2018

1、 V 由 $\{1, t, t^2, \dots, t^{2n}\}$ 的不同线性组合

V_1 由 $\{1, t^2, t^4, \dots, t^{2n}\}$ 的不同线性组合

V_2 由 $\{t, t^3, \dots t^{2n-1}\}$ 的不同线性组合.

(1) 令 $x = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{2n}t^{2n}$ 不好写 $a_i \in K$ 数域

$y = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_{2n}t^{2n}$ $b_i \in K$

$z = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots + c_{2n}t^{2n}$ $c_i \in K$

则 ① $(x+y)+z = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \cdots (a_{2n}+b_{2n})t^{2n} + c_0+c_1t+\cdots c_{2n}t^{2n}$

$= (a_0+b_0+c_0) + (a_1+b_1+c_1)t + \dots + (a_{2n}+b_{2n}+c_{2n})t^{2n}$

② $x+y$ $= x+(y+z)$

$=y+x$ 必然的, a_i, b_i 与 c_i 加法不影响 t

③ 0 元素即 0, 任意 $x + 0 = x$

④ 令 $x+y=0$, 则 $y=-x = -a_0 - \sum_{i=1}^{2n} a_i t^i$, 负元素存在

⑤ $k, l \in K$, $k(x+y) = k\left[\sum_{i=1}^{2n}(a_i+b_i)t^i\right] =$

$kx+ky = k\sum_{i=1}^{2n} a_it^i + k\sum_{i=1}^{2n} b_it^i = k\left(\sum_{i=1}^{2n}(a_i+b_i)t^i\right)$

⑥ $(k+l)x=(k+l)\sum_{i=1}^{2n}a_i t^i$

$=\sum_{i=1}^{2n}(ka_it^i)+\sum_{i=1}^{2n}la_it^i$

$=kx+lx$

⑦

$(k\cdot l)x=k\cdot l\cdot\sum_{i=1}^{2n}a_it^i$

$=k\sum_{i=1}^{2n}la_it^i$

$=kl(lx)$

⑧

$1\cdot x=1\cdot\sum_{i=1}^{2n}a_it^i=x$

故 V 显然是线性空间;

(2) 对任一 $x, y\in V_1$

$x+y=\sum_{\substack{i=2n\text{偶}\\ n=0\cdots n}}^{2n}a_it^i+\sum_{i\text{是偶}}^{2n}b_it^i=\sum_{i\text{偶}}^{2n}(a_i+b_i)t^i$

$\in V_1\subset V$

$kx=k\sum_{i\text{是偶}}^{2n}a_it^i=\sum_{i\text{偶}}^{2n}ka_it^i\in V_1\subset V$

故 V_1 是子空间

2018

同理 对 V_2

$$\begin{cases} x+y = \sum\limits_{i\text{是奇}}^{2n}(a_i t^i) + \sum\limits_{i\text{是奇}}^{2n} b_i t^i = \sum\limits_{i=\text{奇}}^{2n}(a_i+b_i)t^i \in V_2 \subset V \\ kx = k\sum\limits_{i\text{是奇}}^{2n} a_i t^i = \sum\limits_{i\text{是奇}}^{2n} k a_i t^i \in V_2 \subset V \end{cases}$$

故 V_2 也是 V 的子空间.

(3) 由 (1) 知 $\begin{cases} \dim V = 2n+1 \text{，元包含 1 项，} t \cdots t^{2n} \text{项} \\ \dim V_1 = \frac{2n+1}{2} \\ \dim V_2 = \frac{2n}{2} = n \end{cases}$

(4) V_1 中无奇数项

故 $V_1 \cap V_2 = 0 = L(0)$

V_2 中无偶数项,

$\because \dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$

$= \dim(V_1+V_2)$.

故 $V_1 \oplus V_2 = V$

2e.

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

3阶行列式：$(\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-1)$ ，$D_3(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$

2阶行列式：$\lambda(\lambda-1)$，$(\lambda^2-1)=(\lambda+1)(\lambda-1)$，$0$ ，　$D_2(\lambda)=1$

1阶行列式：$(\lambda-1)$，λ，(-1)，0 ，　$D_1(\lambda)=1$

故不变因子为：$d_3(\lambda) = D_3/D_2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$d_2(\lambda) = D_2/D_1 = 1$

$d_1(\lambda) = D_1/1 = 1$

故不变因子组为：$(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\because$ $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $P^{-1}AP = J$

令 $AP = PJ$ ，$A(x_1\ x_2\ x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & -1 \end{pmatrix}$

则 $\begin{cases} Ax_1 = x_1 \cdot 1 = x_1 \\ Ax_2 = x_1 + x_2 \cdot 1 \\ Ax_3 = x_3(-1) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $Ix_2 - Ax_2 = -x_1$

$(I-A)x_2 = -x_1$

即 $x_1\ x_3$ 分别为 A 的 $\lambda_1\ \lambda_3$ 的特征向量，即：

当 $\lambda=1$ 时 $(1\cdot E-A)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_1=(1,0,0)^T$

或 $x_1=(0,1,1)^T$

不妨取 $x_1=(0,1,1)^T$

当 $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}x_2=-x_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$，取 $x_2=(y_1,y_2,y_3)^T$

则 $y_1=k$ 任意，$\begin{cases}y_2-y_3=-1\\y_3-y_2=-1\end{cases}$ $\begin{cases}y_2=0\\y_3=0\end{cases}$ 存矛盾 但咋回事？

$\Rightarrow y_2-y_3=0$

当 $\lambda=-1$ 时，$(-E-A)=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_3=(0,-1,1)^T$

故 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow P^{-1}AP=J$

36. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}=U$，令 $L=E$，则 $A=LU$

再令 $U=EU'$，$A=LDU'$

（这些年LU分解都好简单，别忘了L的分解方式）

4、证明：对于导出型范数 $\|\ \|$，单位矩阵的条件收敛于1？

所谓导出型即从属范数，有单位矩阵范数为

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = 1$$

欲证上式，则 取任意一 x，$\|x\|=1$

$\|Ix\| = \|x\| = 1$ 显然

则 $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ix\| = 1 = \|I\|$

5、与2018 5一样 取 $a=0.5$，$b=-0.8$，则

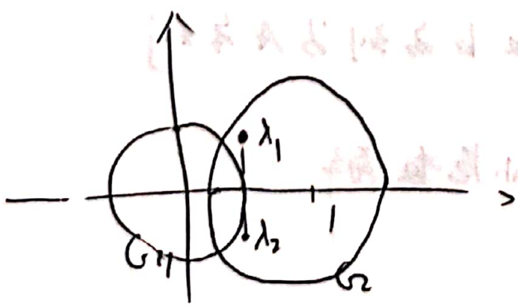
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = |z-0| \le 0.5$

$G_2 = |z-1| \le 0.8$

$$|\lambda E - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & -0.5 \\ 0.8 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 - \lambda + 0.4, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-0.16}}{2} = \frac{1}{2}(1 \pm j\sqrt{0.6})$$

∴



$\lambda_{1,2}$ 均不在 G_1 内。

6c、题证：若 $Ax=b$ 相容，则极小范数解为 $A^{(1,4)}b$.

与 2018 题 6 一样：

若 $Ax=b$ 相容，则 $AA^{(1)}b=b$

$\because A^{(1,4)} \in A\{1\}$

$\therefore A^{(1,4)}b$ 是 $Ax=b$ 的解，下面证其唯一。

欲证其唯一，需证 $A^{(1,4)}b \in R(A^H)$

$\because Ax=b$ 相容，故 $\exists\, u \in C^n$ 使得 $Au=b$

且 $b \in R(A)$

$$A^{(1,4)}b = A^{(1,4)}Au = (A^{(1,4)}A)^H u$$

$$= A^H [A^{(1,4)}]^H u$$

$$\in R(A^H)$$

故 $A^{(1,4)}b$ 确实是 $Ax=b$ 的极小范数解.

证毕。

7. 证 $(A^HA)^+ = A^+(A^H)^+$

① $A^HA\cdot A^+(A^H)^+\cdot A^HA$

$=A^H(AA^+)^H(A^H)^+A^HA$

$=A^H(A^+)^HA^H(A^H)^+A^HA$

$=A^H(A^+)^HA^HA \quad = A^H(A^H)^+A^HA \quad = A^HA$，(i)成立；

② $A^+(A^H)^+\cdot A^HA\cdot A^+(A^H)^+$

$=A^+(A^H)^+A^H(AA^+)^H(A^H)^+ \quad = A^+(A^+)^H\underset{A^H}{\wedge}(A^H)^+ \quad A^H(A^H)^+$

$=A^+(A^+)^H\underset{A^H}{\wedge}(A^H)^+ \quad = A^+(A^+)^H$，(ii)成立

③ $[A^HA\cdot A^+(A^H)^+]^H = A^+(A^+)^HA^H(A^H)^H = A^+(A^+)^HA^HA$

思想就是 $=\cdots=$ $A^HA\cdot A^+(A^H)^+$

④ $(A^+(A^H)^+\cdot A^HA)^H = \cdots = A^+(A^H)^+\cdot A^HA$

看看咋化？不会… 探索中…