2019

1C：令 $x=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ 的坐标为 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$，则有：

$$x=\eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\eta_3 x_3$$

$$=\eta_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\eta_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\eta_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故：$\begin{cases} a=\eta_1+\eta_2+\eta_3 \\ b=\eta_2+0 \\ c=\eta_3 \end{cases}$ 即：$\begin{cases} \eta_1=a-b-c \\ \eta_2=b \\ \eta_3=c \end{cases}$

∴ x 坐标为：$(a-b-c, b, c)^T$。

2C：$(y_1\ y_2\ y_3)=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)A$

$A \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 即 $\cancel{R(A)}$ $\text{rank}(A)=2$

∴ $\text{Rank}(y_1 y_2 y_3) \le \text{rank}(A)=2$

又∵ 令 $k_1 y_1+k_2 y_2=0$ 知：

$$k_1(x_1+2x_2+3x_2)+k_2(3x_1+2x_2+x_3)=0$$

$(k_1+3k_2)x_1+(2k_1+2k_2)x_2+(3k_1+k_2)x_3=0$

必有 $\begin{cases} k_1+3k_2=0 \\ 2(k_1+k_2)=0 \\ 3k_1+k_2=0 \end{cases}$ 故 $k_1, k_2=0$

$\therefore$ $\operatorname{rank}(y_1\ y_2\ y_3)\geq 2$

综上所述，$\operatorname{rank}(y_1\ y_2\ y_3)=2$，且 $y_1 y_2$ 线性无关

$\therefore$ $L(y_1\ y_2\ y_3)$ 的基为 $y_1\ y_2$。

3. $\because$ $A^3-3A^2+3A-I=0$

$\therefore$ $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$

$(\lambda-1)^3=0$

$\therefore$ 初等因子组的可能性为：

$(\lambda-1)^3$，$(\lambda-1)(\lambda-1)^2$，$(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)$

$\therefore$ Jordan 标准形有三种情况：

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

位置不唯一。

4C. 对A 令 $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $L_1^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故 $L = L_1$, $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = LU$

附：且 $U = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 1 & -\frac{1}{4} \\ & & 1 \end{pmatrix} = DU'$

$A = LDU'$

5. A收敛 $\Leftrightarrow A^k \to 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$

$\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ 为A的谱半径，即$|\lambda_i|$之最.

此处：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -a \\ -a & \lambda & -a \\ -a & -a & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2a & \lambda-2a & \lambda-2a \\ -a & \lambda & -a \\ -a & -a & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & \lambda & -a \\ -a & -a & \lambda \end{vmatrix}(\lambda-2a) = (\lambda-2a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & \lambda+a & 0 \\ -a & 0 & \lambda+a \end{vmatrix}$$

$= (\lambda-2a)(\lambda+a)$ $\lambda_1 = 2a$, $\lambda_2 = -a$ 且 $\begin{cases} |2a| < 1 \\ |a| < 1 \end{cases}$ 即 $|a| < 1$。

6、 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 1 \\ -5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5)$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$

令 $f(\lambda) = e^{t\lambda}$ $\quad f'(\lambda) = \lambda e^{t\lambda}$

令 $f(A) = a + bA$，则

$$\begin{cases} f(1) = e^t = a+b \\ f(5) = e^{5t} = a+5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5e^t - e^{5t}}{4} \\ b = \dfrac{e^{5t} - e^t}{4} \end{cases}$$

$\therefore f(A) = \dfrac{5e^t - e^{5t}}{4} I + \dfrac{e^{5t} - e^t}{4} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = e^{tA}$

$= \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 5e^{5t} - e^t & e^t - e^{5t} \\ 10e^t - 6e^{5t} & 5e^t - e^{5t} \end{pmatrix}$

$\therefore x(t) = e^{tA} x(0)$。

7. 三条性质: 令 $\|x\| = c_1\|x\|_a + c_2\|x\|_b$, $c_1, c_2 > 0$

① 当 $x \neq 0$ 时 $\|x\|_a > 0$, $\|x\|_b > 0$, 即 $\|x\| > 0$

当且仅当 $x = 0$ 时, $\|x\|_a = 0$, $\|x\|_b = 0$, 即 $\|x\| = 0$

②
$$\begin{aligned}\|kx\| &= c_1\|kx\|_a + c_2\|kx\|_b \\ &= kc_1\|x\|_a + kc_2\|x\|_b \\ &= k(c_1\|x\|_a + c_2\|x\|_b) \\ &= k\|x\|\end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned}\|x+y\| &= c_1\|x+y\|_a + c_2\|x+y\|_b \\ &\leq c_1(\|x\|_a + \|y\|_b) + c_2(\|x\|_a + \|y\|_b) \\ &\leq c_1(\|x\|_a) + (\|x\|_b)c_2 + c_1\|y\|_a + c_2\|y\|_b \\ &\leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

证毕;

8、 $|A|=\begin{vmatrix} 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}(2n-1)$

$=(2n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n-1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (2n-1)(n-1)^{(n-1)} > 0$

显然 A 满秩

∴ A 可逆。

9. ∵ $A^3 = -(a_1^2+a_2^2+a_3^2)A$

∴ $A \cdot \left(-A\dfrac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)A$

$= -\dfrac{1}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}A^3$

$= A$

满足 $AXA=A$

∴ $X \in A\{1\}$。

10、例如：$A=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$(AB)^+ = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]^+ = (1)^+ = (1)$$

$A^+ = A^H(AA^H)^{-1}$ —— A行满秩

其中 $A^H = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$AA^H = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1)$

故 $A^+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$B^+ = (B^HB)^{-1}B^H$ —— B列满秩

其中 $B^H = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$　$B^HB = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (2)$

故 $B^+ = \left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

而 $B^+A^+ = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)$

显然 $(AB)^+ = 1 \neq \left(\frac{1}{2}\right) = B^+A^+$

证毕；