2018

1. (1) 证：对 V_1：取 $y \in V_1$，则

$P(x+y) = Px + Py = x+y$，

$P(kx) = kPx = kx$，

显然满足加法与乘法封闭性，故 V_1 是子空间；

对 V_2：取 $y \in V_2$，$k \in C^n$

$P(x+y) = Px + Py = 0+0 = 0$，

$P(kx) = k(Px) = k \cdot 0 = 0$，

显然 V_2 也是子空间.

(2) 令 $x=0$，则 $Px=0$，零空间 $N(P) = \{x \mid Px=0\}$，

当 $x \neq 0$ 时，则 $Px = x \neq 0$，而对 V_2 来说 $Px=0$

故 V_1 中的 x 与 V_2 中的 x 必不相同，即

$V_2 \cap V_1 = L(0)$

$\therefore \dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1+V_2)$

$\dim(V_1 \cap V_2) = 0$

故 $V_1 \oplus V_2 = V$，即 ~~真~~ 直和。

$=x_1$

2(. $|A|=0$，不可逆，无法对角化为 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$ 形式，

故需求 $P \Rightarrow P^{-1}AP=J$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

3阶行列式：$\lambda^2(\lambda-1)$ $\qquad D_3=\lambda^2(\lambda-1)$

2阶行列式：$\lambda(\lambda-1)$，λ^2，0 $\qquad$ 无最大公因式，$D_2=1$

1阶行列式：0，$\lambda-1$，λ，-1，无最大公因式，$D_1=1$

故：$d_3(\lambda)=D_3/D_2=\lambda^2(\lambda-1)$，$d_2(\lambda)=\frac{D_2}{D_1}=1$，$d_1(\lambda)=\frac{D_1}{1}=1$

故初等因子组为 λ^2，$(\lambda-1)$，即

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ & 0 & 0\\ & & 1\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=J$$

$\because P^{-1}AP=J$，令 $P=(x_1\ x_2\ x_3)$

$\therefore AP=PJ$

$$A(x_1\ x_2\ x_3)=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}Ax_1=x_1\cdot 0=0\\ Ax_3=x_3\cdot 0=0\\ Ax_2=x_1+x_2\cdot 0=x_1\end{cases}$$

x_1 x_3 分别为 A 的特征向量，x_2 由 $Ax_2=x_1$ 求：

$\lambda=0$ 时 $(0E-A)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_1=(0,1,0)^T$

$\lambda=1$ 时 $(1E-A)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $x_3=(1,0,0)^T$

令 $x_2=(y_1,y_2,y_3)^T$，则

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=x_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y_1=0\\y_3=0\\y_2=k, & k\text{ 任意}\end{cases}$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&k\end{pmatrix}\to P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&k&0\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=J$$

30. 令 $L=E$，$U=A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&5\end{pmatrix}$，则 $A=LU$

再令 $U=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\&1&\frac{1}{3}\\&&1\end{pmatrix}=DU'$

则 $A=LDU'$

4. 证：∵ A^HA 是厄米特矩阵，且

$$x^H(A^HA)x=(Ax)^HAx=\|Ax\|_2^2\geq 0$$

∴ A^HA 的 $\lambda_i\geq 0$，设 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$

且 n个相互正交且 l_2范数为1的特征向量 $x_1\cdots x_n$，为基。取任一 x 有 $\|x\|_2=1$ 有：

$$x=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i$$

$$A^HAx=\sum_{i=1}^{n}A^HAk_ix_i=\sum_{i=1}^{n}k_i(A^HAx_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ik_ix_i$$

$$\because \|x\|_2^2=x^T(A^HA)x=(x,A^HAx)$$

$$=\left(\sum_ik_ix_i,\ \sum_i\lambda_ik_ix_i\right)$$

$$=\lambda_1|k_1|^2+\lambda_2|k_2|^2+\cdots\lambda_n|k_n|^2$$

$$\leq\max(\lambda_i)(|k_1|^2+\cdots|k_n|^2)$$

$$\leq\lambda_1$$

$$\therefore \|A\|_2=\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2\leq\sqrt{\lambda_1}$$

又 $\because \|x\|_1 = 1$, $\|Ax_1\|_2^2 = (x_1, A^H A x_1) = (x_1, \lambda x_1) = \lambda_1$

$$\|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 \geq \|Ax_1\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$$

$$\therefore \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^H A)}$$

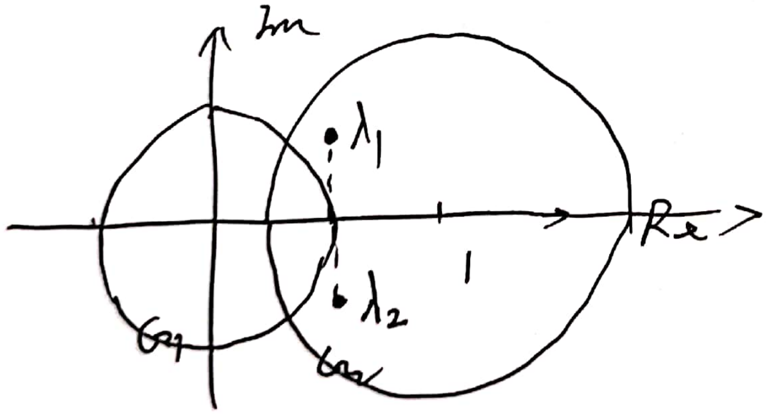
如书例 $\begin{pmatrix} 1 & -0.8 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$，本题取 $\begin{cases} a = 0.5 \\ b = -0.8 \end{cases}$

则 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.8 & 1 \end{pmatrix}$　　而盖尔圆为 $\begin{cases} |z-0| \le 0.5 \\ |z-1| \le 0.8 \end{cases}$

且 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -0.5 \\ 0.8 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)+0.4 = \lambda^2-\lambda+0.4$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 0.4}}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{-0.6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm j\sqrt{0.6}\right)$$

$\therefore$



显然 λ_1, λ_2 均不在 G_1 中.

证毕;

10、书例

证：∵ $Ax=b$ 相容，$b\in R(A)$

∴ $AA^{(1)}b=b$

又∵ $A^{(1,4)}\in A\{1\}$

∴ $A^{(1,4)}b$ 是 $Ax=b$ 的解，

要证明 $A^{(1,4)}b\in R(A^H)$，才唯一、且是极小范数解；

∵ $b\in R(A)$，$\exists\, u\in C^n \Rightarrow b=Au$

∴ $A^{(1,4)}b=A^{(1,4)}Ab=(A^{(1,4)}A)^Hb$

$=A^H(A^{(1,4)})^Hb$

$\in R(A^H)$

故 $A^{(1,4)}b$ 确实 $\in R(A^H)$，是唯一，且是极小范数解。

同理，$x=A^{(1,4)}b$ 由 $XA=A^{(1,4)}A$ 确定

$Xb=A^{(1,4)}b$ 中取 b 为列为 A 的列

得证 若 X 是极小范数解，

则 $X\in A\{1,4\}$

7. 与2017原题一样

令 $A=(1,0)$, $B=(1,1)^T$

$AB=(1,0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=(1)$ $\quad (AB)^+=(1)$

$A^H=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad A^HA=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$AA^H=(1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(1)$

$A^+=A^H(AA^H)^{-1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$B^H=(1\ \ 1)$ $\quad B^HB=(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=(2)$

$B^+=(B^HB)^{-1}B^H=(\frac{1}{2})(1\ \ 1)=(\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})$

$\therefore B^+A^+=(\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(\frac{1}{2})$

$\therefore B^+A^+=(\frac{1}{2})\neq(1)=(AB)^+$

证毕;

感言：看书的主题重要，几乎全书本。