

1st Edition
ALL RIGHTS RESERVED

交 大 学 辅

University Physics

大学物理

(期末版)

(第一版)

Contributors

仲英书院学业辅导中心

钱学森书院学业辅导中心

文治学辅与发展中心

•

S E P

17

WHAT WE WANT TO CONVEY

衷心希望这本材料能够帮助到每一位正在学习
大学物理这门课程的同学，能够带给每一位拿起
这本材料的同学新收获、新思考！

——2021.5.28

Copyright ©西安交通大学学生会

内容简介

本手册内容整合了由仲英学辅编写的大物资料以及由钱院学辅编写的大物习题解答，并在此基础上有所拓展，包括大学物理上下两册的全部教学内容，并对知识点进行了必要的解释说明，同时辅之以例题，便于同学理解。

感谢校学生会、钱院学辅、仲英学辅和文治学辅各位工作人员与志愿者的努力工作，使本资料可以顺利完工。如果同学们在本资料中发现错误，请联系交小权QQ：3171478351进行反馈，我们将会在下版进行修改。

资料版次及编者信息：

2021年5月 第一版

编者：

钱学森书院学业辅导中心：越杰81 柯春旭

仲英书院学业辅导中心：材料92 姚宣冰

文治学辅与发展中心：物试92 边昊

排版：

西安交通大学学生会：电气钱91 张启 计试001 赵茆哲

个人：计试001 孙夏禹

材料名称	大学物理学习手册（第1版）期末版
编委会	西安交通大学学生会学术资讯部 钱学森书院学业辅导中心 文治学辅与发展中心 仲英书院学业辅导中心
总页数	63页
字数	16000字

E m a i l xjtuxszx@163.com

版权所有 侵权必究

目录

第一章 质点运动学	5
1. 质点运动表述的基本概念	5
2. 质点位置的确定方法	5
3. 位移、速度、加速度	5
4. 运动学的二类问题	6
5. 圆周运动	7
6. 不同参考系中的速度和加速度变换定理	8
第二章 牛顿运动定律	9
1. 牛顿第一定律	9
2. 牛顿第二定律	9
3. 牛顿第三定律	9
4. 常见的几种力	9
5. 两类质点动力学问题	10
6. 惯性系: 牛顿运动定律适用的参照系	11
7. 惯性力:	11
第三章 功和能	13
1. 功: 力在空间的积累效应	13
2. 几种典型力的功	13
3. 动能定理	14
4. 保守力	15
5. 势能	15
6. 机械能守恒	16
7. 能量守恒	17
第四章 冲量和动量	18
1. 冲量	18
2. 动量	18
3. 质点动量定理	18
4. 质点系动量定理	18
5. 质点系动量守恒定律	19
6. 质心	19
7. 质心运动定理	20
8. 变质量动力学	21
第五章 刚体运动学	22
1. 刚体	22
2. 自由度	22
3. 刚体的平动	22
4. 刚体绕定轴转动	23
第六章 刚体动力学	24
1. 力矩: 改变刚体的转动状态, 刚体获得角加速度	24
2. 刚体对定轴的转动定律	24
3. 转动惯量	24
4. 平行轴定理	24
5. (薄板)垂直轴定理	25
6. 转动动能	25
7. 力矩的功	25

8. 转动动能定理	25
9. 刚体系统的机械能守恒	26
10. 质点的动量矩(对 O 点).....	26
11. 质点的动量矩定理.....	27
12. 质点动量矩守恒定律	27
13. 质点系的动量矩	27
14. 质点系的动量矩定理	28
15. 刚体定轴转动的动量矩	28
16. 刚体定轴转动的动量矩定理.....	28
17. 刚体定轴转动的动量矩守恒定律.....	28
第七章 静电场.....	30
1. 库仑定律	30
2. 电场强度	30
3. 高斯定理	31
4. 静电场的环路定理	31
5. 电势的计算	32
6. 电势与电场强度的微分关系.....	32
7. 静电场中的导体和介质	33
8. 电容与电场能量	33
第八章 恒定磁场.....	35
1. 比奥-萨戈尔定律	35
2. 磁场的高斯定理	35
3. 安培环路定理	35
4. 安培定理	36
5. 洛伦兹力	37
6. 磁场内的磁介质	37
7. 铁磁质磁滞回线	38
第九章 电磁感应.....	39
1. 电磁感应定律	39
2. 感生电场	39
3. 自感和互感	40
4. 磁场能量	40
第十章 狭义相对论.....	42
第十一章 热力学基础.....	47
1. 理想气体状态方程	47
2. 热力学第一定律	47
3. 利用 P-V 图计算 W.....	47
4. 利用 P-V 图计算 Q 与 ΔU	47
5. 等温过程满足	48
6. 绝热过程满足	48
7. 理想气体内能公式	48
8. 焓	48
9. 判断过程吸放热的方法	48
10. 判断某点瞬时吸放热	49
11. 热循环做功	50
12. 热机的效率定义	50
13. 卡诺热机效率	51
第十二章 分子动理论.....	53

1. 麦克斯韦速率分布	53
2. 三个速率	53
3. 常用平均速率大小比较	53
4. 麦克斯韦速度分布	53
5. 研究等温大气压强分布	53
6. 自由度	53
7. 分子能量	53
8. 摩尔定体热容	54
9. 摩尔定压热容	54
10. 平均物理量 A 值	54
11. 分布密度函数	54
12. 扩散定律	54
13. 平均自由程	54
14. 平均碰撞频率	55
15. $\lambda = v\omega$	55
16. 显像管内电子平均自由程	55
17. 气体输运系数公式	55
18. 范德瓦尔斯方程	55
19. 熵变计算公式	55
20. 知识点	55
第十三章 机械振动	57
1. 旋转矢量法	57
2. 弹簧振子	57
3. 拍频	58
4. 求解系统振动频率的通法（以单摆为例）	58
第十四章 机械波	59
1. 平面简谐机械波	59
2. 波的能量	59
3. 惠更斯原理	59
4. 波的干涉	59
5. 驻波	61
6. 多普勒效应	62
第十五章 波动光学	63
1. 干涉	63
2. 衍射	65
3. 偏振	66
第十六章 量子物理	68
1. 斯特藩-玻尔兹曼定律	68
2. 维恩位移定律	68
3. 光电效应方程	68
4. 光子性质	68
5. 康普顿散射	68
6. 轨道量子化	68
7. 氢原子光谱	68
8. 氢原子电子能量	68
9. 德布罗意波	68
10. 不确定性关系	69
11. 薛定谔方程	69
12. 定态薛定谔方程	69
13. 四个量子数	69

14. 固体理论	69
15. 激光产生基本原理	69

第一章 质点运动学

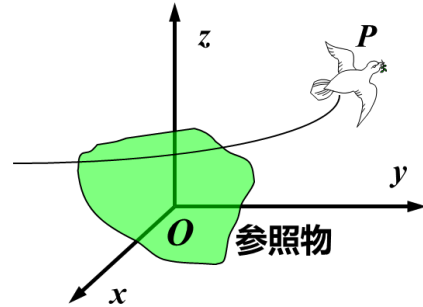
1. 质点运动表述的基本概念

质点：有质量而无形状和大小的几何点。 突出了质量和位置

质点系：若干质点的集合。

参照物：用来描述物体运动而选作参考的物体或物体系。

参考系：参照物 + 坐标系 + 时钟



2. 质点位置的确定方法

直角坐标法： $P(x, y, z)$

位矢法：质点某时刻位置 $P(x, y, z)$ 由位矢 \vec{r} 表示。

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

自然坐标法：已知质点相对参考系的运动轨迹时，常用自然法。

$$s = f(t)$$

运动学方程(函数)

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

3. 位移、速度、加速度

位矢法：

位移的物理意义：质点始末位置的变化

$$\vec{pp'} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta \vec{r}$$

位移是矢量（有大小，有方向），位移不同于路程

位移与坐标系位置的变化无关

速度、加速度和位移

平均速度

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

瞬时速度

$$\vec{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t))}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

瞬时速率

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

平均加速度

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

瞬时加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t))}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

直角坐标法:

位移

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ \vec{r}_2 &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \\ \Delta \vec{r} &= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}\end{aligned}$$

平均速度

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$$

瞬时速度

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\end{aligned}$$

加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

注意:

加速度反映速度的变化(大小和方向)情况。

加速度的方向总是指向轨迹曲线凹的一面。

4. 运动学的二类问题

第一类问题: 已知运动学方程, 求 \vec{v} , \vec{a}

【例】已知一质点运动方程 $\vec{r} = 2t \vec{i} + (2 - t^2) \vec{j}$

求: (1) $t=1s$ 到 $t=2s$ 质点的位移 (2) $t=2s$ 时 \vec{v} , \vec{a} (3) 轨迹方程

【解】

(1) 由运动方程得:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= 2\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j} \\ \Delta \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (4 - 2)\vec{i} + (-2 - 1)\vec{j} = 2\vec{i} - 3\vec{j}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 2t \vec{j} \\ \vec{a} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j}\end{aligned}$$

当 $t=2s$ 时

$$\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j}, \quad \vec{a}_2 = -2\vec{j}$$

(3)

$$x = 2t \quad y = 2 - t^2$$

轨迹方程为

$$y = 2 - x^2/4$$

第二类问题: 已知加速度和初始条件, 求 \vec{v} , \vec{r}

【例】已知 $\vec{a} = 16\vec{j}$, $t=0$ 时, $\vec{v}_0 = 6\vec{i}$, $\vec{r}_0 = 8\vec{k}$

求: \vec{v} 和运动方程

【解】由已知有

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = 16\vec{j}$$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t 16dt \vec{j}$$

代入初始条件

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = 16t \vec{j}, \quad \vec{v} = 6\vec{i} + 16t \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (6\vec{i} + 16t \vec{j}) dt$$

代入初始条件

$$\vec{r}_0 = 8\vec{k}, \quad \vec{r} = 6t \vec{i} + 8t^2 \vec{j} + 8\vec{k}$$

5. 圆周运动

角位置与角位移

$\theta = \theta(t)$ 角位置 (运动学方程)

$\Delta\theta$ 为质点圆周运动的角位移

角速度

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \vec{k} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$$

角加速度

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

线量与角量的关系

$$d\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta \cdot \vec{k} \times \vec{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

大小 $v = \omega r$, 方向 $\vec{\omega} \times \vec{r}$ (由右手法则确定)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

第一项为切向加速度 $a_\tau = \beta r$, 第二项为法向加速度 $a_n = \omega v = \omega^2 r$

【例】一质点作半径为 0.1 m 的圆周运动, 已知运动学方程为

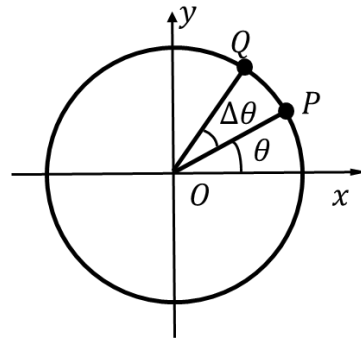
$$\theta = 2 + 4t^3 \text{ rad}$$

求: (1) 当 $t=2\text{s}$ 时, 质点运动的 a_n 和 \vec{a} 以及 a_τ 的大小

(2) 当 $\theta=?$ 时, 质点的加速度与半径成 45° 角?

【解】(1) 运动学方程得

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2, \quad \beta = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 24t$$



$$\therefore a_n = r\omega^2 = 230.4 \text{ m/s}^2, \quad a_\tau = r\beta = 4.8 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 230.5 \text{ m/s}^2$$

(2) 设 t' 时刻, 质点的加速度与半径成 45° 角, 则

$$a_\tau = a_n, \quad \omega^2 = r\beta$$

$$\therefore 144t'^4 = 24t' \Rightarrow t' = 0.55 \text{ s}$$

$$\therefore \theta = 2 + 4t'^3 = 2.67 \text{ rad}$$

6. 不同参考系中的速度和加速度变换定理

速度变换

$$\vec{v}_{\text{绝对}} = \vec{v}_{\text{相对}} + \vec{v}_{\text{牵连}}$$

加速度变换

$$\frac{d\vec{v}_{\text{绝对}}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{\text{相对}}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\text{牵连}}}{dt} \Rightarrow \vec{a}_{\text{绝对}} = \vec{a}_{\text{相对}} + \vec{a}_{\text{牵连}}$$

【例】一个带篷子的卡车, 篷高为 $h=2 \text{ m}$, 当它停在马路边时, 雨滴可落入车内达 $d=1 \text{ m}$, 而当它以 15 km/h 的速率运动时, 雨滴恰好不能落入车中。

求: 雨滴的速度矢量。

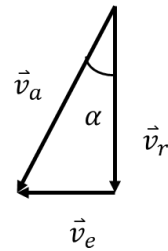
根据速度变换定理

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

画出矢量图

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{d}\right) = 63.4^\circ$$

$$|\vec{v}_a| = \left| \frac{\vec{v}_e}{\cos \alpha} \right| = \frac{15}{\cos \alpha} = 33.5 \text{ km/h} = 9.3 \text{ m/s}$$



【例】升降机以加速度 1.22 m/s^2 上升, 有一螺母自升降机的天花板松落, 天花板与升降机的底板相距 2.74 m 。

求: 螺母自天花板落到底板所需的时间。

【解】取螺母刚松落为计时零点; 以升降机为动参考系, 则有:

$$\vec{a}_a = g\vec{i}, \quad \vec{a}_e = -a\vec{i}$$

$$a_r = a_a - a_e = g + a$$

$$h = \frac{1}{2} a_r t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.74}{9.80 + 1.22}} = 0.7 \text{ s}$$

第二章 牛顿运动定律

1. 牛顿第一定律

任何质点都保持静止或匀速直线运动状态，直到其它物体作用的力迫使它改变这种状态为止。

惯性：质点不受力时保持静止或匀速直线运动状态的性质，其大小用质量量度。

力：使质点改变运动状态的原因

静力学基本方程：质点处于静止或匀速直线运动状态时，

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

2. 牛顿第二定律

某时刻质点动量对时间的变化率正比与该时刻作用在质点上所有力的合力。

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

当物体的质量不随时间变化时

$$\sum \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

【注】：

(1) 第二定律只适用于质点的运动情况

(2) 以下两种情况下，质量不能当常量

物体在运动中质量有所增减，如火箭、雨滴问题。

高速 ($v > 10^6 \text{ m/s}$) 运动中，质量与运动速度相关，如相对论效应问题。

3. 牛顿第三定律

当物体 A 以力 \vec{F} 作用于物体 B 时，物体 B 也同时以力 \vec{F}' 作用于物体 A 上， \vec{F} 和 \vec{F}' 总是大小相等，方向相反，且在同一直线上。

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

第三定律揭示了力的两个性质

成对性 —— 物体之间的作用是相互的。

同时性 —— 相互作用之间是相互依存，同生同灭。

4. 常见的几种力

(1) 万有引力：质量为 m_1 、 m_2 ，相距为 r 的两质点间的万有引力大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

重力是地球对其表面附近物体万有引力的分力

(2) 弹性力：当两宏观物体有接触且发生微小形变时，形变的物体对与它接触的物体会产生力的作用，这种力叫弹性力。

在形变不超过一定限度内，弹簧的弹性力 遵从胡克定律

$$\vec{f} = -kx \vec{i}$$

(3) 摩擦力:

静摩擦力: 当两相互接触的物体彼此之间保持相对静止, 且沿接触面有相对运动趋势时, 在接触面之间会产生一对阻止上述运动趋势的力, 称为静摩擦力。

静摩擦力的大小随引起相对运动趋势的外力而变化。最大静摩擦力为 $f_{max} = \mu_0 N$, μ_0 为最大静摩擦系数, N 为正压力

滑动摩擦力: 两物体相互接触, 并有相对滑动时, 在两物体接触处出现的相互作用的摩擦力, 称为滑动摩擦力。

$$f = \mu N \quad (\mu \text{ 为滑动摩擦系数})$$

物体运动时的流体阻力: 当物体穿过液体或气体运动时, 会受到流体阻力, 该阻力与运动物体速度方向相反, 大小随速度变化。

5. 两类质点动力学问题

微分问题: 已知运动状态, 求质点受到的合力 \vec{F}

【例】已知一物体的质量为 m , 运动方程为

$$\vec{r} = A \cos \omega t \vec{i} + B \sin \omega t \vec{j}$$

求: 物体受到的力

【解】

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - B\omega^2 \sin \omega t \vec{j} = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\omega^2 m\vec{r}$$

积分问题: 已知质点受到的合力 \vec{F} , 求运动状态。

【例】设一高速运动的带电粒子沿竖直方向以 v_0 向上运动, 从时刻 $t=0$ 开始粒子受到 $F=F_0 t$ 水平力的作用, F_0 为常量, 粒子质量为 m 。

求: 粒子的运动轨迹。

【解】水平方向有

$$\begin{aligned} F_x &= F_0 t = m a_x \\ a_x &= \frac{dv_x}{dt}, \quad \int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t \frac{F_0 t}{m} dt \\ v_x &= \frac{F_0 t^2}{2m} = \frac{dx}{dt}, \quad \int_0^x dx = \int_0^t \frac{F_0 t^2}{2m} dt, \quad x = \frac{F_0}{6m} t^3 \end{aligned}$$

竖直方向有

$$F_y = m a_y = 0, \quad y = v_0 t$$

运动轨迹为

$$x = \frac{F_0}{6m v_0^3} y^3$$

【例】一柔软绳长 l , 线密度 ρ , 一端着地开始自由下落。

求: 下落到任意长度 y 时刻, 给地面的压力为多少?

解: 在竖直向上方向建坐标, 地面为原点 (如图) .

取整个绳为研究对象, 设压力为 N

$$N - \rho g l = \frac{dp}{dt} = \dot{p}, \quad p = \rho y v$$

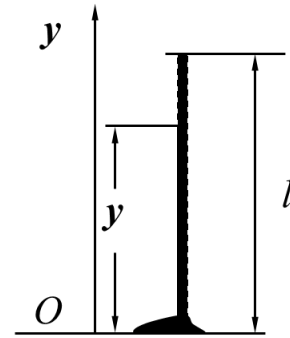
$$N = \rho g l + \rho \frac{d(yv)}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = v = -gt$$

$$\frac{d(yv)}{dt} = \frac{dy}{dt} v + \frac{dv}{dt} y = v^2 - yg$$

$$(l - y)2g = v^2$$

$$v^2 - yg = 2(l - y)g - yg$$

$$N = 3\rho g(l - y)$$



6. 惯性系: 牛顿运动定律适用的参照系

设一车厢以加速度 a 运动, 则对车厢内随车厢运动的质量为 m 的小球, 有:

地面参考系中的观察者甲: 有力 \vec{F} 和加速度 \vec{a} , 即 $\vec{F} = m\vec{a}$

——牛顿定律适用 (惯性系)

运动车厢参考系中的观察者乙: 有力 \vec{F} 无加速度 \vec{a} , 即 $m\vec{a} = 0, \vec{F} \neq 0$

——牛顿定律不适用 (非惯性系)

注:

(1) 严格的惯性系是关于参照系的一种理想模型。大多数情况下, 通常取地面参照系为惯性参照系。

(2) 相对于一惯性系作匀速直线运动的参照系都是惯性系。

7. 惯性力:

设 S' 系 (非惯性系) 相对 S 系 (惯性系) 平动, 加速度为 \vec{a}_e 。质点 m 在 S 系和 S' 系的加速度分别为 \vec{a}_a, \vec{a}_r 。

由伽利略变换有 $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$

在 S 系: $\vec{F} = m\vec{a}_a = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e$

在 S' 系: $\vec{F} - m\vec{a}_e = m\vec{a}_r$

引入虚拟力或惯性力 $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_e$, 则 $\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}_r$, 牛顿第二定律形式上成立。

【注】:

(1) 惯性力是虚拟力, 没有施力者, 也没有反作用力。不满足牛顿第三定律。

(2) 惯性力的概念可推广到非平动的非惯性系。 g 与 a 的区别。

【例】质量分别为 m_1 和 m_2 的两物体用轻细绳相连接后, 悬挂在一个固定在电梯内的定滑轮的两边。滑轮和绳的质量以及所有摩擦均不计。当电梯以 $a_0 = g/2$ 的加速度下降时。

求：m1 和 m2 的加速度和绳中的张力。

【解】取电梯为参考系

对 m1 有

$$m_1 g - T - m_1 a_0 = m_1 a'$$

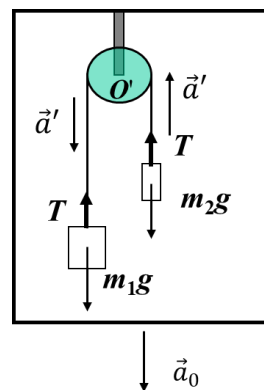
对 m2 有

$$m_2 g - T - m_2 a_0 = -m_2 a'$$

$$a' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g - a_0)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g - a_0)$$

$$a_1 = a' + a_0, \quad a_2 = -a' + a_0$$



第三章 功和能

1. 功：力在空间的积累效应

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad A = \int_{a(L)}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

对于恒力 $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$

【注】:

- (1) 功是标量，且有正负
- (2) 合力的功等于各分力的功的代数和

$$\begin{aligned} A &= \int_{a(L)}^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{a(L)}^b (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{a(L)}^b \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{a(L)}^b \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots + \int_{a(L)}^b \vec{F}_n \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

功率：力在单位时间内所作的功，称为功率。

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

【例】已知 $m = 2\text{kg}$ ，在 $F = 12t$ 作用下由静止做直线运动
求： $t = 0 \sim 2\text{s}$ 内 F 作的功及 $t = 2\text{s}$ 时的功率。

【解】

$$\begin{aligned} \frac{F}{m} &= 6t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = 3t^2 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = 3t^2 dt \\ A &= \int_0^x F dx = \int_0^t F \cdot 3t^2 dt = \int_0^2 36t^3 dt = 144\text{J} \\ P &= \vec{F} \cdot \vec{v} = 12t \cdot 3t^2 = 288\text{W} \end{aligned}$$

2. 几种典型力的功

重力：

$$A = \int_{z_1(1)}^{z_2} (-mg) dz = mg (z_1 - z_2)$$

- (1) 重力的功只与始、末位置有关，而与质点所行经的路径无关。
- (2) 质点上升时，重力作负功；质点下降时，重力作正功。

弹性力：

$$A = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

- (1) 弹性力的功只与始、末位置有关，而与质点所行经的路径无关。
- (2) 弹簧的变形减小时，弹性力作正功；弹簧的变形增大时，弹性力作负功。

万有引力：

$$A = \int_{r_1(L)}^{r_2} -G \frac{mM}{r^2} dr = GmM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

摩擦力：

$$A = \int_{M_1(L)}^{M_2} F \cos \alpha \, ds \quad A = -\mu mgs$$

摩擦力的功，不仅与始、末位置有关，而且与质点所行经的路径有关。

3. 动能定理

作用于质点的合力在某一路程中对质点所作的功，等于质点在同一路程的始、末两个状态动能的增量。

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot |d\vec{r}| \cos \theta = F_t \cdot ds = m \frac{dv}{dt} \cdot ds = mv dv$$

$$A = \int dA = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

【注】:

- (1) E_k 是一个状态量， A 是过程量。
- (2) 动能定律只用于惯性系。

4. 质点系动能定理:

把质点动能定理应用于质点系内所有质点并把所得方程相加有:

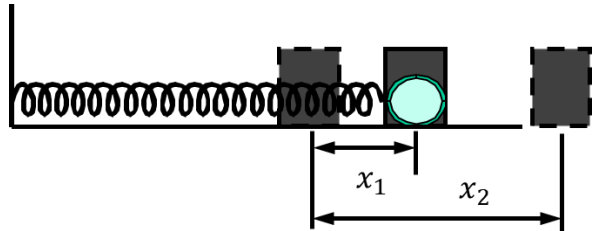
$$\sum_i A_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 = \sum_i A_{i外} + \sum_i A_{i内}$$

【注】:

- (1) 内力和为零,内力功的和不一定为零
- (2) 内力的功也能改变系统的动能 (例如炸弹爆炸, 过程内力和为零, 但内力所做的功转化为弹片的动能。)

【例】一轻弹簧的劲度系数为 $k = 100 \text{ N/m}$, 用手推一质量 $m = 0.1 \text{ kg}$ 的物体把弹簧压缩到离平衡位置 $x_1 = 0.02 \text{ m}$ 处, 如图所示。放手后, 物体沿水平面移动到 $x_2 = 0.1 \text{ m}$ 而停止。

求: 物体与水平面间的滑动摩擦系数。



【解】放手后, 物体运动到 x_1 处和弹簧分离。在整个过程中,

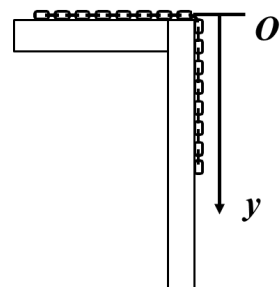
$$\frac{1}{2} kx_1^2 - \mu mgx_2 = 0 - 0$$

$$\mu = \frac{kx_1^2}{2mgx_2} = \frac{100 \times 0.02^2}{2 \times 0.1 \times 9.8 \times 0.1} = 0.20$$

【例】长为 l 的均质链条, 部分置于水平面上, 另一部分自然下垂, 已知链条与水平面间静摩擦系数为 μ_0 , 滑动摩擦系数为 μ

求:

- (1) 满足什么条件时, 链条将开始滑动



(2)若下垂部分长度为 b 时, 链条自静止开始滑动, 当链条末端刚刚滑离桌面时, 其速度等于多少?

【解】

(1)以链条的水平部分为研究对象, 设链条每单位长度的质量为 ρ , 沿铅垂向下取 Oy 轴。

设链条下落长度 $y=b_0$ 时, 处于临界状态

$$\rho b_0 g - \mu_0 \rho (l - b_0) g = 0, \quad b_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} l$$

当 $y > b_0$, 拉力大于最大静摩擦力时, 链条将开始滑动。

(2)以整个链条为研究对象, 链条在运动过程中各部分之间相互作用的内力的功之和为零,

重力的功

$$A = \int_b^l \rho y g dy = \frac{1}{2} \rho g (l^2 - b^2)$$

摩擦力的功

$$A' = - \int_b^l \mu \rho (l - y) dy = - \frac{1}{2} \mu \rho g (l - b)^2$$

根据动能定理有

$$\frac{1}{2} \rho g (l^2 - b^2) - \frac{1}{2} \mu \rho g (l - b)^2 = \frac{1}{2} \rho l v^2 - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} (l^2 - b^2) - \frac{\mu g}{l} (l - b)^2}$$

5. 保守力

如果力所做的功与路径无关, 而只决定于物体的始末相对位置, 这样的力称为保守力。

保守力沿任意闭合路径一周所做的功为零。即:

$$\oint_L \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$$

例如重力、万有引力、弹性力都是保守力。

做功与路径有关的力称为非保守力。 例如: 摩擦力

若一个力是保守力, 则有:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

6. 势能

质点在保守力场中某点的势能, 在量值上等于质点从 M 点移动至零势能点 M_0 的过程中保守力 \vec{F} 所作的功。

$$E_p = \int_M^{M_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

重力势能:

$$E_p = \int_z^0 (-mg) dz = mgz$$

弹性势能:

$$E_p = \int_x^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

万有引力势能 (无穷远为零势能面):

$$E_p = \int_r^\infty \left(-G \frac{mM}{r^2}\right) dr = -G \frac{mM}{r}$$

【注】:

- (1) 由于势能零点可以任意选取, 所以某一点的势能值是相对的。
- (2) 保守力场中任意两点间的势能差与势能零点选取无关。

由势能函数求保守力:

$$E_p = E_p(x, y, z) \Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k}\right)$$

7. 机械能守恒

对质点系, 当 $\Delta E = A_{\text{外}} + A_{\text{非内}} = 0$ 时,

$$E = E_k + E_p = \text{常数}$$

【注】:

- (1) 守恒定律是对一个系统而言的
- (2) 守恒是对整个过程而言的, 不能只考虑始末两状态

【例】把一个物体从地球表面上沿铅垂方向以第二宇宙速度 $v_0 = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$ 发射出

去, 阻力忽略不计。

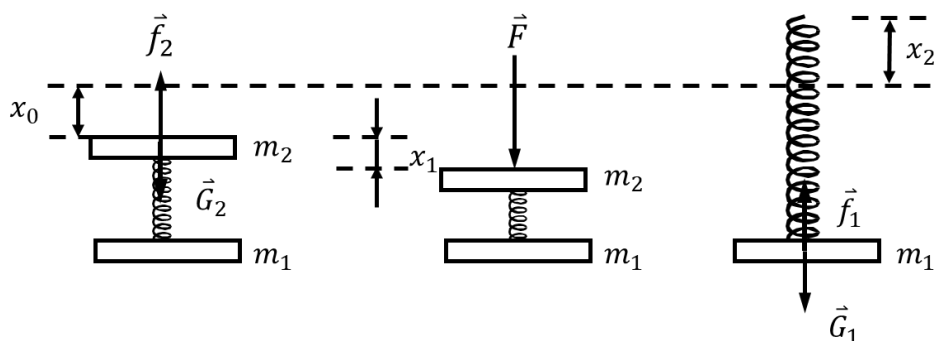
求: 物体从地面飞行到与地心相距 nR_e 处经历的时间。

【解】根据机械能守恒定律有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_em}{R_e} &= \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_em}{x}, \quad v = \sqrt{\frac{2GM_e}{x}} \\ v &= \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v} = \frac{1}{\sqrt{2GM_e}} \sqrt{x} dx \\ \int_0^{t_1} dt &= \int_{R_e}^{nR_e} \frac{1}{\sqrt{2GM_e}} \sqrt{x} dx, \quad t_1 = \frac{2}{3\sqrt{2GM_e}} R_e^{3/2} (n^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

【例】用弹簧连接两个木板 m_1 、 m_2 , 弹簧压缩 x_0 。

求: 给 m_2 上加多大的压力能使 m_1 离开桌面?



【解】整个过程只有保守力作功，机械能守恒

$$x_0 = \frac{m_2 g}{k}, \quad x_1 = \frac{F}{k}, \quad x_2 = \frac{m_1 g}{k}$$

$$\frac{1}{2} k (x_0 + x_1)^2 = \frac{1}{2} k x_2^2 + m_2 g (x_0 + x_1 + x_2)$$

$$F = (m_1 + m_2)g$$

8. 能量守恒

能量不能消失，也不能创造，只能从一种形式转换为另一种形式。对一个封闭系统来说，不论发生何种变化，各种形式的能量可以互相转换，但它们总和是一个常量。这一结论称为能量转换和守恒定律。

注：

- (1) 能量守恒定律可以适用于任何变化过程
- (2) 功是能量交换或转换的一种度量
- (3) 机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现

第四章 冲量和动量

1. 冲量

力的时间积累 $\vec{F} \cdot \Delta t$

2. 动量

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

3. 质点动量定理

质点动量的增量等于合外力乘以作用时间的增量(冲量)

$$d(m\vec{v}) = d\vec{P} = \vec{F}dt = d\vec{I}$$

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

【注】:

- (1) 物理意义: 质点动量的变化依赖于作用力的时间累积过程
- (2) 矢量性: 冲量的方向与动量的增量方向相同

【例】质量为 m 的匀质链条, 全长为 L , 开始时, 下端与地面的距离为 h , 当链条自由下落在地面上时

求: 链条下落在地面上的长度为 l ($l < L$) 时, 地面所受链条的作用力?

【解】设

$$m_l = \lambda l = \frac{m}{L}l$$

链条在此时的速度

$$v = \sqrt{2g(l+h)}$$

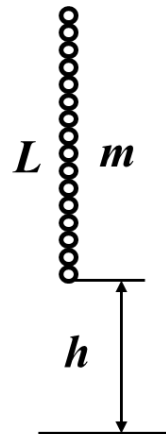
根据动量定理

$$-f dt = 0 - dm v = 0 - (\lambda v dt)v$$

$$f = \frac{\lambda v dt}{dt} v = \lambda v^2 = \frac{2m(l+h)g}{L} = f'$$

地面受力

$$F = f' + m_l g = \frac{m}{L}(3l + 2h)g$$



4. 质点系动量定理

某段时间内, 质点系动量的增量, 等于作用在质点系上所有外力在同一时间内的冲量的矢量和

\vec{P} 表示质点系在时刻 t 的动量 $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

$$d\vec{P} = d\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = \sum_i \vec{F}_i dt$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i - \sum_i m_i \vec{v}_{i0} = \sum_i \int_{t_0}^t \vec{F}_i dt$$

【注】:

- (1) 只有外力可改变系统的总动量
- (2) 内力可改变系统内单个质点的动量 —— 内部作用复杂

【例】一子弹水平地穿过并排静止放置在光滑水平面上的木块,已知两木块的质量分别为 m_1, m_2 , 子弹穿过两木块的时间各为 $\Delta t_1, \Delta t_2$, 设子弹在木块中所受的阻力为恒力 F 求: 子弹穿过后, 两木块各以多大速度运动

【解】: 子弹穿过第一木块时, 两木块速度相同, 均为 v_1

$$F\Delta t_1 = (m_1 + m_2) v_1 - 0$$

子弹穿过第二木块后, 第二木块速度变为 v_2

$$F\Delta t_2 = m_2 v_2 - m_2 v_1$$

解得:

$$v_1 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

5. 质点系动量守恒定律

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow d(\sum m_i \vec{v}_i) = 0$

$$\left(\sum m_i \vec{v}_i \right) = \text{常矢量}$$

【注】:

- (1) 动量守恒定律适用于惯性系
- (2) 动量守恒定律也适用于高速, 微观领域

【例】如图所示, 两部运水的卡车 A、B 在水平面上沿同一方向运动, B 的速度为 u , 从 B 上以 6kg/s 的速率将水抽至 A 上, 水从管子尾部出口垂直落下, 车与地面间的摩擦不计, 时刻 t 时, A 车的质量为 M , 速度为 v 。

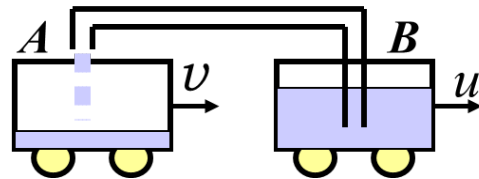
求: 时刻 t , A 的瞬时加速度

【解】选 A 车 M 和 Δt 时间内抽至 A 车的水 Δm 为研究系统, 水平方向上动量守恒

$$Mv + \Delta mu = (M + \Delta m)v'$$

$$v' = \frac{Mv + \Delta mu}{M + \Delta m}, \quad \Delta v = v' - v = \frac{\Delta m(u - v)}{M + \Delta m}$$

$$\Delta v \approx \frac{\Delta m}{M}(u - v), \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} \cdot \frac{u - v}{M} = \frac{6}{M}(u - v)$$



6. 质心

N 个质点的系统 (质点系) 的质心位置

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}$$

质量连续分布的系统的质心位置

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}_i dm}{m}$$

【例】已知一半圆环半径为 R ，质量为 M

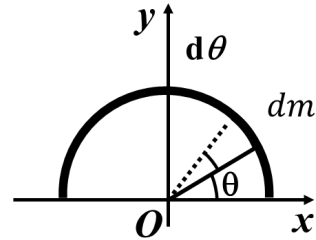
求：质心位置

【解】建系如图： $dm = \lambda dl$

$$dl = R d\theta, \quad dm = \frac{M}{\pi R} R d\theta$$

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta$$

$$y_c = \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int_0^\pi R \sin \theta \frac{M}{\pi R} R d\theta}{M} = \frac{2R}{\pi}$$



由几何对称性： $x_c = 0$

7. 质心运动定理

质心的速度

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\sum \vec{P}_i}{m}$$

质心的加速度

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}$$

质心运动定理

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = m \vec{a}_c$$

【注】：

(1) 质心的运动：一个质点的运动，该质点集中整个系统质量，并集中系统受的外力；

(2) 质心运动状态取决系统所受外力，内力不能使质心产生加速度

例如图所示，人与船构成质点系，当人从船头走到船尾

求：人和船各移动的距离

【解】

在水平方向上，外力为零，则

$$a_{cx} = \frac{dv_{cx}}{dt} = 0, \quad x_c = x'_c$$

开始时，系统质心位置

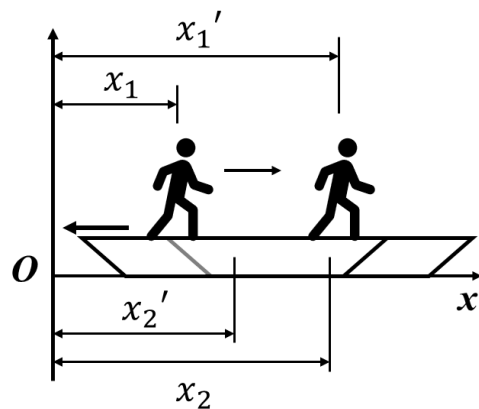
$$x_c = \frac{mx_1 + Mx_2}{m + M}$$

终了时，系统质心位置

$$x'_c = \frac{mx'_1 + Mx'_2}{m + M}$$

$$M(x_2 - x'_2) = m(x'_1 - x_1)$$

而： $S = x_2 - x'_2$, $s = l - S = x'_1 - x_1$



$$S = \frac{ml}{m+M}, \quad s = l - S = \frac{Ml}{m+M}$$

8. 变质量动力学

设质点在 t 时刻的质量为 m , 速度为 v , 由于外力 F 的作用和质量的并入, 到 $t+dt$ 时刻, 质点质量变为 $m+dm$, 速度变为 $v+dv$ 。在 dt 时间内, 质量的增量为 dm , 如 dm 与 m 合并前的速度为 u , 根据动量定理有

$$Fdt = (m+dm)(v+dv) - (mv + dm u)$$

略去二阶无穷小量, 化简得密歇尔斯基方程:

$$F + v_r \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

【例】火箭运动方程

【解】 t 时刻, 火箭质量为 M , 速度为 v , 当不计空气阻力, 只计重力, 则

$$-Mg = \frac{Mdv}{dt} + v_r \frac{dM}{dt} \Rightarrow \int_0^t -gdt = \int_0^v dv + v_r \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}$$

$$v = v_r \ln \frac{M_0}{M} - gt$$

第五章 刚体运动学

1. 刚体

特殊的质点系，形状和体积不变化——理想化模型

在力作用下，组成物体的所有质点间的距离始终保持不变

2. 自由度

确定物体的位置所需要的独立坐标数——物体的自由度数

质点沿曲线运动： $i=1$

质点在曲面内运动： $i=2$

质点的空间运动： $i=3$

刚体在空间运动： $i=3$ （平动）+3（定轴转动）=6

当刚体受到某些限制——自由度减少

3. 刚体的平动

刚体运动时，若在刚体内所作的任一条直线都始终保持和自身平行

平动的特点：

(1) 刚体中各质点的运动情况相同

(2) 刚体的平动可归结为质点运动

【例】一大型回转类“观览圆盘”如图所示。圆盘的半径 $R=25\text{ m}$ ，供人乘坐的吊箱高度 $L=2\text{ m}$ 。若大圆盘绕水平轴匀速转动，转速为 0.1 r/min 。

求：吊箱底部 A 点的轨迹及 A 点的速度和加速度的大小。

【解】

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10 \times 60} = \frac{\pi}{300}$$

吊箱平动

$$x_A = x_B = R \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$y_A = y_B - L = R \sin(\omega t + \theta_0) - L$$

$$x_A^2 + (y_A + L)^2 = R^2$$

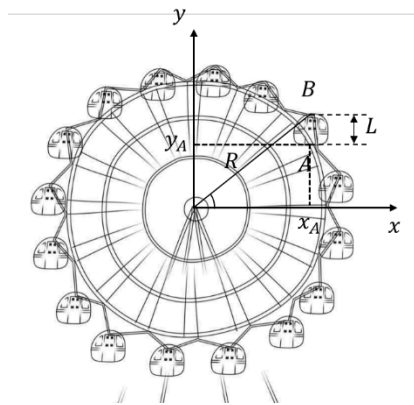
$$v_{Ax} = \frac{dx_A}{dt} = -R\omega \sin(\omega t + \theta_0),$$

$$v_{Ay} = \frac{dy_A}{dt} = R\omega \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = R\omega = \frac{25\pi}{300} = 0.26\text{ m/s}$$

$$a_{Ax} = \frac{dv_{Ax}}{dt} = -R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0), \quad a_{Ay} = \frac{dv_{Ay}}{dt} = -R\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = R\omega^2 = \frac{25\pi^2}{300^2} = 2.7 \times 10^{-3}\text{ m/s}^2$$



4. 刚体绕定轴转动

刚体内各点都绕同一固定不动的直线(转轴)作圆周运动

角坐标

$$\theta = f(t)$$

角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = f'(t)$$

角加速度

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = f''(t)$$

当 $\beta = \text{const}$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ (\theta - \theta_0) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

定轴转动刚体上各点的速度和加速度

$$v = r'\omega, \quad a_n = r'\omega^2, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = r'\beta$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad a_\tau = \vec{\beta} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

第六章 刚体动力学

1. 力矩：改变刚体的转动状态，刚体获得角加速度

力 F 对 z 轴的力矩

$$M_z(F) = F_\tau r = F_\perp h$$

【注】:

力矩取决于力的大小、方向和作用点

在刚体的定轴转动中，力矩只有两个指向，由右螺旋法则确定

力对任意点的力矩，在通过该点的任一轴上的投影，等于该力对该轴的力矩

【例】已知棒长 L , 质量 M ，在摩擦系数为 μ 的桌面转动 (如图)

求：摩擦力对 y 轴的力矩

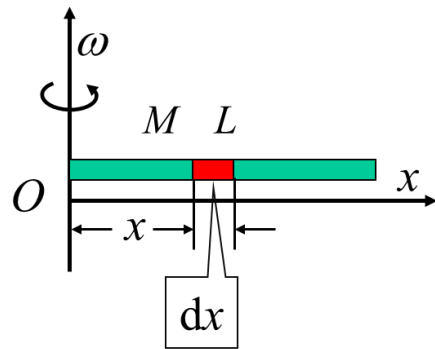
【解】

$$dm = \frac{M}{L} dx, \quad df = \mu dm \cdot g$$

根据力矩

$$dM' = -\mu \frac{M}{L} \cdot g x dx$$

$$M' = \int_0^L -\mu \frac{M}{L} \cdot g x dx = -\frac{1}{2} \mu M g L$$



2. 刚体对定轴的转动定律

当 M 为零时，则刚体保持静止或匀速转动当存在 M 时， β 与 M 成正比，而与 J (刚体对 z 轴的转动惯量) 成反比

$$M_z = J\beta$$

【注】:

(1) M 正比于 β ，力矩越大，刚体的 β 越大

(2) 力矩相同，若转动惯量不同，产生的角加速度不同

(3) 与牛顿定律比较： $M \rightarrow F, J \rightarrow m, \beta \rightarrow a$

3. 转动惯量

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

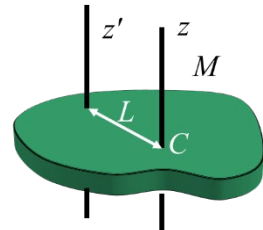
4. 平行轴定理

$$J_{z'} = J_z + ML^2$$

$J_{z'}$: 刚体绕任意轴的转动惯量

J_z : 刚体绕通过质心的轴

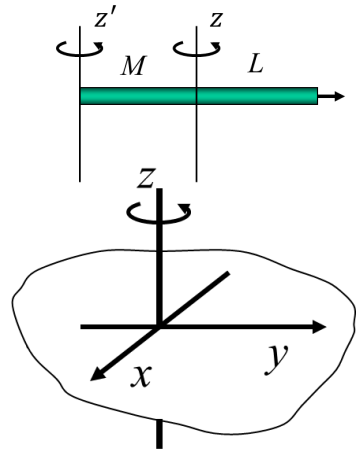
L : 两轴间垂直距离



【例】均匀细棒的转动惯量

$$J'_z = J_z + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$J_z = \frac{1}{12}ML^2$$



5. (薄板)垂直轴定理

$$J_z = J_x + J_y$$

x, y 轴在薄板内;

z 轴垂直薄板。

【例】求圆盘对一条直径的转动惯量

已知:

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2$$

$$J_z = J_x + J_y, \quad J_x = J_y$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{4}mR^2$$

6. 转动动能

$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

绕定轴转动刚体的动能等于刚体对转轴的转动惯量与其角速度平方乘积的一半

7. 力矩的功

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \theta ds = F r \cos \theta d\theta = F_\tau r d\theta = M d\theta$$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \xrightarrow{M=\text{const}} A = M(\theta_2 - \theta_1)$$

【注】:

(1) 合力矩的功

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum_i M_i d\theta = \sum_i \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_i d\theta = \sum_i A_i$$

(2) 力矩的功就是力的功。

(3) 内力矩做功之和为零。

8. 转动动能定理

绕定轴转动刚体在任一过程中动能的增量, 等于在该过程中作用在刚体上所有外力所作功的总和。

$$dA = M d\theta = \left(J \frac{d\omega}{dt} \right) d\theta = J \omega d\omega = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right)$$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dA = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \Delta E_k$$

9. 刚体系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_c = C$$

对于包括刚体的系统，功能原理和机械能守恒定律仍成立

【例】一根长为 l ，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置

求：它由此下摆 θ 角时的 ω

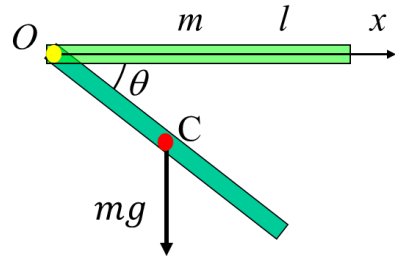
【解】

$$M = \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

由动能定理

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta \frac{l}{2} mg \cos\theta d\theta \\ &= \frac{lmg}{2} \sin\theta - 0 = \frac{1}{2}J\omega^2 - 0 \end{aligned}$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g\sin\theta}{l} \Rightarrow \omega = \left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{1/2}$$



【例】图示装置可用来测量物体的转动惯量。待测物体 A 装在转动架上，转轴 Z 上装一半径为 r 的轻鼓轮，绳的一端缠绕在鼓轮上，另一端绕过定滑轮悬挂一质量为 m 的重物。重物下落时，由绳带动被测物体 A 绕 Z 轴转动。今测得重物由静止下落一段距离 h ，所用时间为 t ，

求：物体 A 对 Z 轴的转动惯量 J_z 。设绳子不可伸缩，绳子、各轮质量及轮轴处的摩擦力矩忽略不计。

【解】

$$E_{p1} = 0, \quad E_{k1} = 0$$

$$E_{p2} = -mgh$$

$$E_{k2} = mv^2/2 + J_z\omega^2/2 = v^2(mr^2 + J_z)/(2r^2)$$

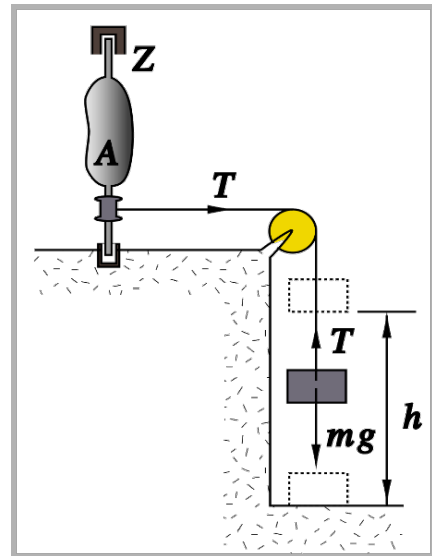
机械能守恒

$$-mgh + v^2(mr^2 + J_z)/(2r^2) = 0$$

$$mgh = \frac{v^2}{2r^2}(mr^2 + J_z), \quad mg \frac{dh}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} \frac{1}{2r^2}(mr^2 + J_z)$$

$$\frac{dh}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = a, \quad a = \frac{mgr^2}{mr^2 + J_z} = \text{常量}$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{mgr^2}{mr^2 + J_z} t^2 \Rightarrow J_z = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$



10. 质点的动量矩(对O点)

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad L_O = rpsin\phi = mrvsin\phi$$

【注】:

- (1) 质点的动量矩与质点的动量及位矢(取决于固定点的选择)有关
- (2) 当质点作平面运动时, 质点对运动平面内某参考点 O 的动量矩也称为质点对过 O 垂直于运动平面的轴的动量矩
- (3) 质点对某点的动量矩, 在通过该点的任意轴上的投影就等于质点对该轴的动量矩

【例】一质点 m, 速度为 v, 如图所示, A、B、C 分别为三个参考点, 此时 m 相对三个点的距离分别为 d1、d2、d3

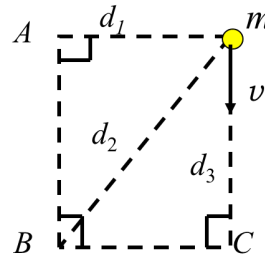
求: 此刻质点对三个参考点的动量矩

【解】

$$L_A = d_1 mv$$

$$L_B = d_1 mv$$

$$L_C = 0$$



11. 质点的动量矩定理

质点所受合力矩的冲量矩等于质点的动量矩的增量

$$\vec{M} dt = d\vec{L}, \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

【注】:

- (1) 冲量矩是质点动量矩变化的原因
- (2) 质点动量矩的变化是力矩对时间的积累结果

12. 质点动量矩守恒定律

若 $\vec{M} = 0$, 则 $\vec{L} = \text{常矢量}$

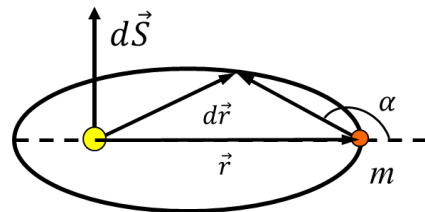
【注】:

- (1) 动量矩守恒定律是物理学的基本定律之一, 它不仅适用于宏观体系, 也适用于微观体系, 且在高速低速范围均适用
- (2) 通常对有心力: \vec{F} 过 O 点, $M=0$, 动量矩守恒

【例】由动量矩守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律: 行星对太阳的位矢在相等的时间内扫过相等的面积

$$\begin{aligned} L &= mvr \sin \alpha = m \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} r \sin \alpha \\ &= 2m \frac{\frac{1}{2} |\Delta \vec{r}| r \sin \alpha}{\Delta t} = 2m \frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{const} \end{aligned}$$

$$2m \frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{const}, \quad \frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{const}$$



13. 质点系的动量矩

质点系所有质点对同一参考点的动量矩的矢量和

$$\vec{L}_O = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

记质点系质心 C 的位置矢量为 \vec{r}_C , 速度为 \vec{v}_C 。对第 i 个质点, 设其相对于质心的位置矢量为 \vec{r}'_i , 速度为 \vec{v}'_i , 则有:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}'_i, \quad \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i$$

$$\vec{L}_O = \sum [(\vec{r}_C + \vec{r}'_i) \times m_i \vec{v}_i] = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i)$$

【注】:

(1) 质点系的动量矩(角动量)可分为两项

轨道角动量: 只包含系统的总质量、质心的位矢和质心的速度;

自旋角动量: 是质点系各质点相对于质心的角动量的矢量和;

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{\text{轨道}} + \vec{L}_{\text{自旋}}, \quad \vec{L}_{\text{轨道}} = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C, \quad \vec{L}_{\text{自旋}} = \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i)$$

(2) 质点系的轨道角动量等于质点系的全部质量集中于质心处的一个质点对于参考点的角动量。它反映了整个质点系统参考点的旋转运动;

(3) 质点系的自旋角动量是以质心为参考点的角动量。与质心运动无关。它只代表系统的内禀性质。

14. 质点系的动量矩定理

质点系所受合外力矩的冲量矩等于质点系动量矩的增量

$$\vec{M}_{\text{外}} dt = d\vec{L}, \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{\text{外}} dt = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} d\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta \vec{L}$$

质点系的内力矩不能改变质点系的动量矩

质点系动量矩守恒定律: 对质点系 $\vec{M}_{\text{外}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0, \vec{L} = \text{常矢量}$

15. 刚体定轴转动的动量矩

$$L_Z = \sum_i \Delta m_i v_i r_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = J_Z \omega$$

刚体上任一质点对 Z 轴的动量矩都具有相同的方向

16. 刚体定轴转动的动量矩定理

定轴转动刚体所受合外力矩的冲量矩等于其动量矩的增量

$$M_Z dt = J d\omega = d(J\omega), \quad \int_{t_1}^{t_2} M_Z dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1$$

17. 刚体定轴转动的动量矩守恒定律

对定轴转动刚体 $M_Z = 0 \Rightarrow \Delta L = 0, J\omega = \text{常量}$

【注】:

变形体绕某轴转动时, 若其上各点(质元)转动的角速度相同, 则变形体对该轴的动量矩

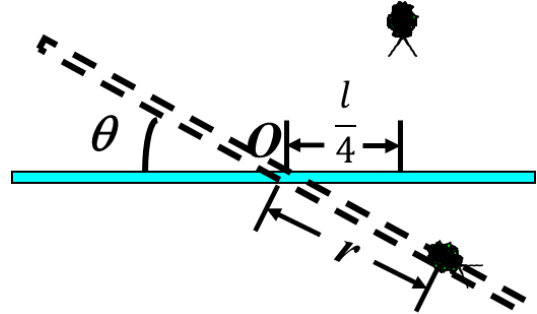
$$\sum m_k r_k^2 \omega = J(t) \omega$$

当变形体所受合外力矩为零时，变形体的动量矩也守恒

【例】一长为 l 的匀质细杆，可绕通过中心的固定水平轴在铅垂面内自由转动，开始时杆静止于水平位置。一质量与杆相同的昆虫以速度 v_0 垂直落到距点 O $l/4$ 处的杆上，昆虫落下后立即向杆的端点爬行，如图所示。若要使杆以匀角速度转动

求：昆虫沿杆爬行的速度。

【解】昆虫落到杆上的过程为完全非弹性碰撞，对于昆虫和杆构成的系统，合外力矩为零，动量矩守恒



$$mv_0 \frac{l}{4} = \left(\frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right) \omega$$

$$\omega = \frac{12 v_0}{7 l}$$

转动定律

$$M_z = \frac{d(J_z \omega)}{dt} \xrightarrow{\text{杆以匀角速度转动}} M_z = \omega \frac{dJ_z}{dt}$$

$$M_z = mgr \cos \theta, \quad J_z = \left(\frac{1}{12} ml^2 + mr^2 \right)$$

代入得：

$$mgr \cos \theta = 2m\omega r \frac{dr}{dt}$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{g \cos \theta}{2\omega} = \frac{g}{2\omega} \cos \omega t = \frac{7lg}{24v_0} \cos \left(\frac{12}{7l} v_0 t \right)$$

第七章 静电场

1. 库仑定律

定律重点：静止状态（相对观察者），点电荷，真空（空气）

公式：电荷 q_1 对 q_2 的作用力 $\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_{21}^0$ （标量式： $F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ ）。

（其中 $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ，其中， ϵ_0 为真空中介电常数。）

【例】库仑定律在微元法下的应用

已知两杆电荷线密度为 λ ，长度为 L ，相距 L ，求两带电直杆间的作用力。

解析：

$$dq = \lambda dx$$

$$dq' = \lambda dx'$$

$$dF = \frac{dq dq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dx \lambda dx'}{4\pi\epsilon_0 (x' - x)^2}$$

$$F = \int_{2L}^{3L} dx' \int_0^L \frac{\lambda^2 dx}{4\pi\epsilon_0 (x' - x)^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4}{3}$$

2. 电场强度

点电荷场强公式： $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ ，电场强度矢量叠加。

特殊为位置场强：

1) 电偶极子（ $\vec{p} = q\vec{l}$ 为电偶极矩）

$$\text{中心位置场强： } E = \frac{2p}{\pi\epsilon_0 l^3} ;$$

2) 带电直杆（无限长直导线，电荷线密度为 λ ）

$$\text{距直杆距离为 } a \text{ 处场强： } E_x = 0, E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} ;$$

3) 带电圆环（半径为 R ，带电量为 q ）

$$\text{圆环轴线上距圆心距离为 } x \text{ 处场强： } E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} .$$

【例】利用电场强度叠加求库仑力

已知圆环带电量为 q ，杆的线密度为 λ ，长为 L ，求杆对圆环的作用力

解析：

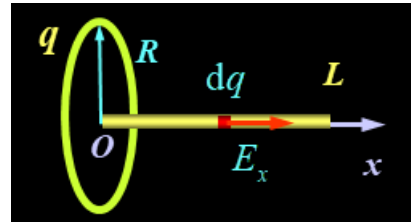
$$dq = \lambda dx$$

圆环在 dq 处产生的电场：

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$dF = E_x dq = E_x \lambda dx$$

$$F = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\lambda x dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right)$$



3. 高斯定理

公式：真空中的任何静电场中，穿过任意闭合曲面的电通量，数值上等于该曲面内包围的电量的代数和除以 ϵ_0 。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i (\text{内}) \quad \Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

高斯定理的应用：求特殊带电体的电场强度

一般思路：1) 进行对称性分析，即由电荷分布的对称性，分析场强分布的对称性，判断能否用高斯定理来求电场强度的分布；2) 根据场强分布的对称性特点，作适当的高斯面，要求①待求场强的场点应在此高斯面上②穿过该高斯面的电通量容易计算，高斯面各面元的法线矢量与场强方向平行或垂直，法线与场强平行时，场强大小要求处处相等；3) 计算电通量和高斯面内所包围的电量的代数和，最后由高斯定理求出场强。

【例】高斯定理求特殊带电体的电场强度

已知无限长均匀带电直线的电荷线密度为 $+\lambda$ ，求距离直线 r 处一点 P 的电场强度。

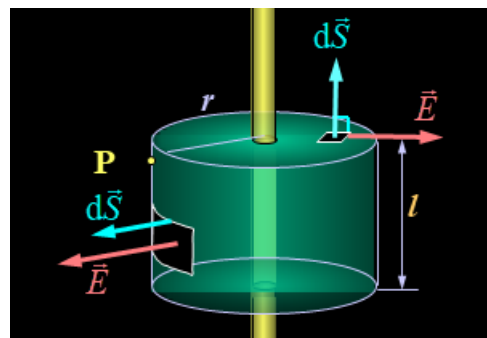
解析：

电场分布具有轴对称性，过 P 点作一个以带点直线为轴，以 l 为高的圆柱形闭合曲面为高斯面。

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{侧}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{上底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{下底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{侧}} E dS = E \cdot 2\pi r \cdot l \end{aligned}$$

根据高斯定理得

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



4. 静电场的环路定理

内容：在静电场中，电场强度的环流为零，即电场强度沿任意闭合路径的线积分为零。

公式: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, 由此可得, 静电场是无旋场。

环路定理的应用: 检验一个电场是否为静电场。

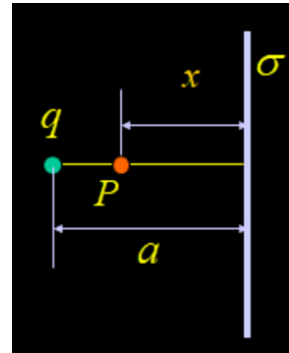
5. 电势的计算

方法: 1) 已知电荷分布 \rightarrow 叠加原理 $u = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

2) 已知场强分布 \rightarrow 电势定义 $u = \int_p^{+\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

【例】电势的计算

有一带电系统如图所示, 求解 P 点电势



6. 电势与电场强度的微分关系

静电场中, 任意一场点 P 处电场强度的大小等于沿过该点等势面法线方向上电势的变化率, 负号表示电场强度的方向指向电势减小的方向。

$$E_n = -\frac{du}{dn}$$

在直角坐标系中, $\vec{E} = -\text{grad}(u)$ 。

电势与电场强度的微分关系的应用: 计算电势与电场强度

【例】计算一均匀带电直线附近一点的场强 E_y 。

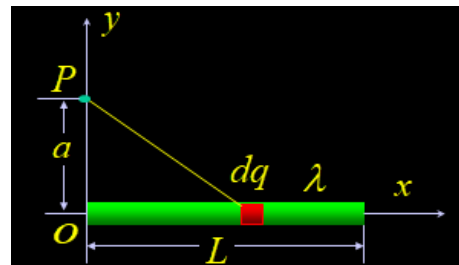
解析:

取一电荷元

$$\begin{aligned} u_P &= \int_0^L du = \int_0^L \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + a^2}}{a}\right) \end{aligned}$$

$$u = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + y^2}}{y}\right)$$

$$\text{则 } E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=a} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a \sqrt{L^2 + a^2}}$$



7. 静电场中的导体和介质

导体静电平衡的条件： $E_{\text{内}} = 0, \vec{E}_{\text{表面}} \perp \text{导体表面}$

静电平衡导体上的电荷分布： $q_{\text{内净}} = 0, \sigma_{\text{表}} = \frac{E}{\epsilon_0}$

静电场中电介质的存在，在计算中，使得介电常数产生改变，由此对高斯定理产生了一定影响。

【例】含介质的高斯定理的应用

一单芯同轴电缆的中心为一半径为 R_1 的金属导线，外层一金属层，其中充有相对介电常数为 ϵ_r 的固体介质，当给电缆加一电压后， $E_1 = 2.5E_2$ ，若介质最大安全电势梯度为 E' ，求电缆能承受的最大电压。

【解】：

用含介质的高斯定理（设电荷线密度为 λ ）

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \Rightarrow \lambda_{\text{max}} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 E'$$

$$E = E' \frac{R_1}{r}$$

$$E_1 = 2.5E_2 \Rightarrow R_2 = 2.5R_1$$

$$\Delta u = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = R_1 E' \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = R_1 E' \ln 2.5$$

8. 电容与电场能量

电容公式： $C = \frac{Q}{u}$

特殊的电容：

$$1) \text{ 平行板电容器: } C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

$$2) \text{ 柱形电容器: } C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$3) \text{ 球形电容器: } C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$4) \text{ 孤立导体球的电容 } C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$\text{电场能量 (电容器): } W = A = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$$

$$\text{能量密度: } w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

第八章 恒定磁场

1. 比奥-萨戈尔定律

$$\text{公式: } d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

比萨定律原则上可以求解任何稳恒载流导线产生的磁感应强度。

特殊磁场下的磁感应强度:

- 1) 无限长直导线: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$, 方向: 右手螺旋法则。
- 2) 无限大载流板: $B = \frac{1}{2} \mu_0 i$, i 为电流线密度。(磁屏蔽现象)
- 3) 载流圆线圈轴线: $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$, 方向满足右手定则。

$$\text{圆心处磁场: } B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

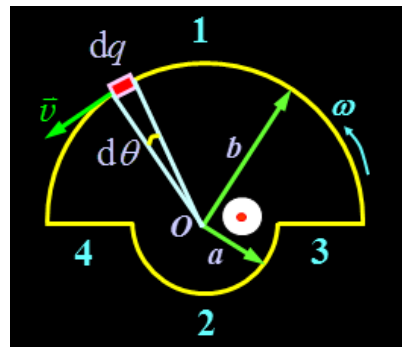
- 4) 无限长载流螺线管轴线: $B = \mu_0 nI$

【例】利用比萨定律求解磁感应强度

如图导线, 已知电荷线密度为 λ , 当绕 O 点以 ω 转动时, 求 O 点的磁感应强度。

【解】: 分线段利用比萨定律求解。

$$\text{最后结果: } B = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{b}{a} \right) \mu_0 \lambda \omega$$



2. 磁场的高斯定理

$$\text{公式: } \Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

3. 安培环路定理

$$\text{公式: } \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i\text{内}}.$$

重点: 代数和, 有旋场, 闭合导线。

应用: 求解特殊载流体的磁场。

一般思路：1) 分析磁场对称性（依据电流分布）。2) 选取合适的闭合积分路径，要求①待求场点在此积分路径上②积分路径上磁感应强度的环流容易计算：积分路径上的切线方向与磁感应强度方向平行或垂直。3) 选好积分回路的取向，确定回路内电流的正负，求解磁感应强度。

【例】

求螺绕环电流的磁场分布及螺绕环内的磁通量。

【解】:

在螺绕环内部做一个环路，可得

$$\oint_L B \cos \theta dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

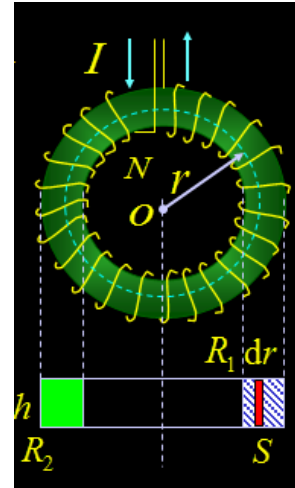
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

若螺绕环的截面很小， $r = \bar{r}$

$$B_{\text{内}} = \mu_0 \frac{N}{2\pi r} I = \mu_0 n I$$

若在外部再做一个环路，可得

$$\sum I_i = 0 \Rightarrow B_{\text{外}} = 0$$



$$\text{螺绕环内的磁通量为 } \Phi_m = \int_{R_1}^{R_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 h NI}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

4. 安培定理

$$\text{公式: } d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

应用：磁场对平面载流线圈的作用

对中心的力矩为

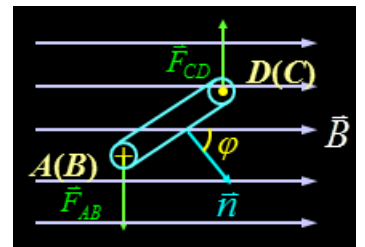
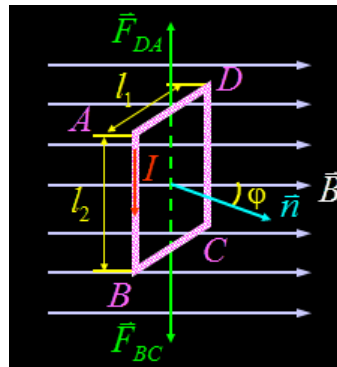
$$\begin{aligned} M &= F_{AB} \frac{l_1}{2} \sin \varphi + F_{CD} \frac{l_1}{2} \sin \varphi \\ &= l_1 l_2 B I \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\text{令 } \vec{S} = S\vec{n} = l_1 l_2 \vec{n}, \vec{p}_m = IS\vec{n}$$

$$\text{则 } \vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad (\text{普适})$$

$$\text{安培力做功: } A = Fx = IBlx = IB\Delta S$$

$$\text{磁力矩做功: } A = I\Delta\Phi_m$$



【例】

真空中一长直导线，通有电流 I_1 ，在其附近有一共面矩形线圈，通有电流 I_2 ，长 l ，宽 a ，边与长直导线相距 d 。求由相距 d 到相距 d_1 磁力所做的功。

【解】:

距离长直导线 x 处一个小矩形的磁通量

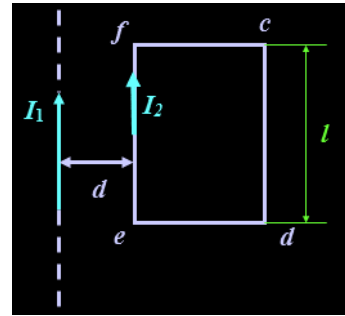
$$d\Phi_m = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} l dx$$

则相距为 d 时线圈总磁通量为

$$\Phi_{md} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

$$\text{同理 } \Phi_{md_1} = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{d_1+a}{d_1}$$

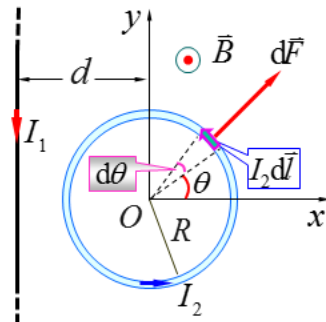
$$\text{则 } A = I_2 \Delta\Phi_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \left(\ln \frac{d_1+a}{d_1} - \ln \frac{d+a}{d} \right)$$



【练习】:

半径为 R 载有电流 I_2 的导体圆环与电流为 I_1 的长直导线放在同一平面内，直导线与圆心相距为 d ，且 $R < d$ 两者间绝缘，求：

- 1) 作用在圆电流上的磁场力
- 2) 穿过环平面的磁通量
- 3) 由相距 d 到相距 d_1 磁力所作的功



5. 洛伦兹力

公式: $\vec{f}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ ，安培力是大量带电粒子洛伦兹力的叠加。

带电粒子在均匀磁场中的运动：圆周运动，螺旋运动，磁聚焦，磁约束

霍尔效应: $U_{ab} = K \frac{IB}{d}$, $K = \frac{1}{nq}$ (霍尔系数)。

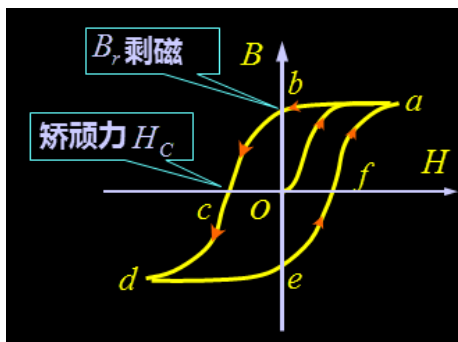
6. 磁场内的磁介质

有磁介质的磁高斯定理: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

有磁介质的安培环路定理: $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i\text{内}} = \mu_0 (NI_0 + I_s)$

或 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_{i0}$

7. 铁磁质磁滞回线



第九章 电磁感应

1. 电磁感应定律

公式: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

楞次定律: 负号表示感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因。

动生电动势: $\varepsilon_i = Blv \quad \varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

【例】求解感应电动势。

在匀强磁场 \mathbf{B} 中, 长 R 的铜棒绕其一端 O 在垂直于 \mathbf{B} 的平面内转动, 角速度为 ω , 求棒上的电动势。

【解】:

(动生电动势)

$$\varepsilon_i = \left| \int_0^R l \omega B dl \right| = \frac{BR^2}{2} \omega$$

(电磁感应定律)

在 dt 时间内导体棒切割磁场线 $|d\Phi| = \frac{1}{2} R^2 d\theta B$

$$\varepsilon_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{1}{2} BR^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} BR^2 \omega$$

2. 感生电场

感生电场: \vec{E}_V

感生电动势: $\varepsilon_i = \int_a^b \vec{E}_V \cdot d\vec{l}$

感生电场与变化磁场之间的积分关系: $\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ (左螺旋关系)

感生电动势与动生电动势叠加表现为最终物体运动产生的电动势。

【例】求解感应电动势

一被限制在半径为 R 的无限长圆柱内的均匀磁场 B , B 均匀增加, 方向如图, 求导体棒 MN 、 CD 的感生电动势。

【解】:

(感生电场)

$$E_V = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} (r < R)$$

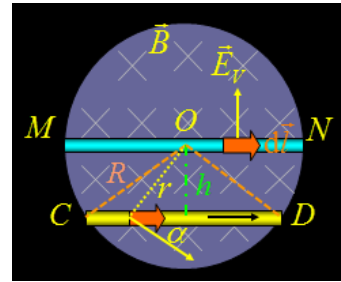
$$\varepsilon_{MN} = \int_M^N \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{CD} &= \int_C^D \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = \int_C^D E_V \cos \alpha dl = \int_0^L \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{h}{r} dl \\ &= \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

(电磁感应定律)

补逆时针回路 $OCDO$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BLh/2)}{dt} = \varepsilon_{OC} + \varepsilon_{CD} + \varepsilon_{DO} = \varepsilon_{CD} = \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}$$



3. 自感和互感

$$\text{自感电动势: } \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad \psi = LI$$

$$\text{互感电动势: } \varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad M_{21} = M_{12} = M, \quad \psi_{21} = M_{21} I_1$$

$$\text{线圈顺接的等效总自感: } L = L_1 + L_2 + 2M, \quad \text{反接: } L = L_1 + L_2 - 2M$$

【例】求解互感与自感系数

一无限长导线通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$, 现有一矩形线框与长直导线共面, 求互感系数和互感电动势。

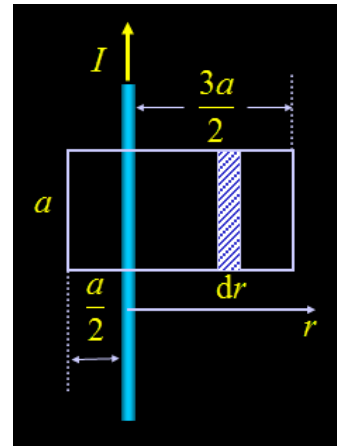
【解】:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\text{穿过线框的磁通量 } \Phi = \int_{a/2}^{3a/2} B dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 3$$

$$\text{互感系数 } M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3$$

$$\text{互感电动势 } \varepsilon = -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3 I_0 \omega \cos \omega t$$



4. 磁场能量

$$\text{自感磁能公式: } W_m = \frac{1}{2} L I_0^2$$

磁场能量密度: $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

互感磁能: $W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$

第十章 狭义相对论

不急说公式，先说在两个参考系下看到的对方的时空是什么样子的
首先考察尺子的变化

K 系观察者看自己和 K' 系的坐标尺是这样的

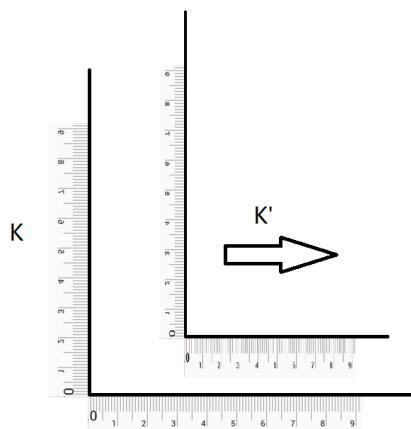


图 1 K 系观察者所见情形

横轴的尺子缩小，刻度变密；纵轴尺子不变

如果在 K 系视角下，有个质点在这里

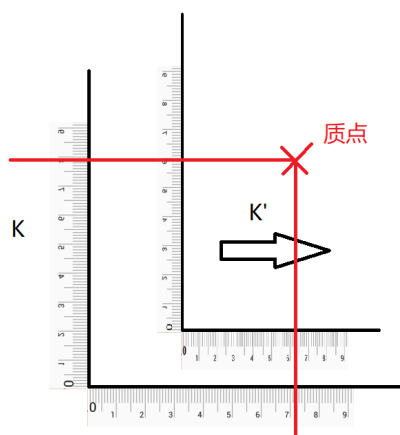


图 2 K 系观察者观测质点位置

那么 K 系观察者观测到质点坐标为(7.15,7.90)cm，K 系观察者可以根据 K' 系标尺来推测出 K' 系观察者看到的质点坐标，也就是(6.30,6.00)cm

K' 系观察者看到的则是下图所示的情景

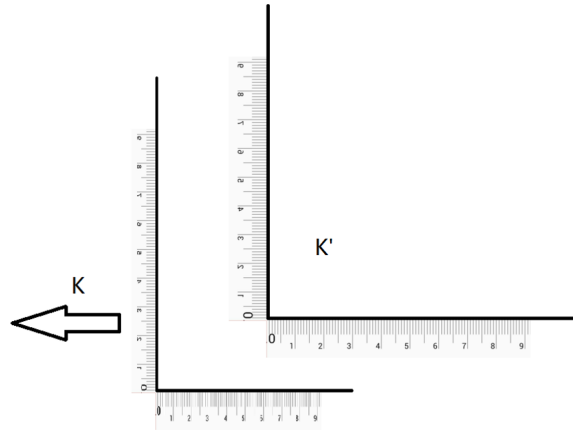


图3 K'系观察者所见情形

坐标变换和上面是一样的

现在说尺缩公式和洛伦兹坐标变换

刻度变化可用尺缩公式 $l' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 得出。长度 l 既然变小，那么坐标轴上的尺子缩短，刻度变密

现在推导坐标变换公式。在此做假设：两个坐标系相对匀速直线运动，运动方向沿 x 轴；初始时两个坐标系的原点重合。图 1~3 不满足初始原点重合条件，故直接用下面推出的公式计算会出 bug

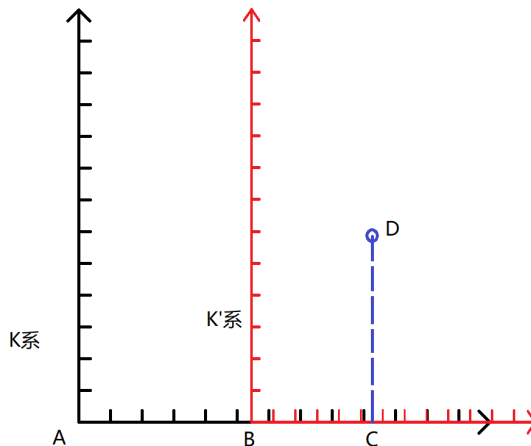


图4 推导坐标变换用图

此图是 K 系观察者看到的，而非 K' 系观察者看到的。假设已经过了时间 t ，并利用 K 系而非 K' 系的标尺测量，则

$$|AB| = vt$$

且显然有

$$x = |AC|$$

设用 K' 系测量的 BC 长度为 $|BC|'$ ，那么根据尺缩公式得到

$$|BC|'\sqrt{1 - v^2/c^2} = |BC|$$

显然

$$|BC|' = x'$$

经过整理得到

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

这就是洛伦兹坐标变换公式

当然，纵轴标尺没有变化，则

$$y' = y$$

说完空间，就该转到时间。还是这两个坐标系，初始时二者 y 轴重合。 K 系和 K' 系的观察者，都沿自己的 x 轴每两格放一个钟。初始时，两个观察者将两个参考系原点处的钟对准，再各自将自己参考系内的钟统一校准得和原点处钟示数一致。但是在 K 系观察者看来，自己的钟和 K' 系的钟示数是这样

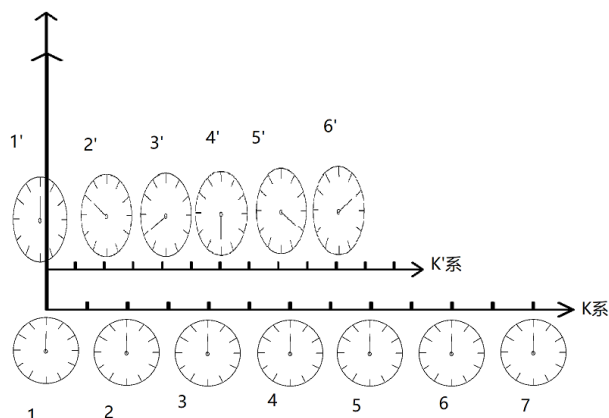


图 5 K 系观察者看到的时钟

然而，在 K' 系观察者看来，自己的钟 1'~6' 示数是一样的，都是钟 1 的示数。这并不矛盾，因为两个参考系下的时空不一样

K' 系移动了一段时间 Δt 后， K 系观察者看到的又会是这样

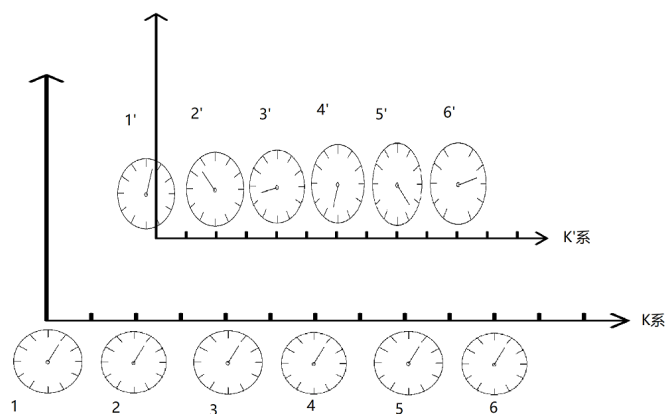


图 6 过了 Δt 后 K 系观察者看到的

钟 1~6 示数一样，走过的时间也都是 Δt 。钟 1'~6' 示数不一样，但是走过的时间是一样的，暂且记作 $\Delta t'$ 。 $\Delta t'$ 和 Δt 满足钟慢公式

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

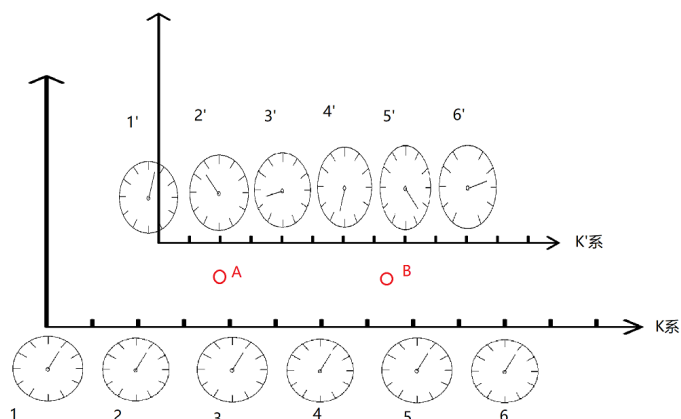


图7 同时的相对性

在 **K 系观察者** 看来, A 和 B 同时发生。但是对照一下 K' 系的钟, 就会发现在 K' 系下这两件事发生的时刻不同, 则可以推断出来 **K' 系观察者** 认为这两件事情发生不同时, 且 B 先于 A 发生

洛伦兹时间变换就不推导了, 直接给出结果

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

我们来解决一个悖论: 某粒子固有寿命为 τ_0 , 那么在实验室参考系下粒子表现的寿命为 τ , 显然 $\tau > \tau_0$ 。假设粒子上坐着一个观察者, 盯着实验室墙上的钟看, 那么这个钟走时 τ 后粒子应当消失。而实验室的钟相对于观察者走时慢, 那么观察者看到粒子的寿命比 τ 更长。但是粒子的固有寿命明明仅有 τ_0 。如何解释?

这段推理的错误在于把那个钟的示数当成了实验人员读出的时刻, 下面的图一目了然

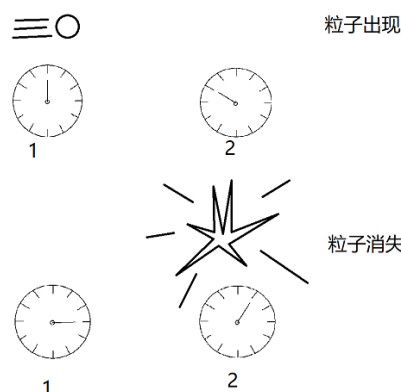


图8 解释悖论

让实验员在粒子出现和消失的地方各挂一个钟, 再把这俩调的示数一样。当然, 由于同时的相对性, 这两个钟在粒子看来是没校准的。粒子如何知道**实验员读出来**它的寿命是多久? 应该在自己出现时看表 1, 消失时看表 2, 而不是两次都看表 1。很容易知道实验员得到其寿命为 1 小时而不是 3 小时, 这样悖论就被解决了

只要充分理解了时空关系, 就不用担心换了方法就把题目做错

速度变换可以自己推, 思路是这样:

在 K' 系测量质点运动速度当然是以自己的标尺和自己的钟为标准测量的, 那么显然

$$v_x = \frac{dx'}{dt'}, v_y = \frac{dy'}{dt'}, v_z = \frac{dz'}{dt'}$$

把洛伦兹变换式带进去就得到要的结果了

第十一章 热力学基础

1. 理想气体状态方程

版本一： $p = nkT$ ，其中 p 为压强， n 为分子数密度， k 为玻尔兹曼常量， T 为温度
(这个式子在气体组分不单一时也能用)

版本二： $pV = \nu RT$ ，式中 ν 为气体物质的量

版本三： $pM = \rho RT$ ，式中 M 为相对分子质量， ρ 为气体密度

2. 热力学第一定律

$$Q = \Delta U + W$$

Q 为外界给系统传热多少， ΔU 为系统内能增量， W 为系统对外界做功大小
系统放热，则 Q 取负；系统内能下降，则 ΔU 取负；外界对系统做功，则 W 取负

3. 利用p-V图计算W

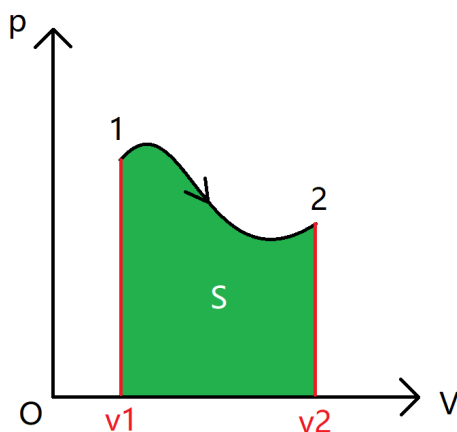


图 1 计算 W 用图

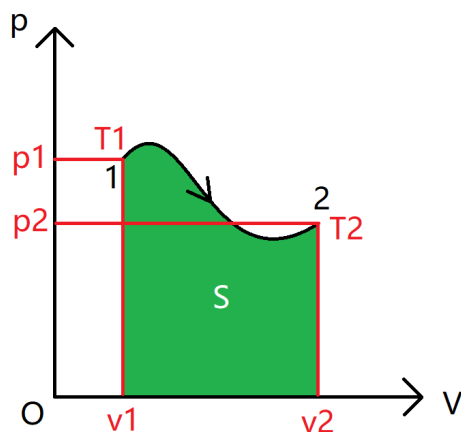
若过程从 1 到 2，则曲边梯形面积代表系统对外界做功大小，即

$$W = S = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

若从 2 到 1，则外界对系统做功， W 取负号，即

$$W = -S = -\int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

4. 利用p-V图计算Q与 ΔU

图 2 计算 Q 与 ΔU

如果题目直接给了 1、2 两点的温度 T_1 与 T_2 ，那么直接用下式计算 ΔU

$$\Delta U = C_{V,m} \nu (T_2 - T_1)$$

要是没给，那就先用理想气体方程计算出温度值，再算出 ΔU

至于 Q ，利用热力学第一定律即可，把 ΔU 和 W 加起来就搞定

5. 等温过程满足

$$pV = \text{Const}$$

6. 绝热过程满足

$$pV^\gamma = \text{Const}$$

【注】：剩下的两个可以结合式子 $\frac{pV}{T} = \nu R = \text{another const}$ 推得，记住上面那个就够了

7. 绝热过程显然满足

$$Q = 0$$

8. 理想气体内能公式

$$U = C_{V,m} \nu RT$$

9. 焓

$$H = U + pV$$

【注】：对于等压过程， $Q = \Delta H$

10. 判断过程吸放热的方法

Step1 过过程线的左端点画条绝热线

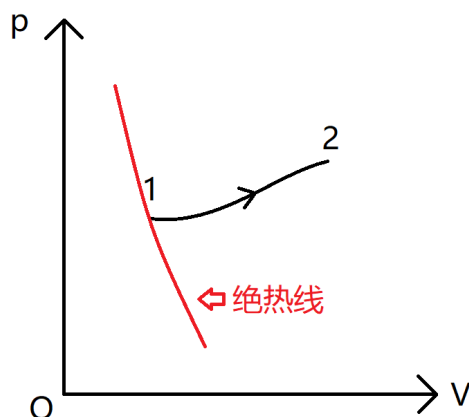


图3 判断过程吸放热

Step2

如果过程线**整个**都在绝热线上边，且方向从左到右，那么该过程吸热

如果过程线**整个**都在绝热线上边，且方向从右到左，那么该过程放热

如果过程线**整个**都在绝热线下边，且方向从左到右，那么该过程放热

如果过程线**整个**都在绝热线下边，且方向从右到左，那么该过程吸热

再来说说这个方法为什么可行：

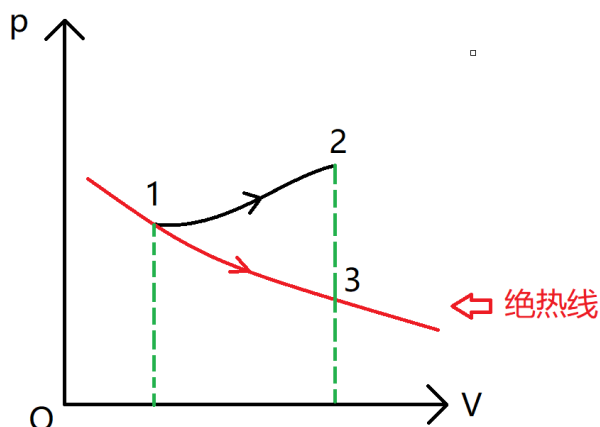


图4 论证

记过程 $1 \rightarrow 2$ 做功 $W_{1 \rightarrow 2}$ ，内能变化 $\Delta U_{1 \rightarrow 2}$ ，记号以此类推

由图直接得出 $W_{1 \rightarrow 3} < W_{1 \rightarrow 2}$

还能看出 $V_2 = V_3$ ， $p_2 > p_3$ ，那么可以推出 $T_2 > T_3$ ， $U_2 > U_3$ ， $\Delta U_{1 \rightarrow 3} < \Delta U_{1 \rightarrow 2}$

根据热力学第一定律，得到 $Q_{1 \rightarrow 3} < Q_{1 \rightarrow 2}$

而 $Q_{1 \rightarrow 3} = 0$ ，因为是绝热过程

则 $Q_{1 \rightarrow 2} > 0$ ，即吸热。其余情况不再赘述

11. 判断某点瞬时吸放热

Step1 过考察点画绝热线

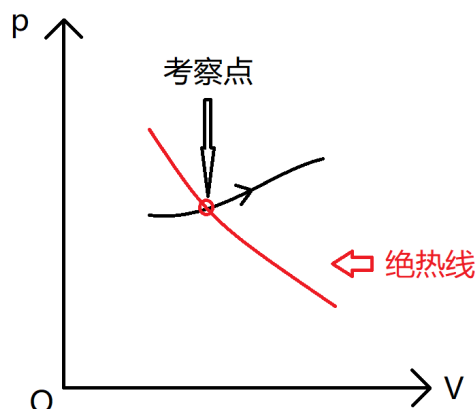


图5 判断点吸放热

Step2

若考察点处曲线斜率大于绝热线斜率，且从左往右走，那么该点吸热

若考察点处曲线斜率大于绝热线斜率，且从右往左走，那么该点放热

若考察点处曲线斜率小于绝热线斜率，且从左往右走，那么该点放热

若考察点处曲线斜率小于绝热线斜率，且从右往左走，那么该点吸热

至于这个方法为啥奏效，把这个点的小邻域拿来套用“九”提到的方法，就可以证明。在此不赘述

12. 热循环做功

对于一个循环，转了一圈做的总功 W ，等于一圈包下来面积大小。顺时针走取正，逆时针取负

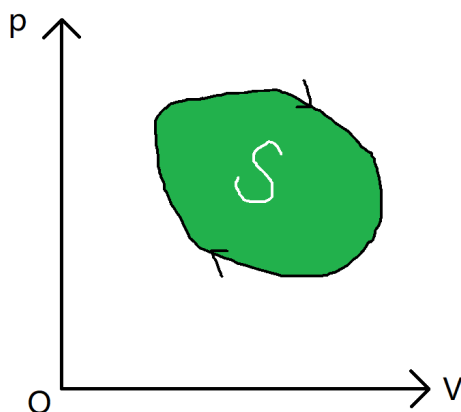


图6 循环做功大小

13. 热机的效率定义

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{吸}}}$$

注：效率不是下式

$$\eta = \frac{W}{Q}$$

$Q = Q_{\text{吸}} - Q_{\text{放}}$, $Q = \Delta U + W$, 且循环一圈下来又回到初态, 那么属于状态函数变化量的 ΔU 必然为 0。这样算下来任何热机效率都是百分百, 这肯定不合常理。不能把包含了吸热与放热的总吸热 Q 和纯粹的吸热 $Q_{\text{吸}}$ 混为一谈

14. 卡诺热机效率

$$\eta = 1 - \frac{T_{\text{low}}}{T_{\text{high}}}$$

卡诺热机效率只和高低温热源的温度有关。同样的工况下, 卡诺热机的效率必然最高

【例 1】

[例 1-7] (2018 • 阶段一) 1mol 单原子理想气体的循环过程的 $V-T$ 图如图所示 (见下页), 已知 $V_c = 2V_a$, a 点的温度为 T_a .

- (1) 试画出此循环的 $p-V$ 图, 说明此循环是热机循环还是制冷循环.
- (2) 试用 T_a 和摩尔气体常数 R 表示 $a-b$ 、 $b-c$ 、 $c-a$ 过程中吸收的热量.
- (3) 求此循环效率.

解: (1) 热机循环

(2) $a-b$ 是等压过程: $Q_{ab} = C_p \Delta T = \frac{5}{2} RT_a$

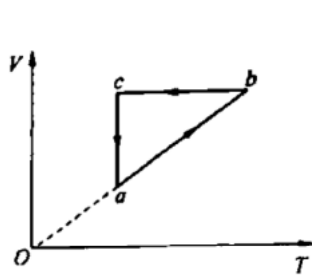


图 6: 例 1-7 图 1

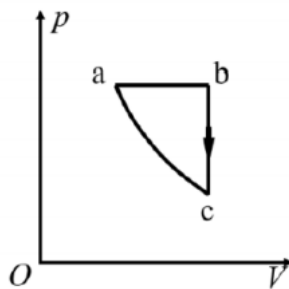


图 7: 例 1-7 图 2

$b-c$ 是等体过程: $Q_{bc} = C_V \Delta T = -\frac{3}{2} RT_a$

$c-a$ 是等温过程: $Q_{ca} = RT_a \ln \frac{V_a}{V_c} = -RT_a \ln 2$

(3) $\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{3/2 + \ln 2}{5/2} = 12.27\%$

【例 2】

[例 1-5] (2018·阶段一) 一定量的理想气体, 在 $p-V$ 图上从初态 a 经历 (1) 或 (2) 过程达到末态 b , 已知 a 、 b 处于同一绝热线上, 图中虚线为绝热线, 则气体在

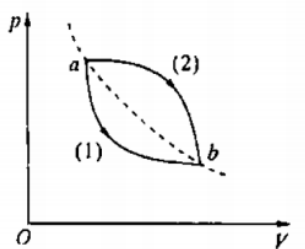


图 4: 例 1-5 图

- A. (1) 过程中吸热, (2) 过程中放热.
- B. (1) 过程中放热, (2) 过程中吸热.
- C. 两种过程中都吸热.
- D. 两种过程中都放热.

【解】直接套用本章第 9 条即可

虚线是绝热线, (2) 和 (1) 都是从左到右, 且 (2) 在绝热线上面, (1) 在绝热线下面, 那么由第九条得出, (2) 吸热, (1) 放热, 那么选 B

第十二章 分子动理论

1. 麦克斯韦速率分布

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

2. 三个速率

$$1. \text{ 平均速率: } \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$2. \text{ 方均根速率: } \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$3. \text{ 最概然速率: } v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

3. 常用平均速率大小比较

$$\sqrt{v^2} > \bar{v} > v_p$$

4. 麦克斯韦速度分布

$$f(x_i) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_i^2}{2kT}}$$

5. 研究等温大气压强分布

请用这组式子：

$$\begin{cases} dp = -\rho(z)gdz \\ p = nkT \end{cases}$$

6. 自由度

单原子分子有三个自由度，都是平动自由度；双原子分子有六个自由度，三个是平动自由度，两个是转动自由度，一个是振动自由度；多原子分子最多有 $3n$ 个自由度（ n 为单个分子中原子数目），但是可能没这么多自由度，其中平动自由度有三个，转动自由度有三个，剩下的都是振动自由度

7. 分子能量

$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(t + r + 2s)kT$, 式中 $\bar{\epsilon}$ 为平均单个分子的总能量, t 为平动自由度, r 为转动自由度, s 为振动自由度, $\frac{1}{2}tkT$ 为分子的平动动能, $\frac{1}{2}rkT$ 为分子的转动动能, $\frac{1}{2}skT$ 为分子内部的振动动能, $\frac{1}{2}skT$ 为分子内部的振动势能

室温下分子的振动自由度是不激发的, 这一块是不分配能量的

8. 摩尔定体热容

指 1mol 的理想气体在等体过程中温度升高 1K 所需要的热量, 其满足:

$$\begin{cases} C_V^{\text{mol}} = \frac{3}{2}R \text{ (单原子分子)} \\ C_V^{\text{mol}} = \frac{5}{2}R \text{ (双原子分子)} \end{cases}$$

摩尔定体热容也可以认为是 1mol 的理想气体升高 1K 时内能的增量, 不管经历了什么样的过程

9. 摩尔定压热容

指 1mol 的理想气体在等压过程中温度升高 1K 所需要的热量, 其满足:

$$C_P^{\text{mol}} = C_V^{\text{mol}} + R$$

10. 平均物理量A值

积分式 $\int_0^{+\infty} Af(v)dv$ 代表平均物理量 A 值, 比如 $\bar{v} = \int_0^{+\infty} vf(v)dv$, $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 f(v)dv}$

$v_1 \sim v_2$ 中物理量 A 的平均值是 $\frac{\int_{v_1}^{v_2} Af(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv}$, 不要忘了分母

11. 分布密度函数

算分布密度函数时, 不妨先算 F (分布函数), 再求导就能得到 f (密度函数), 这是概率论的知识

12. 扩散定律

$$\frac{dN}{dt} = D \frac{dn}{dz} S$$

其中 $\frac{dN}{dt}$ 为单位时间内通过截面的分子数, D 为该气体的扩散系数, $\frac{dn}{dz}$ 为单位长度上分子数密度之差, S 为截面面积

13. 平均自由程

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

其中 $\bar{\lambda}$ 是气体分子平均自由程， σ 为碰撞截面面积， d 为分子直径

14. 平均碰撞频率

$$\bar{\omega} = n\sigma\bar{u} = \sqrt{2}n\sigma\bar{v}$$

其中 $\bar{\omega}$ 为平均碰撞频率， \bar{u} 为平均相对速度， \bar{v} 为平均速度

注意：第二个等号只在同种分子中成立！电子和分子的碰撞不能用这个公式！

$$15. \bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{\omega}}$$

16. 显像管内电子平均自由程

$$\bar{\lambda} = n\sigma\bar{u} \approx n \times \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times \bar{v}_e$$

其中 n 为气体分子数密度， d 为分子直径， \bar{v}_e 为电子平均速度。电子很小，故可认为 $\sigma = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ ；电子速度比分子的快多了，那么认为 $\bar{u} = \bar{v}_e$ 也没问题

17. 气体输运系数公式

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \cdot \bar{\lambda}$$

18. 范德瓦尔斯方程

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT, \text{ 其中 } p \text{ 为气体压强, } V_m \text{ 是一摩尔该气体的体积 (单位为 } m^3 \cdot$$

mol^{-1}), a 和 b 是和气体有关的常量, $p + \frac{a}{V_m^2}$ 代表气体在容器壁上产生的压强和气体内部的压强不一样, $V_m - b$ 代表气体分子有大小

范德瓦尔斯方程中, $b = 4N_A V_{\text{单个分子}} = \frac{2}{3}\pi d^3 N_A$, 其中 d 为分子直径

19. 熵变计算公式

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_B}{T_A} + \nu R \ln \frac{V_B}{V_A}$$

对于固体和液体, 熵变这么算

$$\Delta S = cm \ln \frac{T_2}{T_1}$$

c 为比热容

20. 知识点

$$\Gamma = \frac{1}{6}n\bar{v} \text{ 或 } \frac{1}{4}n\bar{v}$$

【注】：用 Γ 推导 $p = \frac{2}{3}n\bar{\epsilon}_t$ 时，请用 $\Gamma = \frac{1}{6}n\bar{v}$

$$\begin{cases} p = \frac{1}{3}nm\bar{v}^2 \\ p = \frac{2}{3}n\bar{\epsilon}_t \end{cases}, \text{ 其中 } m \text{ 是单个分子的质量, } \bar{\epsilon}_t \text{ 为分子平均平动动能 (不包含振动}$$

与转动)

$$\bar{\epsilon}_t = \frac{3}{2}kT$$

【例 1】一颗灰尘质量 $m = 10^{-11}\text{kg}$ ，掉到一杯冰水中，在表面做二维运动，求方均根速率

【解】：

法一：（暴力概率论）

$$\overline{v^2} = \iint_{R^2} f_X(v_x)f_Y(v_y)(v_x^2 + v_y^2)d\sigma = \frac{2kT}{m}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \dots$$

法二：（能均分定理）

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2}kT = kT = \frac{1}{2}m\overline{v^2} \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \dots$$

第十三章 机械振动

1. 旋转矢量法

对于简谐量 $X = A \cos(\omega t + \varphi)$ ，不妨将其视作一个向量在轴上的投影

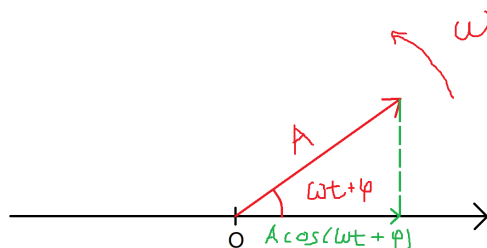


图1 旋转矢量

这个向量长度为 A ，起点位于原点，以 ω 为角速度绕原点逆时针旋转，且 $t = 0$ 时，它和轴夹角为 φ

矢量的长度就是简谐量的振幅，和轴的夹角就是简谐量的相位

旋转矢量法尤其适合处理振动叠加问题

给两个简谐量 $X_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ ， $X_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ ，且它们对应的旋转矢量分别为 \vec{X}_1 和 \vec{X}_2 ，那么有个结论：

叠加量 $(X_1 + X_2)$ 也是向量 $(\vec{X}_1 + \vec{X}_2)$ 在轴上的投影，就像“ X_1 是 \vec{X}_1 在轴上的投影”一样

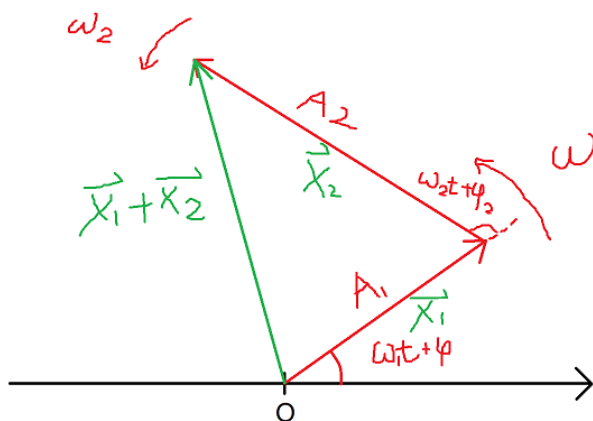


图2 旋转矢量叠加

若两个振动同频，即二者圆频率都是 ω ，那么 $\vec{X}_1 + \vec{X}_2$ 也会以角速度 ω 逆时针旋转。新振动的振幅就是新矢量的模长，新振动的相位就是新矢量和轴的夹角。利用正弦公式与余弦公式可得

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

2. 弹簧振子

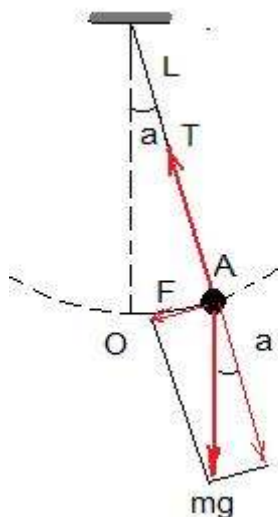
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. 拍频

$$\nu_{\#} = |\nu_1 - \nu_2|$$

ν_1 和 ν_2 为两个振动各自的频率

4. 求解系统振动频率的通法（以单摆为例）



Step1 利用牛顿定律列出运动方程

$$-mg \sin \theta = mL \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Step2 将方程简化为 $\frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$ 的形式

因为 $\theta \ll 1$ ，故 $\sin \theta \approx \theta$ ，方程简化为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

Step3 套用微分方程的结论

$$\theta = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

第十四章 机械波

1. 平面简谐机械波

波函数: $y(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$ (沿正向传播)

其他等价形式有

$$y(x, t) = A \cos \left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$y(x, t) = A \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$y(x, t) = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ut - x) + \varphi_0 \right]$$

应用: 求波函数

要写出平面简谐波的波函数, 至少要知道一点处的振动方程、传播方向、波长或波速, 以此写出某点处的振动方程, 变量替换即可得到波函数。

平面波的波动微分方程: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

2. 波的能量

机械能: $W = W_k + W_p = \mu \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$

在波传播过程中, 任一质元的动能和势能是同步变化且相等的。

能量密度: $w = \frac{W}{S \Delta x} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] = w(x, t)$

平均能量密度: $\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$

能流密度: $\vec{J} = w \vec{u}$

波的强度: $I = \bar{J} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$

3. 惠更斯原理

原理重点: 任意一点都可看作新的子波源, 所有子波源均向外发出子波, 子波形成的包络面就是传播到的新波面。

4. 波的干涉

相干条件：频率相同，振动方向相同，相位差恒定。

干涉后相位差取决于波程差，即 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ ，当 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ 时，干涉相长，当 $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ 时，干涉相消。若两列波初相位差为零，则全部由波程差决定相长相消。

【例】干涉消声器结构原理图。当发电机噪声经过排气管到达 A 时分成两路在 B 点相遇，声波相消。若频率 $\nu = 300\text{Hz}$ ，则弯管与直径的长度差至少应该为多少？

【解】：

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{(r_1 - r_2)}{\lambda}$$

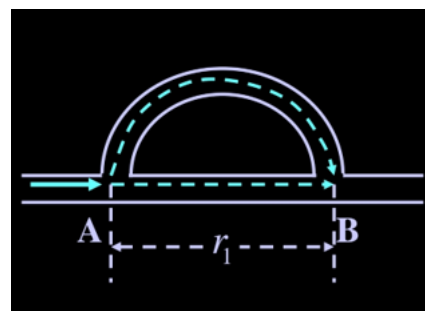
干涉相消时：

$$\Delta\phi = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Delta r = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

$$k = 0 \Rightarrow (\Delta r)_{\min} = \frac{\lambda}{2} = \frac{u}{2\nu} = 0.57\text{m}$$

实际应用时常常将不同频率的消声器串接在一起。



5. 驻波

驻波波函数:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \left[\cos 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{x}{\lambda} \right) \right] \\ &= \left(2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \nu t \end{aligned}$$

波节点: $x = k \frac{\lambda}{2}$, 波腹点: $x = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ 。

驻波中没有能量的定向传播, 也不传递相位。

半波损失: 当波由波疏介质向波密介质传递被反弹时, 在相位上有半个波长的附加程差。透射波没有半波损失。

【例】平面简谐波初始时刻的波形如图, 此波的波速为 u , 沿 x 方向传播, 振幅为 A 频率为 f 。

求: (1) 以 D 为原点, 写出波函数;

(2) 以 B 为原点, 且为波节。若以 B 为 x 轴的坐标原点, 写出入射波、反射波波函数;

(3) 以 B 为反射点, 求合成波, 并分析波节、波腹的坐标。

【解】:

(1)

$$y(x, t) = A \cos \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{u} \right) + \pi \right]$$

(2)

$$y(x, t)_{\lambda} = A \cos \left[2\pi f \left(t - \frac{x}{u} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$y(x, t)_{\text{反}} = A \cos \left[2\pi f \left(t + \frac{x}{u} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

(3)

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_{\lambda} + y_{\text{反}} = 2A \cos \left(2\pi f \frac{x}{u} + \frac{\pi}{2} \right) \cos(2\pi f t) \\ &= -2A \sin \left(2\pi f \frac{x}{u} \right) \cos(2\pi f t) \end{aligned}$$

波腹:

$$\sin \left(2\pi f \frac{x}{u} \right) = 1$$

$$2\pi f \frac{x}{u} = \frac{2k+1}{2}$$

$$x = \frac{2k+1}{4} \frac{u}{f} = \frac{2k+1}{4} \lambda \quad k = -1, -2, -3, \dots$$

波节:

$$\sin \left(2\pi f \frac{x}{u} \right) = 0$$

$$2\pi f \frac{x}{u} = k\pi$$

$$x = \frac{k u}{2 f} = \frac{k}{2} \lambda \quad k = 0, -1, -2, \dots$$

6. 多普勒效应

公式: $\nu = \frac{u + v_0 \cos \alpha}{u - v_s \cos \beta} \nu_0$, 其中 v_0 为观察者速度, v_s 为波源速度, 均为正负号

带入, 相向为正。

第十五章 波动光学

1. 干涉

相干条件：频率相同，相位差恒定，光矢量振动方向平行。

获得相干波：

1) 杨氏双缝干涉实验（分波面法）

$$\delta = \frac{xd}{D} = \pm 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, \text{ 光强极大, 明纹;}$$

$$\delta = \frac{xd}{D} = \pm (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \text{ 光强极小, 暗纹。}$$

$$\text{屏上相邻明纹中心或相邻暗纹中心的间距: } \Delta x = \frac{D\lambda}{d}$$

【例】双缝干涉的相关计算

双缝干涉实验中，用钠光灯作为单色光源，波长为 589.3nm，屏与双缝的距离 $D=600\text{mm}$ ，求：

① $d_1=1.0\text{mm}$ 和 $d_2=10\text{mm}$ ，两种情况相邻明条纹间距分别为多大？

② 若相邻条纹的最小分辨距离为 0.065mm ，能分清干涉条纹的双缝间距 d 最大是多少。

【解】

① 明纹间距分别为：

$$\Delta x_1 = \frac{D\lambda}{d_1} = 0.35\text{mm} \quad \Delta x_2 = \frac{D\lambda}{d_2} = 0.035\text{mm}$$

② 双缝间距 d 为：

$$d = \frac{D\lambda}{\Delta x} = 5.4\text{mm}$$

2) 薄膜干涉——等厚干涉（分振幅法）

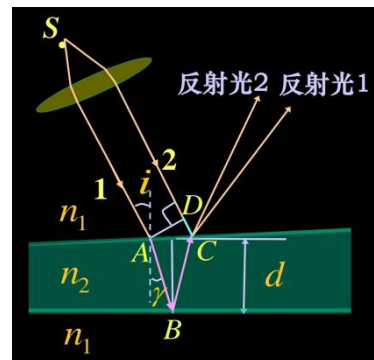
$$\delta = 2n_2d \cos \gamma + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, k=1,2,\dots \\ (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

分别为相长干涉和相消干涉。

当光线垂直射入时， $i=\gamma=0$ ，

$$\delta = 2n_2d + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, k=1,2,\dots \\ (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

相邻两条纹间兼具相等，对应的厚度差为 $\frac{\lambda}{2n_2}$ （空气 $\frac{\lambda}{2}$ ）。



具体应用:

①空气劈尖(反射图样)

$$\text{相邻条纹之间距: } a \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

②牛顿环(反射图样)

$$\begin{aligned} \text{明纹} \quad \delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = 2 \cdot \frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda}{2} &= \begin{cases} 2k \frac{\lambda}{2}, k=1,2,3\dots \\ (2k+1) \frac{\lambda}{2}, k=0,1,2\dots \end{cases} \\ \text{暗纹} \end{aligned}$$

$$\text{半径} \begin{cases} r = \sqrt{(2k-1) \frac{R\lambda}{2}}, k=1,2,3\dots \text{明纹} \\ r = \sqrt{k\lambda R}, k=0,1,2,3\dots \text{暗纹} \end{cases} \quad r_{k+m}^2 - r_k^2 = mR\lambda$$

【例】有关空气劈尖与牛顿环的计算

用空气劈尖测量一根细的金属丝的直径 D , 将其夹在空气劈尖一侧, 用单色光照射形成等厚干涉条纹, 用读数显微镜测出干涉明条纹的间距, 就可以算出 D 。已知, 单色光波长为 589.3nm , 测量结果是, 金属丝与劈尖顶点的距离 $L=28.880\text{mm}$, 第 1 条明纹到第 31 条明条纹的距离为 4.295mm 。求金属丝的直径 D 。

【解】

$$\sin \theta \approx \frac{D}{L} \quad a \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad D = L \frac{\lambda}{2a}$$

$$\text{由题知 } a = \frac{4.295}{30} = 0.14317\text{mm}$$

$$\text{直径 } D = L \frac{\lambda}{2a} = 0.05944\text{mm}$$

3) 薄膜干涉——等倾干涉(分振幅法)

等倾干涉用厚度均匀的薄膜

$$\delta = 2n_2d \cos \gamma + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k \cdot \frac{\lambda}{2}, & k=1,2,3\dots \text{相长干涉} \\ (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}, & k=0,1,2\dots \text{相消干涉} \end{cases}$$

条纹为一系列同心圆环, 内疏外密, 内圆纹级次高。

迈克尔逊干涉仪:

光束 1 和光束 2 发生干涉:

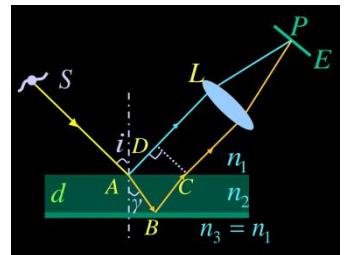
光程差: $\delta = 2d$ (无半波损失)

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{有半波损失})$$

干涉加强:

$$\delta = 2k \frac{\lambda}{2}, k=1,2,\dots$$

干涉减弱:



$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

2. 衍射

惠更斯-菲涅尔原理：同一波前上的各点发出的都是相干次波，各次波在空间某点相干叠加，就决定了该点波的强度。

对于惠更斯-菲涅尔原理的应用，常用半波带法和振幅矢量法分析。

光的衍射分类：

- 1) 菲涅尔衍射（近场衍射）
- 2) 夫琅和费衍射（远场衍射）

$$\text{衍射条纹暗纹条件: } a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3 \dots$$

$$\text{衍射条纹明纹条件: } a \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3 \dots$$

半波带法分析： $a \sin \varphi$ 包含偶数个半波带时，形成暗纹，包含奇数个半波带时，形成明纹。

单缝衍射明纹的角宽度和线宽度：

角宽度：相邻两暗纹中心对应的衍射角之差。

线宽度：观察屏上相邻两暗纹中心的间距。

$$\text{对于中央明纹来说, 角宽度: } \Delta \varphi_0 \approx \frac{2\lambda}{a}, \text{ 线宽度: } \Delta x_0 \approx \frac{2f\lambda}{a}.$$

【注】：缝位置变化，不影响条纹位置分布。

$$\text{单缝衍射强度公式: } I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

【例】一直，一雷达位于路边 $d = 15\text{m}$ 处，射束与公路成 15° 角，天线宽度 $a = 0.20\text{m}$ ，射束波长 $\lambda = 30\text{mm}$ 。

求：该雷达监视范围内公路的长度是多少？

【解】：

将雷达波束看成是单缝衍射的零级明纹：

$$\begin{aligned} a \cdot \sin(\varphi) &= \lambda \\ \sin \varphi_1 &= \frac{\lambda}{a} = \frac{30\text{mm}}{0.20\text{m}} = 0.15 \\ \varphi_1 &\approx 8.63^\circ \end{aligned}$$

如图：



$$\begin{aligned} \alpha &= 15^\circ + \varphi_1 = 23.63^\circ \\ \beta &= 15^\circ - \varphi_1 = 6.37^\circ \\ l &= d(\text{ctg} \beta - \text{ctg} \alpha) \approx 100\text{m} \end{aligned}$$

应用：光学仪器的分辨本领

$$\text{最小分辨角: } \delta \varphi = \varphi_0 \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}, \text{ 分辨本领: } R \equiv \frac{1}{\delta \varphi} = \frac{D}{1.22 \lambda}$$

【例】载人宇宙飞船在距地面 160km 的轨道上运行时，宇航员恰好能分辨地面上两点光源，设波长为 550nm 、瞳孔直径取 5mm 。

求：两点光源之间的距离。

【解】：

设两点光源之间的距离为 x 、飞船距离地面高度为 L
眼睛的最小分辨角为：

$$\delta_{\varphi} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

两点光源对人眼睛的张角：

$$\delta = \frac{x}{L}$$

恰能分辨的条件：

$$\delta_{\varphi} = \delta$$

$$x = 1.22 \frac{\lambda L}{D} = \frac{1.22 \times 550 \times 10^{-9} \times 160 \times 10^3}{5 \times 10^{-3}} = 21m$$

3) 光栅衍射：

光栅方程： $d \sin \varphi = \pm k \lambda, k = 1, 2, 3 \dots$

缺级条件： $k = \pm k' \frac{d}{a}$ (k' 取非零整数)

暗纹条件： $N d \sin \varphi = \pm m \lambda, m = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots$

主极大的半角宽度： $\Delta \varphi = \frac{\lambda}{N d \cos \varphi_k}$

当光斜射入时，光程差增添了 $d \sin \theta$ 。

3. 偏振

辨析概念：线偏振光，部分偏振光，圆（椭圆）偏振光。

马吕斯定律： $I' = I \cos^2 \alpha$ ， α 为透过偏振片前后光偏振的角度差。

布儒斯特定律：反射角与折射角之和为 90° 时，反射光为线偏振光，偏振方向垂

直于传播平面，此时的反射角 i_b 被称为布儒斯特角或起偏角，且 $\tan i_b = \frac{n_2}{n_1}$ 。

【例】设在两相互正交的偏振片中夹一个以 ω 旋转的偏振片。

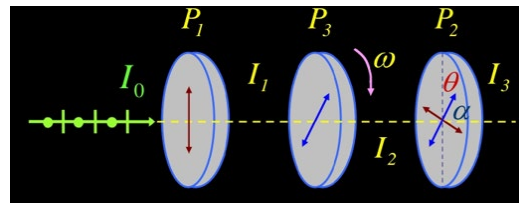
求：以自然光入射时系统透射光的强度变化规律？

【解】：

如果没有 P_3 则 $I_3 = 0$,

对任意时刻 t ：

$$\begin{aligned} I_3 &= I_2 \cos^2 \alpha \\ &= I_1 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha \\ &= \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= \frac{I_0}{16} (1 - \cos(4\omega t)) \end{aligned}$$



晶体的双折射现象：

o 光主折射率： $n_o = \frac{c}{v_o}$ ， e 光主折射率： $n_e = \frac{c}{v_e}$ 。

第十六章 量子物理

1. 斯特藩-玻尔兹曼定律

$$M = \sigma T^4$$

M 为黑体单位面积单位时间内辐射的总能量, σ 为斯特藩常数, T 为黑体温度

2. 维恩位移定律

$$T\lambda_m = b$$

λ_m 为峰对应的那个波长, b 是维恩常数

3. 光电效应方程

$$h\nu = W + \frac{1}{2}mv_m^2$$

ν 是光子频率, W 是逸出功, m 为电子质量, v_m 为光电子最高出射速率
 $W = h\nu_0$, 其中 ν_0 为截止频率, 频率低于此的光不能激发光电效应

4. 光子性质

$$E = mc^2 = h\nu$$
$$p = mc$$

5. 康普顿散射

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

λ_c 为电子的康普顿波长, θ 为散射角

6. 轨道量子化

$$L = mvr = n\hbar, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

7. 氢原子光谱

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

8. 氢原子电子能量

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$$

n 为电子所处轨道层数

9. 德布罗意波

$$E = mc^2 = h\nu$$

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

10. 不确定性关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{h}{4\pi}$$

11. 薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi$$

12. 定态薛定谔方程

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{r})\Psi$$

13. 四个量子数

主量子数 $n \in \mathbb{N}^+$ ，对应能量量子化

角量子数 $l \in [1, n-1] \cap \mathbb{N}^+$ ，对应角动量量子化

磁量子数 $m_l \in [-l, l] \cap \mathbb{Z}$ ，对应角动量空间量子化

自旋量子数 $m_s \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ ，对应电子自旋方向

14. 固体理论

绝缘体不导电；导体通过电子公有化形成能带结构导电；半导体分为 n 型（电子导电）和 p 型（空穴导电）

15. 激光产生基本原理

受激辐射，激光器构成部分：激励能源、增益介质、谐振腔。特点：高定向性、高单色性、高相干性、高亮度



文治学辅与发展中心



钱学森书院学业辅导中心



仲英学业辅导中心及薪火工作室

1st Adition
ALL RIGHTS RESERVED

Contributors

仲英书院学业辅导中心
钱学森书院学业辅导中心
文治学辅与发展中心

关于本材料内容的任何建议及错误指正，欢迎向交小权QQ反映，我们将在下一版对相关内容进行订正、修改。听说有效反馈还会收到精美小权礼物一份哟~

联系我们：



西安交通大学学生会微信公众号

更多资料：



小权资料共享

问题反馈：



扫一扫二维码，加我QQ好友。



交小权

QQ: 3171478351



本材料版权由西安交通大学学生会及参与编写各交大书院学辅共同所有。版权所有，侵权必究。