文科数学

小助手

作者：仲英学辅

2020 年 9 月 1 日

仲英书院学业辅导中心

Zhong Ying Xue Fu

XI’AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- **标题**：文科数学 - 小助手
- **作者**：仲英学辅
- **校对排版**：电气 86 刘菁锐、能动 B81 梁佳佳
- **出品时间**：2020 年 9 月 1 日
- **总页数**：69

前言

编写人员：法复 91 饶宇锋、法复 91 冯秋香、社会 91 陈芷鑫、社会 91 钟宇欣

排版人员：法复 91 饶宇锋、社会 91 钟宇欣、电气 86 刘菁锐、能动 B81 梁佳佳

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作，使本资料可以按时完工。由于编者们的能力与精力限制，难免有错误之处。如果同学们在本资料中发现错误，请联系仲英学业辅导中心：XJTUzyxuefu@163.com，我们将在修订时予以更正。

从第 3 周开始，每晚 19:30-21:30，学辅志愿者在东 21 舍 118 学辅办公室值班，当面为学弟学妹们答疑。

同时，我们也有线上答疑平台——学粉群。

19 级学粉群：902493560，756433480;

20 级学粉群：598243135, 1137961185.

期中考试与期末考试前，我们还会举办考前讲座。学辅还有新生专业交流会，转专业交流会，英语考试讲座等活动，消息会在学粉群和公众号上公布，欢迎同学们参与。

仲英书院学业辅导中心

2020 年 9 月 1 日

学粉群 6.0
QQ 群号：598243135

学粉群 6.1
QQ 群号：1137961185

微信公众号
仲英学业辅导中心及薪火工作室

目录

1 集合与函数

1. 集合：具有某种特定性质的事物的总体。
2. 元素：组成这个集合的事物。
3. 区间：是指介于某两个实数之间的全体实数。这两个实数叫做区间的端点。

邻域：设 a 与 δ 是两个实数，且 δ >0.数集$\{x||x-a|<\delta\}$称为点 a 的 δ 邻域，点 a 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径。$U_\delta(a)=\{x|\ a-\delta<x<a+\delta\}$. 。点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\overset{0}{U}_\delta(a)=\{x|\ 0<|x-a|<\delta\}$.

1.1 函数的相关概念

1. 映射：设集合 A 和 B 非空, 若对于每个 x 属于 A , 按照某种确定的对应法则 f, 有唯一确定的 y 属于 B 与它对应, 则称 f 为从 A 到 B 的一个映射。记为：f：A→B. 映射的两要素：定义域与对应法则
2. 函数：设数集 A 与 B 非空，则称映射 f：A→B 为一元函数，简称函数。记为：y=f(x)。函数的两要素：定义域与对应法则

注意区分：

1. 基本初等函数：常值函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。(都是用具体的数学表达式表示的函数)
2. 初等函数：基本初等函数经过有限次的有理运算与复合运算所得的函数称为初等函数。
3. 分段函数：在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子来表示的函数。几个特殊的函数举例：符号函数，取整函数，德狄利克雷函数、取最值函数

4. 复合函数：由函数套函数而得到的函数。设函数 y=f(u),u 属于 U,u=x, 且由 x 确定的函数值 u=t(x) 落在 y=f(u) 的定义域 U 内，则 y=f[t(x)] 称为复合函数，u 称为中间变量，u=t(x) 称为里层函数，y=f(u) 称为外层函数

   注意：1. 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数;2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成。

5. 反函数：一般地，设 y=f(x)（x 属于 A）的值域是 B，根据这个函数中 x，y 的关系，用 y 把 x 表示出，得到 x=g(y)，若对于 y 在 B 中的任何一个值，通过 x=g(y),x 在 A 中都有唯一确定的值和它对应，那么 x=g(y) 就表示 y 是自变量，x 是因变量的函数，这个函数 x=g(y)（y 属于 B）叫做函数 y=f(x)（x 属于 A）的反函数，记作 x=f^-1(y)，y 属于 B

注意：

1. 反函数存在条件：函数 y=f(x) 在定义域内是单调函数。
2. 反函数的性质：

   （1）反函数的定义域是原函数的值域，反函数的值域是原函数的定义域。

   （2）反函数与原函数关于直线 y=x 对称

   （3）反函数与原函数的单调性一致
3. 求反函数的步骤：

   (1) 解方程，即将 y 视为常数，将 x 视为未知数，用解方程的方法解出 x=f^-1(y).

   (2) 交换，将 x,y 的位置交换，得：y=f^-1(x)

   (3) 注明定义域，结合原函数的值域来确定反函数的定义域。

1.2 基本初等函数

常数函数 y=C(C 为常数)

幂函数 y=x^{α}(α为实数)

指数函数 y=a^{x}(a>0, 且 a≠1)

对数函数 y=$\log_a x$(a>0, 且 a≠1)

三角函数：

正弦函数 y=$\sin x$，x∈(−∞，+∞)，y∈[−1, 1]

余弦函数 y=$\cos x$，x∈(−∞，+∞)，y∈[−1, 1]

正切函数 y=$\tan x$，x∈$(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2})$(k∈z)，y∈(−∞，+∞)

余切函数 y=$\cot x$，x∈$(k\pi,\ (k+1)\pi)$(k∈z)，y∈(−∞，+∞)

正割函数 y=$\sec x=\frac{1}{\cos x}$

余割函数 y=$\csc x=\frac{1}{\sin x}$

反三角函数：反正弦函数 y=$\sin^{-1} x$，x∈[−1, 1]，y∈$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

反余弦函数 y=$\cos^{-1} x$，x∈[−1, 1]，y∈$[0, \pi]$

反正切函数 y=$\tan^{-1} x$，x∈(−∞，+∞)，y∈$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

反余切函数 y=$\cot^{-1} x$，x∈(−∞，+∞)，y∈$(0, \pi)$

1.3 基本题型

1.3.1 判断复合函数并求定义域

例 1：y=arcsin(x+1)/2

解：设 y=arcsinu,u=(x+1)/2, 定义域：[-3,1]

1.3.2 复合函数的简单运算

例 2：已知 f (x+$\frac{1}{x}$)=$x^2+\frac{1}{x^2}$，求 f (x), f (x-$\frac{1}{x}$)

解：f (x+$\frac{1}{x}$)= $(x+\frac{1}{x})^2-2$

令 t=x+$\frac{1}{x}$,

$\therefore f(t)=t^2-2$

$\therefore f(x)=x^2-2$

$\therefore f\left(x-\frac{1}{x}\right)=(x-\frac{1}{x})^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}-4$

2 极限

2.1 数列极限

2.1.1 数列极限的概念

数列的定义：

即以正整数为自变量的函数 y=f (n), 当 n 依次取 1, 2, 3，所得到的一列函数值：$a_1=f(1)$，$a_2=f(2)$，$a_3=f(3)$，…，$a_n=f(n)$, …

称为无穷数列，简称数列。数列中各个数称为数列的项。$a_n=f(n)$称为数列的通项。数列常简记为$\{a_n\}$

数列极限的定义：

定义一：如果 n 无限增大时，数列$\{a_n\}$的通项a_n无限趋近于常数 a，则称该数列以 a 为极限，记作：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$=a 或$a_n$ →a (n→ ∞)。也称该数列收敛到 a 如果 n→ ∞时，a_n不以任何常数为极限，则称该数列发散

定义二：如果对于任意正数ε（无论它有多小），总存在相应的正整数 N, 使满足 n>N 的一切 n, 能使不等式$|a_n-a|<\varepsilon$恒成立, 则称数列$\{a_n\}$以 a 为极限。记作：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$=a 或$a_n$ →a (n→ ∞)

2.1.2 收敛数列的性质与极限运算法则

* 每个收敛的数列只有一个极限

* 有理运算法则：

$\boxed{\text{设} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \text{则}}$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$$

（可推广到有限个数列的情形）

推论：

$(1)\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = ka, k$为常数. $(2)\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^m = a^m, m \in Z^+$

2.1.3 数列收敛的判别准则

极限唯一

2.2 函数极限

2.2.1 函数极限的概念

定义：设函数 y = $f(x)$在点x_0的去心邻域有定义（即在点x_0处可以无定义）。如如果对于任意正数ε（无论它有多小），总存在相应的正数δ, 使满足 0< $|x-x_0|<\delta$的一切 x，能使不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称函数 $f(x)$当 x→ x_0时以 A 为极限，或称函数 $f(x)$在点x_0有极限，记作：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=A 或 $f(x)\to$A (x→ x_0)

注意：1、函数极限与 $f(x)$在x_0是否有定义无关

2、δ 与任意给定的正数 ε 有关

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=A且\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$$

2.2.2 单侧极限

左极限： $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$内有定义，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$
当$x_0-\delta<x<x_0$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon.$

记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)=A.$

右极限： $f(x)$在$(x_0,x_0+\delta)$内有定义，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$
当$x_0<x<x_0+\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon.$

记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)=A.$

2.2.3 函数极限的性质与运算法则

性质：1、唯一性：f(x)的极限唯一

2、局部有界性：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \exists \overset{0}{U}(x_0),当x\in \overset{0}{U}(x_0)时,|f(x)|\le M.$$

3、局部保号性：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, A>0,则\exists \delta>0,当x\in \overset{0}{U}(x_0,\delta)时, f(x)>0.$$

4、局部保序性：

设$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 且$A<B$, 则$\exists \delta>0, \forall x\in U^0(x_0,\delta)$,
有$f(x)<g(x)$.

有理运算：

$$\boxed{设\lim f(x)=a, \lim g(x)=b,则}$$

$$\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm \lim g(x)=a\pm b$$

$$\lim(f(x)g(x))=\lim f(x)\lim g(x)=ab$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{a}{b},(b\ne 0)$$

$(1)\lim(kf(x))=ka, k$为常数；

$$(2)\lim(f(x))^m=a^m, m\in Z^+$$

$$(3)\lim(k_1f(x)+k_2g(x))=k_1\lim f(x)+k_2\lim g(x)=k_1a+k_2b$$

2.2.4 两个重要极限

(1) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ 推论： $\boxed{若x\to x_0时，u(x)\to 0,则\lim_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1.}$

若$x\to x_0$时，$u(x)\to\infty$,则 若$x\to x_0$时，$u(x)\to 0$,则

(2) $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$ 推论： $\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e.$ $\lim_{x\to x_0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e.$

2.3 无穷小量与无穷大量

2.3.1 无穷小量与无穷大量的定义

无穷小量：以 0 为极限的变量。

若函数 f(x) 在某个极限过程中以 0 为极限，则称 f(x) 为该过程中的无穷小量，简称无穷小。

无穷大量：绝对值无限增大的变量。

2.3.2 无穷小与函数极限的关系

1. 函数 f(x) 在某个极限过程中以常数 A 为极限的充分必要条件是函数 f(x) 能表示为常量 A 与无穷小量 α 之和的形式。
2. 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量
3. 有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量（推论 1：无穷小量与无穷小量的乘积仍是无穷小量；推论 2：常量与无穷小量的乘积是无穷小量）
4. 无穷小量（0 除外）的倒数是无穷大量

2.3.3 无穷小量阶的定义

设 $\alpha(x),\beta(x)$ 都是无穷小，且 $\beta(x)\neq 0$.

（1）若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小.

记作 $\boxed{\alpha(x)=o(\beta(x))}$

（2）若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(\neq 0)$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

（3）若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小.

(此时可作近似代替） 记作 $\boxed{\alpha(x)\sim\beta(x)}$

（4）若 $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c(\neq 0)$, 则称 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 的 k阶无穷小.

2.3.4 常用等价无穷小（x 趋近于 0 时）

$$\sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x,$$
$$\tan x \sim x, \quad \arctan x \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x,$$
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

注意：等价无穷小只用于乘除运算，不用于加减运算。

2.4 基本题型

2.4.1 求数列的极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})=\frac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

2.4.2 求函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x-1})^x$

解：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x-2})=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3})=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x-1})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x-1})^{x-1}\cdot(1+\frac{1}{x-1})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x-1})^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x-1})=e$

注意：求极限的方法：

1、$\infty-\infty$型　先通分，再求极限

2、$\frac{0}{0}$型　消去零因子法。先约去不为零的无穷小因子，再求极限；

先分子有理化，再求极限。

3、$\frac{\infty}{\infty}$型　无穷小分出法。先分出无穷小，再求极限。

2.4.3 用定义证明极限

例 5：用$\varepsilon-\delta$定义证明：$\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$

证明：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\min(\frac{\varepsilon}{3},1)$

当 $0<|x-1|<\delta$时，$|x^2-1|=|x+1||x-1|<3|x-1|<3\delta<\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$

2.4.4 无穷小量的应用

例 6：已知当 x→ 0 时，$\ln(1+ax)$与x^2+2x 为等价无穷小，求 a.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{x+2}=1$

∴a=2

注意：1、无穷小量一般用于求极限的乘除运算不用于加减运算

2、一般喜欢考察等价无穷小量的运用。

3 极限的应用——连续函数

3.1 函数的连续性概念与间断点的分类

3.1.1 连续性的定义

设函数$y=f(x)$在x_0的邻域内有定义

(1)如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$在$x_0$处连续

(2)如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数$f(x)$在$x_0$处连续

(3)《$\varepsilon-\delta$》 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称函数$f(x)$在$x_0$处连续

说明：1、函数 f(x) 在x_0处连续必须满足的三个条件：

（1）函数 f(x) 在x_0处有定义（2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在（3）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(x_0)$

2、初等函数求极限的方法：代入法

3.1.2 单侧连续

若函数 f(x) 在 (a, X] 内有定义，且 f(x-0)= f(x)，则称 f(x) 在点处左连续；

若函数 f(x) 在 [X,b) 内有定义，且 f(X+0)= f(x)，则称 f(x) 在点 X 处右连续；

定理：函数 f(x) 在 X 处连续等价于函数 f(x) 在 X 处既左连续又右连续。

函数在区间 (a,b) 内每一点连续，称函数在 (a,b) 内连续。

函数在区间 (a,b) 内每一点连续，且在左端点 x=a 处右连续，在右端点 x=b 处左连续，则称函数 f(x) 在闭区间 [a,b] 上连续。

3.1.3 函数的间断点

定义：函数 f(x)在x_0处连续必须满足的三个条件：

（1）函数 f(x)在x_0处有定义（2）$\lim\limits_{x\to\infty}$ f(x)存在（3）$\lim\limits_{x\to\infty}$ f(x)=f(x_0)

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 f(x)在x_0处不连续（或间断），并称x_0为 f(x)的不连续点（或间断点）。

分类：

第一类间断点：（左、右极限都存在）

（1） 可去间断点：f(x_0-0)= f(x_0+0)

f(x_0)存在，但 f(x_0) ≠f(x_0-0)= f(x_0+0)； f(x_0)不存在

（2） 跳跃间断点：f(x_0-0) ≠ f(x_0+0)

第二类间断点：（左、右极限至少有一个不存在）

（1）无穷间断点：有一个极限不存在

（2）振荡间断点：在x_0处没有定义且极限不存在

3.2 连续函数的运算性质与初等函数的连续性

（1）四则运算的连续性：

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，

则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点 x_0 处也连续.

（2）反函数与复合函数的连续性：严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成，
若 $g(x)$ 在 x_0 点连续，$u_0=g(x_0)$，函数 $f(u)$ 在 u_0 点连续，
则 $y=f[g(x)]$ 在 x_0 点连续，即：

（3） $$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f[g(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0} g(x)].$$

注意：极限符号可以与函数符号互换。

（4）基本初等函数在定义域内是连续的

（5）一切初等函数在其定义区间内都是连续的。（定义区间是指包含在定义域内的区间）

3.3 闭区间上连续函数的性质

设函数 f(x) 在 [a,b] 上连续，则

1. 有界性定理：f(x) 在 [a,b] 上必有界
2. 最值定理：f(x) 在 [a,b] 必有最大值 M 和最小值 m
3. 零值定理：设 f(x) 在 [a,b] 上连续，且 f(a)·f(b)<0, 则至少存在一点 t(a,b), 使 f(t)=0
4. 介值定理：设 f(x) 在 [a,b] 上连续，f(a) f(b),C 为 f(a) 与 f(b) 之间的任何值，即 f(a) C f(b)，则至少存在一点 t 属于 (a,b)，使 f(t)=C

   推论：设 f(x) 在 [a,b] 上连续，则 f(x) 可取到介于最小值 m 与最大值 M 之间的任何值。

3.4 基本题型

3.4.1 求函数的间断点及其类型

例 7：讨论下列函数在 x=0 处的连续性。

(1) f(x)=$\begin{cases} 2\sqrt{(-x)}, x<0 \\ 1, x=0 \\ x, x>0 \end{cases}$ (2) f(x)=$\begin{cases} -x, x\le 0 \\ 1+x, x>0 \end{cases}$

(3) f(x)=$\begin{cases} \frac{1}{x}, x>0 \\ x, x\le 0 \end{cases}$ (4) f(x)=$\sin\frac{1}{x}$

解：(1) f(0)=1，f(0−0)=0, f(0+0)=0

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0\ne f(0)$

∴f(x) 在 x=0 处不连续，x=0 为函数的第一类间断点（可去间断点）

(2) f(0−0)=0, f(0+0)=1，f(0−0)≠f(0+0)

∴f(x) 在 x=0 处不连续，x=0 为函数的第一类间断点（跳跃间断点）

(3) f(0−0)=0, f(0+0)=+∞

∴f(x) 在 x=0 处不连续，x=0 为函数的第二类间断点（无穷间断点）

(4) f(x) 在 x=0 处没有定义，且$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在

∴f(x) 在 x=0 处不连续，x=0 为函数的第二类间断点（振荡间断点）

3.4.2 函数连续性的应用

例 8：设 f(x)=$\begin{cases} a+x^2, x<0 \\ 1, x=0 \\ \ln(b+x+x^2), x>0 \end{cases}$，已知 f(x) 在 x=0 处连续，试确定 a 和 b 的值。

解：$\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)$=a

$\lim_{x\to 0^+}\ln(b+x+x^2)=\ln b$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$=f(0)=1 $\therefore a=1, b=e$

3.4.3 四个定理的应用

例 9：证明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一根

证明：令 f(x)= x^3-4x^2+1, 则 f(x)在$[0,1]$上连续，

又 f(0)=1>0, f(1)=-2<0, 由零点定理，

$\exists\xi\in(0,1)$，使 f(ξ)=0, 即$\xi^3-4\xi^2+1=0$

∴方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一根 ξ

4 导数

4.1 导数的相关概念

4.1.1 抽象导数概念的两个现实原型

1. 求变速曲线运动的速度
2. 求曲线切线的斜率

4.1.2 导数的概念

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应的函数有增量 Δy 等于 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果 Δy 与 Δx 之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，则称这个极限值为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记作 $y'|_{x=x_0}$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 也可记作 $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $\frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0}$。

4.1.3 左导数和右导数

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

注：

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是函数在点 x_0 处的左、右导数存在且相等。

2. 可导则连续，连续不一定可导。（例如 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导）

3. 函数连续必须同时满足三个条件：（1）函数在 x_0 处有定义；（2）$x \to x_0$ 时，$\lim f(x)$ 存在；（3）$x \to x_0$ 时，$\lim f(x) = f(x_0)$。

4.1.4 高阶导数

二阶导数：$f(x)$ 的二阶导数就是 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的导数，记作 y”，即 y” $= [f'(x)]$’, 也可记作 f”(x) 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，其中 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$。而 $f'(x)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的一阶导数。二阶导数的力学意义是运动物体的加速度。

推广：设函数 $y = f(x)$ 存在 $n-1$ 阶导数，并且 $n-1$ 阶导数可导，那么 $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$ 的导数叫做函数 $y = f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$。二阶和二阶以上的导数叫做高阶导数。

4.1.5 基本题型

[例 1]

设函数f(x)在x=a处可导，且

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{f(a-2h)-f(a)}=\frac{1}{4}$，则f'(a)=_____.

解：设 $\Delta x = -2h$，则当 $h \to 0$ 时，$\Delta x \to 0$，

根据导数定义：

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}\\
&= -\frac{1}{2}\times 4 = -2.
\end{aligned}
$$

注: 公式求导求不出时 (例如抽象函数), 可以利用导数的定义进行求导。

[例 2]

讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数,所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$. 因为

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

但在 $x=0$ 处有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

由于 $x\to 0$ 时,$\sin\dfrac{1}{x}$ 在 -1 和 1 之间振荡,故该极限不存在. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

注：可导与连续例题主要有证明题和已知可导且连续求解未知数。

[例 3]

例 已知指数函数 $y=e^{ax}$ **(**a **为常数) ,求**$y^{(n)}$

解 $y'=ae^{ax}$, $y''=a^2e^{ax}$, $y'''=a^3e^{ax}$,⋯, $y^{(n)}=a^ne^{ax}$

例 设 $y=\arctan x$, 求 $f''(0)$, $f'''(0)$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad y''=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$y'''=\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)'=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$\therefore f''(0)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}\Big|_{x=0}=0;$ $\quad f'''(0)=\dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\Big|_{x=0}=-2.$

4.2 求导数的方法

4.2.1 求导法则

基本初等函数求导公式

(1) $(C)'=0$ (2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $(\sin x)'=\cos x$ (4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$ (6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$ (8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$ (10) $(e^x)'=e^x$

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ (12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ (16) $(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ (2) $(Cu)'=Cu'$（C 是常数）

(3) $(uv)'=u'v+uv'$ (4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

反函数求导:$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}$
复合函数求导:$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

4.2.2 隐函数的导数

前面的函数都表示为 $y=f(x)$ 的形式，其特点是：等号左端是 y，右端是 x 的表达式。这种函数称为显函数。如果 x 与 y 之间的函数关系用 $F(x,y)=0$ 表示，即当 x 取某区间内的任一个值时，相应地总有唯一地满

足这个方程的 y 值存在，函数称为隐函数。$F(x,y)=0\to y=f(x)$ 称隐函数的显化。

隐函数求导法则：用复合函数求导法则直接方程两边同时对 x 求导。注意: 求导时要把方程中的 y 看作 x 的函数，按复合函数求导法则，见到 y 就要对 x 求导。

4.2.3 基本题型

[例 4]

1. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=$

$\because$ 函数 $f(x)=sin2x+\dfrac{lnx}{x}$，

$\therefore f'(x)=(sin2x)'+\left(\dfrac{lnx}{x}\right)'$

$=cos2x\cdot(2x)'+\dfrac{(lnx)'\cdot x-lnx\cdot x'}{x^2}$

$=cos2x\cdot 2+\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-lnx\cdot 1}{x^2}$

$=2cos2x+\dfrac{1-lnx}{x^2}$

2. 设 $y=x^{\sin x}$, 求 y'。

解 将 $y=x^{\sin x}$ 两边取自然对数，得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

于是

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

幂指函数也可以按如下方法求导：

$$y=x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}$$

于是 $y'=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'$

$$=e^{\sin x\ln x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

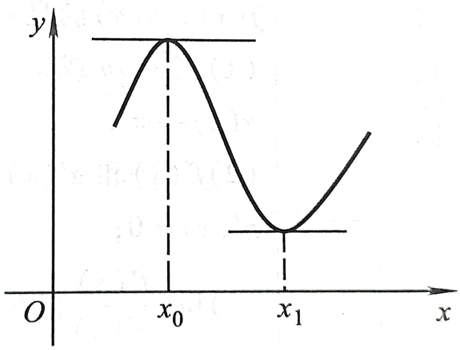
5 导数的应用

5.1 中值定理

5.1.1 费马定理

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 并且 $f(x)$ 在该点可导. 那么 $f'(x_0) = 0$。使导数 $f'(x_0) = 0$ 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点或稳定点。

几何意义:

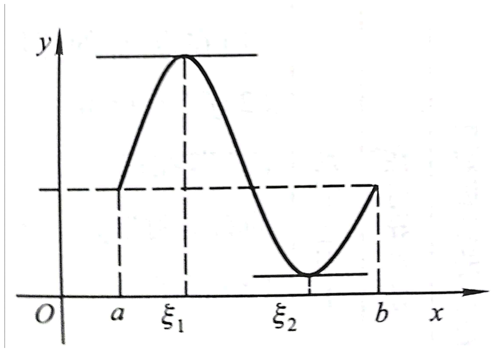


注意：导数 $f'(x_0) = 0$ 是可导函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 取得极值的必要条件，即可导函数的极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点（举例：$y = x^3$）。

5.1.2 罗尔定理

如果 R 上的函数 $f(x)$ 满足以下条件:(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,(2) 在开区间 (a,b) 内可导,(3)$f(a) = f(b)$，则至少存在一个 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$。

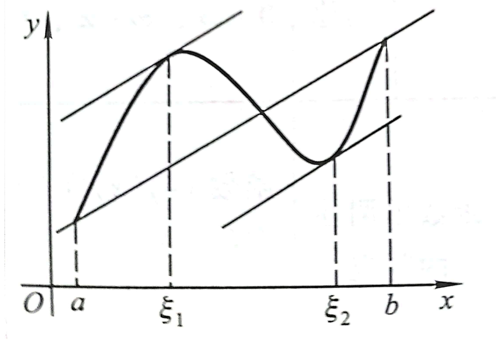
几何意义：



5.1.3 拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且在开区间 (a,b) 内可导，那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$ 使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立。

几何意义:



推论：如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的导数恒为 0，那么 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的常数函数，即导数为 0 的函数是常数函数。

5.1.4 柯西中值定理

设函数 $f(x),g(x)$ 满足在闭区间 $[a,b]$ 上连续且在开区间 (a,b) 内可导，对任意 $x\in(a,b),g'(x)\ 0$，那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 成立。

5.2 洛必达法则

定义：洛必达法则是在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式值的方法。众所周知，两个无穷小之比或两个无穷大之比的极限可能存在，也可能不存在。因此，求这类极限时往往需要适当的变形，转化成可利用极限运算法则或重要极限的形式进行计算。洛必达法则便是应用于这类极限计算的通用方法。

类型：

1. 零比零型

   若函数 f（x) 和 g(x) 满足下列条件：

   (a)$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$；

   (b) 在点 a 的某去心邻域内两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$；

   (c)$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty$ ），则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

2. 无穷比无穷型

   若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

   (a)$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$；

   (b) 在点 a 的某去心邻域内两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$；

   (c) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 可为实数，也可为 $\pm\infty$），则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

3. 其他不定式: 不定式极限还有 $0\cdot\infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0, \infty-\infty$ 等类型。经过简单变换，它们一般均可化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限。

   （a）$0\cdot\infty$ 型

   可将乘积中的无穷小或无穷大变形到分母上，化为零比零型或无穷比无穷型。

   例：求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

   解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

   （b）$\infty-\infty$ 型

把两个无穷大变形为两个无穷小的倒数，再通分使其化为零比零型。

例：求 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$

解:$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}(\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}})=\lim\limits_{x\to 1}(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})=\lim\limits_{x\to 1}(-\frac{1}{x+1})=-\frac{1}{2}$

（c）1^∞ 型

可利用对数性质 $e^{\ln a}=a$ 将函数化简成以 e 为底数的指数函数，对指数进行求极限。变化方法如下:$1^\infty=e^{\ln 1^\infty}=e^{\infty\cdot\ln 1}=e^{0\cdot\infty}$ 同时针对不同的问题，$\ln(1+x)\sim x$ 当 $x\to 1^+$ 时,$x-1\to 0$，还可以利用等价无穷小 $\ln(1+x)\sim x$ 作替换，化简算式。

例：求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2+1})^x$

解：原式=$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x}=e^{\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x^2+1}}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}}{\frac{-1}{x^2}}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^3}{x^4+2x^2+1}}$ =e^0=1 ，上式求解过程中，利用了等价无穷小的替换，即把 $\ln\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)$ 替换成了 $\frac{-2}{x^2+1}$。

（d）0^0 型

同上面的化简方法 $0^0=e^{\ln 0^0}=e^{0\cdot\ln 0}=e^{0\cdot\infty}$

例：求 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{1+\ln x}}$

解:原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln x\frac{1}{1+\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln x\frac{1}{1+\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^1=e$

（e）∞^0 型

同上面的化简方法 $\infty^0=e^{\ln\infty^0}=e^{0\cdot\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$

例：求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}}=e^0=1$

注意：

1. 该定理所有条件中，对 $x\to\infty$ 的情况，结论依然成立。
2. 该洛必达法则还可以处理 $\frac{0}{\infty}$ 型的极限。

3. 在着手求极限以前，首先要检查是否满足 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型构型，否则滥用洛必达法则会出错（其实 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式分子并不需要为无穷大，只需分母为无穷大即可）。当不存在时（不包括 ∞ 情形），就不能用洛必达法则，这时称洛必达法则不适用，应从另外途径求极限。比如利用泰勒公式求解。

4. 若条件符合，洛必达法则可连续多次使用，直到求出极限为止。但洛必达法则是求未定式极限的有效工具，但是如果仅用洛必达法则，往往计算会十分繁琐，因此一定要与其他方法相结合，比如及时将非零极限的乘积因子分离出来以简化计算、乘积因子用等价量替换等等。

5. 洛必达法则不是万能的 (例: 当求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, 洛必达法则失效，正确解法是先将分子分母乘以 e^{-x})

5.3 用导数研究函数的性质——单调性、极值和最大最小值

5.3.1 函数的单调性

定理：设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则该函数在区间 (a,b) 内单调增加 (单调减少) 的充要条件是：$f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0), x\in(a,b)$, 而 $f'(x)=0$ 只在个别点成立。

推论 (充分性): 若函数 $f(x)$ 在某区间 (a,b) 内的导数为正 (或为负)，即 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$), 则函数 $f(x)$ 在该区间内单调增加 (或单调减少)。

导数符号的几何意义: 对于某区间上的函数 $y=f(x)$, 导数为正, 曲线上升；导数为 0，曲线不升不降；导数为负，曲线下降。

5.3.2 函数的极值

判别法则 1：第一充分条件，设函数满足：在点 x_0 的邻域内可导且 $f'(x_0)=0$, 那么：

1. 若 x_0 在左侧附近 $f'(x)>0$，在右侧附近 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 为极大值；

2. 若 x_0 在左侧附近 $f'(x)<0$，在右侧附近 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 为极小值；

3. 若 x_0 在左右两侧 $f'(x)$ 同号，则 $f(x_0)$ 不是极值。

判别法则 2：第二充分条件，设函数 $f(x)$ 满足：在点 x_0 存在二阶导数且点 x_0 是驻点，即 $f'(x_0)=0$，那么：

1. 若 $f"(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值；
2. 若 $f"(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值；
3. 若 $f"(x_0)=0$，则 $f(x_0)$ 不能判别是否为极值，改用判别法则 1。

5.3.3 函数的最大值和最小值

若函数 $f(x)$ 在其定义域 $[a,b]$ 上的函数值满足 $m \le f(x) \le M$, 其中 $f(x_1)=m, f(x_2)=M, x_1, x_2 \in [a,b]$，则 m 和 M 分别称为函数的最小值和最大值。x_1 称为函数 $f(x)$ 的最小值点,x_2 称为最大值点。

5.3.4 函数的图像——曲线的绘制

曲线的弯曲方向——凹凸性:

1. 二阶导数为正，曲线开口向上，是凹弧；
2. 二阶导数为负，曲线开口向下，是凸弧；
3. 二阶导数为零，且两侧异号，是拐点。

   利用导数绘制函数的图像
4. 曲线的渐近线: （a）水平渐近线（b）铅垂渐近线（c）斜渐近线
5. （2）利用导数绘制函数的图像步骤: （a）确定函数的定义域；（b）考查函数的对称性、周期性（c）求函数的间断点、驻点、不可导点，并由小到大插入定义域内，分出若干个子区间；（d）列表讨论函数在各个子区间内的增减性、凹凸性，判断极值点和拐点；（e）确定曲线的渐近线；（f）求曲线上的一些辅助点，比如与坐标轴的交点等；（g）根据以上讨论，从左到右，把曲线上的特殊点用平滑曲线连接起来，完成作图。

6 微分

6.1 微分的概念

定义：若函数 y=f(x)在点x_0的增量可表示为:Δy=f(x_0+Δx)−f(x_0)=AΔx+o(Δx)（A 为不依赖于Δx 的常数）则称函数 y=f(x)在点x_0可微，而 AΔx 称为 f(x)在点x_0的微分，记作 dy 或 df，即 dy=AΔx, dy 是Δy 的线性主部。

定理：函数 y=f(x) 在点x_0可微的充要条件是：y=f(x) 在点x_0处可导，且 A=$f'(x_0)$,即 dy=$f'(x_0)$Δx

说明：1、函数的微分与导数是两个等价的概念;把函数可微的判断和计算问题转化为函数可导的判断和计算问题。

2、函数的微分与导数是两个不同的概念,函数在一点的导数表示它在该点的变化率,而函数在一点的微分则是它在该点改变量的线性主部。

3.规定自变量的微分等于自变量的改变量，即 dy= Δx, dy=$f'(x_0)$dx

6.2 微分的运算法则

设 u(x)， v(x)均可微,则：

d(u±v)=du±dv

d(Cu)=Cdu(C 为常数)

d(uv)=vdu+udv

d($\frac{u}{v}$)=$\frac{vdu-udv}{v^2}$(v≠0)

复合函数的微分：y=f(x),u=φ(x)分别可微，则复合函数 y=f[φ(x)]可微，且微分为：dy= $y'_x dx$= f'(u)φ'(x)dx=f'(u)du

6.3 微分在近似计算中的应用

当$|\Delta x|$很小时，$\Delta y \approx dy$， $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$,

$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, $f(x) = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$

注意：$f(x_0)$、$f'(x_0)$易算；x 与x_0靠近

6.4 基本题型

6.4.1 微分的计算

例 11：$y=\ln(1+e^{x^2})$，求 dy

解：$dy = \frac{1}{1+e^{x^2}} d(1+e^{x^2}) = \frac{1}{1+e^{x^2}} \cdot e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{1+e^{x^2}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x dx = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}} dx$

6.4.2 微分在近似计算中的应用

例 12：求$\sin 29^\circ$的近似值

解：设 $f(x) = \sin x$,

取$x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$

$\sin 29^\circ = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-0.0175) \approx 0.485$

7 微分方程

7.1 微分方程的基本概念

凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程。微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称微分方程的阶。

一阶微分方程：F(x,y,y”)=0,y”=f(x,y)

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称微分方程的解。

解中含有任意常数, 且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同称微分方程的通解。

确定了通解中任意常数以后的解称特解。

用来确定任意常数的条件称初始条件。

微分方程的几何意义：解的图象：微分方程的积分曲线

通解的图象：积分曲线族

一阶：过定点的积分曲线

二阶：过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线

7.2 可分离变量的微分方程

形如$y'=f(x)\cdot g(y)$的方程，称为可分离变量的微分方程。

解法：分离变量，得：$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$

两边积分，得：$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$

得到通解：$G(y)=F(x)+C$

7.3 齐次方程

如果一阶微分方程$\frac{dy}{dx}$=f(x, y)中的 f(x, y)可以写成 f(x, y)=φ($\frac{y}{x}$)，则称该方程为齐次方程。f(x, y)是 x, y 的齐次函数。特点：f(tx, ty)=f(x, y)

解法：$\frac{dy}{dx}$=φ($\frac{y}{x}$)

令 u=$\frac{y}{x}$, 则 y=ux, $\frac{dy}{dx}$ =u+x$\frac{du}{dx}$

代入原方程得：u+x$\frac{du}{dx}$=φ(u)

分离变量：$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$

两边积分，得：$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$

积分后再用$\frac{y}{x}$代替 u，得原方程的通解。

变量代换是关键

7.4 一阶线性微分方程

标准形式：$\frac{dy}{dx}$+P(x)y=Q(x)

若 Q(x)=0,称为线性齐次方程；
若 Q(x)≠0,称为线性非齐次方程。

一阶线性齐次微分方程

解法：线性齐次方程：$\frac{dy}{dx}$+P(x)y=0

分离变量：$\frac{dy}{y}$=−P(x)dx

两边积分，得：$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|$

故通解为：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

一阶线性非齐次微分方程

解法：线性非齐次方程：$\frac{dy}{dx}$+P(x)y=Q(x)

相应齐次方程的通解：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

设非齐次方程的通解：$y(x)=u(x)e^{-\int P(x)dx}$

代入方程化简：$\frac{du}{dx}=Q(x)\,e^{\int P(x)dx}$

两边积分得：$u=\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C$

故原方程的通解：$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

（常数变易法）

7.5 可降阶的微分方程

$y^{(n)}=f(x)$型方程

解法：令 z=$y^{(n-1)}$, 则$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}}=y^{(n)}=f(x)$

Z=$\int f(x)dx+C_1$，即$y^{(n-1)}$=$\int f(x)dx+C_1$

同理可得: $y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)dx+C_1\right]\mathrm{dx}+C_2=\int\left[\int f(x)dx\right]dx+C_1x+C_2$

依次通过 n 次积分，可得含 n 个任意常数的通解。

$y''=f(x,y')$型方程

解法：设$y'=p(x)$, 则$y''=p'$,
原方程化为一阶方程：$p'=f(x,p)$
设其通解为：p=$\varphi(x,C_1)$
则得：$y'=\varphi(x,C_1)$
再一次积分，得原方程的通解：y=$\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

$y''=f(y,y')$ 型方程

解法：令$y'=p(x)$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dy}}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$

故方程化为：$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

设其通解为 p=$\varphi(y,C_1)$, 即得：$y'=\varphi(y,C_1)$

分离变量后积分，得原方程的通解：$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$

7.6 基本题型

7.6.1 可分离变量的微分方程的计算

求$y'=y^2\cos x$满足初始条件 y(0)=1 的特解。

解：分离变量，得：$\frac{dy}{y^2}=\cos x dx$

两边积分，得：$\int\frac{dy}{y^2}=\int\cos x dx$

解得：$-\frac{1}{y}=\sin x+C$，即：$\frac{1}{y}=-\sin x+C$

代入 y(0)=1，得：C=1

$\therefore\frac{1}{y}=-\sin x+1$ 为所求特解

7.6.2 齐次方程的计算

例 15：解微分方程$y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

解：令 $u=\frac{y}{x}$，则$y'=u+xu'$，代入原方程得：$u+xu'=u+\tan u$

分离变量：$\cot u du=\frac{dx}{x}$

两边积分：$\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\int\frac{dx}{x}$

得：$\ln\sin u=\ln x+\ln c$ 即：$\sin u=Cx$

故原方程的通解为：$\sin\frac{y}{x}=Cx$（C 为任意常数）

注意：原方程变形过程中可能会丢失部分解，记得验算。

7.6.3 一阶线性微分方程的计算

解方程$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

解：对应的齐次方程：$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}-\frac{2y}{x+1}=0$

用变量分离法得：y=C$(x+1)^2$

用常数变易法：令 y=u(x)·$(x+1)^2$

则：$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$

代入非齐次方程得：$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

积分，得：u=$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$+C

故原方程通解为：y=$(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$

求方程$y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$的通解

解：P(x)= $\frac{1}{x}$, Q(x)= $\frac{\sin x}{x}$

y=$e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$

=$e^{-\ln x}\left[\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x}dx+C\right]$

=$\frac{1}{x}(\int\sin x\,dx+C)=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$

7.6.4 可降阶的微分方程的计算

求解$y'''=e^{2x}-\cos x$

解：$y''=\int(e^{2x}-\cos x)dx+C_1{}'=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1{}'$

$y'=\frac{1}{4}e^{2x}-\cos x+C_1{}'x+C_2$

$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3\ (C_1=\frac{1}{2}C_1{}')$

求解$\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy'\\ y(0)=1,y'(0)=3\end{cases}$

解：设$y'=p(x)$，则$y''=p'$

代入方程得：$(1+x^2)p'=2xp$

分离变量得：$\frac{dp}{p}=\frac{2xdx}{(1+x^2)}$

积分得：$\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$，即 $p=C_1(1+x^2)$

利用 $y'(0)=3$，得：$C_1=3$，于是有$y'=3(1+x^2)$

两端积分得：$y=x^3+3x+C_2$

利用 $y(0)=1$，得$C_2=1$

因此所求特解为：$y=x^3+3x+1$

8 微分的逆运算问题——不定积分

8.1 原函数与不定积分的概念

8.1.1 原函数

已知函数 f(x) 是一个定义在某区间的函数，如果存在函数 F(x)，使得在该区间内的任一点都有 dF(x)=f(x)dx，则在该区间内就称函数 F(x) 为函数 f(x) 的原函数。对 f(x) 进行积分既可以得到原函数 F(x)，对 F(x) 微分就可以得到 f(x)。

8.1.2 不定积分

相对定积分而言，其最后解得的表达式中存在不定的一个常数。（例如：对 sinx+c 进行微分得到 cosx，其中 c 为任意常数，若是对 cosx 进行不定积分就是得到 sinx+c。若是进行定积分则是没有不定常数，则在题目中会给出限定条件，例如原函数在 x=0 时值为 1，则对 cosx 进行积分得到 sinx+c，x=0 时 sinx+c=1，所以 c=1，所以 cosx 的定积分为 sinx+1）

8.1.3 运算法则

求函数 f(x) 的不定积分，就是要求出 f(x) 的所有的原函数，由原函数的性质可知，只要求出函数 f(x) 的一个原函数，再加上任意的常数 C 就得到函数 f(x) 的不定积分。

8.1.4 不定积分的两个定理

1. 若函数在 I 区间上连续，则函数在 I 区间上存在原函数。
2. 如果函数在 I 区间上的原函数存在，则它任意两个不同的原函数只相差一个常数

8.1.5 不定积分的性质

1. 函数的和的不定积分等于各个函数的不定积分的和;
2. 求不定积分时，被积函数中的常数因子可以提到积分号外面来;
3. 不定积分的导数等于被积函数
4. 函数导数的不定积分等于该函数与任意常数之和

8.2 基本积分公式

不定积分公式表：

1. $\int kdx = kx + C$

2. （1）$\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$ （$a \neq -1$） （2）$\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. （1）$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ （2）$\int e^x dx = e^x + C$

4. （1）$\int \sin x dx = -\cos x + C$ （2）$\int \cos x dx = \sin x + C$

（3）$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$ （4）$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

（5）$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ （6）$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

（7）$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ （8）$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

（9）$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ （10）$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

5. （1）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ （2）$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C(a>0)$

（3）$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$ （4）$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan \dfrac{x}{a} + C$

（5）$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$ （6）$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

（7）$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$ （8）$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \dfrac{a^2}{2}\arcsin \dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$

8.3 求不定积分的几种方法

8.3.1 直接积分法

设法变形为积分表中的函数线性组合形式以求出积分的方法称为直接积分法，利用恒等变形，积分性质及基本积分公式进行积分。（常用恒等变形：分项积分，加项减项，三角公式，代数公式。）

8.3.2 基本题型

例 1、求 $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

解 原式$=\int (x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}})dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+C$

8.3.3 第一类换元积分法（凑微分法）

把被积分式凑成某个函数的微分的积分方法，是换元积分法中的一种方法。有时需要积分的式子与固定的积分公式不同，但有些相似，这时，我们就可以考虑是否把 dx 变换成 d（u）的形式，[u=f(x)] 把积分式中的 x 的的函数变换成 u 的函数，使积分式符合积分公式形式。这样，就很方便的进行积分，再变换成 x 的形式。

凑微分法常见的凑微分形式

（1） $dx=d(x+C)$ （2） $dx=\frac{1}{k}d(kx+C)$

（3） $xdx=\frac{1}{2}d(x^2+C)$ （4） $x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3+C)$

（5） $\frac{1}{x^2}dx=-d\left(\frac{1}{x}+C\right)$ （6） $\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d(\sqrt{x}+C)$

（7） $\frac{1}{x}dx=d(\ln x+C)$ （8） $e^xdx=d(e^x+C)$

（9） $\sin xdx=-d(\cos x+C)$ （10） $\cos xdx=d(\sin x+C)$

（11） $\frac{1}{\cos^2 x}dx=d(\tan x+C)$ （12） $\frac{1}{1+x^2}dx=d(\arctan x+C)$

8.3.4 基本题型

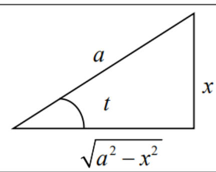
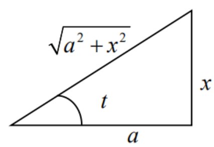
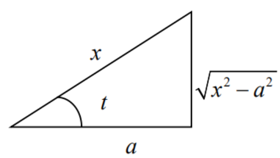
例 2、求 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$

解　原式$=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{2\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}d(\sqrt{x})$

$$=2\int \arcsin\sqrt{x}d(\arcsin\sqrt{x})=(\arcsin\sqrt{x})^2+C$$

注　$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2d(\sqrt{x})$

8.3.5 第二类换元积分法

根式形式	依据公式	所作替换	对应三角形
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\sin^2 t+\cos^2 t=1$	$x=a\sin t$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$1+\tan^2 t=\sec^2 t$	$x=a\tan t$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\tan^2 t=\sec^2 t-1$	$x=a\sec t$	

8.3.6 基本题型

例 3、求 $\int\frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$

解　原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{\sqrt{3^2-(2x)^2}}+\frac{1}{8}\int(9-4x^2)^{-\frac{1}{2}}d(9-4x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\frac{2}{3}x)}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$$

8.3.7 分部积分法

其基本思路是将不易求得结果的积分形式转化为等价的但易于求出结果的积分形式。对于那些由两个不同函数组成的被积函数不便于进行换元的组合分成两部分进行积分，其原理是函数四则运算的求导法则逆用。

分部积分法的计算公式

$$\int u\cdot v'dx=\int udv=uv-\int v\cdot du=uv-\int v\cdot u'dx$$

8.3.8 分部积分法的技巧

1. 若被积函数是幂函数和指数函数（或三角函数）的乘积，设幂函数为 U
2. 若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，考虑设对数函数或反三角函数为 U。
3. 分部积分法可以反复使用，注意 U 应为同类型
4. 有些三角函数需要循环使用分部积分法

8.3.9 基本题型

题 1： $\int x\ln xdx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int \ln xdx^2=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2d\ln x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

题 2： $\int x\arctan xdx$

解：原式 $=\frac{1}{2}\int \arctan xdx^2=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2d\arctan x=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$

题 3： $\int \ln xdx$

解：原式 $=x\ln x-\int xd\ln x=x\ln x-\int 1\cdot dx=x\ln x-x+C$

题 4： $\int e^{\sqrt{x}}dx$ 令 $\sqrt{x}=t$， $x=t^2$， $dx=2tdt$

解：原式 $=\int e^t\cdot 2tdt=2\int tde^t=2t\cdot e^t-2\int e^tdt=2te^t-2e^t+c=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$

9 定积分

9.1 定积分的概念

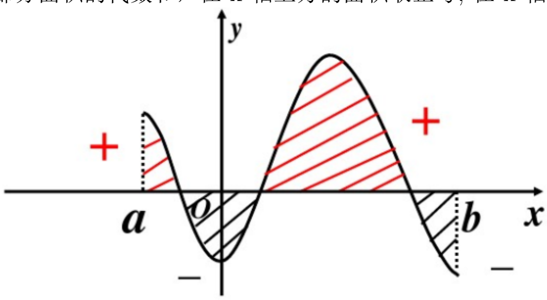
9.1.1 定积分的概念

定积分是积分的一种，是函数 f(x) 在区间 [a,b] 上的积分和的极限。这里应注意定积分与不定积分之间的关系：若定积分存在，则它是一个具体的数值（曲边梯形的面积），而不定积分是一个函数表达式，它们仅仅在数学上有一个计算关系（牛顿-莱布尼茨公式），其它一点关系都没有！一个函数，可以存在不定积分，而不存在定积分，也可以存在定积分，而不存在不定积分。一个连续函数，一定存在定积分和不定积分；若只有有限个间断点，则

定积分存在；若有跳跃间断点，则原函数一定不存在，即不定积分一定不存在。

9.1.2 定积分的几何意义

它是介于 x 轴、函数 f（x）的图形及两条直线 x=a，x=b 之间的各部分面积的代数和，在 x 轴上方的面积取正号; 在 x 轴下方的面积取负号。



即求函数 f(x) 在区间 [a,b] 中图线下包围的面积

9.1.3 基本题型

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})$.

分析 将这类问题转化为定积分主要是确定被积函数和积分上下限. 若对题目中被积函数难以想到，可采取如下方法：先对区间 [0, 1] n 等分写出积分和，再与所求极限相比较来找出被积函数与积分上下限.

解 将区间 [0, 1] n 等分，则每个小区间长为 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，然后把 $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$ 的一个因子 $\frac{1}{n}$ 乘入和式中各项. 于是将所求极限转化为求定积分. 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2n^2}+\cdots+\sqrt[3]{n^3})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}})=\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}.$$

例 2 $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx =$__________.

解法 1 由定积分的几何意义知，$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx$ 等于上半圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ （$y \geq 0$）与 x 轴所围成的图形的面积．故 $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$．

9.1.4 定积分的可积条件

1. 被积函数要连续
2. 被积函数有有限个第一类间断点

9.1.5 基本题型

计算 $\int_{-1}^2 |x|dx$．

分析 被积函数含有绝对值符号，应先去掉绝对值符号然后再积分．

解 $\int_{-1}^2 |x|dx = \int_{-1}^0 (-x)dx + \int_0^2 xdx = [-\frac{x^2}{2}]_{-1}^0 + [\frac{x^2}{2}]_0^2 = \frac{5}{2}$．

注 在使用牛顿－莱布尼兹公式时，应保证被积函数在积分区间上满足可积条件．如 $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^2}dx = [-\frac{1}{x}]_{-2}^3 = \frac{1}{6}$，则是错误的．错误的原因则是由于被积函数 $\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处间断且在被积区间内无界．

9.2 定积分的性质

9.2.1 定积分的基本性质

注：（文科高数几乎不考证明，故证明过程省略）

（1）线性性质：

①函数的和（差）的定积分等于他们定积分的和（差），即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

②被积函数的常数因子可以提到积分号外面，即

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

（2）区间可加性

如果定积分区间分成两部分，则在整个区间上的定积分等于这两个部分区间上的定积分之和，即设a＜c＜b，则 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

（3）保序性

如果在区间[a，b]上f(x)≥0，则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$（$a<b$）

推论：

①如果在区间[a，b]上f(x)≥g(x)，则 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$（$a<b$）

② $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

（4）设f(x)在区间[a，b]上可积，g(x)在区间[a，b]上有定义，且仅在有限个点处与f(x)取不同值，则g(x)在[a，b]上也可积，且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$（$a<b$）

（5）估值定理

设M和m分别是f(x)在区间[a，b]上最大值和最小值，则

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$（$a<b$）

（此性质**用图像去理解很简单**）

（6）积分第一中值定理：

设函数f(x)在闭区间[a，b]上连续，g(x)在[a，b]上不变号则至少存在一点ξ∈[a，b]，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

（7）积分中值定理:

设函数f(x)在闭区间[a，b]上连续，则至少存在一点ξ∈[a，b]，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

（也是用图像去理解）

9.2.2 定积分的奇偶性

定理 7 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积.

若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$；若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

9.2.3 基本题型

计算 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$.

分析 由于积分区间关于原点对称，因此首先应考虑被积函数的奇偶性.

解 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx + \int_{-1}^{1} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$. 由于 $\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是偶函数，而 $\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ 是奇函数，有 $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = 0$，于是

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int_{0}^{1} \frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx = 4\int_{0}^{1} dx - 4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

由定积分的几何意义可知 $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$，故

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x^2+x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int_{0}^{1} dx - 4 . \frac{\pi}{4} = 4 - \pi .$$

计算 $\int_{0}^{2} \max\{x^2, x\}dx$.

分析 被积函数在积分区间上实际是分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 1<x\le 2 \\ x & 0\le x\le 1 \end{cases}.$$

解 $\int_0^2 \max\{x^2,x\}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^2dx=[\frac{x^2}{2}]_0^1+[\frac{x^3}{3}]_1^2=\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{17}{6}$

9.3 计算定积分的一般方法

9.3.1 定积分的基本定理——牛顿莱布尼茨公式

如果函数 f(x) 在区间 [a,b] 上连续，并且存在原函数 F[x]
则
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$

9.3.2 定积分的换元积分法

1. 定积分换元法

定理 假设

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 函数 $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续且不变号的导数；

(3) 当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

本定理证明从略. 在应用时必须注意变换 $x=\varphi(t)$ 应满足定理的条件，在改变积分变量的同时相应改变积分限，然后对新变量积分.

例 3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx$.

解法一 令 $t=\cos x$，则 $dt=-\sin xdx$.

当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx=-\int_1^0 t^5dt=-\frac{1}{6}t^6\Big|_1^0=\frac{1}{6}.$$

9.3.3 定积分的分部积分法

设 函 数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 均 在 区 间 $[a,b]$ 上 有 连 续 的 导 数 ， 由 微 分 法 则 $d(uv)=udv+vdu$，可得

$$udv=d(uv)-vdu.$$

等式两边同时在区间$[a,b]$上积分，有

$$\int_a^b udv=(uv)\big|_a^b-\int_a^b v\,d\,u \tag{2}$$

公式(2)称为定积分的分部积分公式，其中a与b是自变量x的下限与上限.

运用分部积分法计算的技巧

1. 我们要清楚选择的原则，我们在选取 u 和 v 的时候要遵循两个原则：1.v 要比 u 更容易求出：2. vdu 要比 udv 更容易计算。
2. 选择的方法，第一点，我们要将被积函数视为两个函数之积。也就是 u 和 v 的积的形式。
3. 我们记住一个口诀来选择 u、v，这个口诀就是“反对幂指三”，什么叫反对幂指三呢？反就是反三角函数，对就是对数函数，幂就是幂函数，指就是指数函数，三就是三角函数。
4. 我们把两个被积函数在口诀中排个顺序，在前面的选为 u，在后面的选为 v 的导数。这样我们就可以进行进一步的计算了。

9.3.4 基本题型

题 1：计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$（凑微分）

解：原式 $=\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-0=\frac{\pi}{6}$

题 2：计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} 2x\arctan x dx$（分部积分）

解：原式 $=\int_0^{\sqrt{3}}\arctan x d\left(x^2\right)=x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x^2 d\arctan x$

$$=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\pi-\left(x-\arctan x\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

题 3：计算定积分 $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$（分段积分）

解：原式 $=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$

题 4：计算 $\int_0^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2 & x>1\end{cases}$（分段积分）

解： $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1(x+1)dx+\int_1^2\frac{1}{2}x^2dx=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1+\frac{1}{6}x^3\Big|_1^2=\frac{8}{3}$

9.4 反常积分

9.4.1 反常积分的概念

反常积分又叫广义积分，是对普通定积分的推广，指含有无穷上限/下限，或者被积函数含有瑕点的积分，前者称为无穷限广义积分，后者称为瑕积分（又称无界函数的反常积分）

（注：在文科高数中只要求掌握前者）

9.4.2 无穷区间反常积分

每个被积函数只能有一个无穷限，若上下限均为无穷限，则分区间积分。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx \neq \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

9.4.3 敛散性判断

反常积分的敛散判断本质上是极限的存在性与无穷小或无穷大的比阶问题。首先要记住两类反常积分的收敛尺度：对第一类无穷区间反常积分而言，当 $x\to+\infty$ 时，f(x) 必为无穷小，并且无穷小的阶次不能低于某一尺度，才能保证收敛；

9.4.4 基本题型

题 7： $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx$ **（反常积分—积分区间无界）**

解：原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(x+1)^2}d(x+1)=\arctan(x+1)\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\arctan(x+1)-\arctan 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

题 8： $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}$ **（反常积分—被积函数无界）**

解：原式 $=-\int_0^1\frac{1}{(1-x)^2}d(1-x)=\frac{1}{1-x}\Big|_0^1=\infty-1=\infty$ **（无值）**

9.5 定积分在几何中的应用

9.5.1 利用定积分求体积

（1）计算由区间 [a,b] 上的连续曲线 y=f(x), 两直线 x=a 与 x=b 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积

$$v=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$$

（2）类似地可得，由区间 [c,d] 上的连续曲线 y=f（x），两直线 y=c 与 y=d 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积

$$v=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy$$

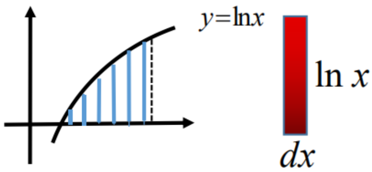
9.5.2 利用定积分求面积

将不规则图形的的边界线用曲线方程表示出来，定积分的上下限就是曲线的端点。用上边界曲线的定积分减去下边界曲线的定积分就是面积

9.5.3 基本题型

1、用定积分求面积

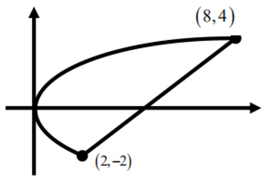
题 1：计算 $y=\ln x$，x 轴，以及 $x=e$ 围成的图形面积

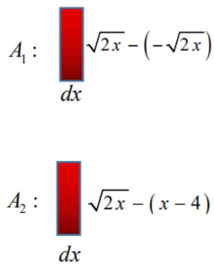


解： $dA=\ln x dx$

$$A=\int_1^e dA=\int_1^e \ln x dx=\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=1$$

题 2：计算抛物线 $y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围成的图形面积





解： $dA_1=\left[\sqrt{2x}-\left(-\sqrt{2x}\right)\right]dx=2\sqrt{2x}dx$

$$A_1=\int_0^2 dA_1=\int_0^2 2\sqrt{2x}dx=\frac{16}{3}$$

$$dA_2=\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]dx=\left(\sqrt{2x}+4-x\right)dx$$

$$A_2=\int_2^8 dA_2=\int_2^8\left(\sqrt{2x}+4-x\right)dx=\frac{38}{3}$$

$$A=A_1+A_2=\frac{16}{3}+\frac{38}{3}=18$$

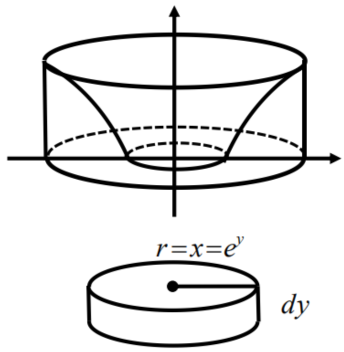
2、用定积分求体积

题 3：计算 $y=\ln x$，x 轴以及 $x=e$ 围成的图形绕 x 轴和 y 轴旋转一周的体积分别是多少

解：绕 x 轴

$dV_x=\pi r^2dx=\pi\cdot(\ln x)^2dx$

$V_x=\int_1^e dV_x=\int_1^e\pi(\ln x)^2dx=\pi(e-2)$



绕 y 轴 $V_y=V_{外}-V_{内}$

$V_{外}=\pi\cdot e^2\cdot 1=\pi e^2$

$dV_{内}=\pi\cdot(e^y)^2\cdot dy=\pi\cdot e^{2y}dy$

$V_{内}=\int_0^1 dV_{内}=\int_0^1\pi e^{2y}dy=\frac{1}{2}\pi(e^2-1)$

则 $V_y=V_{外}-V_{内}=\pi e^2-\frac{1}{2}\pi(e^2-1)=\frac{1}{2}\pi\left(e^2+1\right)$

10 二元微积分概要

10.1 二元函数的极限与连续性

10.1.1 二元函数极限的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义 (点 $P_0(x_0,y_0)$ 可以除外)。如果当 $P(x,y)$ 无限接近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 无限接近于一个常数 A, 则称当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 或 $f(x,y)\to A(P(x,y)\to P_0(x_0,y_0))$。注：$P(x,y)$ 必须是以任意方式、任意路径趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时均以 A 为极限。

10.1.2 二元函数连续性的概念

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。

性质：与一元函数相似，二元初等函数在其定义的区域内是连续的，二元连续函数也有其四则运算和复合运算的法则，以及连续函数求极限的法则。

10.1.3 基本题型

[例 1]：求下列函数的极限：

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}}\frac{sinxy}{x}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\sqrt{1+x+y}-1}{x+y}$

解：

1. 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}$
2. 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to a}} y\cdot\frac{sinxy}{xy}=\lim\limits_{y\to a} y\cdot\lim\limits_{xy\to 0}\frac{sinxy}{xy}=a\cdot 1=a$
3. 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\frac{1}{2}(x+y)}{x+y}=\frac{1}{2}$

注：常用二元函数求极限常用方法：

1. 利用二元函数的连续性
2. 利用恒等变形，如分子或分母有理化
3. 利用等价无穷小代换（与一元函数一样，只能用于乘法与除法）
4. 利用两个重要极限
5. 放缩

[例 2]：证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$ 不存在

证：当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 $P_0(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+kx}{x-kx}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1+k}{1-k}=\frac{1+k}{1-k}$$

当 k 取不同值时，$P\to P_0$ 的路径不同，极限值 $\frac{1+k}{1-k}$ 不同，所以极限不存在。

注：证明二元函数极限不存在一般取特殊路径，证明不同的路径下极限不同，但是此方法不能用于证明极限存在。

10.2 偏导数与全微分

10.2.1 偏导数

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内有定义，当自变量 y 固定在 y_0 时，若 $z=f(x,y_0)$ 在 x_0 的导数存在，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数。记作 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x},f'_x(x,y)$。

10.2.2 全微分

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，若对该邻域内的任意点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, 函数在点 (x_0,y_0) 的全增量 Δz 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 其中 A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，$o(\rho)$ 是关于 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小，则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。$A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分，记作 $dz=A\Delta x+B\Delta y=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$。

可微的必要条件：函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 则：函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数存在；函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分可表示为 $dz=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y$。

可微的充分条件：函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数存在且连续。

注：函数在一点处可微只能推出函数在该点连续和偏导数存在，而不能得到偏导数连续。与一元函数“可导则连续”不同，二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处偏导数存在不能推出函数在该点处连续。

10.2.3 基本题型

[例 3]：

1. 求 $f(x,y)=x^2+\ln y+3xy$ 在 $(1,2)$ 处偏导数的值。

2. 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$(R 为常数),求证:$\frac{\partial p}{\partial V)}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=-1$。

3. 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}, \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,0)}$。

4. 设函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$$
证明（0,0）处一阶偏导数存在，但在该点不连续。

解：

1. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,2)}=2x+3y=8;\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,2)}=\frac{1}{y}+3x=\frac{7}{2}$。

2. $p=\frac{RT}{V},\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$; $V=\frac{RT}{p},\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P}$; $T=\frac{pV}{R},\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$; 所以 $\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{pV}=-1$
易错点：偏导数记号是一个整体记号，不能看作分子和分母的商。

3. $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}=[e^{x+y}(1+x)+\ln(1+y)]|_{(1,0)}=2e$
$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,0)}=(xe^{x+y}+\frac{1+x}{1+y})|_{(1,0)}=2+e$

4. $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$, 同理可得 $f'_y(0,0)=0$。当点 (x,y) 沿 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)=\frac{k}{1+k^2}$, 极限随 k 的改变而改变，点 $(0,0)$ 处极限不存在，所以 $f(x,y)$ 在该点不连续。

注：计算方法：

1. 求 $f'_x(x,y)$ 时，把 $z=f(x,y)$ 的变量 y 看作常量，从而转化为关于 x 的一元函数，然后利用一元函数的求导公式和法则对 x 求导即可。

2. 求点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数时，可以先求偏导函数，再求偏导函数在 (x_0,y_0) 处的函数值。

3. 求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求。

10.3 复合函数微分法

10.3.1 链式求导法则

定理：如果函数在 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 可微，而中间变量 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，那么复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 关于 x,y 的偏导数存在，且有链式法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

10.3.2 全导数求导法则

如果函数在 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 可微，而中间变量 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 在点 (x,y) 可微，那么复合函数 $z=f(\varphi(x),\psi(x))$ 导数存在。这时 z 对 x 的导数称为全导数，有

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

10.3.3 基本题型

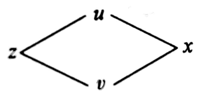
[例 4]：

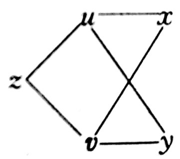
1. 设 $z=e^u\sin v$, 而 $u=xy, v=x+y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。
2. 求 $z=(1+x^2)^{\cos x}$ 的导数。

解：

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}(y\sin(x+y)+\cos(x+y))$
   $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}(x\sin(x+y)+\cos(x+y))$
2. 令 $u=1+x^2, v=\cos x$, 则 $z=u^v, \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}=vu^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot(-\sin x)=(1+x^2)^{\cos x-1}[2x\cos x-(1+x^2)\sin x\ln(1+x^2)]$

注：计算口诀：同链相乘，开链相加，单路全导，叉路偏导。（如下图）





10.4 二元函数的极值

10.4.1 极值

定义：设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义，如果对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的任一点 (x, y)，恒有 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$(或 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$)，则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数的极大值（或极小值）,(x_0, y_0) 称为极大值点（或极小值点）

极值存在的必要条件：如果函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有偏导数，且取得极值，则有 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$.(我们把满足条件的点 (x_0, y_0) 称为函数的驻点)

极值存在的充分条件：设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有连续的一阶和二阶偏导数，且 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$。令 $A = f"_{xx}(x_0, y_0), B = f"_{xy}(x_0, y_0), C = f"_{yy}(x_0, y_0)$, 则：

1. $AC - B^2 > 0, f(x_0, y_0)$ 是极值，且当 $A > 0$ 时，$f(x_0, y_0)$ 是极小值，当 $A < 0$ 时，$f(x_0, y_0)$ 是极大值。
2. $AC - B^2 < 0, f(x_0, y_0)$ 不是极值。
3. $AC - B^2 = 0, f(x_0, y_0)$ 是否为极值需要另作讨论。

补充：二阶偏导数的概念：设函数 $z=f(x,y)$ 在其定义域内一阶偏导数存在，如果一阶偏导数分别关于 x,y 的偏导数存在，则称它们为函数 $z=f(x,y)$ 关于 x,y 的二阶偏导数，记作 $\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x}=f"_{xx}, \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y}=f"_{xy}, \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y}=f"_{yy}$。

10.4.2 基本题型

[例 5] 求函数 $z=x^3+y^2-2xy$ 的极值。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-2y, \frac{\partial z}{\partial y}=2y-2x$; 令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$, 求得驻点为 $(0,0),(\frac{2}{3},\frac{2}{3}).f"_{xx}(x,y)=6x, f"_{xy}(x,y)=-2, f"_{yy}(x,y)=2$。对驻点进行讨论：

1. 在 $(0,0)$ 处，$AC-B^2<0$, 所以该点不是极值点
2. 在 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 处，$AC-B^2>0$, 且 $A>0$, 则 $f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=-\frac{4}{27}$ 为函数的一个极小值。

10.5 二重积分的概念与计算

10.5.1 二重积分

几何意义：如果 $f(x,y)\geq 0$, 则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的几何意义就是以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶面，以 D 为底面的曲顶柱体的体积。

性质：

1. 常数因子可以提到积分符号外面；
2. 有限个函数的代数和的积分等于函数积分的代数和；
3. 对积分区域具有可加性等。

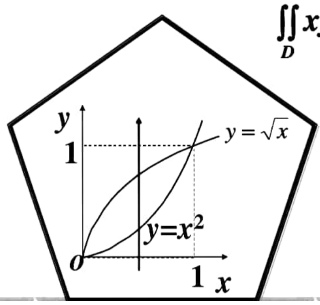
10.5.2 基本题型

[例 6]：1.

例1 计算$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，

其中D为$y^2=x$ 和$y=x^2$ 所围的闭区域.

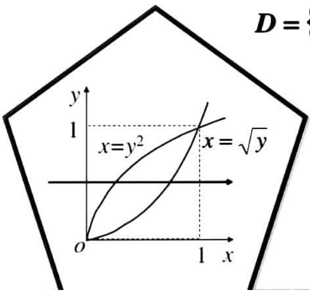
解：D为X一型区域 $D=\{0\le x\le 1, x^2\le y\le\sqrt{x}\}$



$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}xy\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-x^5)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

D也为Y一型区域

$D=\{0\le y\le 1, y^2\le x\le\sqrt{y}\}$



$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}}xy\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{12}$$

2. 计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $y=x, y=\frac{1}{x}, x=2$ 围成。

解：$D:\frac{1}{x}\le y\le x, 1\le x\le 2$,D 为 X-型区域且左边交点为 $(1,1)$, $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2(-\frac{x^2}{y})|_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x=\int_1^2(x^3-x)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$

注：二重积分计算的基本步骤：

1. 画出积分区域 D 的草图，解方程组求交点，将 D 投影到 x 或 y 轴上。
2. 选择积分次序：（1）D:$a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$, 且 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在 D 上连续,则先对 y 后对 x 积分。（2）$D:c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$,

且 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，则先对 x 后对 y 积分。