# 第十九讲　范数理论及其应用

一、向量范数

范数可以看作长度概念的推广，主要用于逼近的程度。

1. 向量范数定义：设 V 为数域 K 上的向量空间，若对于 V 的任一向量 x，对应一个实值函数$\|\mathbf{x}\|$，并满足以下三个条件：

（1）非负性 $\|\mathbf{x}\| \geq \mathbf{0}$，等号当且仅当 x=0 时成立；

（2）齐次性 $\|\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\| = |\boldsymbol{\alpha}|\|\mathbf{x}\|, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{k}, \mathbf{x} \in \mathbf{V};$

（3）三角不等式$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ 。

则称$\|\mathbf{x}\|$为 V 中向量 x 的范数，简称为向量范数。

例 1. $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}}$，它可表示成$\mathbf{x} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T$，$\xi_i \in \mathbf{C}$，

$$\|\mathbf{x}\|_2 \overset{\Delta}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$$ 就是一种范数

证明：（i）非负性 $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{1/2} \geq 0$，

当且仅当 $\xi_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，即 x＝0 时，$\|\mathbf{x}\|_2$＝0

（ii）齐次性 $\|\alpha\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha\xi_i|^2\right)^{1/2} = |\alpha|\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{1/2} = |\alpha|\|\mathbf{x}\|_2$

（iii）$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}^T$ ，$\eta_i \in \mathbf{C}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \xi_1 + \eta_1 & \xi_2 + \eta_2 & \cdots & \xi_n + \eta_n \end{bmatrix}^T$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^2$$

$$|\xi_i+\eta_i|^2=|\xi_i|^2+|\eta_i|^2+2\mathrm{Re}\left(\overline{\xi_i}\eta_i\right)\le|\xi_i|^2+|\eta_i|^2+2|\xi_i||\eta_i|$$

$$\|x+y\|_2^2\le\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\sum_{i=1}^{n}|\xi_i||\eta_i|$$

$$\left(\|x\|_2+\|y\|_2\right)^2=\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\|x\|_2\|y\|_2$$

根据 Hölder 不等式：

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{1/q},\quad p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,a_i,b_i>0$$

$$\|x\|_2\|y\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2\right)^{1/2}\ge\sum_{i=1}^{n}|\xi_i||\eta_i|$$

$$\therefore\ \|x+y\|_2\le\|x\|_2+\|y\|_2$$

2. 两类向量范数

（1）$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\mathbf{x}^H\mathbf{x}\right)^{1/2}$

推广到 $\|\mathbf{x}\|_A = \left(\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x}\right)^{1/2}$，A 为厄米正定矩阵（椭圆范数）

当 $\mathbf{A} = \mathbf{W} = \mathbf{diag}\left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_n\right]$，$\mathbf{w}_i > 0$

$$\|\mathbf{x}\|_w = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{w}_i |\xi_i|^2\right)^{1/2}$$ 加权范数

（2）$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p}$ （p≥1）,称为向量的 p-范数或$\mathbf{l}_p$范数。

证明：$\|\mathbf{x}\|_p$显然满足非负性和齐次性

$$\mathbf{y} = \left[\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_n\right]^T$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|\mathbf{y}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\|x+y\|_p\right)^p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}|\xi_i+\eta_i|$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}|\xi_i|+\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}|\eta_i|$$

应用 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}|\xi_i|\leq\left[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^{(p-1)q}\right]^{1/q}\left[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right]^{1/p}$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}|\eta_i|\leq\left[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^{(p-1)q}\right]^{1/q}\left[\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p\right]^{1/p}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow(p-1)q=p$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p\right)^{1/p}$$

即 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$

3. 向量范数的等价性

定理 1. 设$\|\ \|_\alpha$、$\|\ \|_\beta$为$\mathbf{C}^n$的两种向量范数，则必定存在正数 m、M，使得 $\mathbf{m}\|\mathbf{x}\|_\alpha \le \|\mathbf{x}\|_\beta \le \mathbf{M}\|\mathbf{x}\|_\alpha$，（m、M 与 x 无关），它就称为向量范数的等价性。

同时有$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{M}}\|\mathbf{x}\|_\beta \le \|\mathbf{x}\|_\alpha \le \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}\|\mathbf{x}\|_\beta$

二、矩阵范数

1. 矩阵范数定义：设$\mathbf{k}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}(\mathbf{k}=\mathbf{c}\text{或}\mathbf{R})$表示数域 k 上全体$\mathbf{m}\times\mathbf{n}$阶矩阵的集合。若对于$\mathbf{k}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$中任一矩阵 A，均对应一个实值函数，并满足以下四个条件：

（1）非负性：$\|\mathbf{A}\|\geq\mathbf{0}$ ，等号当且仅当 A=0 时成立；

（2）齐次性：$\|\alpha\mathbf{A}\|=|\alpha|\|\mathbf{A}\|,\alpha\in\mathbf{k};$

（3）三角不等式：$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|,\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{k}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$

则称$\|\mathbf{A}\|$为广义矩阵范数；

（4）相容性：$\|\mathbf{AB}\|\leq\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$

则称$\|\mathbf{A}\|$为矩阵范数。

2. 常用的矩阵范数

（1）p-范数：$\|\mathbf{A}\|_p = \max \dfrac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$，

$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{m\times n}$, x 为所有可能的向量，$\mathbf{x} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T$，

$\|\alpha \mathbf{x}\|_p = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_p$，$\|\mathbf{Ax}\|_p = \dfrac{1}{|\alpha|}\|\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x})\|_p \quad (\alpha \neq 0)$

$$\therefore \|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \|\mathbf{Ax}\|_p$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1 = 1} \|\mathbf{Ax}\|_1$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| = 1, \quad \|\mathbf{Ax}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} \xi_j \right|$$

可以证明： $\|\mathbf{A}\|_1=\max\limits_{1\le j\le m}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ 列（和）范数

$$\|\mathbf{A}\|_2=\max_{1\le i\le n}\sqrt{\lambda_i(\mathbf{A}^H\mathbf{A})}$$ 谱范数

$$\|\mathbf{A}\|_\infty=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$ 行（和）范数

$$\|\mathbf{x}\|_\infty=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\Bigg|_{p\to\infty}=\max_{1\le i\le n}|\xi_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}$$

（2）Frobenius 范数（F-范数）和导出性范数

F-范数： $$\|A\|_F=\left(\sum_{i，j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

导出性范数：设$\|x\|$为数域 k 上 n 维向量空间$k^n$（k=R 或 C）的一种向量范数。可定义矩阵范数为：

$$\|A\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=\max_{x\neq 0}\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)$$

三、应用

逼近和误差估计是矩阵范数应用的主要领域。

矩阵条件数： $\mathrm{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$

由相容性可知： $\|A\|\|A^{-1}\|\geq\|AA^{-1}\|=\|I\|$

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{Ix}\| \le \|\mathbf{I}\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{I}\| \ge 1$$

对于导出性范数 $\|\mathbf{I}\| = 1$

$\therefore \quad \mathbf{cond}(\mathbf{A}) \ge 1$

条件数反映了误差放大的程度，条件数越大，矩阵越病态。

对于方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \to \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

考虑两种情况：(1) b 存在误差；　(2) A 存在误差

（1） b 存在误差 $\Delta\mathbf{b}$，求出的 x 存在误差 $\Delta\mathbf{x}$， $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}$

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\|$$

考察相对误差，求 $\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$

$$\|\mathbf{b}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\| \to \|\mathbf{x}\| \ge \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

$$\therefore \quad \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \Big/ \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| = \mathbf{cond}(\mathbf{A})$$

（2）A 存在误差$\Delta\mathbf{A}$，求出的解 x 存在误差$\Delta\mathbf{x}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

$$\to \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = -\Delta\mathbf{A}\mathbf{x} - \Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}$$

忽略高阶小量得： $\|\Delta\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\Delta\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \Big/ \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \le \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\| = \mathbf{cond}(\mathbf{A})$$

常用条件数用$\|\mathbf{A}\|_2$来考虑：

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)}$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)}$$

$$\mathbf{cond}(\mathbf{A}) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)}{\lambda_{\min}\left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)}}$$

作业：P275　　1、2