西安电子科技大学

研究生课程考试试题

（答案必须写在答题纸上）

考试科目：矩阵论　课程编号：X00EE0035、X00EE1035、Z00EE1035

考试日期：2020 年 1 月 2 日　考试时间：150 分钟

考试方式：（闭卷）任课教师：李文清　班号 05

学生姓名：杜慧莉　学　号：1904121205

请注意：标注有博士、学术型硕士、专业型硕士字样的题目分别由博士、学术型硕士、专业型硕士生解答，未标注的题目均应解答。

1. （10 分）给定 R^3 的两个基

$$x_1=(1,0,1),\ x_2=(2,1,0),\ x_3=(1,1,1)$$

$$y_1=(1,2,-1),\ y_2=(2,2,-1),\ y_3=(2,-1,-1)$$

定义线性变换 $Tx_i=y_i\quad(i=1,2,3)$．

(1)写出由基 x_1,x_2,x_3 改变为基 y_1,y_2,y_3 的过度矩阵．（**专业型硕士、学术型硕士、博士**）

$Tx_i=x_iC$

(2)写出 T 在基 x_1,x_2,x_3 下的矩阵．（**学术型硕士、博士**）

$Ty_i=Ay_iB$

$=\cancel{Tx_iB}\ \cancel{B}$

(3)写出 T 在基 y_1,y_2,y_3 下的矩阵．（**博士**）

$y_i=x_iC$

$Ty_i=Tx_iA=y_iB\quad Ty_i=y_iB$

$=x_iCB$

2. （10 分）对于矩阵空间 $R^{2\times2}$ 的子集 $V=\{X=(x_{ij})_{2\times2}\mid x_{11}+x_{22}=0\}$．

$x_iCA=x_iCB$

$B=CA$

(1)验证V是$R^{2\times2}$的子空间，并求V的一个基。（**专业型硕士、学术型硕士、博士**）

(2)给定V中的变换T：$TX = X + X^T$（$X \in V$），验证T是线性变换。（**学术型硕士、博士**）

(3)求T的全体特征值与特征向量。（**博士**）

3A.（10分）在向量空间R^3中，设$\alpha=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，线性变换为

$$T\alpha=(2\xi_2+3\xi_3,\ 2\xi_1-3\xi_2+\xi_3,\ 2\xi_1+\xi_2-3\xi_3)$$

求R^3的一个基，使T在该基下的矩阵为对角矩阵。（**博士**）

3B.（10分）已知$A=\begin{bmatrix}0 & i & 1\\ -i & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求正交（酉）矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角矩阵。（**学术型硕士**）

3C.（10分）已知$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$，求正交（酉）矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角矩阵。（**专业型硕士**）

4.（10分）已知$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}$，求$e^{At}$。

5.（10 分） 已知 $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 6 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 4 & 0 & 2 & -3\end{bmatrix}$，求其 QR 分解。

6.（10 分） 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}20 & 3 & 1\\ 5 & 5.5 & 1\\ 4 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0.5\end{bmatrix}$，用盖尔圆法隔离 A 相对于 B 的广义特征值，再用实矩阵特征值的性质，改进得出的结果。

7. （10 分） 若 $\mathbf{AA}^H=\mathbf{A}^H\mathbf{A}$，试证明 $\mathbf{AA}^+=\mathbf{A}^+\mathbf{A}$。

8. （20 分） 已知线性方程组：

$$\begin{gathered}x_1+3x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2=1\\ 3x_1+7x_2-x_3=2\end{gathered}$$

判断方程组是否相容，若方程组相容，求其极小范数解；若方程组不相容，求其极小范数最小二乘解。

9.（10 分） 设 $A\in C_r^{m\times n}$，若 x 为 $\mathbf{A}x=b$ 的最小二乘解，且 $\varepsilon=\mathbf{A}x-b$，试证明：$\|\varepsilon\|_2^2=\|b\|_2^2-\|\mathbf{P}_{\mathrm{R(A)}}b\|_2^2$