^2}}$

3.2 第二章习题

1. 以下函数中，$g(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}},x>0\\ x^2g(x),x\le 0\end{cases}$$

$A.$ 极限不存在

$B.$ 极限存在但不连续

$C.$ 连续但不可导

$D.$ 可导

2.$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,，求 $f'(0)$

3. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数为

4. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，周期为 4，又有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为

5.$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$，则 $f'(t)=$

6. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$，式中 a,b,c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f'(x)$

7. 确定常数 a,b 的值，使以下函数在 $x=0$ 处可导，并求出此时的 $f'(x)$

$$f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-2x),x\le 0\\ a+be^x,x>0\end{cases}$$

8. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n>3)$

9. 方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}(x>0,y>0)$ 确定函数 $y=f(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

10. 设函数 $y=y(x)$ 由以下参数方程确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$$

11. 设 $y=f(\ln(x))e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(1)=0$，求证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(1/2)=1$，证明：

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)$=η

(2) 对任意实数 λ，必定存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

14.$(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则 a,b,c 应满足什么条件

15. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$

16. 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线条数为

17. 设 $0\le a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，证明在 (a,b) 内必有 ξ 和 η，使得 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}\cdot f'(\eta)$

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$，证明：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'''(\xi)=3$

3.3 第三章习题

3.3.1 选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数 $F(x)$，则
$A.f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可积
$B.f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续
$C.\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
$D.f(x)$ 在 $[a,b]$ 内可导
2.$f(x)$ 的一个原函数为 $(x-2)e^x$，则 $f'\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}\right) =$
$A.1$
$B.2$
$C.e^{-1}$
$D.0$
3.$F(x) = \int_1^x (\sqrt{t} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + 5)dt, (t>0)$ 的单调递增区间为
$A.(1, +\infty)$
$B.(\frac{1}{2}, 1)$
$C.(\frac{1}{2}, +\infty)$
$D.(0,1)$
4. 已知 $\int_1^{\cos x} f(t)dt = \cos 2x$，其中 $f(t)$ 连续，则 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
$A.\sqrt{2}$
$B.2$
$C.2\sqrt{2}$
$D.1$
5.$f(x) = \int_0^1 x\arctan x dx$，则 $f(x) =$
$A.\frac{\pi}{2}$
$B.\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$
$C.\frac{3}{2}$
$D.\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

3.3.2 求极限

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n} + 2\sin\frac{2}{n} + ... + n\sin\frac{n}{n})$

3.3.3 积分

1.$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$
2.$\int\frac{x\sin x}{\cos^5 x}dx$
3.$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$
4.$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$
5.$\int_0^1\frac{dx}{(1+e^x)^2}$
6.$\int\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$

7.$\int \frac{xe^{x^2}}{1-2e^{x^2}}dx$
8.$\int_0^{\ln 5} e^x\sqrt{2e^x-1}dx$
9.$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$
10.$\int (\arccos x)^2\mathrm{d}x$
11.$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\left(\sin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
12.$\int \sin\ln x dx$

3.3.4 解答题

1. 已知 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to 12} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 12} f'(x)=\frac{2005}{2}$ 求极限：

$$\lim_{x\to 12}\frac{\int_{12}^{x}\left[t\int_t^{12} f(u)\,du\right]dt}{(12-x)^3}$$

2. 求曲线 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}(x\geq 0)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴一周所得旋转体的体积

3.4 第四章习题

3.4.1 选择题

1.$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+x^2=0$ 是一阶微分方程
A. 正确
B. 错误
2.$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+x^2=0$ 是一阶线性微分方程
A. 正确
B. 错误
3. 微分方程 $\frac{dy}{dx}-2y=0$ 的通解为
$A.y=Csin2x$
$B.y=Ccos2x$
$C.y=e^{2x}$
$D.y=Ce^{2x}$
4.$y=x^3$ 是微分方程 $\frac{dy}{dx}+x^2=0$ 的
A. 解
B. 特解
C. 通解
D. 不是解

3.4.2 填空题

1. 微分方程 $xydx+(x^2+1)dy=0$ 满足初值条件 $y|_{x=0}$ 的特解为
2. 微分方程 $\sqrt{(1-x^2)}dy+\sqrt{(1-y^2)}dx=0$ 的通解为
3. 微分方程 $\frac{dx}{dt}+x=t$ 的通解为
4. 微分方程 $xy'-y=x^3cosx$ 的通解为
5. 微分方程 $2xy'=y+2x^2$ 的通解为
6. 微分方程 $y^{(4)}-y=x^2$ 的待定特解形式为

7. 微分方程组 $y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} y$ 的基解矩阵为

3.4.3 解答题

1.$x\frac{dy}{dx} - y = 2\sqrt{xy}$
2.$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$
3.$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\cos y} - \tan y$
4. 求微分方程 $\frac{dx}{dt} - tx = t^3x^2$ 的通解
5. 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解
6. 求微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 的通解
7. 求微分方程 $yy''' - 2(y'')^2 = 0$ 的通解

4 答案及难题详解

4.1 第一章

4.1.1 选择题

$1\sim5:AABBC,6\sim10:BCAAA,11\sim13:DCB$

4.1.2 填空题

1. 略.
2.$\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$.
3.$(2,\frac{1}{2})$.
4.1.
5.0,0,4.
6.1,1,0.
7.e^4.
8.$Alna$
9.$x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$

4.1.3 计算题

1.

$$\max\{a,b,c\}^n\le a^n+b^n+c^n\le 3\max\{a,b,c\}^n$$

$$\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$$

故有：

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,b,c\}$$

2. 原极限可化简为：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2=\int_0^1 x^2=\frac{1}{3}$$

3.

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{(2+x^{\frac{1}{3}})(\sqrt{1-x}+3)(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}$$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{(\sqrt{1-x}+3)}=-2$$

4.1.4 证明题

1. 证明：令 $y_n=lnx_n$，由于 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\sqrt{x_nx_{n+1}}$
$\to x_n>0$，且 $y_{n+2}=\frac{y_n+y_{n+1}}{2}$
$\to y_{n+2}-y_{n+1}=-\frac{1}{2}(y_{n+1}-y_n)=...=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\ln 2$
根据累加法并结合等比数列求和公式可得：

$$y_{n+2}-y_1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\ln 2$$

$$\lim y_n = \frac{2}{3}\ln 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{4}$$

2. 证明：1) 先证明存在性：

当 $0 < x < 3$ 时，$0 < f(x) = \sqrt{x(3-x)} < \frac{1}{2}(x+3-x) = \frac{3}{2}$

故 $\{x_n\}$ 有界

又 $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{(3-x_n)} - \sqrt{x_n})$

结合 $0 < x_n < \frac{3}{2}$，得 $x_{n+1} - x_n > 0$

根据单调有界准则，该数列单调增有上界，故极限存在.

2) 求极限：

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则有 $a = \sqrt{a(3-a)}$. 可得 $a = frac32$ 或 $a = 0$（舍去）.

综上：$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.

3. 证明：

1) 证：由于 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = sinx_n$，参照上题或用数学归纳法，不难证明数列单调有界，因此数列收敛，再用同样的套路可得极限为 0.

2) 由于 $n \to 0$ 等价于 $x_n \to 0$，所以：

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n{}^2}} = \lim_{x\to\infty} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

4.2 第二章

1.D. 分别计算在 x=0 处左右极限是否存在相等，若极限存在且相等则连续，若连续的前提下左右导数相等则可导. 分界点处的可导性用导数定义计算.

2. 直接套公式求导较为困难，考虑用定义求解：

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} (h+1)(h+2)(h+3)\cdots(h+n) = n!$$

3. 法一：将函数变为分段函数去绝对值，讨论每个分段点的左右导数是否相等.

法二：由于 $f(x) = (x-2)(x+1)\cdot|x|\cdot|x+1|\cdot|x-1|$ 含有因子 $(x+1)\,|x+1|$，故分界点处可导点为 $x = -1$，不可导点为 $x = 0$ 和 $x = 1$，在这两个点会出现尖点型不可导.

4.$\lim_{x\to 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2}$，$\lim_{x\to 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} f'(1) = -1$

$f'(1) = -2$，由周期性可知 $f'(5) = -2$.

5.$f(t) = \lim_{x\to\infty} t(1+\frac{1}{x})^{2tx} = t[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x]^{2t} = te^{2t}$，$f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t}$.

6. 要求其导数得先求得表达式，故令 $x = 1/x$，解方程组：

$$\begin{cases} af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x} \\ af(\frac{1}{x}) + bf(x) = cx \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\frac{ac}{x} - bcx}{a^2 - b^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{a^2-b^2}(-\frac{ac}{x^2} - bc) = -\frac{bcx^2 + ac}{x^2(a^2-b^2)}$$

7. 因要使函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，且左导数要等于右导数，即 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$ ，得 $a + b = 1$.

又由于左导数要等于右导数

$$\begin{cases} f_-{}'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[1+\ln(1-2x)]-1}{x} = -2 \\ f_+{}'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(a+be^x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{b(e^x-1)}{x} = b \end{cases}$$

故 $b=-2, a=3$. 此时 $f(x)$ 在定义域内可导.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1-2x}, x \le 0 \\ -2e^x, x > 0 \end{cases}$$

总结：对于确定参数的值使分段函数可导的问题，通常利用在分段点处左导数等于右导数且都存在，二要利用在分段点处左极限等于右极限且等于该点函数值，抓住这两点来求解参数确定函数的值.

8. 法一：利用牛顿莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n{}^1u^{(n-1)}v' + C_n{}^2u^{(n-2)}v'' + \cdots + u^{(0)}v^{(n)}$$

又 $[ln\,(1+x)]^k = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$（$k$ 为整数）
可求得：

$$f^{(n)}(x) = x^2\frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{n}-1)!}{(1+x)^{\mathrm{n}}} + 2nx\frac{(-1)^{\mathrm{n}-2}(\mathrm{n}-2)!}{(1+x)^{n-1}} + n(n-1)\frac{(-1)^{\mathrm{n}-3}(\mathrm{n}-3)!}{(1+x)^{n-2}}$$

所以有：

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$$

法二：将 $ln(x+1)$ 用麦克劳林展开式展开，然后逐个求导，发现前面大部分的项都是 0，只留下了最后几项.

9.$y^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{y}}, \frac{1}{x}\ln y = \frac{1}{y}\ln x, y\ln y = x\ln x$，等式两边对 x 求导：

$$(\mathrm{ln}y+1)\frac{dy}{dx} = \ln x + 1$$

再对 x 求导，可得：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(\ln y+1)^2 - x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$$

10.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}} = (t+1)(3t+2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(6t+5)(t+1)}{t}$$

11.

$$y' = f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{f(x)} + f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$dy = y'dx = e^{f(x)}[\frac{1}{x}f'(\ln x) + f'(x)f(\ln x)]dx$$

12. 解：显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理（闭区间连续，开区间可导），但却不是拉

格朗日中值定理的形式，故考虑用罗尔定理，即找原函数，先将等式变形.

$$\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$$

找其原函数 $F(x)=x^2f(x)$，故只需要将两端点代入，发现 $F(0)=0$ $F(1)=0$，故依据罗尔定理可知存在一点等式成立.

13. 证明：

1) 令 $\Phi(x)=f(x)-x$，则 $\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又 $\Phi(1)=-1<0,\Phi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$ ，由闭区间上的介值定理可知，存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $\Phi(\eta)=f(\eta)-\eta=0\Rightarrow f(\eta)=\eta$.

2) 设 $F(x)=e^{-\lambda x}\Phi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x],F(0)=0,F(\eta)=0$ 又 $F(X)$ 在区间范围内连续可导，故由罗尔定理可知原式得证.

14. 因为 $y''|_{x=0}=0$，而 $y''=6ax+2b$，故 $b=0$.

为保证 y'' 在 $x=0$ 左右两侧符号变化，故 $a\neq0$，故有 $a\neq0,b=0,c=1$.

15.

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)(x-c)^2}{2!}$$

分别令 $x=0,x=1$ 可得：

$$\begin{cases} f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)(0-c)^2}{2!},0<\xi_1<c<1\\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)(1-c)^2}{2!},0<c<\xi_2<1\end{cases}$$

以上两式作差可得：

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$$

$$|f'(c)|=\left|f(1)-f(0)-\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]\right|$$

$$|f'(c)|\leq|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}\left|f''(\xi_2)\right|(1-c^2)+\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)\right|c^2\leq a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]$$

又因为 $c\in(0,1),(1-c)^2+c^2\leq1$，故有 $|f'(c)|\leq2a+\frac{b}{2}$.

16. 先分析间断点只有 $x=0$

$\lim\limits_{x\to0}y=\infty$，故 $x=0$ 为垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0+\ln1=0$，故有水平渐近线 $y=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-\ln e^x]=0$$

故在 $x\to+\infty$ 时有斜渐近线 $y=x$.

故总共有 3 条渐近线.

17. 证明：首先，由拉格朗日中值定理，必有 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，问题转化为须证：存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}\cdot f'(\eta)$

整理上式：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\eta-\frac{a+b}{2}f'(\eta)=0$$

令 $F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}f(x)$，再根据罗尔定理，即可得证.

18. 证明：令 $F(x)=e^xf(x)$，则 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]$

由已知条件 $f(a)=f(b)=1$，有以下等式：

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]$$

再令 $\varphi(x)=e^x$，再利用一次拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi$

综上，得证.

19. 证明：在解决高阶导数的函数值问题时，一般用泰勒展开解题：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$$

$\eta\in(0,x)$，分别令 $x=-1,x=1$，并结合已知条件可得：

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),-1<\eta_1<0$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),0<\eta_2<1$$

两式相减可得：

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$$

由于存在三阶连续导数，故 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设为 M 和 m，则有：

$$m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M$$

再由连续函数的介值定理可知，至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]$，使得

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3$$

证毕.

4.3 第三章

4.3.1 选择题

1.D. 首先明白原函数性质，以及可积的条件，这里回忆若干性质如下：

可积的必要条件是有界；

可积充分条件 1：$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续；

可积充分条件 2：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界且只有有限第一类间断点，或者单调；

微积分第一基本定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则变上限积分存在，其且可导，并且导数为 $f(x)$；

下面以此为基础明确一些问题：对于闭区间 $[a,b]$ 有：连续必可积，连续必有原函数，有原函数不一定可积，有原函数不一定连续，可积不一定有原函数，可积不一定连续.

2.D. 前半句可知 $f(x)$ 为 $(x-1)e^x$，则 $f'(x)$ 为 xe^x，里面的极限为 0，则选 D.

3.C. 考察变上限积分，求导后为 $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}+5$，由对勾函数性质可以知道，增区间为 C.

4.C. 所给条件两边对 x 求导有 $-f(cosx)sinx=-2sin2x$ 则 $f(x)=4x$，所以选 C.

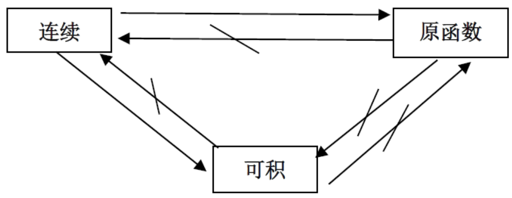


图 3: 一些关系

5.B. 令 $t=\arctan t$，原积分为：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan t\sec^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} td(\frac{1}{2}\sec^2 t)=\frac{1}{2}t\sec^2 t-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 t$$

$$=\frac{1}{2}t\sec^2 t-\frac{1}{2}\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

4.3.2 求极限

1. 根据定积分的定义，原极限可化简为：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

2. 抛开原极限中的极限符号，有：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{kn}}\frac{1}{n}$$

对原式放缩，可知原式 $\geq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{n}$

同时，原式 $\leq\sum\limits_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$

根据定积分的定义可知，原极限的值为 $1/ln2$.

3.$sin1-cos1$

4.3.3 积分

1. 令 $x=sint$，原积分可化简为：

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\cot t-t|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$$

2. 原积分可化简为：

$$\int x\tan x\sec^4 xdx=\int xd(\frac{1}{4}\sec^4 x)=\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{4}\int\sec^4 xdx$$

$$=\frac{1}{4}x\sec^4 x-\frac{1}{12}\tan^3 x-\frac{1}{4}\tan x+C$$

3. 令 $y = arctanx$，原积分可化简为：

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y\cot y\frac{1}{\sin^2 y}dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} yd\left(-\frac{1}{2}\csc^2 y\right) = -\frac{1}{2}\csc^2 y - \frac{1}{2}\cot y\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

4. 令 $t = arcsin\sqrt{x}$，则原积分可化简为：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2tdt = \frac{\pi^2}{4}$$

5. 利用分部积分即可：

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx = \int_0^1 -e^{-x}d\frac{1}{1+e^x}$$

$$= \frac{1}{1+e^x} - \ln(e^{-x}+1)\big|_0^1 = \frac{1}{1+e} - \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

6. 令 $t = e^x$，则原积分可化简为：

$$\int 1 + \frac{2dt}{t^2+1} = e^x + 2\arctan e^x + C$$

7.$-\frac{1}{4}\ln(1-2e^{x^2})$

8. 令 $t = \sqrt{2e^x - 1}$，则原积分可化简为：

$$\int_1^3 t^2 dt = \frac{26}{3}$$

9. 原积分可化简为：

$$-\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x}d(\cos x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 x d\cos^2 x}{1+\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\left(\cos^2 x - \ln(1+\cos^2 x)\right) + C$$

10. 令 $t = arccosx$，则原积分通过两次分部积分即可求得：

$$t^2\cos t - 2t\sin t - 2\cos t + C$$

最后回代即可。

11. 第一项分部积分，则原函数为 $-x\cos x + \sin x - \sqrt{1-x^2} + C$ 则值为 $-\cos\frac{1}{2} + 2\sin\frac{1}{2}$

12. 令 $t = lnx$，分部积分构造方程，原积分可化简为：

$$I = \int \sin te^t dt = \sin te^t - \cos te^t - \int \sin te^t dt$$

最终，原积分为 $\frac{\sin t - \cos t}{2}e^t$，再回代即可.

4.3.4 解答题

1. 由题干可知 $f(12) = 0$，$\lim\limits_{x\to 12} f'(x) = \frac{2005}{2}$

对所求式子洛必达法则三次即可得到：

$$\lim_{x\to 12}\frac{2f(x)+xf(x)}{6} = 2005$$

2. 首先分析零点定义域，会发现实际上是在 0 到 $+\infty$ 中的 $2k\pi$ 到 $(2k+1)\pi$ 积分则所求为

$$I=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-2x}\sin xdx$$

令 $x=2k\pi+t$，则

$$\begin{aligned}I&=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\int_{0}^{\pi}e^{-2(2k\pi+t)}\sin(2k\pi+t)dt\\&=\pi\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4k\pi}\int_{0}^{\pi}e^{-2t}\sin tdt\end{aligned}$$

前半部分有等比数列求和公式，后半部分利用分部积分，可求得最终结果为：

$$\frac{\pi}{5}\frac{1}{1-e^{-2\pi}}$$

4.4 第四章

4.4.1 选择题

$1\sim 4:ABDD.$

4.4.2 填空题

前五题均为分离变量法和常数变易法的应用，较为容易，只给出答案.

1.$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2.$y=sin(-arcsinx+C)$

3.$x=Ce^{-t}+t+1$

4.$y=x^2sinx+xcosx+Cx$

5.$y=\frac{2}{3}x^2+C\sqrt{x}$

6.$C_1+C_2x+C_3x^2$

解析：先求原方程特征方程的解，不包括零；且等式右边最高为 x 的二次项. 所以，容易确定待定特解的形式.

7.$\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix}$

解：计算原方程的特征值及相对应的特征向量：

$$\lambda=2,5\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

所以可得原方程的通解为：

$$y=\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

容易得到基解矩阵.

4.4.3 解答题

1. 作变量代换 $u = y/x$，则有 $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$，原方程变为：

$$x\frac{du}{dx} = 2\sqrt{u}$$

利用分离变量法求得通解并回代可得原方程的通解为：

$$e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = Cx$$

2. 作变量代换 $u = x + y$，则 $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$，原方程变为：

$$\frac{du}{dx} = \cos u + 1 = 2\cos^2\frac{u}{2}$$

采用分离变量法和常数变易法并回代可得到原方程的通解为：

$$\tan\frac{x+y}{2} = x + C$$

3. 作变量代换 $u = siny$，则 $\frac{du}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$，则原方程变为：

$$\frac{du}{dx} + u = x$$

采用分离变量法和常数变易法并回代可得到原方程的通解为：

$$\sin y = Ce^{-x} + x - 1$$

4. 伯努利方程，解法省略，通解为：

$$x = \frac{1}{2 - t^2 - Ce^{-\frac{1}{2}t^2}}$$

5. 不显含 y，解法见 4.1.5 中的 2)，这里只给出最终通解：

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$$

6. 不显含 x，解法见 4.1.5 中的 3)，这里只给出最终通解：

$$y = C_2e^{C_1x}$$

7. 令 $\frac{dy}{dx} = p$，则

$$\begin{cases} y'' = \frac{dp}{dx} \\ y''' = \frac{d^2p}{dx^2} \end{cases}$$

原方程变为：

$$p\frac{d^2p}{dx^2} - 2\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 0$$

令 $\frac{dp}{dx}=q$，则 $\frac{d^2p}{dx^2}=q\frac{dq}{dp}$，则原方程变为：

$$q\left(p\frac{dq}{dp}-2q\right)=0$$

当 $q=0$ 时，解得：

$$y=A_1x+A_2$$

由 $p\frac{dq}{dp}=2q$，得到该方程的通解：

$$q=C_1p^2$$

进而：

$$\frac{dp}{dx}=C_1p^2\Rightarrow p=\frac{1}{C_1x+C_2}$$

进而：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{C_1x+C_2}\Rightarrow y=\frac{1}{C_1}\ln|C_1x+C_2|+C_3$$