2016

1、书上的定义：$R^{n\times n}$，此处 $n=2$

$$A=(a_{ij})_{2\times2}=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}E_{ij},$$

E_{ij} 是第 i 行第 j 列的元素全为1，其余元素均为 0 的矩阵；$E_{ij}(i,j=1,2)$ 均线性无关，故

$$\dim R^{2\times2}=2^2=4$$

其中一个基为：$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

下面证 $R^{2\times2}$ 是 R 上的实线性空间：

① $(A+B)+C=[(a_{ij})_{2\times2}+(b_{ij})_{2\times2}]+(c_{ij})_{2\times2}$

$$=(a_{ij}+b_{ij}+c_{ij})_{2\times2}=(a_{ij})_{2\times2}+(b_{ij}+c_{ij})_{2\times2}$$

$$=A+(B+C)$$

② $A+B=(a_{ij})_{2\times2}+(b_{ij})_{2\times2}=(b_{ij}+a_{ij})_{2\times2}=B+A$

③ $O_{2\times2}$ 即零元素，

④ $-A$ 即负元素，$A-A=O_{2\times2}$

⑤ 任意 $k, l \in R$ 则

$(k+l)A = (k+l)(a_{ij})_{2\times2} = k(a_{ij})_{2\times2} + l(a_{ij})_{2\times2} = kA + lA$

⑥ $k(A+B) = k(a_{ij}+b_{ij})_{2\times2} = k(a_{ij})_{2\times2} + k(b_{ij})_{2\times2} = kA + kB$

⑦ $k(lA) = k(la_{ij})_{2\times2} = kl(a_{ij})_{2\times2} = (kl)A$

⑧ $1\cdot A = 1\cdot(a_{ij})_{2\times2} = (a_{ij})_{2\times2} = A$

故，$R^{2\times2}$ 是 R 上的实线性空间。

2. V_1 是 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$ 的解空间，

V_2 是 $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$ 的解空间，求 $V_1 \cap V_2$ 的基与维数。

解：书上的作业题：

$V_1 \cap V_2$ 即 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的解.

转化为求 $Ax = 0$ 的零度空间，

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\1&-2&-1&-1\\5&-10&-6&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&-1&-2&-3\\0&-5&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&2&3\\0&0&9&16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&1&2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad s=4-3=1$$

取 $x=(-3,-2,1,0)^T\neq 0$

∴ 基为 $x=t(-3,-2,1,0)^T$，t任意；$\dim(V_1\cap V_2)=1$

其实 $\text{rank}(A)+n(A)=A$的列数

$\downarrow$ $\quad\downarrow\quad\downarrow$

A秩$=r$ 零度s $\quad n=4$

∵ $n(A)=n-\text{rank}(A)$ 这恰为书上定义。

4. 若 $A^HA=AA^H$，则A一定可以相似对角化 (A).

或 Λ^* 是上三角矩阵，满足 $A^HA=AA^H$，Λ^* 一定是对角矩阵；

(书上的定理)

证：必要性：Λ是对角阵，则存在酉矩阵 $P^HP=I$，使

$P^{-1}AP=P^HAP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^H$，$A^H=P\Lambda^HP$ ...

扫描全能王 创建

$A^H A = P\Lambda^H P P^H \Lambda P^H = P\Lambda^H \Lambda P^H = P\Lambda\Lambda^H P$

$= P\Lambda P^H P \Lambda^H P$

$= AA^H$ ，即A正定；

充分性：若 $A^H A = AA^H$，且存在酉矩阵 $P \Rightarrow$

$$P^H A P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & b_{nn} \end{pmatrix} = B \text{（上三角矩阵）}$$

则

$B^H B = P^H A^H P P^H A P$

$= P^H A^H A P = P^H A A^H P = P^H A P P^H A^H P$

$= BB^H$

对比上式两边元素知：仅 $b_{ii} \neq 0$，即

$$P^H A P = \begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & b_{22} & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ 为对角阵}.$$

同理，若A正交相似于对角阵 Λ，则A也正规

对 $R^{n\times n}$

证毕；

扫描全能王 创建

4(, $A_{n\times n}$ 证明 $\cos(A+2\pi k)=\cos A$

证：∵ $\cos A=\frac{e^{jA}+e^{-jA}}{2}$

∴ $\cos(A+2\pi k)=\frac{e^{j(A+2\pi k)}+e^{-j(A+2\pi k)}}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(e^{jA}\cdot e^{j2\pi k}+e^{-jA}\cdot e^{-j2\pi k}\right)$

$=\frac{e^{jA}\cdot 1+e^{-jA}\cdot 1}{2}$

$=\cos A$

证毕；

5-6 看不懂…

7. $\|A\|=\left(tr(A^HA)\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵范数

<书上证过>

证：

$\|A\|=\left(tr(A^HA)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

① $a_{ij}\neq 0$ 时 $\|A\|>0$，当且仅当 $a_{ij}=0$ 时，$\|A\|=0$

② $\|kA\|=\left(\sum_i\sum_j|k\,a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=|k|\left(\sum_i\sum_j|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}=|k|\cdot\|A\|$

③ 取 A 的第 j 列为 a_j，B 的第 j 列为 b_j

$$\|A+B\|^2 = \|a_1+b_1\|_2^2 + \cdots + \|a_n+b_n\|_2^2$$

$$\le (\|a_1\|_2+\|b_1\|_2)^2 + \cdots + (\|a_n\|_2+\|b_n\|_2)^2$$

$$\le (\|a_1\|_2^2+\|a_2\|_2^2+\cdots\|a_n\|_2) +$$

$$2(\|a_1\|_2\|b_1\|_2 + \cdots + \|a_n\|_2\|b_n\|_2) +$$

$$(\|b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2 + \cdots \|b_n\|_2^2)$$

$$\le \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2$$

$$\le (\|A\|+\|B\|)^2$$

$$\therefore \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$$

④ 设 $B=(b_{ij})$，则 $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \le \sum_i\sum_j\left(\sum_k |a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$$

$$\le \sum_i\sum_j\left(\sum_k|a_{ik}|^2\sum_k|b_{kj}|^2\right)$$

$$\le \sum_i\sum_k|a_{ik}|^2 \cdot \sum_j\sum_k|a_{kj}|^2 \le \|A\|^2\|B\|^2$$ 证毕；

8 $$A=\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ \end{array}$$
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R(A)=3$$

故A的三个列向量 $a_1 a_2 a_3$ 线性无关，可用施密特正交化方法将其正交单位化，使得 $A=QR$

$$Q=(q_1\ q_2 \cdots q_n) \qquad R=\begin{pmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{pmatrix} C$$

$$b_1=a_1=(2,0,2)^T$$

$$b_2=a_2-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{6}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=a_2-\frac{3}{4}b_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3=a_3-\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}b_2-\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1$$

$$=a_3-\frac{\frac{11}{2}}{\frac{9}{2}}b_2-\frac{6}{8}b_1=a_3-\frac{11}{9}b_2-\frac{3}{4}b_1$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}-\frac{11}{9}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}-\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=\frac{3}{4}b_1+b_2 \\ a_3=\frac{3}{4}b_1+\frac{11}{9}b_2+b_3 \end{cases}$$

$$A=(a_1\ a_2\ a_3)=(b_1\ b_2\ b_3)\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ & 1 & \frac{11}{9}\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$q_1=\frac{b_1}{|b_1|}=\frac{1}{\sqrt{8}}(2,0,2)^T$$

$$q_2=\frac{b_2}{|b_2|}=\frac{1}{\sqrt{18}}(1,4,1)^T$$

$$q_3=\frac{b_3}{|b_3|}=\frac{1}{\sqrt{42}}(5,4,1)^T$$

$$Q=(q_1\ q_2\ q_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{5}{\sqrt{42}}\\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{42}}\\ \frac{2}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}\sqrt{8} & & \\ & \sqrt{18} & \\ & & \sqrt{42}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ & 1 & \frac{11}{9}\\ & & 1\end{pmatrix}$$

则 $A=QR$

9、证 $A^H P_{R(A)} = A^H$

书本定义出

$$\boxed{\begin{cases} P_{R(A)} = AX \\ P_{R(X)} = XA \end{cases}}$$

左右换一个道理

其中 $P_{R(\cdot)}$ 是正交投影矩阵

则

$$\begin{aligned} A^H P_{R(A)} &= A^H AX = A^H (AX)^H \\ &= A^H X^H A^H \\ &= (AXA)^H \\ &= A^H \end{aligned}$$

证毕;

扫描全能王 创建