1st Adition

交大学辅

Mathematical Analysis for Engineering

工科数学分析

（高数(下) 期末版）

（第一版）

Contributers

仲英书院学业辅导中心

钱学森书院学业辅导中心

MAY

06

WHAT WE WANT TO CONVEY

希望这份资料能够对各位的高数学习有所帮助，能够帮助各位在求学的路上勇往直前。

——2021.2.28

内容简介

本资料就工科数学分析（下册）期末考试前的内容进行了全面详细的总结，并列举了众多典型例题、往年试题，结合知识分析题目，以帮助同学们夯实高数基础。

感谢仲英学辅，校学生会，与钱院学辅各位工作人员与志愿者的努力工作，使本资料可以顺利完工。如果同学们在本资料中发现错误，请联系交小权QQ：3171478351进行反馈，我们将会在下一版进行修改。

资料版次及编者信息：

2019年 原版
编者：
仲英学业辅导中心： 夏诗淇 谭维玮 吴鹏飞 刘菁锐 聂延

2021年5月 第一版
编者：
仲英学业辅导中心：徐敬松 张锦羽 高逸飞 都凌志
钱学森书院学业辅导中心：谭施天一 杨艾宸
排版：
仲英学业辅导中心：董晟渤 徐敬松

材料名称 工科数学分析学习辅导材料（高数[下]期末）（第1版）
编 委 会 西安交通大学学生会学术资讯部
钱学森书院学业辅导中心 仲英书院学业辅导中心
总 页 数 73页
字 数 25000余字

Email xjtuxszx@163.com

目录

Part I

多元函数微分学

1 n 维 Euclid 空间 Rn 中点集的初步知识

1.1 n 维空间与点集

定义 1.1.1. n 维实向量：$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

定义 1.1.2. n 维实向量空间是由 n 维实向量的全体构成的集合，记为 $R^n = x = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$，并定义加法与数乘，则 R_n 构成一个 n 维实向量空间。

定义 1.1.3. 向量的内积：$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$

对上述几点定义加以总结，我们得到如下关系：

$$\boxed{R^n \xrightarrow{\text{定义加法和数乘}} n\text{维实向量空间} \xrightarrow{\text{定义内积}} n\text{维}Euclid\text{空间}}$$

定义 1.1.4. 向量的长度（范数）:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

定义 1.1.5. 两点 x,y 间的距离：

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

定义 1.1.6. **点列的极限** 设 $\{x_k\}$ 是 R^n 中的一个点列，其中 $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$，又设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 R^n 中的一固定点，若当 $k \to \infty$ 时，$\rho(x_k, a) \to 0$，即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^+, \text{使得} \forall k > N, \text{恒有} \|x_k - \mathbf{a}\| < \varepsilon$$

则称点列 $\{x_k\}$ 的极限存在且称 $\mathbf{a}$ 为它的极限，记作

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x_k} = \mathbf{a} \quad \text{或} \quad \mathbf{x_k} \to \mathbf{a} \quad (\mathbf{k} \to \infty)$$

设点列 $\{x_k\} \in R^n$, 点 $\mathbf{a} \in R^n$, 则

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \quad \forall i = 1,2,\ldots,n, \text{恒有} \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i$$

注意：数列极限中与单调性、保序性、确界以及商有关的概念与命题不能直接推广到点列。

1.2 区域相关概念

定义 1.2.1. $\mathbf{a} \in R^n$, 常数 $\delta > 0$, 则称 R^n 中与点 $\mathbf{a}$ 的距离小于 δ 的点 $\mathbf{x}$ 的全体所构成的点集为点 $\mathbf{a}$ 的 δ 领域，记为

$$U(a,\delta) = \{x \in R^n \| \|x - a\| < \delta\}$$

设 $A \in R^n$，点 $\mathbf{a} \in R^n$:

定义 1.2.2. **内点：**若存在一个 a 的领域 $U(a,\delta)$, 使得 $U(a,\delta) \in A$，则称 a 为 A 的一个内点

定义 1.2.3. **内部：**A 的全部内点组成的集合，记为 A° 或 $\mathrm{int}A$

定义 1.2.4. **外点：**若存在一个 a 的领域 $U(a,\delta)$, 使得 $U(a,\delta) \in A^c$，则称 a 为 A 的一个外点

定义 1.2.5. **外部：**A 的全部外点组成的集合，记为 $\mathrm{ext}A$

定义 1.2.6. **边界点：**若点 $\mathbf{a}$ 的任一领域既含有集合 A 中的点，又含有 A^c 中的点，则称 $\mathbf{a}$ 为 A 的一个边界点

定义 1.2.7. **边界：**A 的全部边界点组成的集合，记为 ∂A

定义 1.2.8. **聚点：**若点 $\mathbf{a}$ 的任一领域都含有集合 A 中的点，则称 $\mathbf{a}$ 为 A 的一个聚点

定义 1.2.9. **开集：**若集合 A 的点都是 A 的内点，即 $A^{\circ} = A$ 则称 A 为 R^n 的开集

定义 1.2.10. **闭集：**若 A 的余集 A^c 为开集，则称 A 为闭集

定义 1.2.11. **联通集：**若 A 中的任意两点都能用完全属于 A 的有限个线段联结起来，则称 A 为联通集

定义 1.2.12. **区域：**联通的开集

定义 1.2.13. **闭区域：**区域与它的边界的并集

定义 1.2.14. **有界集与无界集：**若 A 能被包含在开球 $U(O < M)$ 中，则称 A 是有界集，否则为无界集

1.3 n 元函数

定义 1.3.1. n **元函数的定义：** 设 $A \in R^n$ 是一个点集，$f : A \to R$ 则称 f 是定义在 A 上的一个 n 元函数，记作：$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 或 $w = f(x)$ 其中，自变量 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$，因变量为 w，定义域 $D(f) = A$，值域 $R(f) = \{w|w = f(x), xD(f)\}$

特别的，当 n=2 时，二元函数图像为 R^3 中的点集 $\{(x, y, z) \in R^3|(x, y) \in D, z = f(x, y)\}$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 的图像，其在 xOy 平面上的投影即为其定义域

1.4 基本题型

1.4.1 内点、外点与边界点的判别

例 1.4.1. 求点集 $A = \{(x, y)|0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 的内部、外部及边界，并求出其对应的闭区域。

解答 内部为：$A^0 = \{(x, y)|0 < x^2 + y^2 < 1\}$

外部为：$extA = \{(x, y)|x^2 + y^2 > 1\}$

边界为：$\partial A = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}U\{(0, 0)\}$

区域为：$\{(x, y)|0 < x^2 + y^2 < 1\}$

闭区域为：$\{(x, y)|0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$

1.4.2 求多元函数定义域

例 1.4.2. 求函数 $z = \arcsin(2x) + \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln 1-x^2-y^2}$ 的定义域

解答 由题意得：

$$\begin{cases} |2x| \le 1 \\ 4x - y^2 \ge 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \ne 1 \end{cases}$$

可推得：

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 4x > y^2 \\ 0 < x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \frac{y^2}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 < x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

所以定义域为 $\left\{(x, y) | \frac{y^2}{4} \le x \le \frac{1}{2}, 0 < x^2 + y^2 < 1\right\}$

1.4.3 二元函数图像求解

例 1.4.3. 下列二元函数分别表示什么图形？

1.$z = \sqrt{1 - 2x^2 - y^2}$

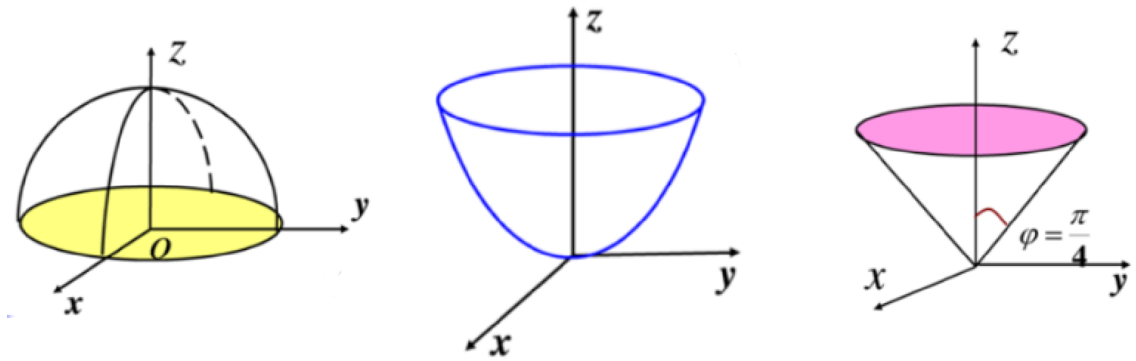
2.$z = 2x^2 + y^2$

3.$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

解答

1. 上半椭球面；
2. 椭圆抛物面；
3. 锥面.

如下图所示：



2 多元函数的极限与连续性

2.1 二重极限的定义

定义 2.1.1. 设 $f : U(x_0, y_0) \to R$ 是一个二元函数，$a \in R$ 是常数。若任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得任意 $(x, y) \in U(x_0, y_0)$，恒有 $|f(x, y) - a| < \varepsilon$，则称 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时，$f(x, y)$ **有极限**；且称 a 为当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时，$f(x, y)$ 的极限。记作：

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a \text{或} \lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y) = a$$

否则，称 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 没有极限。

注意：一元函数极限的有关性质（唯一性、局部有界性、局部保号性、夹逼准则、Heine 定理等）和运算法则都可以推广到二重极限中来；但 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 指的是 (x,y) 以任何途径趋于 (x_0,y_0)，这与一元函数具有本质差异。

2.2 二重函数的连续性

定义 2.2.1. **断点：** 设 (x_0,y_0) 是函数 f 的定义域上的聚点，若 f 在 (x_0,y_0) 无定义，或有定义式 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 不成立，则称 f 在 (x_0,y_0) 处间断，(x_0,y_0) 为 f 的断点。

二元连续函数的性质：二元连续函数的和、差、积、商的复合在定义域内仍为连续函数。

2.3 基本题型

2.3.1 求函数极限

求多元函数极限的方法：1. 利用不等式及夹逼定理
2. 进行变量代换，化为已知极限或化为一元函数处理（包括利用对数恒等式）
3. 利用极坐标
4. 利用极限运算法则或初等函数连续性
5. 若预先知道极限也可利用 (ε,δ) 定义证明

2.3.2 判定极限是否存在并证明

证明二重函数极限存在一般使用定义。证明二重函数极限不存在的方法一般为取特殊路径，证明不同路径极限不相同。常用的路径为：$y=kx$；$y=x^2$；$y=x^2-x$ 等。

3 多元数量值函数的导数与微分

3.1 偏导数

定义 3.1.1. 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内有定义，当自变量 y 固定在 y_0 时，若 $z=f(x,y_0)$ 在 x_0 的导数存在，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数。记作 $f_x(x_0,y_0)$，$z_x(x_0,y_0)$，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$

几何意义：$f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切线对 x 轴的倾角 α 的正切。

注意：多元函数在一点可偏导**不能**推出函数在该点连续。

3.2 高阶偏导数

定义 3.2.1. 二阶偏导数的概念：若 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的偏导数 $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ 在点 x_0 处对变量 x_j 的偏导数存在，则称这个偏导数为 f 在点 x_0 先对 x_i 再对 x_j 的二阶偏导数。记为 $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i})\Big|_{x=x_0}$，或 $f_{ij}(x_0)$

3.3 全微分

定义 3.3.1. 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域 $U(x_0,y_0)$ 内有定义，$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(x_0,y_0)$，若 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 可以表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 f 在 (x_0,y_0) 可微。称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数在点 (x_0,y_0) 处的全微分。记作

$$dz|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$$

可微的必要条件：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则：1.f 在 (x_0,y_0) 连续
2.f 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数均存在，且 $A=f_x(x_0,y_0)$，$B=f_y(x_0,y_0)$

可微的充分条件：函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 有界和在点 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 连续。

全微分近似计算公式：

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

3.4 方向导数

定义 3.4.1. 设 $x_0\in R^2$，$\vec{l}$ 是 R^2 中的某一向量，其单位向量为 $\vec{e_l}$，$f:U(x_0)\subseteq R^2\to R$，在 $U(x_0)$ 内让自变量 x 由 x_0 沿与 $\vec{e_l}$ 平行的直线变到 $x_0+t\vec{e_l}$，若 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\vec{e_l})-f(x_0)}{t}$ 存在，则称此极限为 f 在 x_0 处沿 l 方向的方向导数。记作 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{x_0}$

定理 3.4.2. 设函数 f 在 (x_0,y_0) 处可微，则 f 在 (x_0,y_0) 处沿任意方向的方向导数存在，且 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\sin\alpha$。

3.5 基本题型

3.5.1 偏导数的计算

求具体某点的偏导数有两种方法，一是先求后代，即先求出表达式再代入具体数值；二是先带入数值再计算，如下例所示。

例 3.5.1. 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{y}{z}}$，求 $\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial z}$ 及 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$

解答 $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{z}(\frac{y}{x})^{\frac{1}{z}-1}\cdot\frac{1}{x}$；
$\frac{\partial f}{\partial z}=(\frac{y}{x})^{\frac{1}{z}}\cdot\ln\frac{y}{x}\cdot(-\frac{1}{z^2})$；
$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=f_x(x,1,1)=\left.(\frac{1}{x})'\right|_{x=1}=\left.-\frac{1}{x^2}\right|_{x=1}=-1.$

3.5.2 高阶偏导数的计算

例 3.5.2. 设 $z=x^2y^3+\sin(xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

解答 $\because\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+\cos(xy)\cdot y=2xy^3+y\cos(xy)$；
$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+x\cos(xy)$
易得: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^3-y^2\sin(xy)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6xy^2+\cos(xy)-xy\sin(xy)$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6xy^2+\cos(xy)-xy\sin(xy)$

注：**函数连续**，**偏导存在**，**可微**之间的关系：

$$\boxed{\text{偏导数连续}\longrightarrow\text{可微}\longrightarrow\text{连续（逆向不可推）}}$$

（连续与可偏导无互推关系）

3.5.3 方向导数的计算

例 3.5.3. 求函数 $\mathrm{u=x^2yz}$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 沿 $\vec{l}=(2,-1,3)$ 方向的方向导数。

解答 已知方向向量: $\vec{l}=(2,-1,3)$,
$\therefore$ 单位方向向量为: $\vec{e_l}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$
另外有: $\mathrm{gradu}=\left(2xyz,x^2z,x^2y\right)$,
代入得: $\mathrm{gradu}(1,1,1)=(2,1,1)$ $\therefore\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=<\mathrm{gradu}(1,1,1),\vec{e_l}>=2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}-1\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+1\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{6}{\sqrt{14}}$

4 多元函数的 Taylor 公式与极值问题

4.1 多元函数的 Taylor 公式

(1) 二元形式

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + R_1$$

其中

$$R_1 = \frac{1}{2!}\left(f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2\right)\Big|_{(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}$$

(2) 矩阵形式

$$f(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \langle\nabla f(\boldsymbol{x}_0), \Delta\mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}.$$

其中 $H_f(x_0+\theta\Delta x)$ 是 $\boldsymbol{Hesse}$ 矩阵

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{\theta}\Delta\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0+\boldsymbol{\theta}\Delta\boldsymbol{x})}$$

(3) 带 *Peano* 余项形式的二阶 *Taylor* 公式

$$f(\boldsymbol{x_0}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \langle\nabla f(\boldsymbol{x_0}), \Delta\mathbf{x}\rangle + \frac{1}{2!}(\Delta\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x_0})\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o}\left(\|\boldsymbol{\Delta x}\|^2\right)$$

4.2 极值

(1) 无约束极值

定义 4.2.1. 无约束极值的定义: 设 $f: U(x_0) \subseteq R^n \to R$, 若任意 $x \in U(x_0)$ 恒成立不等式 $f(x) \le f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处取得无约束极大值, 称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点。

极值的必要条件: 设二元函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可偏导, 且 (x_0, y_0) 为 f 的极值点, 则有 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$. (满足此条件的点称为 f 的驻点)。

极值的充分条件: 设二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有连续的二阶偏导数, 且 p_0 为 f 的驻点, 记 $A = f_{xx}(P_0), B = f_{xy}(P_0), C = f_{yy}(P_0)$, $H_f(P_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 则有:

1. $H_f(P_0)$ 正定, 则 $f(P_0)$ 为 f 的极小值

2. $H_f(P_0)$ 负定，则 $f(P_0)$ 为 f 的极大值
3. $H_f(P_0)$ 不定，则 $f(P_0)$ 不是 f 的极值

（2）有约束极值——*Lagrange* 乘数法
转化成无约束极值问题:

例 4.2.2. 求目标函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在约束条件 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(i=1,2,\cdots,m)$ 下的极值时，构造 $m+n$ 元数量值函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 利用无约束极值的求法即可得到 F 的极值,即为约束条件 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(i=1,2,\cdots,m)$ 下函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值.

4.3 例题

例 4.3.1. （无约束极值）求函数 $f(x,y)=2x^2-3xy^2+y^4$ 的极值点。

解答 $f_x=4x-3y^2=0, f_y=-6xy+4y^3=0$ 得唯一驻点 $O(0,0)$。
在 O 点有 $A=f_{xx}(0,0)=4, B=f_{xy}(0,0)=0, C=f_{yy}(0,0)=0$
$\therefore AC-B^2=0$ 当 (x,y) 不等于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)=\left(2x-y^2\right)\left(x-y^2\right)$, 当 $x<0$ 时，$f(x,y)>0$; 当 $\frac{y^2}{2}<x<y^2$ 时,$f(x,y)<0$.
$\therefore$ 不是 f 的极值点，即 f 没有极值点.

例 4.3.2. （区域极值）求函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在闭区域 D 上的最大值与最小值. 其中 D 由直线 $x+y=6, x$ 轴和 y 轴所围成.

解答 $f_x=8xy-3x^2y-2xy^2=0, f_y=4x^2-x^3-2x^2y=0$ 得唯一驻点 $(2,1)$, 且 $f(2,1)=4$. 边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上 $f(x,y)=0, x+y=6$ 上得极值 $f(4,2)=-64$
$\therefore$ 比较可知最大值为 $f(2,1)=4$, 最小值为 $f(4,2)=-64$.

例 4.3.3. （有约束极值）求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的内接长方体中体积最大者。

解答 设 $L_x=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$, 其中 $x>0,y>0,z>0$
需满足:

$$\begin{cases} L_x=8yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0\\ L_y=8xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0\\ L_z=8xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0\\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}$$

解得唯一驻点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 满足题意,
$\therefore$ 带入得: $\max V=\frac{8\sqrt{3}}{9}abc$

5 多元向量值函数的导数与微分

5.1 多元向量值函数的导数与微分

设 $\vec{f}:\Omega\subseteq R^n\rightarrow R^m$ 为 n 元向量值函数，若 $\vec{f}$ 的每个分量 $\vec{f_i}$ 在点 x_0 处可微, 则称 $\vec{f}$ 在 x_0 处可微，并将，

$$d\vec{f}(x_0)=\begin{bmatrix} df_1(x_0) \\ df_2(x_0) \\ \cdots \\ df_m(x_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \cdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

记为 $\vec{f}$ 在 x_0 处的微分。此矩阵称为 $\vec{f}$ 在 x_0 处的导数。记为 $D\vec{f}(x_0)$, 也称为 $\bar{f}$ 在 x_0 处的 $Jacobi$ 矩阵。

5.2 多元向量值函数微分的运算法则

向量值函数 f,g 都在 x 处可微，u 是在 x 处可微的数量值函数

(1)$D(f+g)=Df(x)+Dg(x)$

(2)$D\langle f,g\rangle(x)=(f(x))^TDg(x)+(g(x))^TDf(x)$

(3) $D(u\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=uD\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})Du(\boldsymbol{x})$

(4) 若 $f:R\rightarrow R^3,g:R\rightarrow R^3$ 则

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{D}g(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

(5) 链式法则 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$

$$Dw(x_0)=Df(g(x_0))Dg(x_0)$$

5.3 由方程组确定的隐函数的微分法

函数方程组 $\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=0 \\ F_2(x,y,u,v)=0, \end{cases}$ 满足 $F_i\in C^{(1)}(U(x_0,y_0,u_0,v_0)),i=1,2;$ $Jacobi$ 行列式 $J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0$, 于是有

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,u_0,r_0)} & =-\frac{1}{J}\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,r_0)} \\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} & =-\frac{1}{J}\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,x)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,r_0)} \end{cases}$$

此外还可以两边同时求全微分，然后解线性方程组来解决该问题。

5.4 例题

例 5.4.1. （直接求导）设有二元向量值函数 $f(x,y)=\left(x^3,xy,y^2\right)^T$，试求 f 在点 $(1,1)^T$ 处的导数和微分。

解答 $\because Df(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2 & 0\\ y & x\\ 0 & 2y\end{pmatrix}$

代入得:$Df(1,1)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$\therefore df(1,1)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\Delta x\\ \Delta x+\Delta y\\ 2\Delta y\end{pmatrix}$

例 5.4.2. （隐函数求导）求由以下方程组确定的隐函数的导数

$$\begin{cases} xu+yv=0,\\ yu+xv=1,\end{cases}\qquad 求\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y};$$

解答

方程两边同时对 x 求导有:

$$\begin{cases} u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ v+y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

解得:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{vy-ux}{x^2-y^2}$$

同样地，方程两边同时对 x 求导有:

$$\begin{cases} v+x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ u+y\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{vy-ux}{x^2-y^2}$$

6 多元函数微分的应用

6.1 空间曲线

定义 6.1.1. 空间曲线： 设有连续映射 $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))(\alpha \le t \le \beta)$，当 t 在 $[\alpha, \beta]$ 上变化时，向径 OP 终点 P 的轨迹就是一条空间曲线 Γ。其方程为：$\vec{r} = \vec{r}(t) = (t) = (x(t), y(t), z(t))$ 或 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

定义 6.1.2. 有向曲线： 规定 t 增大的方向为 Γ 的正向，规定了正向的曲线称为有向曲线。

定义 6.1.3. 空间曲线的切线： 过曲线 Γ 上过点 P_0 的割线 P_0P 当点 P 沿曲线趋于点 P_0 时的极限位置 P_0T 即为此曲线 Γ 在 P_0 处的切线.

定义 6.1.4. 空间曲线的法平面： 过曲线 Γ 上过点 P_0 且与点 P_0 处的切线垂直的直线称为此曲线 Γ 在 P_0 处的法线。点 P_0 的法线位于同一平面内，称为 Γ 在 P_0 处的法平面。

注：设空间曲线的方程为 $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))(\alpha \le t \le \beta), P_0$ 对应于 $t = t_0; P$ 对应于 $t = t_0 + \Delta t$ 。割线 P_0P 的一个方向向量为 $\Delta\vec{r}$，有：

切向量：$\vec{\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$；

切线：$\frac{x-x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y-y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z-z_0}{\dot{z}(t_0)}$；

法平面：$\dot{x}(t_0)(x - x_0) + \dot{y}(t_0)(y - y_0) + \dot{z}(t_0)(z - z_0) = 0.$

对于一般式方程 $\Gamma : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$，在 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处，切向量 $\varepsilon = (1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0))$ (将 Γ 表示为 $\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$)

进而可以计算出**切线**和**法线**的方程。

6.2 空间曲面

设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$ ，有：

（1）切平面公式：$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

（2）法线公式：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

若空间曲面方程为 $z = f(x, y)$：

令 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$，可得到：

切平面公式: $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

此外，可以将曲面上的曲线表示为:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}[u(t),v(t)]=(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t)))$$

6.3 弧长

定理 6.3.1. （弧长的计算公式） 设在 $[\alpha,\beta]$ 上 $\dot{r}(t)$ 连续且 $\dot{r}(t)\neq 0$, 则曲线 $r=\boldsymbol{r}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 是可求长的曲线, 且 Γ 的长度为

$$\boxed{s=\int_{\alpha}^{\beta}\|\dot{r}(t)\|\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}\ \mathrm{d}t}$$

平面曲线是空间曲线的特例 $(z=0)$, 因此, 对于平面曲线 $\Gamma: x=x(t),y=y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$, 其弧长为

$$\boxed{s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\ \mathrm{d}t}$$

从而有 (1) 若平面曲线 Γ 在直角坐标系下的方程是

$$y=y(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

$$\boxed{s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\ \mathrm{d}x}$$

(2) 若平面曲线 Γ 在极坐标下的方程是

$$\rho=\rho(\theta)\quad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta),$$

则 Γ 有参数方程 $x=\rho(\theta)\cos\theta,y=\rho(\theta)\sin\theta(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$, 于是 Γ 的弧长为

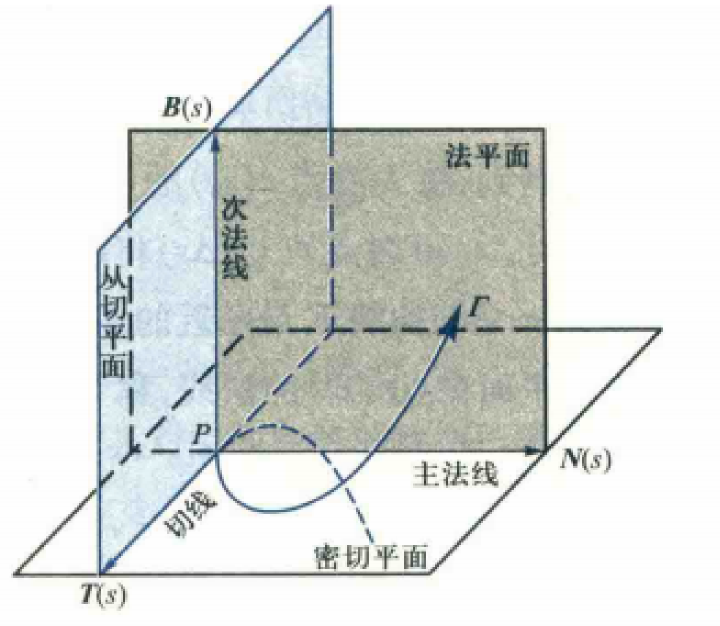
$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\ \mathrm{d}\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\ \mathrm{d}\theta$$

定义 6.3.2. **弧微分**称 $ds=\|\dot{r}(t)\|dt=\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}dt$ 为弧长 $s(t)$ 的弧微分，简称**弧微分**。

以弧长 s 为参数的方程 $r=r(t(s))$. 其中 s 为曲线的自然参数, 该形式会为讨论曲线问题带来方便。

6.4 曲率与挠率

6.4.1 Frenet 标架



切线的方向向量: $\boldsymbol{T}(s_0)=\boldsymbol{r}'(s_0)=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)}{\|\boldsymbol{r}(t_0)\|}$

切线：$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s_0)+\lambda\boldsymbol{r}'(s_0)$

次法向量： $\boldsymbol{B}(s_0)=\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}''(s_0)=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)}{\|\boldsymbol{r}(t_0)\times\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)\|}$

次法线：$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s_0)+\lambda\boldsymbol{r}'(s_0)\times\boldsymbol{r}''(s_0)$

主法向量：$N(s_0)=B(s_0)\times T(s_0)$

主法线: $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}(s_0)+\lambda\boldsymbol{B}(s_0)\times\boldsymbol{T}(s_0)$

密切平面: $\boldsymbol{B}(s_0)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0))=0$

从切平面: $\boldsymbol{N}(s_0)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0))=0$

法平面: $\boldsymbol{T}(s_0)\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(s_0))=0$

6.4.2 曲率

定义 6.4.1. **曲率**

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

计算公式：

$$\kappa(s) = \|\boldsymbol{r}''(s)\|$$
$$\kappa(t) = \left\| \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \boldsymbol{r}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|^3} \right\|$$
$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\left[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right]^{3/2}}$$
$$\kappa = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}$$

定义 6.4.2. **曲率半径与曲率圆**

曲率半径：$\frac{1}{\kappa}$

曲率圆：圆心在法线上，与曲线相切的，以 $\frac{1}{\kappa}$ 为半径的圆。

定义 6.4.3. **挠率** $\tau(s) = -\boldsymbol{B}'(s) \cdot \boldsymbol{N}(s)$ 导出式:

$$\tau(s) = \frac{[\boldsymbol{r}'(s)\boldsymbol{r}''(s)\boldsymbol{r}'''(s)]}{\|\boldsymbol{r}''(s)\|^2}$$
$$\tau(s) = \frac{[\boldsymbol{r}(t)\boldsymbol{r}(t) \quad \boldsymbol{r}(t)]}{\|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)\|^2} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) \neq 0)$$

6.5 例题

例 6.5.1. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线和法平面方程。

解答 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的法向量为 $n_1 = \{1, -2, 1\}$,

曲面 $x + y + z = 0$ 的法向量为 $n_2 = \{1, 1, 1\}$

有 $\varepsilon = n_1 \cdot n_2 = -3i + 3k$

$\therefore$ 切线方程为: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{3}$, 法平面方程为 $-3(x-1) + 3(z-1) = 0$, 即 $x - z = 0$

例 6.5.2. 求曲线 $r=\left(t,-t^2,t^3\right)$ 上的与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程。

解答 平面的法向量为: $(1,2,1)$,
设曲线上的点 $\left(a,-a^2,a^3\right)$ 与法向量垂直，即 $1-4a+3a^2=0$,
解得 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{3}$,
切线为: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$ 或 $\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$

例 6.5.3. 求曲面 $z=xy$ 的法线，使它与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直。

解答 曲面 $z=xy$ 上 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\{y_0,x_0,-1\}$, 与平面垂直,
得 $y_0=\frac{x_0}{3}=-1$,
解得 $x_0=-3,x_0=-3,z_0=3$,
得所求法线为: $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$

Part II

多元函数积分学

7 多元数量值函数积分的性质

要求下列性质能够熟记并熟练地运用到题目中:

性质 7.0.1. 设函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上可积，则

1.**线性性质：** $\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

2.**对积分域的可加性：** $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, 其中 k 为常数.

3.**积分不等式：** $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, 其中 $D = D_1 + D_2$ 且 D_1, D_2 没有交集.

4.**积分中值定理：** $\iint\limits_D\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = A, A$ 为区域 D 的面积.

5. 若在平面有界闭区域 D 上有 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, 则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, 特别地, 若 $f(x,y),g(x,y)$ 在 D 上连续, $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ 且不恒等, 则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y < \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

例 7.0.2. 计算二重积分 $I = \iint\limits_D \sqrt{1-\sin^2(x+y)}dxdy$ 其中 D: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

解答 分析: 注意开根号要加绝对值

容易出现的错误解法:

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1-\sin^2(x+y)}dxdy = \iint\limits_D \cos(x+y)dxdy = 0$$

正确解法:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \sqrt{1-\sin^2(x+y)}dxdy = \iint\limits_{D1} \cos(x+y)dxdy - \iint\limits_{D2} \cos(x+y)dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x+y)dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1)dx = \pi - 2
\end{aligned}$$

例 7.0.3. 设 D: $x^2+y^2 \leqslant t^2$, 求极限 $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \iint\limits_D \cos(x+2y)dxdy$.

解答 解：由积分中值定理:

$$\iint_D \cos(x+2y)dxdy = \cos(\zeta+2\eta)\cdot\pi t^2$$

故

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\iint_D \cos(x+2y)dxdy = \pi$$

8 重积分的计算

二重积分的计算是多元函数积分计算的基础，必须熟练掌握定积分换元法，正确求解。注意累次积分交换顺序时积分上下限的变化.

性质 8.0.1. **二重积分的奇偶对称性质**

设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，记二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\delta$

1. 当 D 关于 y 轴对称时，

（1）若在 D 上，$f(-x,y)=-f(x,y)$，则 $I=O$；

（2）若在 D 上，$f(-x,y)=f(x,y)$，则 $I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$, 其中 D_1 是 D 中 $x\geqslant 0$ 的部分.

2. 当 D 关于 x 轴对称时，

（1）若在 D 上，$f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $I=O$；

（2）若在 D 上，$f(x,-y)=f(x,y)$，则 $I=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$, 其中 D_2 是 D 中 $y\geqslant 0$ 的部分.

3. 当 D 关于原点对称时，

（1）若在 D 上，$f(-x,-y)=-f(x,y)$，则 $I=O$；

（2）若在 D 上，$f(-x,-y)=f(x,y)$，则 $I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$, D_2、D_2 意义同以上三种情况中（1）、（2）也分别统称为奇对称、偶对称.

4. 当 D 关于直线 $y=x$ 对称时，

（1）$\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma \iint\limits_{D_2} f(y,x)d\sigma =$ （2）若在 D 上，$f(x,y)=-f(y,x)$，则 $I=O$；

（3）若在 D 上，$f(x,y)=f(y,x)$，则 $I=2\iint\limits_{D_3} f(x,y)d\sigma$, 其中 D_3 是 D 中 $y\geqslant 0$ 的部分.

例 8.0.2. 设 $D=\left\{(x,y)\mid r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$, f(x) 连续且 $f(x)>0$ 对任意的实数 a，b, 则二重积分 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\delta$ 的值为多少?

解答

因为 D 关于 y = x 对称，所以 $I=\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\delta=\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\delta$

$$2I=\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\delta+\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\delta=(a+b)\iint\limits_{D}d\delta=\frac{\pi(a+b)\left(R^2-r^2\right)}{4}$$

例 8.0.3. 设 D: $x^2+y^2\leq R^2$, 计算 $I=\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)d\delta$.

解答 **分析** 本题采取极坐标形式计算更为简便。本题积分的积分域是关于直线 y = x 对称的，那么 $\iint\limits_{D}f(x,y)d\delta=\iint\limits_{D}f(y,x)d\delta$, 再利用积分的线性性质对被积函数进行拆分合并，即可求解。

方法一：对称转换

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{D}\frac{x^2}{a^2}d\delta=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{D}x^2d\delta=\frac{1}{2a^2}\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)d\delta=\frac{1}{2a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2\cdot rdr\\&=\frac{1}{8a^2}\cdot R^4\cdot 2\pi=\frac{\pi R^4}{4a^2}\end{aligned}$$

则 $\iint\limits_{D}\frac{y^2}{b^2}d\delta=\frac{\pi R^4}{4b^2}$

$$\text{则}\quad I=\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)d\delta=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

方法二: 一般变换

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)d\delta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2\cdot\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\cdot rdr\\&=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta=\frac{R^4}{4a^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+\frac{R^4}{4b^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\\&=\frac{R^4}{8a^2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta+\frac{R^4}{8b^2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\end{aligned}$$

则

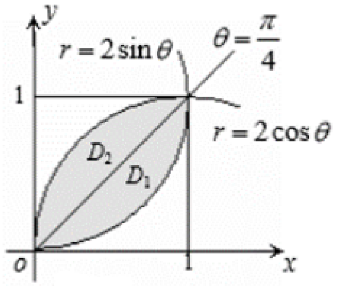
$$I=\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)d\delta=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

灵活应用积分对称变换会使解题过程变得更加明确简单。

例 8.0.4. $I=\iint_D \mathrm{x}dxdy$ 其中 D 是 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$ 与 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$ 的公共部分

解答 **分析**: 以下分别用直角坐标和极坐标来求解.

由已知，积分区域如图.



方法一: 在直角坐标系下, $D: 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-(y-1)^2}, 0 \le y \le 1$; 则

$$I=\iint_D xdxdy=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} xdx=\int_0^1\left(-1+y+\sqrt{1-y^2}\right)dy$$
$$=\left[-y+\frac{y^2}{2}+y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

方法二: 在极坐标系下, $D=D_1\cup D_2, D_1: 0\le r\le 2\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}; D_2: 0\le r\le 2\cos\theta, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$; 则

$$I=\iint_D xdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta} r\cos\theta\cdot rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\cdot rdr$$
$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta+\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta=\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

评注: 方法一中因被积函数只是 x, 所以选 D 为 y -型区域，否则过程繁杂. 方法二中区域 D 必须用直线 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 分割成两个区域，然后应用积分区域可加性进行求解.

例 8.0.5. 计算 $I=\iint_D\left(x^2+xy\right)dxdy$, 其中 $D:\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\right\}$

解答　因为区域 D 关于 x 轴对称，所以由二重积分的对称性得

$$I=\iint_D\left(x^2+xy\right)dxdy=\iint_D x^2dxdy$$

令:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

则:

$$
\begin{aligned}
&D=\left\{(r,\theta)\mid -\tfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\tfrac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\right\}\\
&I=\iint_D\left(x^2+xy\right)dxdy=\iint_D x^2dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\cos^2\theta dr\\
&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta=\tfrac{5\pi}{4}
\end{aligned}
$$

注: 此题用极坐标换元特征:

1. 被积函数 f(x, y) 中含有 x^2+y^2
2. 积分区域 D 的边界曲线上含有 x^2+y^2，此时需要作变换

$$
\begin{cases}
x=r\cos\theta\\
y=r\sin\theta
\end{cases}
$$

二重积分的证明问题偶尔也会出现，考察难度一般较高，在考试中如果出现属于难题。

例 8.0.6. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_0^\sigma f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

证明　令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$
\begin{aligned}
\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y&=\int_0^a f(x)[F(a)-F(x)]\mathrm{d}x\\
&=F(a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a F(x)\mathrm{d}F(x)\\
&=\frac{1}{2}F^2(a)=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2
\end{aligned}
$$

分段函数的二重积分为常考考点，考试难度一般较简单，属于中档题。下面给出一道例题:

9 三重积分的计算

9.1 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分

三重积分的计算方法按定义来讲仍然是“分匀合精”四步走，但不同于单元函数的积分一般不会出现通过黎曼和求极限来利用定义求积分的题目。最常用也是必须要熟练掌握的方法是将三重积分转化为累次积分（就像二重积分的做法那样），主要的类型有两个:

1. 先单后重。理解方法（请参照课本图 6.3.1）: 为先通过单积分求出一个极细柱状体对被积函数的积分（图中表现为 $\Delta\sigma$ 上方球内的小柱体），再对整个二位平面投影的所有柱状体积分（图中表现为将 $\Delta\sigma$ 在整个 σ 累加）。其物理意义由此看是比较明确的。我们将被积函数视作对应点的密度，那么两步积分相当于先算出了小柱体的质量，然后再累加求出整个三维物体的质

量。更适合求在平面内投影明确，与平面正交的方向的积分上下限也比较容易确定的积分。

2. 先重后单。这种积分比上者较为常用。理解方法（请参照课本图 6.3.1）：将要求的三维物体切成一片片极薄的扁片算出面积分，再累加到一起求出总积分。从物理角度来看，相当于先做面积分算出每个扁片的质量再求和。当满足被积函数只与一个变量有关，且用 $z = z_0$（或 $x = x_0, y = y_0$）截断时，截面面积容易计算时，则采用此方法更能体现出其优越性。

当然，掌握好三重积分最主要的是熟练运用定积分和二重积分，并具有一定的空间想象能力。计算三重积分最难的部分就是确定积分上下限，这要求对物体的三维空间形状有一定把握。必要时可以参考课本附录三中的图形，但一定要自己多想才能提高空间想象能力。

9.2 柱面坐标计算三重积分

要认识到此时体积元不再以 $dxdydz$ 表示而是以 $\rho d\rho d\varphi dz$ 表示，在将被积函数用新的正交基 (ρ, φ, z) 表示后积分过程中要乘一个 ρ 再积分。柱面坐标积分也可以分为先重后单和先单后重两种，其实柱坐标积分的本质就是将直角坐标中的重积分部分用极坐标代替。

9.3 球面坐标计算三重积分

类似于柱坐标，体积元不再以 $dxdydz$ 表示而是以 $r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ 表示，被积函数要乘一个 $r^2 \sin\theta$ 再积分。在积分区域高度球对称的情况下常用球坐标积分。在使用球坐标和柱坐标这些曲面坐标时，重点要搞清楚给定参数上下限所表示的空间范围，比如球坐标中 θ 取 $(0, \frac{\pi}{4})$ 表示从 z 轴正半轴往下，张角为 $\frac{\pi}{4}$ 的圆锥，如果再给予 r 属于 (a, b), 就会变成一个厚度为 $(b - a)$ 的球盖。要这样多考虑几种情况。

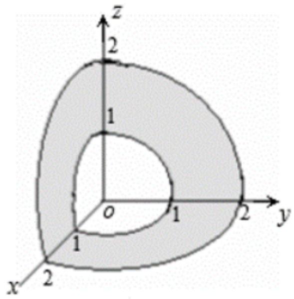
例 9.3.1. 求 $I = \iiint_v \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$ ，其中 V 是由 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0, \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转体介于 z = 2 和 z = 8 之间的几何体

解答 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0, \end{cases}$ 绕 Z 轴旋转一周的旋转面为 $z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ 故

$$I = \int_2^8 dz \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = 336\pi$$

要点：记住旋转面表达式的求法

例 9.3.2. 计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^n}} dxdydz$, 其中 n 为正整数, 积分域 Ω 由 $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ 确定.



解答 积分区域 Ω 如图. 在球坐标系下，积分区域可表为

$$\Omega : 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$\therefore I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^n}} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{r^n} \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_1^2 r^{2-n} dr = \frac{4\pi}{3-n}\left(2^{3-n} - 1\right)$$

显然，上述结果中, $n \neq 3$; 但依题意, n 有取 3 的可能！所以当 $n = 3$ 时，仍需计算 I; 即 $n = 3$ 时，有

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{r^3} \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$= \int_0^{2n} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_1^2 \frac{1}{r} dr = 4\pi \int_1^2 r^{-1} dr = 4\pi \cdot \ln 2$$

$$故 I = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-n}\left(2^{3-n} - 1\right), & n \neq 3 \\ 4\pi \cdot \ln 2, & n = 3 \end{cases}, (n \text{ 为正整数})$$

评注: 虽然本例避开了被积函数不存在的问题, 但有些题是避免不了的, 解决的办法就是反常 (广义) 重积分的计算方法. 此例中的 n 正象俗话说的是一个”陷阻”，解题时，各种情况若考虑的不周全，往往落入其中，需时刻警惕.

例 9.3.3. 求

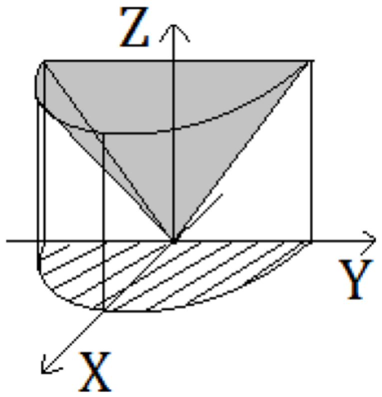
$$I = \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2z}} z^3 dz$$

解答 **分析**: 通过累次积分的上下限来得到被积区域，然后交换积分顺序就可以更好地进行积分了。这种积分顺序应该逐层分析，依次确定 xyz 的范围来确定区域。

详解: 如图，先分析 y 取值范围为 $(-1,1)$，然后由 x 范围 $(0, \sqrt{1-y^2})$ 得到物体在 XOY 平面投影应该为如图所示半圆，最后 z 范围来确定图形。$z = x^2 + y^2$ 表示一个圆锥面，而 $z = 1$ 为一个

平面，z 最终取值在两者之间，从而得到物体原貌。当然在交换积分顺序过程中，我们也可以采用其他坐标系进行求解这题用柱坐标系较为方便。

$I = \int_{-1}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2z}} z^3 dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{1} \rho d\rho \int_{\rho}^{1} z^3 dz = \frac{\pi}{12}$



10 重积分的应用

重积分在物理和工程之中有很多应用，这里介绍四种常见的应用类型，分别是计算平面面积，立体体积，曲面面积，质心坐标和转动惯量。

对于平面面积与例题体积，可以根据重积分的几何含义直接导出；曲面面积可以运用化曲为直的思想，运用微元积分法求得；质心坐标与转动惯量可由定义转化为重积分定义式求得，下面依次说明。

10.1 计算平面图形的面积和立体体积

利用 $\iint d\sigma$ 可以求得平面图形 D 的面积，同理利用 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$ 或者 $\iiint dv$ 可以计算立体的体积。

例 10.1.1. 计算曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积

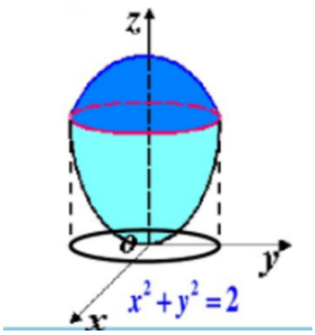
解答 解: 交线 $\begin{cases} z = 6 - 2x^2 - y^2 \\ z = x^{2+2y^2} \end{cases}$ 在 xoy 面上投影为:

$$x^2 + y^2 = 2$$

所求立方体的体积为:

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 \\
&= \iint_D \left[\left(6 - 2x^2 - y^2\right) - \left(x^2 + 2y^2\right)\right] d\sigma \\
&= 3 \iint_D \left(2 - x^2 - y^2\right) d\sigma = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \rho^2\right) \rho d\rho \\
&= 6\pi
\end{aligned}
$$

该类题目应该准确画出对应几何图形，明确计算方法。

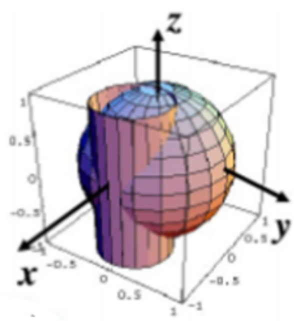


10.2　计算曲面的面积

设一曲面上微元截曲面为 dS，截切平面为 dA，则有 $dS \approx dA$ ，故可应用公式:

$$d\sigma = \cos\gamma dA$$

例 10.2.1. 求球面，$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 含在圆柱体 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的那部分面积



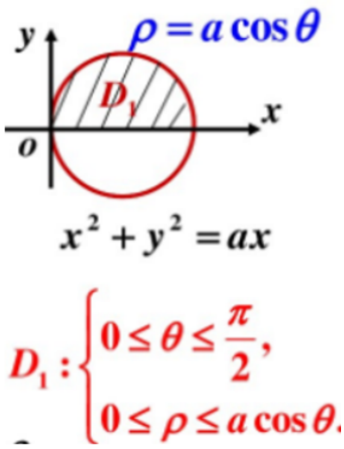
解答　由对称性可知:

$$A = 4A_1$$

$$D_1 : x^2 + y^2 \leqslant ax(x, y \geqslant 0)$$

曲面方程:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$



于是面积为:

$$A = 4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$
$$= 4\iint\limits_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$
$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho$$

10.3　计算重心

由公式:

$$\overline{x_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}$$

$$\overline{y_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}$$

$$\overline{z_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}$$

可得:

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dV}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dV}$$

平面重心计算方法同理:

例 10.3.1. 求密度均匀的上半粗球体的重心

解答 设粗球体由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1, z \geqslant 0$ 表示。借助对称性可知 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ 。又由 ρ 为常数，所以:

$$\bar{z} = \frac{\iiint zdV}{\int_V dV} = \frac{\iiint zdxdydz}{\frac{2}{3}\pi abc}$$

又:

$$\iiint_V zdxdydz = \frac{\pi}{4}abc^2$$

故可得:

$$\bar{z} = \frac{\pi}{4}abc^2 / \frac{2\pi}{3}abc = \frac{3c}{8}$$

即求得上半桶球体的重心坐标为 (0, 0, 3c/8)

此类问题应用公式后计算准确，不难解决。

10.4 计算转动惯量

由质点系的转动惯量公式:

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)d\sigma$$
$$I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)d\sigma$$

可导出连续体的转动惯量公式:

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)d\sigma$$

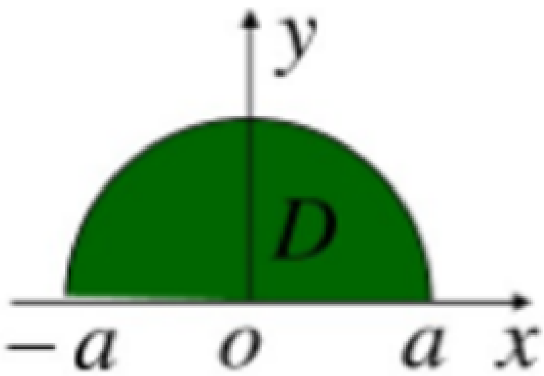
$$I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)d\sigma$$

例 10.4.1. 求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量。

解答

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant a^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

建立如图坐标系：



$$
\begin{aligned}
I_x &= \iint_D \mu y^2 dxdy = \mu \iint_D \rho^3 \sin^2\theta d\rho d\theta \\
&= \mu \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{1}{8}\pi\mu a^4 = \frac{1}{4}Ma^2
\end{aligned}
$$

[总结]：重积分应用考题相对程式化，规律性很强，主要考察同学们的计算能力，高数下的考试题目也是如此，会做并不难做到，但是算对还是需要大量练习才能做到。

11 含参变量积分与反常重积分

11.1 被积函数含参变量的积分

该类函数为变量的函数，其变量含在被积函数中，可以与一元函数积分学相对比理解这一概念。

其表达式为:

$$\phi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dy$$

X 便为参变量，上式称为含参变量的积分，含参变量的性质有连续性，可积性，可微性，其内容及证明详见课本，不再责述。

11.2 积分限含参变量的积分

该类函数也为变量的函数，不过其变量含于积分的上下限中，可以联想一元函数积分学中的变上限或变下限积分。

其表达式为:

$$\phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy$$

也为参变量 x 的积分，该积分也具有连续可微的性质，其内容与证明详见课本，不再赘述。

11.3 例题

有一类题目为应用该类积分计算一元函数积分，该类题目特征较为明显，其大致思路便是将一元积分式内的减式化为常见积分式，从而将原式化为重积分式，再用自己已有的积分方法计算重积分，举一例说明:

例 11.3.1. 求 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{Inx}dx(0<a<b)$

解答 解：由被积函数的特点想到积分:

$$\int_a^b x^y dy=\left[\frac{x^y}{\text{In}\,x}\right]_a^b=\frac{x^b-x^a}{\text{In}\,x}$$

所以:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy\\&=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx\\&=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy\\&=\int_a^b\frac{1}{y+1}dy\\&=\text{In}\,\frac{b+1}{a+1}\end{aligned}$$

对于积分限含参变量的积分，也有可能会考察其可微性，即:

$$\phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$$

在 [a，b] 上可微，且:

$$\phi'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)dy+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

也举一例可体会其应用:

例 11.3.2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$

解答 法一：构造积分

$$G=I^2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\iint e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

转化为极坐标，则：

$$G=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr=-\pi e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}=-\pi(0-1)=\pi$$

所以:

$$I=\sqrt{G}=\sqrt{\pi}$$

法二：联系第二型欧拉积分:

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}dx$$

因此换元

$$t=x^2$$

所以

$$x=\sqrt{t}$$

$$dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-t}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

利用余元公式计算:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

可以得到:

$$I=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

12 第一型线积分和第一型面积分

12.1 第一型线积分

定义式为:

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$$

对于第一型曲线积分，首先要理解其含义，可以联想大学物理中由线密度求杆的质量这类模型，在线积分中无积分方向，由定义式可知，线积分是函数值与微元弧长的标量相乘再求和的结果，应在定义上与下一节的第二型曲线积分相区别。

考试中常常会考察第一类曲线积分的计算，计算则分为三步：首先代入曲线方程，得到第一型曲线积分; 其次观察积分式，判断该曲线是否关于 x 或者 y 轴对称，是否具有轮换对称性

等等，如果具有对称性，可根据对称性对积分式进行变换处理; 最后通过参数方程将线积分式化为定积分式，进行定积分计算即可。

12.2 常用公式

第一型曲线积分的计算公式

1. 曲线

$$L:\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

则:

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

2. 曲线

$$L: y=\psi(x)a \leqslant x \leqslant b$$

则:

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx$$

3. 曲线

$$L: x=\psi(y)c \leqslant x \leqslant d$$

则:

$$\int_L f(x,y)ds=\int_c^d f[\phi(y),y]\sqrt{1+\phi'^2(y)}dy$$

4. 若积分曲线 L 关于 x 轴对称，则:

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases} 0, f(x,-y)=-f(x,y) \\ 2\int_{L_1} f(x,y)ds, f(x,-y)=f(x,y) \end{cases}$$

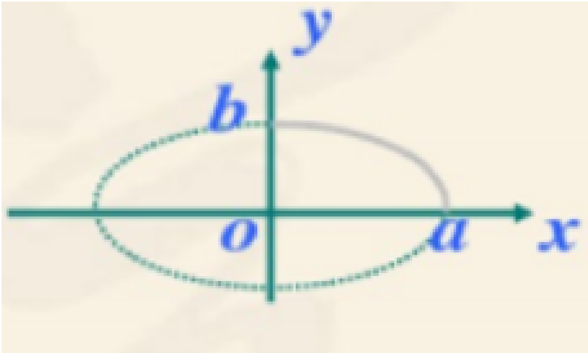
L1 为 x 轴上方或者下方的曲线部分，关于 y 轴对称也有类似性质。

5. 若积分曲线 L 关于变量 xy 具有轮换对称性，即积分变量 x 或者 y 积分曲线 L 的方程不变，或者积分曲线 L 关于 y = x 对称，则有:

$$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds=\frac{1}{2}\int_L [f(y,x)+f(x,y)]ds$$

12.3 例题

例 12.3.1. 求 $I=\int_L xyds$, 其中粗圆: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ [第一象限]



解答 解:

$$x=\phi(t)=a\cos t$$

$$y=\psi(t)=b\sin t$$

$$\phi'(t)=-a\sin t$$

$$\psi'(t)=b\cos t$$

对于 t:

$$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$$

则:

$$\begin{aligned}
\int_L xyds&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos tb\sin t\sqrt{(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2}dt\\
&=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}dt\\
&=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2t+b^2}d\left(\sin^2t\right)\\
&=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2t+b^2}d\left[\left(a^2-b^2\right)\sin^2t+b^2\right]\\
&=\frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\cdot\frac{2}{3}\left[\left[\left(a^2-b^2\right)\sin^2t+b^2\right]^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}
\end{aligned}$$

13 第一型面积分

13.1 第一型曲面积分

定义式

第一型曲面积分的计算和第一型线积分计算大同小异，可以通过口诀”一投二代三变换”记忆，这只是描述了面积分和线积分区别，笔者个人认为通过定义式理解记忆后计算也不难做到，第一型面积分可以类比到已知面密度求曲面质量，同样也是面密度和曲面微元的标量乘积再求和的结果，也应与下一节的第二型曲面积分相区别。

13.2 常用公式

1. 设有光环曲面 $S: z = z(x, y), (x, y) \in D$, f 为 S 上的连续函数，则“一投二代三变换”
2. 类似的，如果光滑曲面 S 由方程 x = (y, z) 描述，则:
3. 如果光滑曲面 S 由方程 y = (x, z) 描述，则:
4. 对称性如果曲面 Σ 关于 xoy 平面对称，平面 $\sum_1$ 为 xoy 上部的曲面，则:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0 \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS \end{cases}$$

若 f 为奇函数，积分为 0, 若 f 为偶函数，积分为

$$2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS$$

关于 yoz，xoz 平面对称同理。如果曲面 Σ 上，xyz 具有轮换对称性，则:

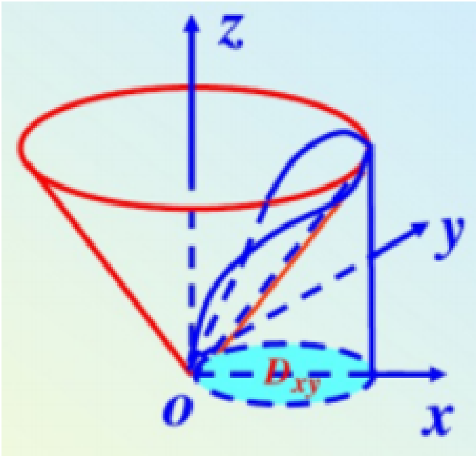
$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(y, z, x) dS = \iint_{\Sigma} f(z, x, y) dS \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)] dS \end{aligned}$$

13.3 例题

例 13.3.1. 计算 $\iint_{\Sigma}(xy + yz + zx) dS$，其中 Σ 是由维面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截的有限部分。

解答 因为

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



故:

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

因为 Σ 关于 xoy 面对称，而

$$y = \pm\sqrt{z^2-x^2}$$

被积函数中 xy, yz 都是 y 的奇函数。

所以:

$$\iint_\Sigma xydS = \iint_\Sigma yzdS = 0$$
$$\iint_\Sigma (xy+yz+zx)dS = \iint_\Sigma zxdS$$

所以:

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma (xy+yz+zx)dS = \iint_\Sigma zxdS = \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy \\
&= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{2a\cos\phi} \rho^3\cos\phi d\rho \\
&= 4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\phi d\phi = 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\phi d\phi \\
&= 8\sqrt{2}a^4\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4
\end{aligned}$$

例 13.3.2. 计算曲面积分 $I = \iint_\Sigma (ax+dy+cz+d)^2dS$, 其中曲面为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$

解答

$$\begin{aligned}
I &= \iint_\Sigma (ax+dy+cz+d)^2dS \\
&= \iint_\Sigma \left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2+2abxy+2bcyz+2adx+2bdy+2cdz\right)dS
\end{aligned}$$

由对称性可知:

$$\iint_{\Sigma} xdS = \iint_{\Sigma} ydS = \iint_{\Sigma} zdS = \iint_{\Sigma} xydS = \iint_{\Sigma} yzdS = \iint_{\Sigma} xzdS = 0$$

由坐标的轮换对称性可知:

$$\iint_{\Sigma} x^2dS = \iint_{\Sigma} y^2dS = \iint_{\Sigma} z^2dS = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS$$

所以:

$$\begin{aligned}
I &= \left(a^2+b^2+c^2\right)\iint_{\Sigma} x^2dS + d^2\iint_{\Sigma} dS \\
&= \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\iint_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS + d^2\iint_{\Sigma} dS \\
&= \left[\frac{1}{3}R^2\left(a^2+b^2+c^2\right)+d^2\right]\iint dS \\
&= 4\pi R^2\left[\frac{1}{3}R^2\left(a^2+b^2+c^2\right)+d^2\right]
\end{aligned}$$

14 第二型线积分与面积分

14.1 场的概念

理解场的概念，区分数量场和向量场，定常场和非定常场。理解场函数、场域的概念，等值线与等值面。

14.2 第二型线积分

理解第二型线积分的概念（力场做功），掌握第二型线积分的性质和基本计算方法，理解两类线积分的区别与联系。

计算方法:

1. 运用参数方程直接计算，将 dx、dy 用所选参数 dt 代入计算（注意在换元的同时改变积分上下限）。

2. 用 Green 公式将第二型线积分化为二重积分计算。

3. 对于不满足 *Green* 公式的积分, 可以通过补线构造 Green 公式的形式计算.

4. 利用线积分与路径无关来改换简单路径进行积分, 具体步骤: 一、判定在单连域 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 内 $\partial P \partial y = \partial Q \partial x$ 是否满足; 二、改换路径，利用原函数求解积分 (原函数求法: 偏积分法和奏微分法)。

5. 对于闭合曲线，需要考察有无奇点，选用适当闭曲线挖去奇点。

6. 利用两类线积分的联系，将第二型线积分转化为第一型线积分求解。

例 14.2.1. 计算 $\oint_L \left(x+y^3\right) ds$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$ 正向。

解答 根据对称性可得，$\oint_L \left(x+y^3\right) ds=\oint_L xds+\oint_L y^3 ds=0$
对 $\oint_L xds$, 因积分曲线 L 关于 y 轴对称，被积函数 x 是 L 上关于 x 的奇函数 $\Rightarrow \oint_L xds=0$
对 $\oint_L y^3 ds$ ，因积分曲线 L 关于 x 轴对称，被积函数 y^3 是 L 上关于 y 的奇函数 $\Rightarrow \oint_L y^3 ds=0$

例 14.2.2. 已知 $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, L$ 的长度为 a, 求 $\oint\left[3x^2+4y^2-\sin(xy)\right] ds$ 。

解答 $L: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 即 $3x^2+4y^2=12$,
$\therefore \oint\left(3x^2+4y^2\right) ds=\oint_L 12ds=12a$
又 L 关于 x 轴对称，而 $\sin(xy)$ 关于 y 为奇函数，所以 $\oint_L \sin(xy) ds=0$ 。
$\therefore$ 原式 $=12a.$

14.3 第二型面积分

理解第二型面积分的概念（流量问题），掌握第二型面积分的性质和基本计算方法，理解两类面积分的区别与联系，准确区分被积曲面内外侧，判断第二型面积分化为第一型面积分时符号如何确定。计算方法：

1. 直接法：运用第二型面积分计算公式，直接求解（“一投二代三定号”）。

2. 利用两类曲面积分的联系，将第二型面积分用第一型面积分来计算。

3. 将三个坐标面的积分转化为一个面上的积分计算，注意所取曲面的侧和符号的选取（若积分曲面 $\sum$ 在 xoy 平面上投影区域 D_{xy} 比较简单，则将积分曲面 $\sum$ 的方程写为 $z=z(x,y)$, 求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$, 则 $\iint_\Sigma Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iint_\Sigma\left[P\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Q\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R\right] dx\wedge dy=\pm\iint_{D_{xy}}\left[P\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Q\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R\right] dx\wedge dy$, 类似方法可在 yoz 、zox 上投影。

4. 利用 Guass 公式，有时需要补面构造 Guass 公式的形式。

例 14.3.1. 计算 $\iint_\Sigma xyzdx\wedge dy$, 其中 $\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 的部分.

解答 将 Σ 分为 $\Sigma_1(z<0)$ 和 $\Sigma_2(z>0)$ 两部分，
$\Sigma_1: z_1=-\sqrt{1-x^2-y^2}$

$\Sigma_2 : z_2 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} xyzdx \wedge dy &= \iint_{\Sigma_2} xyzdx \wedge dy + \iint_{\Sigma_1} xyzdx \wedge dy \\
&= \iint_{\sigma_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy - \iint_{\sigma_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy \\
&= 2\iint_{\sigma_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \\
&= 2\iint \sigma_{xy}\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho d\varphi \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

例 14.3.2. 计算 $\oiint_{\Sigma} dx \wedge dy + (x+1)dy \wedge dz + ydz \wedge dx$, 其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。

解答 $\Sigma_1 : x=0, \Sigma_2 : y=0, \Sigma_3 : z=0, \Sigma_4 : x+y+z=1$

$\oiint_{\Sigma} dx \wedge dy = \iint_{\Sigma_3} dx \wedge dy + \iint_{\Sigma_4} dx \wedge dy$

$= -\iint_{D_{xy}} dxdy + \iint_{D_{xy}} dxdy = 0$

$\oiint_{\Sigma}(x+1)dy \wedge dz = \iint_{\Sigma_1}(x+1)dy \wedge dz + \iint_{\Sigma_4}(x+1)dy \wedge dz$

$= -\iint_{D_{yz}} dydz + \iint_{D_{yz}}(2-y-z)dydz = \iint_{D_{yz}}(1-y-z)dydz$

$\oiint_{\Sigma} ydz \wedge dx = \oiint_{\Sigma_2} ydz \wedge dx + \oiint_{\Sigma_4} ydz \wedge dx$

$= \iint_{D_{xz}}(1-x-z)dxdz$

$\therefore$ 原式 $= 2\iint_{D_{xz}}(1-x-z)dxdz = \frac{1}{3}$

15 各种积分的联系及其在场中的运用

15.1 Green 公式

准确判别连通区域（D）是单连通域还是复连通域，熟练掌握及运用 Green 公式。Green 公式建立了平面区域 (σ) 上的二重积分与沿 (σ) 的边界曲线 (C) 的第二型线积分之间的联系，即: 函数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 在域 (σ) 上的二重积分可分别由它们的 "原函数" P 和 Q 在 (σ) 的边界 (C) 上的值确定。用好此式需要注意补线法、折线法。注意线积分变成了重积分，重积分是区间内的积分（变量之间没关联），而线积分是边界上的积分（变量之间有关联), 不能弄混。运用: 求平面区域的面积 $\oint_{(C)} -ydx + xdy = 2\iint_{(D)} dxdy = 2S$ 见下例。

例 15.1.1. 求星型曲线 $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 所围成的面积。

解答　C 的参数方程为 $\begin{cases} x = a(\cos t)^3 \\ y = a(\sin t)^3 \end{cases}, t \in (0, 2\pi)$

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\oint_{(C)} -ydx + xdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t \cdot a \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t + a\sin^3 t \cdot a \cdot 3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t\right]dt \\
&= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t \cdot \cos^2 t dt \\
&= \frac{3\pi a^2}{8}
\end{aligned}
$$

【Green 公式运用】（线积分）

利用公式的时机		被积函数很复杂或积分路径很复杂或明显的 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
L 封闭时	D 内无奇点	直接利用公式化成二重积分
	D 内有奇点	用辅助闭曲线去掉奇点后利用公式，再减去辅助曲线上 的积分
L 不封闭时	$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	积分与路径无关，可以改变积分路径或选择简单的路径【一般选择平行于坐标轴的折线段】
	$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$	用辅助曲线封闭化后利用公式，再减去辅助曲线上的积分【一般选择平行于坐标轴的折线段】
公式的独特用法—求原函数（凑全微分法，积分法）		若 $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$，则可设 $u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

【注意】封闭曲线内有无奇点的判断非常重要，这也是一个考试重点，考查对基本概念的掌握程度。Stokes 公式与 Gauss 公式仿照上表处理，活学活用，灵活处理。

例 15.1.2. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段。计算 $I = \int_L 3x^2ydx + \left(x^3 + x - 2y\right)dy$ 。

解答　设点 O(0,0), A(2,0), B(0,2), 补充线段 BO, 且设由曲线弧 OA 和 AB 线段 B O 所围成的

区域为 D，则由格林公式有

$$I=\int_L 3x^2ydx+\left(x^3+x-2y\right)dy \quad =\int_{L+}\overline{BO}3x^2ydx+\left(x^3+x-2y\right)dy-\int\frac{3}{BO}3x^2ydx+\left(x^3+x-2y\right)dy$$
$$=\int_D\left(3x^2+1-3x^2\right)dxdy-\int_0^2(-2y)dy \quad =\frac{\pi}{2}-4$$

例 15.1.3. 计算 $\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+9y^2}$, 其中 C 是以点 A(2,0) 为圆心，半径为 $R(R\neq 2)$ 的圆周，取逆时针方向。

解答　$P=\frac{-y}{x^2+9y^2},Q=\frac{x}{x^2+9y^2}\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{9y^2-x^2}{\left(x^2+9y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$
当 R < 2 时,$\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+9y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$
当 R > 2 时，在 C 所围成的区域内做正向粗圆 $C_\delta: x^2+9y^2=\delta^2$, 则在 C 与 C_δ 负向所围成的复连通域 D 上满足 Green 公式的条件，
故 $\oint_{C+C_\delta}\frac{xdy-ydx}{x^2+9y^2}=\oint_C-\oint_{C_\delta}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0\Rightarrow\oint_C=\oint_{C_\delta}$
$I=\oint_{C_\delta}\frac{xdy-ydx}{x^2+9y^2}=\frac{1}{\delta^2}\oint_{C_\delta}xdy-ydx=\frac{2}{\delta^2}\iint_{D_\delta}dxdy=\frac{2}{\delta^2}\cdot\pi\cdot\frac{\delta}{3}\cdot\delta=\frac{2\pi}{3}$

注：1. 桶圆面积公式: $S=\pi ab$ 。2. “挖空”要看被积函数具有什么形式，圆、粗圆或其他曲线。

例 15.1.4. 求下列积分：(1) $\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$, 其中 L 为三顶点分别为 (0,0) 、(3,0) 和 (3,2) 的三角形正向边界。

解：设 L 所围成的区域为 $D,P=2x-y+4,Q=5y+3x-6,$
$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-(-1)=4$
故由格林公式得: $\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 4dxdy=12$

(2) $\oint_L\left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\right)dx+\left(x^2\sin x-2ye^x\right)dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$

解: $P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x,Q=x^2\sin x-2ye^x$
$\frac{\partial Q}{\partial x}=x^2\cos x+2x\sin x-2ye^x=\frac{\partial P}{\partial x},$
由格林公式得: $\oint_L\left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\right)dx+\left(x^2\sin x-2ye^x\right)dy\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

(3) $\int_L\left(2xy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)dy$, 其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点 (0,0) 到 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的一段弧。

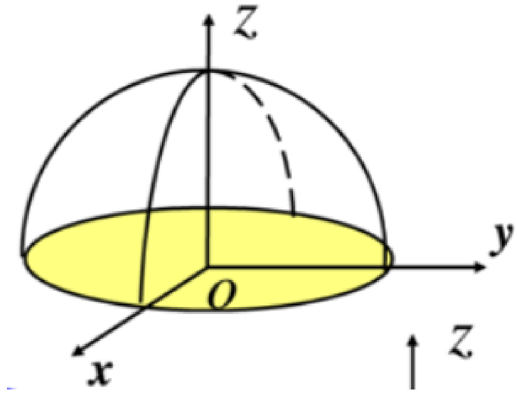
解：$P=2xy^3-y^2\cos x,Q=1-2y\sin x+3x^2y^2,$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2-2y\cos x=\frac{\partial P}{\partial y},$

由格林公式得: $\int_{L^-+OA+OB}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy=0$ ，

其中 L 、OB 、OA 及 D 如图所示，故:

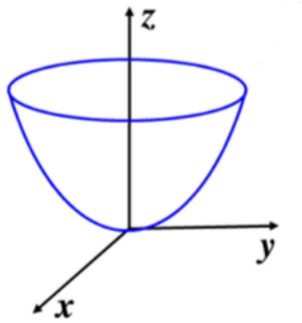
$\int_L Pdx+Qdy=\int_{OA+AB}Pdx+Qdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0dx+\int_0^1\left(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2\right)dy=\frac{\pi^2}{4}$



(4) $\int_L \left(x^2-y\right)dx-\left(x+\sin^2 y\right)dy$, 其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧。

解: $P=x^2-y, Q=-x-\sin^2 y, \frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$,

由格林公式得: $\int_{L+AB+BO} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy=0$



其中 L 、AB 、BO 及 D 如图所示，故: $\int_L \left(x^2-y\right)dx-\left(x+\sin^2 y\right)dy=\int_{BA+OB}\left(x^2-y\right)dx-\left(x+\sin^2 y\right)dy=\int_0^1-\left(1+\sin^2 y\right)dy+\int_0^1 x^2dx=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2$

15.2 平面线积分与路径无关的条件

理解并熟练运用第二型线积分与路径无关的三个等价命题，以及三个命题在单连域上成立的充要条件，理解命题的物理意义，理解保守场、无旋场和有势场之间的等价关系。学会求解势函数，方法有：一、奏微分法; 二、偏积分法。题型 1 . 证明积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关: 利用三个等价命题，以及三个命题在单连域上成立的充要条件。2. 已知积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在某单连域 D 内与路径无关，求微分式 $pdx+Qdy$ 的原函数: · 特殊路径积分: 在 D 内取一特殊点 (a, b), $U(x,y)=\int_a^x P(x,b)dx+\int_b^y Q(x,y)dy+C$ 或 $U(x,y)=\int_b^y Q(a,y)dy+\int_a^x P(x,y)dx+C$ 偏积分法 · 凑微分法 3. 已知积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在某单连域 D 内与路径无关，求 $\int_L Pdx+Qdy$: · 原函数法 · 特殊路径积分法: 构造与 C 具有同起点同终点的曲线ロロ，使得 P, Q 在 C 与 ロロ 所围

区域内没有奇点，则 $\int_C Pdx + Qdy = \int_{C^*} Pdx + Qdy$ 4. 已知积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关，求 P, Q 中的未知参数: $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

例 15.2.1. 验证向量场 $A = \left(2x\cos y - y^2\sin x\right)i + \left(2y\cos x - x^2\sin y\right)j$ 为有势场,

解答 $P(x,y) = 2x\cos y - y^2\sin x, Q(x,y) = 2y\cos x - x^2\sin y$,
则 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$,
即 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, 向量场 A 为有势场。
用全微分求积分法求势函数:

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y) + C \\
&= \int_0^x 2xdx + \int_0^y \left(2y\cos x - x^2\sin y\right)dy + C \\
&= y^2\cos x + x^2\cos y + C
\end{aligned}$$

例 15.2.2. 设曲线积分 $\int_L xy^2dx + y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 φ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy$ 。

解答 $P(x,y) = xy^2, Q(x,y) = y\varphi(x)$,
则 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right) = 2xy, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)] = y\varphi'(x)$
因积分与路径无关，所以 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \Rightarrow y\varphi'(x) = 2xy \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + C$,
由 $\varphi(0) = 0$ 知，$C = 0$, 故

$$\varphi(x) = x^2$$

$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx + y\varphi(x)dy = \int_0^1 0dx + \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}$

例 15.2.3. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值:
(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx + (x-y)dy$;
解: $P = x+y, Q = x-y$, 显然 PQ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数,
且 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, 故在整个 xOy 面内，积分与路径无关。
取 L 为点 $(1,1)$ 到 $(2,3)$ 的直线 $y = 2x-1, \times$ 从 1 变到 2, 则
$\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx + (x-y)dy = \int_1^2[(3x-1) + 2(1-x)]dx$
$\int_1^2(1+x)dx = \frac{5}{2}$
(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}\left(6xy^2 - y^3\right)dx + \left(6x^2y - 3xy^2\right)dy$;
解: $P = 6xy^2 - y^3, Q = 6x^2y - 3xy^2$, 显然 PQ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数,
且 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2$,
, 故在整个 xOy 面内，积分与路径无关。

取路径 $(1,2) \to (1,4) \to (3,4)$ 的折线，则

$\int_{(1,2)}^{(3,4)} \left(6xy^2 - y^3\right) dx + \left(6x^2y - 3xy^2\right) dy$

$\int_2^4 \left(6y - 3y^2\right) dy + \int_1^3 (96x - 64) dx = 236$

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)} \left(2xy - y^4 + 3\right) dx + \left(x^2 - 4xy^3\right) dy.$

解: $P = 2xy - y^4 + 3, Q = x^2 - 4xy^3$, 显然 PQ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数，

且 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4y^3$, , 故在整个 xOy 面内，积分与路径无关。

取路径 $(1,0) \to (1,2) \to (2,1)$ 的折线，则

$\int_{(1,0)}^{(2,1)} \left(2xy - y^4 + 3\right) dx + \left(x^2 - 4xy^3\right) dy$

$= \int_0^1 \left(1 - 4y^3\right) dy + \int_1^2 2(x+1) dx = 5$

15.3 Stokes 公式与旋度

理解并熟练运用 Stokes 公式，了解 nabla 算子，明确 Stokes 公式是 Green 公式的推广。了解环量与环量密度的计算公式，旋度 rot A 的定义及其计算公式，记忆旋度运算法则（选择填空方便用）。

例 15.3.1. 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线，从 z 轴正方向往 z 轴负方向看去为逆时针方向，求曲线积分 $\oint_L zxdx + xdy + \frac{y^2}{2} dz$。

解答　解: 用 Stokes 公式求解，得:

$$\oint_L zxdx + xdy + \frac{y^2}{2} dz = \iint_{z=x+y} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \\ dydz & dzdx & dxdy \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{z=x+y} ydydz + xdzdx + dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} (1 - x - y) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r\cos\theta - r\sin\theta) r dr = \pi$$

例 15.3.2. 计算 $I = \oint_L \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(2z^2 - x^2\right) dy + \left(3x^2 - y^2\right) dz$，其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向。

解答　设 Σ 为平面 $x + y + z = 2$ 的上侧被 L 所围成的部分，Σ 在 xoy 平面内的投影区域 $D_{xy} = \{(x,y) \| x| + |y| \leqslant 1\}$,　Σ 的单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 。

由 Stokes 公式得，

$$I = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS$$

$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma}(6+x-y)dS$
$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma}(6+x-y)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy = -2\iint_{D_{xy}}(6+x-y)dxdy$ 由二重积分的对称性质，$\iint_{D_{xy}}(x-y)dxdy = 0$,
所以 $I = -12\iint_{D_{xy}} dxdy = -24$

15.4 Gauss 公式与散度

理解并熟练运用 Gauss 公式，Gauss 公式给出了平面区域（σ）上的二重积分与（σ）边界曲线（C）上的第二型面积分之间的关系，即：函数 $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial z}$ 之和在空间域 (G) 上的三重积分可通过它们的原函数 PQ 与 R 在 (G) 的边界曲面上的值确定。理解通量与通量密度的概念，散度的定义及其计算公式，记忆散度运算法则。

例 15.4.1. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xzdydz+2yzdzdx+3xydxdy$，其中 $\sum$ 为曲面 $z = 1-x^2-\frac{y^2}{4}(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的上侧。

解答 $\sum$ 的方程为 $z = 1-x^2-\frac{y^2}{4}(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 添加一个平面 $\Sigma_1 \begin{cases} z=0 \\ x^2+\frac{y^2}{4} \leqslant 1 \end{cases}$，取下侧，则 Σ 和 Σ_1 构成闭合曲面 Σ_*，其所围区域记为 σ。故 $I = \iint \Sigma + \Sigma_1 - \iint \Sigma_1 = \oiint_{\Sigma_*} - \iint \Sigma_1$
$\iint_{\Sigma_*} xzdydz + 2yzdzdx + 2xydxdy = \iiint_{\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x}xz + \frac{\partial}{\partial y}2yz + \frac{\partial}{\partial z}3xy\right)dy$

$$= 3\iiint_{\sigma} zdxdydz = 2\int_0^1 zdz \iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z} dxdy = 6\pi\int_0^1 z(1-z)dz = \pi$$

15.5 几种主要的特殊向量场

区分空间单连域（一维单连域和二维单连域），结合 8.2 中三个等价命题理解无旋场、有势场和保守场，理解一维单连域的四个等价命题。掌握判别无源场（通量为 0）和调和场（满足 Laplace 方程）的条件。

例 15.5.1. 在上半平面 $D = \{(x,y) \mid y > 0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx,ty) = t^{-2}f(x,y)$ 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)dx - xf(x,y)dy = 0$.

解答 设 $P(x,y) = yf(x,y), Q(x,y) = xf(x,y)$，由对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有:
$\oint_L yf(x,y)dx - xf(x,y)dy = 0$ 得：$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ 成立,
即证: $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = f(x,y) + yf_y'(x,y) = -f(x,y) - xf_x'(x,y)(*)$,
由 $f(tx,ty) = t^{-2}f(x,y)$ 对 t 求导得: $yf_y{}'(x,y) + xf_x{}'(x,y) = -2t^{-3}f(x,y)$,

与 (*) 比较得: 令 t = 1, 则 $yf_y'(x,y)+xf_x'(x,y)=-2f(x,y)$,
可得（*）成立，$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ 成立。
即证。

小结曲线积分与曲面积分

积分类型	计算方法
第一类曲线积分 $I=\int_L f(x,y)ds$ 曲形构件的质量 质量=线密度×弧长	***参数法***（转化为定积分） （1）$L: y=\varphi(x)$ $I=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\varphi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$ （2）$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$ （$\alpha\le t\le\beta$）$I=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$ （3）$r=r(\theta)$ （$\alpha\le\theta\le\beta$）$L:\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$ $I=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

平面第二类曲线积分 $I=\int_L Pdx+Qdy$ 变力沿曲线所做的功	***（1） 参数法***（转化为定积分） $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$ （t单调地从α到β） $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$
	（2）利用格林公式（转化为二重积分） **条件：**①L 封闭，分段光滑，有向（左手法则围成平面区域 D） ②P，Q 具有一阶连续偏导数 **结论：**$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ **应用：**$\begin{cases}\text{满足条件直接应用}\\\text{有瑕点，挖洞}\\\text{不是封闭曲线，添加辅助线}\end{cases}$
	（3）利用路径无关定理（特殊路径法） 等价条件：① $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ ② $\oint_L Pdx+Qdy=0$ ③ $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关，与起点、终点有关 ④ $Pdx+Qdy$ 具有原函数 $u(x,y)$ （特殊路径法，偏积分法，凑微分法）
	（4）两类曲线积分的联系 $I=\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$

空间第二类曲线积分 $I=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ 变力沿曲线所做的功	***（1）参数法***（转化为定积分） $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$ $+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$ ***（2）利用斯托克斯公式***（转化第二类曲面积分） **条件：**①L 封闭，分段光滑，有向 ②P，Q，R 具有一阶连续偏导数 **结论：** $\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$ $=\iint_\Sigma(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y})dxdy$ **应用：** 满足条件直接应用；不是封闭曲线，添加辅助线

第一类曲面积分 $I=\iint_\Sigma f(x,y,z)dv$ 曲面薄片的质量 质量=面密度×面积	***投影法*** Σ： $z=z(x,y)$ 投影到 xoy 面 $I=\iint_\Sigma f(x,y,z)dv=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$ 类似的还有投影到 yoz 面和 zox 面的公式

第二类曲面积分 $I=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+$ 流体流向曲面一侧的流量	***（1）投影法*** ① $\iint_\Sigma Pdydz=\pm\iint_{D_{yz}}p(x(y,z),y,z)dydz$ Σ： $z=z(x,y)$， γ 为 Σ 的法向量与 x 轴的夹角 前侧取"+"， $\cos\gamma>0$；后侧取"－"， $\cos\gamma<0$ ② $\iint_\Sigma Qdzdx=\pm\iint_{D_{yz}}p(x,y(x,z),z)dzdx$ Σ： $y=y(x,z)$， β 为 Σ 的法向量与 y 轴的夹角 右侧取"+"， $\cos\beta>0$；左侧取"－"， $\cos\beta<0$ ③ $\iint_\Sigma Qdxdy=\pm\iint_{D_{yz}}Q(x,y,z(x,y))dxdy$ Σ： $x=x(y,z)$， α 为 Σ 的法向量与 x 轴的夹角 上侧取"+"， $\cos\alpha>0$；下侧取"－"， $\cos\alpha<0$
	（2）高斯公式右手法则取定 Σ 的侧 **条件：**① Σ 封闭，分片光滑，是所围空间闭区域 Ω 的外侧 ②P，Q，R 具有一阶连续偏导数 **结论：** $\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})$ **应用：** 满足条件直接应用；不是封闭曲面，添加辅助面
	（3）两类曲面积分之间的联系 $\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$ ***转换投影法：*** $dydz=(-\frac{\partial z}{\partial x})dxdy$ $dzdx=(-\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$

Part III

无穷级数

在一开始的高等数学学习中，我们已经学习过了数列极限等有关知识，在学习过程中，经常会遇到无限累加的过程，比如 Zeno 悖论，在数学研究中，形如如下的无限累加的研究是必要的，在以后各个领域都会有广泛的应用。形如

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

的表达式称为**无穷级数**，多数情况下写作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。在这一章中，我们将主要研究一些数项级数与函数项级数初步知识，为以后的专业课程奠定基础。

16 常数项级数

16.1 常数项级数概念，性质与收敛原理

无穷多个数的和是讨论数项级数的出发点。

定义 16.1.1. 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

的前 n 项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为这个级数的第 n 个部分和. 如果这些部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 有有限的极限 S，就说级数1是收敛的，其和记作 S，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限，就说级数1是发散的。

例 16.1.2 (等比级数，又称几何级数). 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots .$$

- 当 $|q| < 1$ 时其是收敛的，其和为 $\dfrac{1}{1-q}$；

- 当 $|q| > 1$ 时其是发散的；
- 当 $q = 1$ 时，部分和 $S_n = n$，趋于正无穷，故发散;
- 当 $q = -1$ 时，部分和 $S_{2k} = 0$，$S_{2k-1} = 1$，$k \in \mathbb{N}^+$，$\{S_n\}$ 没有极限，故发散。

例 16.1.3. 在数列那一章中已经证明了调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，推广如下：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

当 $s \leq 1$ 时发散；当 $s > 1$ 时收敛。

由于 $a_n = S_n - S_{n-1}$，$n \to \infty$ 时，$a_n \to 0$，便得到如下事实。

命题 16.1.4. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

必须注意，上述事实只是必要条件，并不充分。也就是说，从 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 无法推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，调和级数就是一个例子。这个事实可以很容易用来判别一些级数发散。

命题 16.1.5 (线性性质). 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

命题 16.1.6 (可结合性). 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，如果把级数的项任意归组而不改变其先后次序，得到新级数

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots \tag{2}$$

这里正整数 k_j，$j = 1, 2, \cdots$，满足 $k_1 < k_2 < \cdots$，那么新级数也收敛，并且与原级数有相同的和。

如果对上述性质加一点条件，那么它的逆命题也成立。

命题 16.1.7. 如果级数3在同一括号中的项都有相同的符号，那么从级数3收敛便可以推出原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，并且两者有相同的和。

命题 16.1.8. 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 前面加上有限项或者去掉有限项，不影响级数的敛散性。

16.2 正项级数

定义 16.2.1. 对于 $n = 1, 2, \cdots$，都有 $a_n \geq 0$，那么称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数。

由于有了命题16.1.7，故有有限个负项的级数也可以当做正项级数看待。

命题 16.2.2. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和 S_n 有界。

正项级数等诸多判别法都是建立在如下判别法的基础上的。

定理 16.2.3. 设有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，如果从某一项开始有不等式

$$a_n \leq b_n,$$

那么

- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；
- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散；

其极限形式如下。

定理 16.2.4. 设有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

那么

- 若 $0 < l < +\infty$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散；
- 若 $l = 0$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；
- 若 $l = +\infty$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散。

将上述比较判别法同反常积分敛散性联系起来，便得到如下判别法。

定理 16.2.5 (Cauchy 积分判别法). 设当 $x \geq 1$ 时，$f(x) \geq 0$ 且递减，那么无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同时敛散。

应用比较判别法，将正项级数与几何级数作比较，便可以派生出如下两个较为实用的判别法。

定理 16.2.6 (Cauchy 判别法). 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$。

- 如果存在正数 $q<1$，使得对于充分大的 n 都有 $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；
- 如果对于无穷多个 n 都有 $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

写成极限形式如下。

定理 16.2.7 (Cauchy 判别法). 若对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$（有限或 $+\infty$）。

- 若 $\lambda<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；
- 若 $\lambda>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

定理 16.2.8 (D'Alembert 判别法). 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$。

- 如果存在正数 $q<1$，使得当 $n \ge n_0$ 时有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；
- 如果当 $n \ge n_0$ 时有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

写成极限形式如下。

定理 16.2.9 (D'Alembert 判别法). 若对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$（有限或 $+\infty$）。

- 若 $\lambda<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；
- 若 $\lambda>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

无论是 Cauchy 判别法还是 D'Alembert 判别法，当 $\lambda=1$ 时均无法判断，此时应采取其他方法来判别级数敛散性，需要注意的是，上述两个定理是将正项级数与几何级数进行比较衍生出来的，当然也可以用其他比几何级数收敛速度更慢的级数进行比较，从而得到新的判别法，在此不一一详述。自然想到，是否有一种“最慢”的级数，与之比较能得到所有的级数敛散性，但实际上这种万能的判别法是不存在的，对于相当一部分级数而言，上述几个定理便足以研究与讨论。

16.3 一般级数

从数列的 Cauchy 收敛原理便可以得到如下级数的 Cauchy 收敛原理。

定理 16.3.1 (Cauchy 收敛原理). 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，

$$\left|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$$

对于一切正整数 p 均成立。

现在讨论一般级数中比较特殊的一种——交错级数，它的正负项交错出现，例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

一般把交错级数记为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$，其中 $a_n > 0$，对于该类级数，有如下判别法：

定理 16.3.2 (Leibniz 判别法). 如果 $\{a_n\}$ 递减趋于 0，那么交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛。并且其和 $S \leq a_1$，部分和 S_n 与和 S 的绝对误差满足 $|S - S_n| \leq a_{n+1}$。

下述两个定理可以看做是对于交错级数判别法的一个推广，了解即可，供**学有余力**的同学**自行参考**。

定理 16.3.3 (Dirichlet 判别法). 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个数列，$S_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$，如果他们满足下面两个条件：

- $\{b_n\}$ 单调趋于 0；
- $\{S_k\}$ 有界。

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

定理 16.3.4. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个数列，如果他们满足下面两个条件：

- $\{b_n\}$ 单调有界；
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 有界。

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛。

上述两个判别法条件互有强弱，具体哪个方法好还需要具体情况具体分析。下面讨论加上绝对值之后的级数。

定义 16.3.5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 也收敛，称此类级数为绝对收敛级数；但如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，那么称该级数为条件收敛级数。

事实上，从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛便能推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

绝对收敛与条件收敛有着十分显著的差别，我们知道，有限个数相加时，被加项可以任意交换次序而不影响其和；无限多个数相加时就不一样了，当然，如果只是交换级数中有限项次序后 W，那么既不会改变其敛散性，也不会改变其和。但若交换级数中无穷多项的次序，敛散性以及其和都有可能改变，而绝对收敛与条件收敛本质区别就在于此。

定理 16.3.6. 交换绝对收敛级数中无穷多项次序，所得新级数仍然绝对收敛，其和也不变。

但对于条件收敛呢，交换次序会有何影响？Riemann 证明了如下令人震惊而又十分深刻的结果（了解即可）。

定理 16.3.7 (Riemann). 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则适当交换各项次序，可使其收敛到任意事先指定的实数 S，也可以使其发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$。

16.4 级数的乘法

关于级数的乘法，课本上叙述有限，但与之较为重要的 Cauchy 乘积在后续课程中仍然比较重要，因此在此不妨花费一点篇幅简要介绍一下级数的乘法。设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

是两个收敛级数，如果我们想将其相乘呢，对于有限的情况

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, B_m = \sum_{j=1}^{m} b_j,$$

相乘的结果是把所有可能的乘积 a_ib_j 加起来，对于无穷的情况，不妨先将所有可能乘积写出来

$$\begin{aligned}
&a_1b_1, a_1b_2, a_1b_3, \cdots;\\
&a_2b_1, a_2b_2, a_2b_3, \cdots;\\
&a_3b_1, a_3b_2, a_3b_3, \cdots;\\
&\cdots
\end{aligned}$$

这些项相加一般有两种加法，对角线方式：

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots,$$

或者方块相加：

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots.$$

按照对角线相加原则，得到一个新的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$，其中

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_ib_j = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积，但即便 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛的情况下，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 还是有可能发散的，比如：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 便是发散的一个例子，在此不做过多验证。

但如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛的话，情况就不一样了，即如下定理。

定理 16.4.1. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛，其和为 A 和 B，那么把

$$a_ib_j\,(i, j = 1, 2, \cdots)$$

按任意方式相加所得的级数都是绝对收敛的，且其和就是 AB。

如果仅限于 Cauchy 乘积，上述定理可以减弱。

定理 16.4.2. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，其和为 A 和 B，且其中至少有一个绝对收敛，那么他们的 Cauchy 乘积有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB,$$

其中 $c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j$。

感兴趣的同学可**自行验证**。

17 函数项级数

定义 17.0.1. 设 $u_1(x)$，$u_2(x)$，$\cdots$，$u_n(x)$，$\cdots$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一列函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) +$$

是 $[a,b]$ 上的一个**函数项级数**。

在 $[a,b]$ 中任取一点 x_0，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 便是一个数项级数，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，就说函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 收敛，反之就称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 发散；如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 每一点都收敛，就说 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ **逐点收敛**；一般来说 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间有的点收敛，有的点发散，使得其收敛（发散）的那些点的全体称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**收敛（发散）点集**。

设 $[a,b]$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点集，对于 $[a,b]$ 每个点 x，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 都有一个确定的和，记为 $S(x)$, 那么 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是确定在 $[a,b]$ 上的一个函数，称为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**。

由于函数项级数有无穷多项，即便函数列 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可积，可导，但其和函数却不一定连续，可积，可导，即逐项积分，逐项求导等，因此适当加上一些条件，便可以使得求导或积分交换次序，从而引出下述一致收敛的重要概念。

定义 17.0.2. 设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I（可以是区间，也可以不是）上收敛于 f。如果对于任意给定正数 ε，都存在与 x 无关的正整数 N（与 ε 有关），使得当 $n > N$ 时，不等式

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

对于 I 中一切 x 都成立，就说函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f。

定义 17.0.3. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，定义在区间 I 上，$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 是其部分和，如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$，就说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$。

由此便可以得到函数项级数的 Cauchy 收敛原理。

定理 17.0.4. 定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时，不等式

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

对于任意 $x \in I$ 以及任意正整数 p 成立。

下面的 Weierstrass 判别法（又称 M 判别法）是判断级数一致收敛的最常用的方法。

定理 17.0.5. 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)| \leq a_n, n = 1, 2, \cdots,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛。

有了一致收敛的概念以后，和函数 $S(x)$ 与函数列 $u_n(x)$ 便可以进行求导连续积分等相关操作，即保持了有限个函数之和的一些重要分析性质，即如下定理。

定理 17.0.6. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$，且每项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续，那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续。

现在反过来，在每个 $u_n(x)$ 都连续的前提下，从和函数 $S(x)$ 连续性能否推出级数在 I 上一致收敛？一般来说，答案是否定的，但如果考虑的是正项级数，而且 I 是有界闭区间，答案则是肯定的。

定理 17.0.7 (Dini). 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a, b]$ 上连续且非负，如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续，那么该级数在 $[a, b]$ 上一致收敛。

接下来阐述和函数的可积性与可微性。

定理 17.0.8 (和函数的可积性). 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $S(x)$，且每项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 可积，那么 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积，而且

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

定理 17.0.9 (和函数的可导性). 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，且 $u_n(x) \in C^{(1)}(I)(n \in \mathbb{N}^+)$。若由各项导函数组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$，并且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 至少在某一点 $x_0 \in [a,b]$ 上收敛，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导而且 $S'(x) = g(x)$。

18 幂级数

18.1 由幂级数确定的函数

幂级数形式一般如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots .$$

为了便于研究，往往讨论形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{3}$$

的幂级数，对于一般情况，只需做平移变换 $y = x - x_0$ 即可。

定理 18.1.1 (Abel). 如果幂级数3在点 $x = x_0$ 处收敛，那么它必在区间 $|x| < |x_0|$ 中绝对收敛；如果幂级数3在点 $x = x_1$ 处收敛，那么它必在区间 $|x| > |x_1|$ 发散。

由于幂级数的收敛情况只有三种，即收敛半径分别为 0，R，$+\infty$，并且对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有公式：

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

或者

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

需要注意的是上式两个极限很有可能不存在，但并不意味着收敛半径不存在，严格说来应当用到数学分析中上下极限的概念，包括之前数项级数的 Cauchy 判别法与 D’Alembert 判别法，在此不做深入探讨，只需要知道极限不一定存在即可。

幂级数具有如下的几条性质：

定理 18.1.2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R，则对任意 $r \in (0, R)$，级数在 $[-r, r]$ 一致收敛。

这一性质不仅保证了它的和函数在收敛区间内是连续的，而且具有任意阶导数。

定理 18.1.3. 设级数幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R，其和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 中连续，而且在 $(-R, R)$ 中有任意阶导数

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}, k = 1, 2, \cdots .$$

对于任意 $x \in (-R, R)$ 都有

$$\int_0^x S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

而且上式右端幂级数收敛半径仍为 R。

在收敛区间两端点，有如下性质。

定理 18.1.4 (Abel 第二定理). 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R，如果在 $x = R$ 处，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，则其和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续；如果在 $x = -R$ 处，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，则其和函数 $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续。

关于级数的乘法，则有如下定理。

定理 18.1.5. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径都是 R，那么当 $x_0 \in (-R, R)$ 时有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

其中 $c_n = \sum\limits_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}, n = 0, 1, 2, \cdots$。

18.2 函数的幂级数展开式

如果函数 $f(x)$ 能在区间 (x_0-R,x_0+R) 展开成幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

根据定理18.1.5，f 在 (x_0-R,x_0+R) 有任意阶导数，这是 f 能展开成幂级数的必要条件。其次由于

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},k=1,2,\cdots.$$

令 $x=x_0$，即得

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},k=0,1,2,\cdots.$$

即若 f 在 (x_0-R,x_0+R) 能展开成幂级数，那么这个幂级数一定是如下形式：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

现在设 f 在 $x=x_0$ 处有任意阶导数，那么从 f 就能做出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

称这个幂级数为 f 在 $x=x_0$ 处的 Taylor **级数**，记为

$$f(x)\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别当 $x_0=0$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

也称为 f 的 Maclaurin **级数**。

f 的在什么情况下可以展开成 Taylor 级数呢，下面定理给出了一个便于应用的充分条件。

定理 18.2.1. 如果存在常数 M，使得对于 $x\in(x_0-R,x_0+R)$ 中的所有 x 及一切充分大的正整数 n 均有

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M,$$

那么 f 能在 (x_0-R,x_0+R) 能展开成 Taylor 级数。

下面列出常用的六个初等函数的幂级数展开式，以后会经常用到。

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, -\infty < x < +\infty$；
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, -\infty < x < +\infty$；
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, -\infty < x < +\infty$；
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n, -1 < x \leq 1$；
- $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 \leq x \leq 1$；
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$。

最后一个展开式的成立范围依赖 α 的数值而定。

19 Fourier 级数

前面一节已经学习了应用极为广泛的幂级数，这一节我们将继续讨论另一种特殊的函数项级数——三角级数，其形式如下

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

不仅在数学上有着很强的理论研究，而且有着强烈的物理背景，在工程技术、无线电、通讯与数字处理等领域中充当着不可或缺的作用。

首先引入三角函数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$，其中任意两个不同函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是正交的，即它们的乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上积分为零，而自身乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上积分不为零。

定义 19.0.1. 设 f 是周期为 2π 的函数，在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积。称由下面的公式所确定的 a_n 和 b_n 为 f 的 Fourier 系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, n = 0, 1, 2, \cdots, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, n = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

将由上面公式所确定的级数称为 f 的 Fourier 级数，记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

对于相当广泛的一类函数，它的 Fourier 级数是收敛于自己的，所以 Fourier 级数在数学上占有极其重要的地位，但什么时候可以把上面的 改成 = 呢？因而便是下面讨论的 Fourier 收敛定理。

定理 19.0.2 (Dirichlet 定理). 设函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 分段单调，除了有限个第一类间断点外都是连续的，那么它的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛，且收敛于

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{x 是 f 的连续点}, \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{x 是 f 的间断点}, \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

虽然上述定理表明，所确定的 Fourier 级数并不是在每一点都收敛于 f 本身的，但为了方便起见，常把定理中三种收敛条件情形都说成是 f 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛于 f，或者 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上被展开为 Fourier 级数。并且由于 Fourier 级数的周期性，只要将 f 按照周期为 2π 向左右做周期延拓，那么它的 Fourier 级数就在整个数轴上都收敛于 f 了。

如果 f 不是周期为 2π 的函数，那么可以通过平移变换，奇偶延拓，伸缩变换，从而得到相应的 Fourier 级数。

(1) **周期为 $2l$，定义在 $[-l,l]$ 的函数**

做变量替换 $x = \dfrac{l}{\pi}t$，即得其对应的 Fourier 系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, n = 0,1,2,\cdots, \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, n = 1,2,3,\cdots. \end{cases}$$

理论上，延拓的方式很多种，但在此举出常用的两种延拓方式，即奇偶延拓，并且假定 f 是定义在 $(0,l)$ 的。

(2) **偶性延拓**

利用公式 $f(x) = f(-x), x \in (-l,0)$ 来补充 f 在 $(-l,0)$ 上的定义，计算可得 f 的 Fourier 系

数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, n = 0, 1, 2, \cdots, \\ b_n = 0. \end{cases}$$

因此 f 的 Fourier 级数只含余弦项，称其为余弦级数，即

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

（3）奇性延拓

利用公式 $f(x) = -f(-x), x \in (-l, 0)$ 来补充 f 在 $(-l, 0)$ 上的定义，计算可得 f 的 Fourier 系数为

$$\begin{cases} a_n = 0, \\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, n = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

因此 f 的 Fourier 级数只含正弦项，称其为正弦级数，即

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

20 综合习题

例题 1. 判断下列级数的敛散性。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\int_0^n \sqrt{1+x^4}dx}$；　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$。

解答 (1) 显然，级数为正项级数，又

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{\int_0^n \sqrt{1+x^4}dx}}{\frac{\sqrt{n}}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\int_0^n \sqrt{1+x^4}dx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^4}} = 3,$$

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ 收敛，故原级数收敛。

(2) 由于

$$(-1)^n \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} = (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{(n+1)\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - (-1)^n \frac{2}{(n+1)\sqrt{n}},$$

同时

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = 0; \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛。同理，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2}{(n+1)\sqrt{n}}$ 也收敛。综上，原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(n+1)\sqrt{n}}$$

收敛。

例题 2. 已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$，证明：
(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$。

解答　(1) 由条件有

$$0\le|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=f'(\xi_n)\,|x_n-x_{n-1}|\le\frac{1}{2}\,|x_n-x_{n-1}|,$$

其中 ξ_n 介于 x_n 与 x_{n-1} 之间，$n=2,3,\cdots$，从而

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{2}\,|x_n-x_{n-1}|\le\frac{1}{2^2}\,|x_{n-1}-x_{n-2}|\le\cdots\le\frac{1}{2^{n-1}}\,|x_2-x_1|.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}\,|x_2-x_1|$ 收敛，故原级数绝对收敛。

(2) (i) 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在：设级数的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_2-x_1)=x_{n+1}-x_1,$$

由 (1) 可知，极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_1$$

存在，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

(ii) 证明方程 $f(x)-x=0$ 在 $(0,2)$ 内有根：令

$$F(x)=f(x)-x=f(0)+f'(\xi)x-x=1+[f'(\xi)-1]\,x,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间。又 $F(0)=1>0$，$F(2)=2f'(\xi)-1<0$，故方程在 $(0,2)$ 内有根。

(iii) 证明 (ii) 中的根是方程唯一的实根：假设 t_1 和 t_2 是方程的两个不同的实根，那么

$t_1 = f(t_1)$，$t_2 = f(t_2)$，便有

$$|t_1 - t_2| = |f(t_1) - f(t_2)| = f'(\eta)\,|t_1 - t_2| \Rightarrow\ t_1 = t_2,$$

其中 η 介于 t_1 与 t_2 之间，矛盾。故上述实根是唯一实根。

(iv) 证明极限就是上述唯一实根：由 (1) 可知

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\,|x_2 - x_1| = 0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - x_n) = 0$。设 $t = \lim_{n\to\infty} x_n$，则 $f(t) - t = 0$，t 即为上述方程的唯一的根。

综上可知，$0 < \lim_{n\to\infty} x_n < 2$。

例题 3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。

解答 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ 的部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) = a_{n+1} - a_1,$$

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ 收敛可知，极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_1) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_1$$

存在，从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，由数列极限的有界性有

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+, |a_n| < M,$$

故

$$0 \le |a_n b_n| \le M\,|b_n|.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M\,|b_n|$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。

例题 4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)| \le h < 1$，对一切 $x \in [a,b]$ 有 $a \le f(x) \le b$。令 $u_{n+1} = f(u_n)$，其中 $u_0 \in [a,b]$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1} - u_n)$ 绝对收敛。

解答 由条件有

$$|u_{n+1}-u_n| = |f(u_n)-f(u_{n-1})| = \left|f'(\xi_n)\right| \cdot |u_n-u_{n-1}| \le h\,|u_n-u_{n-1}|,$$

其中 ξ_n 介于 u_n 与 u_{n-1} 之间。故

$$|u_{n+1}-u_n| \le h\,|u_n-u_{n-1}| \le h^2\,|u_{n-1}-u_{n-2}| \le \cdots \le h^{n-1}\,|u_2-u_1|.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h^{n-1}\,|u_2-u_1|$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_{n+1}-u_n|$ 收敛，原级数绝对收敛。

例题 5. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n}}{(2n-1)\,3^{2n-1}}$ 的和函数。

解答 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x^2}{9},$$

故收敛区间为 $(-3,3)$。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,3^{2n-1}} = x\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,3^{2n-1}} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}.$$

设 $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}(\dfrac{x}{3})^{2n-1}$，则

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{3}(\frac{x}{3})^{2n-2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+(\frac{x}{3})^2},$$

则 $h(x) = \arctan\dfrac{x}{3}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,3^{2n-1}} = x\arctan\frac{x}{3}.$$

例题 6. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，令 $a_n = \int_0^1 f(nx)dx$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n^2}{n^\alpha}(\alpha > 0)$ 收敛。

解答 由条件，$\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛，令 $M = \int_0^{+\infty} f^2(x)dx$, 而

$$a_n = \int_0^1 f(nx)dx \xlongequal[x=\frac{t}{n}]{t=nx} \frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt,$$

故

$$a_n^2=\left(\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt\right)^2=\frac{1}{n^2}\left(\int_0^n 1\cdot f(t)dt\right)^2=\frac{1}{n^2}\left(\int_0^n 1^2dt\int_0^n f^2(t)dt\right)=\frac{1}{n}\int_0^n f^2(t)dt\le\frac{M}{n},$$

从而 $0\le\frac{a_n^2}{n^\alpha}\le\frac{M}{n^{1+\alpha}}$。又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^{1+\alpha}}$ 收敛，故原级数收敛。

例题 7. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^nn^p}$ 的收敛域，其中 p 为任意常数。

解答　收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^nn^p}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^p}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=2,$$

故收敛区间为 $(-2,2)$，下讨论端点处的敛散性。

(i) 对 $x=2$，$\frac{x^n}{2^nn^p}=\frac{1}{n^p}$，当且仅当 $p>1$ 时收敛；

(ii) 对 $x=-2$，$\frac{x^n}{2^nn^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}$，当且仅当 $p>0$ 时收敛。

（$p>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ 且 $\frac{1}{(n+1)^p}<\frac{1}{n^p}$，满足莱布尼兹准则, 故级数收敛；$p\le0$ 时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\ne0$，级数不收敛。）

综上，$p\le0$ 时，收敛域为 $(-2,2)$；$0<p\le1$ 时，收敛域为 $[-2,2)$；$p>1$ 时，收敛域为 $[-2,2]$。

例题 8. 判断下列级数的敛散性。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})(a\ne0).$$

解答

$$\begin{aligned}a_n&=\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})\\&=\sin((\pi\sqrt{a^2+n^2}-n)+n\pi)\\&=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2}-n)\\&=(-1)^n\sin(\frac{a^2\pi}{\sqrt{a^2+n^2}+n})\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})\end{aligned}$$

为交错级数，收敛。

$$|a_n|=\sin(\frac{a^2\pi}{\sqrt{a^2+n^2}+n})\sim\frac{a^2\pi}{2n}(n\to\infty),$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2}|)$ 是发散的。

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})(a \neq 0)$ 条件收敛。

例题 9. 将 $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 展开成 x 的幂级数。

解答 对 $f(x)$ 求导有

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

又

$$\begin{aligned}(1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})}{2!}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{3!}x^3+\cdots \\ &= 1-\frac{1}{2\cdot 1!}x+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 2!}x^3+\cdots \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n(-1\leq x\leq 1),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x f'(t)dt+f(0) \\ &= x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt \\ &= x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1\leq x\leq 1).\end{aligned}$$

例题 10. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$。

解答 收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(4n)!}}{\frac{1}{(4n+4)!}} = \lim_{n\to\infty}(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1) = +\infty,$$

故收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。已知

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

从而

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \quad (-\infty < x < +\infty),$$

故

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

又

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

从而

$$\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}x^{4n}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

故 $S(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}$，$(-\infty<x<+\infty)$。

例题 11. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 的敛散性。

解答

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\right|&=|\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx|\\&=\left|\frac{\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x+\cdots+\sin(N+\frac{1}{2})x-\sin(N-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\\&=\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.\end{aligned}$$

$x\neq 2k\pi$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 部分和有界，$b_n=\frac{1}{n}$ 单调递减且趋于 0，则由 Dirichlet 判别法可知，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 收敛。

$x=2k\pi$ 时，原级数显然发散。

例题 12. 将 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数。

解答 显然 $f(-x)=\arcsin(\sin(-x))=-\arcsin(\sin x)=-f(x)$，$f(x)$ 是奇函数，故 $a_n=0\,(n=0,1,2,\cdots)$。在 $[0,\pi]$ 内，有

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx\\&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx\right)\\&=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

从而

$$f(x) \sim S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2} \sin nx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

例题 13. 将函数 $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ 展开成 Fourier 级数。

解答 显然，函数 $f(x)$ 是偶函数，从而 $b_n = 0(n = 1, 2, \cdots)$。又

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x = \dfrac{\pi}{2}, \\ -1, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -1 dx \right) = 0, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos nx dx \right) = \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

从而

$$f(x) \sim S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos nx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos(2n-1)x \quad (-\infty < x < \infty).$$

例题 14. 将 $f(x) = x^2$ 在 $[0, 2\pi]$ 上展成以 2π 为周期的 Fourier 级数，并求常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

解答 由条件，

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4}{n^2} (n = 1, 2, \cdots), \\ b_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n} (n = 1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) \sim S(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

从而

$$S(0)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}=2\pi^2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$
$$S(\pi)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=f(\pi)=\pi^2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

例题 15. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\quad(0<x<\pi).$$

解答 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\le x\le 1)$，那么

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n\quad(-1<x<1).$$

又 $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n(-1<t<1)$，故

$$S'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}\quad(-1<x<1).$$

从而

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,dt+S(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x(-1\le x\le 1).$$

只需证明函数 $f(x)=S(1)=\frac{\pi}{4}(0<x<\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的正弦级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 即可，下证之。

将 $f(x)$ 作奇延拓，求得

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin nx dx=\frac{1-(-1)^n}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2n}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}(0<x<\pi)$$

其中在 $(0,\pi)$ 上 $f(x)$ 连续。

钱学森书院学业辅导中心

仲英学业辅导中心及薪火工作室

Contributers

仲英书院学业辅导中心

钱学森书院学业辅导中心

关于本材料内容的任何建议及错误指正，欢迎向交小权QQ反映，我们将在下一版对相关内容进行订正、修改。听说有效反馈还会收到精美小权礼物一份哟~

联系我们：

西安交通大学学生会微信公众号

更多资料：

小权资料共享

问题反馈：

扫一扫二维码，加我QQ好友。

交小权

QQ：3171478351

QQ