三 导 丛 书

矩 阵 论

导教 · 导学 · 导考

张凯院　徐　仲　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书对矩阵论课程的基本概念、主要结论和常用方法做了简明扼要的分类总结,对各章节的课后习题做了详细的解答。根据课程要求精选了适量的自测题,并附有答案或提示。书后附录部分收编了12套近年来研究生矩阵论课程的考试试题和3套博士生入学考试试题,并做了详细的解答。

本书叙述简明,概括性强,可作为理、工科研究生和本科高年级学生学习矩阵论课程的辅导书,也可供从事矩阵论教学工作的教师和有关科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论 导教·导学·导考/张凯院,徐仲编.—西安:西北工业大学出版社,2004.3

(三导丛书)

ISBN 7-5612-1736-6

Ⅰ.矩… Ⅱ.①张… ②徐… Ⅲ.矩阵—理论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第009606号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072 电话:(029)88493844

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西天元印务有限公司

开 本:850 mm×1 168 mm 1/32

印 张:8.5

字 数:220千字

版 次:2004年3月第1版 2004年3月第1次印刷

印 数:1～6 000册

定 价:12.00元

前　　言

矩阵论是高等学校和研究院、所面向研究生开设的一门数学基础课。作为数学的一个重要分支，矩阵理论具有极为丰富的内容；作为一种基本工具，矩阵理论在数学学科以及其他科学技术领域都有非常广泛的应用。因此，学习和掌握矩阵的基本理论与方法，对于研究生来说是必不可少的。

矩阵论课程的理论性强，概念比较抽象，而且有独特的思维方式和解题技巧。读者在学习矩阵论课程时，往往感到概念多、结论多、算法多，对教学内容的全面理解也感到困难。为了配合课堂教学，使研究生更好地掌握该门课程的教学内容，我们编写了本书。

本书根据程云鹏等编的研究生教材《矩阵论》(第 2 版) 的内容体系，对矩阵论课程的基本概念、主要结论和常用方法做了简明扼要的分类总结，对各章节的课后习题做了详细的解答。根据课程要求精选了适量的自测题，并附有答案或提示。附录部分收编了近年来西北工业大学研究生矩阵论课程 (60 学时) 的考试试题 12 套和博士生入学考试试题 3 套，并做了详细的解答。本书对于学习矩阵论课程的研究生以

及参加博士生入学矩阵论课程考试的有关人员有很好的辅导作用,对于从事矩阵论教学工作的教师也有一定的参考价值。

本书由张凯院、徐仲共同编写,张凯院任主编。

限于水平,书中疏漏和不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

编　者

2003 年 12 月于西北工业大学

目　　录

第一章　线性空间与线性变换

线性空间是向量空间的推广．具体的线性空间多种多样,其中的元素既可以是向量,也可以是矩阵、多项式、函数等;其中的线性运算既可以是通常的,也可以是特殊的．线性空间的核心内容是线性变换,它反映了线性空间中元素之间的一种基本联系．

在有限维线性空间中,借助于基的概念可在元素与列向量之间、线性变换与方阵之间建立一一对应关系,从而元素的运算能够转化为列向量的运算,线性变换的运算能够转化为方阵的运算,一般线性空间中的问题能够转化为列向量空间中的问题．这种转化依赖于三类特殊的矩阵,即两个基之间的过渡矩阵、线性变换在指定基下的矩阵、欧氏(酉)空间中基的度量矩阵．

线性空间中的元素统称为向量,加法运算和数乘运算也使用通常的运算符号．

一、基本概念

1．线性空间

线性空间指引进了加法运算和数乘运算且满足 8 条运算律的某个数域上的非空集合,通常用 V 表示(n 维线性空间记为 V^n).

(1) 实行向量空间　$\mathrm{R}^n = \{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathrm{R}\}$

实列向量空间　$\mathrm{R}^n = \{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \mid a_i \in \mathrm{R}\}$

复行向量空间　$\mathrm{C}^n = \{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathrm{C}\}$

复列向量空间　$\mathrm{C}^n = \{\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \mid a_i \in \mathrm{C}\}$

(2) 实矩阵空间　$\mathrm{R}^{m\times n} = \{A = (a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij} \in \mathrm{R}\}$

复矩阵空间 $\mathbf{C}^{m\times n}=\{A=(a_{ij})_{m\times n}\mid a_{ij}\in\mathbf{C}\}$

(3) 实多项式空间

$$P_n[t]=\{f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\mid a_i\in\mathbf{R}\}$$

复多项式空间

$$P_n[t]=\{f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\mid a_i\in\mathbf{C}\}$$

2. 线性子空间

线性子空间指线性空间中对加法运算和数乘运算封闭的非空子集.

(1) 生成子空间 $\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 或者 $L(x_1,x_2,\cdots,x_m)$: 设 V 是数域 K 上的线性空间, $x_i\in V\ (i=1,2,\cdots,m)$, 则

$$\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}=$$
$$\{x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_mx_m\mid k_i\in K\}$$

(2) 矩阵的值域 $R(A)$: 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 则

$$R(A)=\mathrm{span}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}=\{y=Ax\mid x\in\mathbf{C}^n\}$$

(3) 矩阵的零空间 $N(A)$: 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$, 则

$$N(A)=\{x\mid Ax=0,x\in\mathbf{C}^n\}$$

(4) 线性变换的值域 $R(T)$: 设 T 是线性空间 V 的线性变换, 则

$$R(T)=\{y=Tx\mid x\in V\}$$

(5) 线性变换的核 $N(T)$: 设 T 是线性空间 V 的线性变换, 则

$$N(T)=\{x\mid Tx=0,x\in V\}$$

(6) 线性变换的特征子空间 V_λ: 设 λ 是线性空间 V 中线性变换 T 的一个特征值, 则

$$V_\lambda=\{x\mid Tx=\lambda x,x\in V\}$$

3. 线性空间的基

线性空间的基指线性空间 V 中满足下列条件的向量组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$: ① $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关; ② 任意 $x\in V$ 都可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示.

(1) 向量空间 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 的简单基为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$, 其中 e_i 表示第 i

个分量为 1,其余分量为 0 的 n 维向量 .

(2) 矩阵空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$ ($\mathbf{C}^{m\times n}$) 的简单基为

$$E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, \cdots, E_{mn}$$

其中, E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1,其余元素为 0 的 $m\times n$ 矩阵 .

(3) 多项式空间 $P_n[t]$ 的简单基为 $1, t, \cdots, t^n$.

4. 两个基之间的过渡矩阵

过渡矩阵是以线性空间的一个基中各元素在另一个基下的坐标为列向量构成的方阵 .

(1) 表示方法:已知线性空间 V^n 的两个基为(Ⅰ) $x_1, x_2, \cdots, x_n$;(Ⅱ) $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 设 y_j 在基(Ⅰ)下的坐标为 β_j ($j = 1,2,\cdots, n$),则由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $C = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$,基变换公式为

$$(y_1, \cdots, y_n) = (x_1, \cdots, x_n) C$$

$$(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n) C^{-1}$$

〔评注〕　一般地,上式中进行乘法运算时,只能将 x_i 或者 y_j 作为一个“数”看待;比较等号两端的对应“分量”时,亦将 x_i 或者 y_j 作为一个“数”看待 .

(2) 主要特征:两个基之间的过渡矩阵是可逆方阵,它的阶数等于线性空间的维数 .

5. 元素的坐标

元素的坐标指元素由线性空间的基线性表示时,表示式中的系数构成的列向量 .

(1) 表示方法:设线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,对于任意 $x\in V^n$,有 $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$,则 x 在该基下的坐标为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$.

(2) 主要特征:元素的坐标是列向量,它的维数等于线性空间的维数 .

(3) 运算转化:设数域 K 上的线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,且 $x, y\in V^n$ 在该基下的坐标分别为 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$,则

1) $x + y$ 在该基下的坐标为 $\alpha + \beta$;

2) kx 在该基下的坐标为 $k\alpha(k \in K)$.

6. 线性变换的矩阵

线性变换的矩阵是以线性空间的基中各元素的像在该基下的坐标为列向量构成的方阵.

(1) 表示方法:设线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 线性变换为 T, 基像组 $Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$ 在该基下的坐标依次为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, 则 T 在该基下的矩阵为 $A = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$, 且有

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) \xlongequal{\text{def}} (Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A$$

(2) 主要特征:线性变换的矩阵是方阵, 它的阶数等于线性空间的维数.

(3) 运算转化:设数域 K 上的线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 线性变换 T_1 和 T_2 在该基下的矩阵分别为 A 和 B, 则

1) $T_1 + T_2$ 在该基下的矩阵为 $A + B$;

2) kT_1 在该基下的矩阵为 $kA(k \in K)$;

3) $T_1 T_2$ 在该基下的矩阵为 AB;

4) T_1^{-1} 在该基下的矩阵为 A^{-1}(若 T_1 为可逆变换).

7. 基的度量矩阵

度量矩阵是以欧氏(酉)空间的基中第 i 个元素与第 j 个元素的内积为 i 行 j 列元素构成的方阵.

(1) 表示方法:设欧氏(酉)空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 令 $a_{ij} = (x_i, x_j)(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则该基的度量矩阵为 $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

(2) 主要特征:基的度量矩阵是实对称(Hermite)正定矩阵, 它的阶数等于欧氏(酉)空间的维数.

(3) 运算转化:设酉空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 该基的度量矩阵为 A, $x, y \in V^n$ 在该基下的坐标(列向量)分别为 α 和 β, 那么 x 与 y 的内积 $(x, y) = \alpha^T A \bar{\beta}$. 当 V^n 为欧氏空间时, $(x, y) = \alpha^T A\beta$.

8. 标准正交基

标准正交基指欧氏(酉)空间中由两两正交的单位向量构成的基.

(1) 构造方法:对欧氏(酉)空间的一个基进行 Schmidt 正交化可得正交基,再对正交基进行单位化可得标准正交基.

(2) 主要特征:正交基的度量矩阵是对角矩阵,标准正交基的度量矩阵是单位矩阵.

(3) 运算转化:设欧氏(酉)空间 V^n 的一个标准正交基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,且 $x, y \in V^n$ 在该基下的坐标分别为 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$,则

1) $a_i = (x, x_i), b_i = (y, x_i) (i = 1, 2, \cdots, n)$;

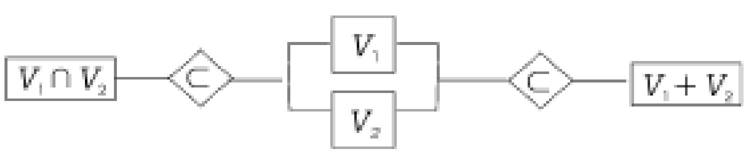
2) $(x, y) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \cdots + a_n \bar{b}_n = (\alpha, \beta)$.

二、主要结论

1. 线性子空间

设 V_1 和 V_2 是线性空间 V^n 的两个子空间,则有:

(1) $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$ 是 V^n 的子空间.

(2) 

(3) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

(4) 下面四种说法等价:

1) $V_1 + V_2$ 是直和;

2) $V_1 + V_2$ 中零元素的分解式惟一;

3) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$;

4) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

(5) 若 $V_1 + V_2$ 是直和,则将 V_1 的基与 V_2 的基拼接起来可构成 $V_1 + V_2$ 的基.

(6) 若 $V_1 = L(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, 则 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的最大无关组是 V_1 的基.

(7) 若 $V_1 = L(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $V_2 = L(y_1, y_2, \cdots, y_l)$, 则

$$V_1 + V_2 = L(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_l)$$

(8) 线性空间 V^n 为欧氏(酉) 空间时, $V^n = V_1 \oplus V_1^{\perp}$.

(9) 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, 则有

1) $[R(A)]^{\perp} = N(A^{\mathrm{H}})$, 且 $\mathbf{C}^m = R(A) \oplus N(A^{\mathrm{H}})$;

2) $[R(A^{\mathrm{H}})]^{\perp} = N(A)$, 且 $\mathbf{C}^n = R(A^{\mathrm{H}}) \oplus N(A)$.

(10) 设 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则 $V^n = L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

2. 向量组的线性关系

设线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 且 $y, y_j \in V^n$ 在该基下的坐标分别为 β 和 β_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$, 则有:

(1) y 可由 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性表示的充要条件是 β 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性表示.

(2) $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性相(无) 关的充要条件是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性相(无) 关.

(3) $y_{j_1}, \cdots, y_{j_r}$ 为 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的最大无关组的充要条件是 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的最大无关组.

3. 坐标变换

设数域 K 上的线性空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 (Ⅱ) $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 且由基(Ⅰ) 改变为基(Ⅱ) 的过渡矩阵为 C, $x \in V^n$ 在基(Ⅰ) 和基(Ⅱ) 下的坐标(列向量) 分别为 α 和 β, 则有:

(1) $\alpha = C\beta$, $\beta = C^{-1}\alpha$

(2) 对于 $\lambda \in K$, 存在 $x \neq 0$ 使得 $\alpha = \lambda\beta$ 的充要条件是 $C\beta = \lambda\beta$, 即 λ 为 C 的一个特征值.

4. 标准正交基

设欧氏空间 V^n 的两个基分别为 (Ⅰ) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 (Ⅱ) $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 且由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 C, 基(Ⅰ) 的度量矩阵为 A, 基(Ⅱ) 的度量矩阵为 B, 则有:

(1) $B = C^{\mathrm{T}} AC$.

(2) 基(Ⅰ)是标准正交基的充要条件是 $A = I$.

(3) 若基(Ⅰ)与基(Ⅱ)都是标准正交基,则 C 是正交矩阵.

(4) 若基(Ⅰ)(或(Ⅱ))是标准正交基,C 是正交矩阵,则基(Ⅱ)(或基(Ⅰ))是标准正交基.

5. 相似矩阵

(1) $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 相似于上(下)三角矩阵.

(2) $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 相似于 Jordan 标准形矩阵.

(3) $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 酉相似于上三角矩阵.

(4) 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$,则 $A^{\mathrm{H}} A = AA^{\mathrm{H}}$ 的充要条件是存在酉矩阵 P,使得 $P^{\mathrm{H}} AP = \Lambda$(对角矩阵).

(5) 设 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$ 的特征值都是实数,则 $A^{\mathrm{T}} A = AA^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是存在正交矩阵 Q,使得 $Q^{\mathrm{T}} AQ = \Lambda$.

(6) 实对称矩阵正交相似于对角矩阵.

6. 方阵的最小多项式

(1) 方阵是其特征多项式的矩阵根.

(2) 方阵的最小多项式整除它的零化多项式.

(3) 方阵的最小多项式与它的特征多项式有相同的零点(不计重数).

(4) 设 n 阶方阵 A 的特征多项为 $\varphi(\lambda)$,特征矩阵 $\lambda I - A$ 的 $n-1$ 阶行列式因子为 $D_{n-1}(\lambda)$,则 A 的最小多项式为 $m(\lambda) = \dfrac{\varphi(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$.

(5) 设 n 阶方阵 A 的全体初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{k_{t_1}}\quad (1\leq k_1\leq\cdots\leq k_{t_1})$$

$$(\lambda-\lambda_2)^{l_1},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{l_{t_2}}\quad (1\leq l_1\leq\cdots\leq l_{t_2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\lambda-\lambda_s)^{r_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{r_{t_s}}\quad (1\leq r_1\leq\cdots\leq r_{t_s})$$

其中,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互不相同,则 A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{t_1}} (\lambda - \lambda_2)^{l_{t_2}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_{t_s}}$$

7. **线性变换**

设线性空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ)$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和(Ⅱ)$y_1, y_2, \cdots, y_n$,且由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 C,线性变换 T 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的矩阵分别为 A 和 B, $x \in V^n$ 在基(Ⅰ)下的坐标为 α,则有:

(1) $\dim R(T) = \operatorname{rank} A, \quad \dim N(T) = n - \operatorname{rank} A.$

(2) Tx 在基(Ⅰ)下的坐标为 $A\alpha$.

(3) $B = C^{-1}AC.$

(4) T 的特征值与 A 的特征值相同, T 的对应于特征值 λ 的特征向量在基(Ⅰ)下的坐标为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

(5) 在 V^n 中存在某个基使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵 Λ 的充要条件是,存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$. 此时, P 是由基(Ⅰ)改变为这个基的过渡矩阵.

(6) T 在 V^n 的某个基下的矩阵为对角矩阵的充要条件是 T 有 n 个线性无关的特征向量.

(7) 关于正交变换,下面四种说法等价:

1) T 是欧氏空间 V^n 的正交变换,即对于任意的 $x \in V^n$,有 $(Tx, Tx) = (x, x)$;

2) 对于任意的 $x, y \in V^n$,有 $(Tx, Ty) = (x, y)$;

3) T 在 V^n 的标准正交基下的矩阵为正交矩阵;

4) T 将 V^n 的标准正交基变换为标准正交基.

(8) 关于对称变换,下面两种说法等价:

1) T 是欧氏空间 V^n 的对称变换,即对于任意的 $x, y \in V^n$,有 $(Tx, y) = (x, Ty)$;

2) T 在 V^n 的标准正交基下的矩阵为对称矩阵.

(9) 若 T 是欧氏空间 V^n 的对称变换,则 T 在 V^n 的某个标准正交

基下的矩阵为对角矩阵.

(10) 在欧氏空间 V^n 中,若正交变换 T 的特征值都是实数,则 T 是对称变换.

8. 线性变换的不变子空间

设 T 是线性空间 V^n 的线性变换,则有:

(1) $R(T)$, $N(T)$ 及 V_λ 都是 T 的不变子空间.

(2) 若 V_1 和 V_2 都是 T 的不变子空间,则 $V_1 \cap V_2$ 与 $V_1 + V_2$ 也是 T 的不变子空间.

(3) 若 V^n 可分解为 T 的不变子空间 V_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 的直和,则 T 在由 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 的基拼接而构成 V^n 的基下的矩阵为准对角矩阵.

(4) 若 T 在 V^n 的某个基下的矩阵为准对角矩阵 $\mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_m)$,则 V^n 可分解为 T 的 m 个不变子空间的直和.

三、常 用 方 法

1. 求线性空间(子空间)的基

(1) 根据线性空间的构成规律,找出其中的一组特殊元素,使得线性空间的一般元素都可由这组元素线性表示.

(2) 若这组元素线性无关,则它就是线性空间的基;若这组元素线性相关,则它的一个最大无关组就是线性空间的基.

2. 求 $R(A)$ 和 $N(A)$ 的基

(1) 矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组是 $R(A)$ 的基.

(2) 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系是 $N(A)$ 的基.

3. 求 $R(T)$, $N(T)$ 及 V_λ 的基

设线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,线性变换 T 在该基下的矩阵为 A,记 $\mathrm{rank}\,A = r$,则有:

(1) 求出 $R(A)$ 的一个基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ (列向量),那么 $R(T)$ 的

一个基为

$$y_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\alpha_1, \cdots, y_r = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\alpha_r$$

(2) 求出 $N(A)$ 的一个基为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r}$(列向量),那么 $N(T)$ 的一个基为

$$z_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\beta_1, \cdots, z_{n-r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\beta_{n-r}$$

(3) 求出 $N(\lambda I - A)$ 的一个基为 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l$(列向量),那么 V_λ 的一个基为

$$u_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\gamma_1, \cdots, u_l = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\gamma_l$$

4. 求过渡矩阵

设线性空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和(Ⅱ) $y_1, y_2, \cdots, y_n$,由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 C,那么求过渡矩阵有下述方法.

(1) 直接法:

1) 计算 y_j 在基(Ⅰ)下的坐标 β_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$;

2) 写出 $C = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$.

(2) 中介法:

1) 选取 V^n 的简单基,使 V^n 的元素在该基下的坐标能够直接写出;

2) 分别写出由简单基改变为基(Ⅰ)和基(Ⅱ)的过渡矩阵 C_1 和 C_2;

3) 计算 $C = C_1^{-1}C_2$.

〖评注〗 在中介法中,由于 x_j 在简单基下的坐标可以直接写出,所以由简单基改变为基(Ⅰ)的过渡矩阵 C_1 能够直接写出. 同理,由简单基改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵 C_2 也能够直接写出.

5. 求在两个基下坐标向量成比例的非零元素

设线性空间 V^n 的两个基分别为(Ⅰ) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和(Ⅱ) $y_1, y_2, \cdots, y_n$,且 $z \in V^n$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标向量 α 和 β 满足

$\alpha = \lambda\beta$(λ为给定常数),求元素 z 的步骤如下:

(1) 求出由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵 C.

(2) 求出齐次线性方程组$(\lambda I - C)\beta = 0$ 的基础解系 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l$.

(3) 写出满足要求的全体线性无关的元素组

$$z_1 = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\beta_1, \cdots, z_l = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\beta_l$$

那么,满足要求的全体非零元素为

$$z = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_l z_l \quad (k_1, k_2, \cdots, k_l \text{ 不全为 } 0)$$

6. 求线性变换的矩阵

设线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,线性变换 T 在该基下的矩阵为 A,那么求线性变换的矩阵有下述方法.

(1) 直接法:

1) 计算 Tx_j,并求出 Tx_j 在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的坐标 β_j ($j = 1, 2, \cdots, n$);

2) 写出 $A = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$.

(2) 中介法:

1) 选取 V^n 的简单基,记作 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$,使 V^n 中的元素在该基下的坐标能够直接写出;

2) 写出由简单基改变为给定基的过渡矩阵 C;

3) 计算 $T\varepsilon_j$,并写出 $T\varepsilon_j$ 在简单基下的坐标 β_j ($j = 1, 2, \cdots, n$),得到 T 在简单基下的矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$;

4) 计算 T 在给定基下的矩阵 $A = C^{-1}BC$.

〔评注〕 中介法的第 3 步是采用直接法求线性变换在简单基下的矩阵.

(3) 混合法:

1) 选取 V^n 的简单基,记作 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$;

2) 写出由简单基改变为给定基的过渡矩阵 C;

3) 计算 Tx_j,并写出 Tx_j 在简单基下的坐标 β_j ($j = 1, 2, \cdots, n$),

得到矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,即 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B$;

4) 计算 T 在给定基下的矩阵 $A=C^{-1}B$.

7. 求线性变换的特征值与特征向量

(1) 选取线性空间 V^n 的一个基(通常是简单基)$x_1,x_2,\cdots,x_n$,并求出线性变换 T 在该基下的矩阵 A.

(2) 求出矩阵 A 的全体互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s(1\leq s\leq n)$.

(3) 求出特征方程$(\lambda_i I-A)x=0$ 的基础解系 $\beta_1^{(i)},\beta_2^{(i)},\cdots,\beta_{l_i}^{(i)}$.

(4) 写出线性变换 T 的对应于特征值 λ_i 的全体线性无关的特征向量

$$y_1^{(i)}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\beta_1^{(i)},\cdots,y_{l_i}^{(i)}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\beta_{l_i}^{(i)}$$

那么,T 的对应于特征值 λ_i 的全体特征向量为

$$y=k_1y_1^{(i)}+k_2y_2^{(i)}+\cdots+k_{l_i}y_{l_i}^{(i)}\quad(k_1,k_2,\cdots,k_{l_i}\text{ 不全为 }0)$$

8. 求线性空间的基使线性变换的矩阵为对角矩阵

(1) 选取线性空间 V^n 的一个基(通常是简单基)$x_1,x_2,\cdots,x_n$,并求出线性变换 T 在该基下的矩阵 A.

(2) 求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$(对角矩阵).

(3) 构造 V^n 的另一个基 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,使满足

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)P$$

那么,T 在基 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 下的矩阵为 Λ.

〔评注〕 并非对于任何线性变换 T,都存在线性空间 V^n 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵. 但是在复数域上,任何 n 阶方阵都相似于 Jordan 标准形,因此总存在 V^n 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为 Jordan 标准形——特殊的准对角矩阵.

9. 求方阵的 Jordan 标准形

设 $A\in\mathrm{C}^{n\times n}$ 的全体初等因子为$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\quad(i=1,2,\cdots,s;m_1+m_2+\cdots+m_s=n)$,对应第 i 个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 的 Jordan 块为 J_i,

那么 A **的** Jordan **标准形为** $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_s)$，**求** A **的全体初等因子常用下面三种方法**.

(1) **行列式因子法**:

1) **计算** $\lambda I - A$ **的行列式因子** $D_k(\lambda)(k = 1,2,\cdots,n)$;

2) **计算** $\lambda I - A$ **的不变因子**

$$d_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} \quad (k = 1,2,\cdots,n; D_0(\lambda) = 1)$$

3) **对** $d_1(\lambda), d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ **分解因式**，**全体不可约因式**(**一次因式方幂**) **为** A **的全体初等因子**.

(2) **初等变换法**:

1) **用初等变换将** $\lambda I - A$ **化为对角矩阵** $\mathrm{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda),\cdots, f_n(\lambda))$，**其中** $f_k(\lambda)(k = 1,2,\cdots,n)$ **是首** 1 **多项式**;

2) **对** $f_1(\lambda), f_2(\lambda),\cdots, f_n(\lambda)$ **分解因式**，**全体不可约因式为** A **的全体初等因子**.

(3) **特征多项式分析法**:

1) **计算** A **的特征多项式** $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$;

2) **求出** $\varphi(\lambda)$ **的全体不可约因式**

$$(\lambda - \lambda_i)^{r_i} \quad (i = 1,2,\cdots,l; r_1 + r_2 + \cdots + r_l = n)$$

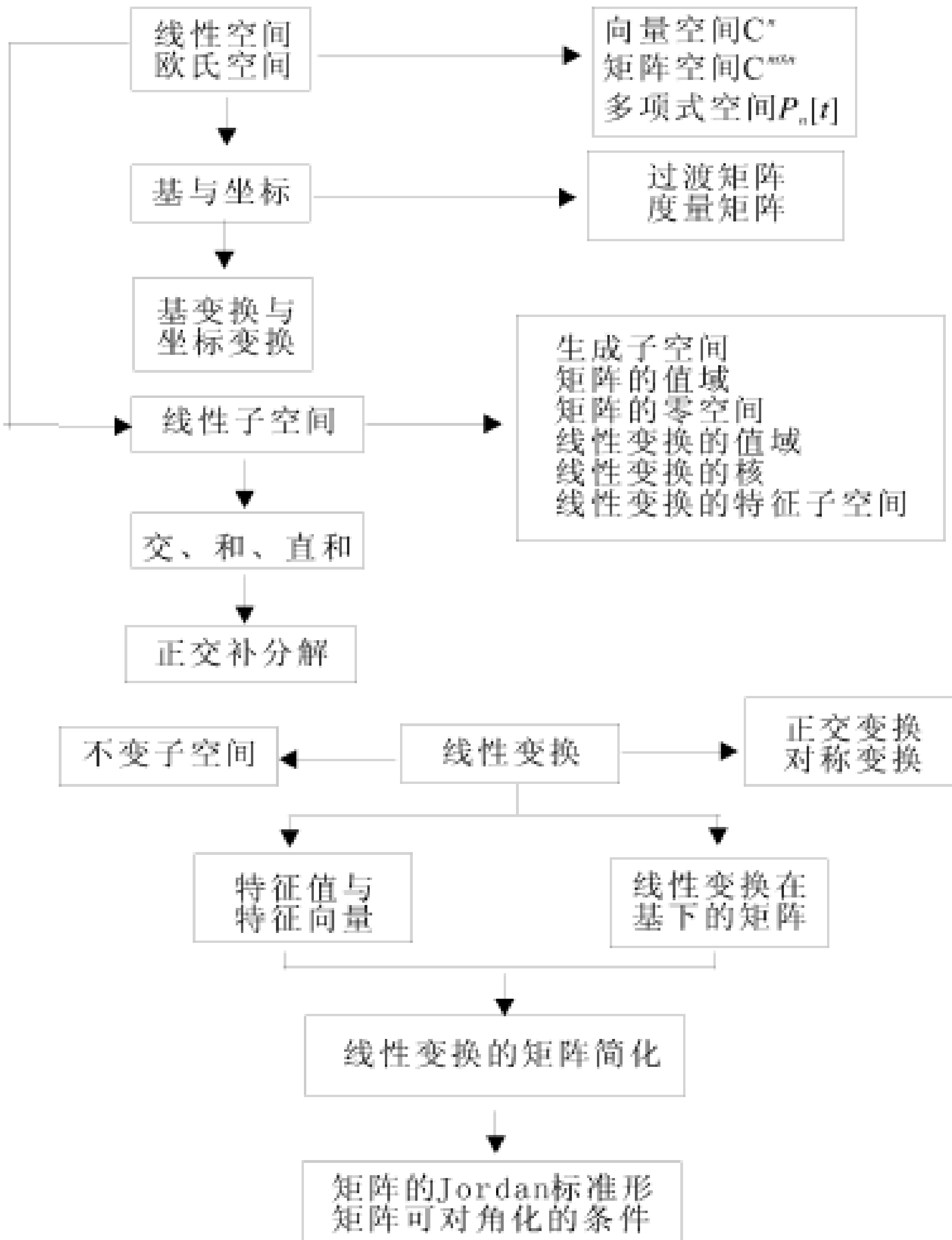
3) **对于** $\varphi(\lambda)$ **的第** i **个不可约因式**$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$，**有**

$r_i = 1$ **时**，$\lambda - \lambda_i$ **是** A **的一个初等因子**;

$r_i > 1$ **时**，$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ **是** A **的** $n - \mathrm{rank}(\lambda_i I - A)$ **个初等因子的乘积**.

〖**评注**〗　**在特征多项式分析法中**，**当** $r_i \leq 3$ **时**，**一定能够确定出**$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$**是几个初等因子的乘积**;**而当** $r_i > 3$ **时**，**不一定能够确定出**$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$ **是几个初等因子的乘积**，**此时该方法可能失效**。

四、内容结构框图


线性空间
欧氏空间
向量空间C^n
矩阵空间$C^{n\times n}$
多项式空间$P_n[t]$
基与坐标
过渡矩阵
度量矩阵
基变换与
坐标变换
线性子空间
生成子空间
矩阵的值域
矩阵的零空间
线性变换的值域
线性变换的核
线性变换的特征子空间
交、和、直和
正交补分解
不变子空间
线性变换
正交变换
对称变换
特征值与
特征向量
线性变换在
基下的矩阵
线性变换的矩阵简化
矩阵的Jordan标准形
矩阵可对角化的条件

五、课后习题全解

习　题　1.1

1. 设 $S_1 \quad S_2$，证明 $S_1 \cap S_2 = S_1$，$S_1 \cup S_2 = S_2$.

证　任取 $a \in S_1$，由 $S_1 \quad S_2$ 知 $a \in (S_1 \cap S_2)$，从而 $S_1 \quad (S_1 \cap S_2)$；又 $(S_1 \cap S_2) \quad S_1$，所以 $(S_1 \cap S_2) = S_1$.

任取 $a \in (S_1 \cup S_2)$，由 $S_1 \quad S_2$ 知 $a \in S_2$，故 $(S_1 \cup S_2) \quad S_2$；又 $S_2 \quad (S_1 \cup S_2)$，所以 $(S_1 \cup S_2) = S_2$.

2. 判别数集 $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathrm{Q}\}$ 是否形成数域.

解　令 $S = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathrm{Q}\}$，任取 S 中两个数 $a_1 + b_1\sqrt{2}$ 和 $a_2 + b_2\sqrt{2}$，由于

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2} \in S$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in S$$

$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} = \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2} \in S$$

所以 S 形成数域.

3. 判别下列集合对所指运算是否构成 R 上的线性空间.

(1) 次数等于 $m(m \geq 1)$ 的实系数多项式的集合，对于多项式的加法和数与多项式的乘法；

(2) 实对称矩阵的集合，对于矩阵的加法和实数与矩阵的乘法；

(3) 平面上全体向量的集合，对于通常的加法和如下定义的数乘运算 $k \quad x = 0$.

解　(1) 否. 因为两个 m 次多项式相加不一定还是 m 次多项式，所以加法运算不封闭.

(2) 是.

(3) 否. 因为 $x \neq 0$ 时 $1 \quad x = 0 \neq x$,所以定义中的性质(8) 不能成立.

4. 证明:在实函数空间中,函数组 $1, \cos^2 t, \cos 2t$ 是线性相关的.

证　因为 $1 - 2\cos^2 t + \cos 2t = 0$,所以 $1, \cos^2 t, \cos 2t$ 线性相关.

5. 求第 3 题之(2) 中线性空间的维数与基.

解　用 E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1,而其余元素为 0 的 n 阶方阵,则

$$E_{ii}\,(i = 1, 2, \cdots, n),\quad F_{ij} = E_{ij} + E_{ji}\,(i < j;\, i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

线性无关,且当 $a_{ij} = a_{ji}$ 时,有

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij} F_{ij}$$

因此,该线性空间的一个基为 $E_{ii}\,(i = 1, 2, \cdots, n)$, $F_{ij}\,(i < j;\, i, j = 1, 2, \cdots, n)$,其维数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

6. 求 R^3 中向量 $x = (3, 7, 1)$ 在基 $x_1 = (1, 3, 5)$, $x_2 = (6, 3, 2)$, $x_3 = (3, 1, 0)$ 下的坐标.

解　设 $x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$,比较等号两端向量的对应分量可得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其惟一解为 $k_1 = 33$, $k_2 = -82$, $k_3 = 154$. 因此, x 的坐标为 $(33, -82, 154)^{\mathrm{T}}$.

7. 求 $P_2[t]$ 中向量 $1 + t + t^2$ 在基 $1, t - 1, (t - 2)(t - 1)$ 下的坐标.

解　设 $1 + t + t^2 = k_1 \cdot 1 + k_2(t - 1) + k_3(t - 2)(t - 1)$,比较等号两端关于 t 的同次幂的系数可得

$$\begin{cases} k_1 - k_2 + 2k_3 = 1 \\ \qquad k_2 - 3k_3 = 1 \\ \qquad\qquad k_3 = 1 \end{cases}$$

求解得 $k_3 = 1, k_2 = 4, k_1 = 3$. 因此,$1 + t + t^2$ 的坐标为$(3,4,1)^{\mathrm{T}}$.

8. 设线性空间 V^4 的基(Ⅰ) x_1, x_2, x_3, x_4 和基(Ⅱ) y_1, y_2, y_3, y_4 满足

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_3 \\ x_2 + 2x_3 = y_4 \\ y_1 + 2y_2 = x_3 \\ y_2 + 2y_3 = x_4 \end{cases}$$

(1) 求由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵 C;

(2) 求向量 $x = 2y_1 - y_2 + y_3 + y_4$ 在基(Ⅰ)下的坐标.

解　(1) 解出 y_1, y_2,可得

$$y_1 = 4x_1 + 8x_2 + x_3 - 2x_4, \qquad y_2 = -2x_1 - 4x_2 + x_4$$

$$y_3 = x_1 + 2x_2, \qquad y_4 = x_2 + 2x_3$$

于是,由基(Ⅰ)改变基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) x 在基(Ⅱ)下的坐标为$(2, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,由坐标变换公式计算 x 在基(Ⅰ)下的坐标为

$$C\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 23 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

9. 在 R^4 中有两个基

$$x_1 = e_1, x_2 = e_2, x_3 = e_3, x_4 = e_4$$

$$y_1 = (2,1,-1,1), y_2 = (0,3,1,0)$$

$$y_3 = (5,3,2,1), y_4 = (6,6,1,3)$$

(1) 求由前一基改变为后一基的过渡矩阵;

(2) 求向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 在后一基下的坐标;

(3) 求对两个基有相同坐标的非零向量.

解 (1) 设$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)C$,直接写出

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) x 在基 x_1, x_2, x_3, x_4 下的坐标为$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$,而 x 在基 y_1, y_2, y_3, y_4 下的坐标为 $C^{-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$.

(3) 由$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = C^{-1}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}$得$(C - I)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = 0$,该方程组的通解为 $k(1,1,1,-1)^T$,对两个基有相同坐标的非零向量为 $k(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$,k 为非零常数.

10. 设 x_1, x_2, x_3 是 R^3 的一个基,求由 $y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3$,$y_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$,$y_3 = 4x_1 + 13x_2$ 生成的子空间 $L(y_1, y_2, y_3)$ 的基.

解 $L(y_1, y_2, y_3)$ 的基为 y_1, y_2, y_3 的一个最大无关组. 在基 x_1, x_2, x_3 下,y_1, y_2, y_3 的坐标依次为

$$(1, -2, 3)^T,\quad (2, 3, 2)^T,\quad (4, 13, 0)^T$$

该列向量组的一个最大无关组为$(1, -2, 3)^T, (2, 3, 2)^T$. 因此,$y_1, y_2, y_3$ 的一个最大无关组为 y_1, y_2,即 $L(y_1, y_2, y_3)$ 的一个基为 y_1, y_2.

11. 求 R^4 的子空间

$$V_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0\}$$

$$V_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0\}$$

的交 $V_1 \cap V_2$ 的基.

解 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in (V_1 \cap V_2)$,则 x 的分量满足

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0 \end{cases}$$

该方程组的基础解系为$(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$(0,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,从而 $V_1 \cap V_2$ 的一个基为$(1,0,-1,0)$,$(0,1,0,-1)$.

12. 给定 $\mathrm{R}^{2\times 2}=\{A=(a_{ij})_{2\times 2} \mid a_{ij}\in \mathrm{R}\}$(数域 R 上的二阶实方阵按通常矩阵的加法与数乘矩阵构成的线性空间) 的子集

$$V=\{A=(a_{ij})_{2\times 2} \mid a_{11}+a_{22}=0, a_{ij}\in \mathrm{R}\}$$

(1) 证明 V 是 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 的子空间;

(2) 求 V 的维数和基.

解　(1) 设 $A=(a_{ij})_{2\times 2}\in V$, $B=(b_{ij})_{2\times 2}\in V$,则有

$$a_{11}+a_{22}=0,\quad b_{11}+b_{22}=0$$

因为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{2\times 2},\quad (a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})=0$$

$$kA=(ka_{ij})_{2\times 2},\qquad (ka_{11})+(ka_{22})=0$$

所以 $A+B\in V$, $kA\in V$. 又 $O_{2\times 2}\in V$,所以 V 是 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 的子空间.

(2) 在 V 中

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

线性无关. 任意 $A=(a_{ij})_{2\times 2}\in V$, 有 $a_{11}+a_{22}=0$, 即 $a_{22}=-a_{11}$,于是

$$A=a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{21}A_3$$

因此,V 的一个基是 A_1, A_2, A_3,从而 $\dim V=3$.

13. 证明所有二阶矩阵之集合形成的实线性空间,是所有二阶实对称矩阵之集合形成的子空间与所有二阶反对称矩阵之集合形成的子空间的直和.

证　设 $V=\mathrm{R}^{2\times 2}$,令

$$V_1=\{A=(a_{ij})_{2\times 2} \mid a_{ij}=a_{ji}, a_{ij}\in \mathrm{R}\}$$

$$V_2=\{B=(b_{ij})_{2\times 2} \mid b_{ij}=-b_{ji}, b_{ij}\in \mathrm{R}\}$$

容易验证,V_1 与 V_2 都是 V 的子空间. 任意 $C\in V$,有

$$C=\frac{1}{2}(C+C^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(C-C^{\mathrm{T}})$$

且$\frac{1}{2}(C - C^T) \in V_1$, $\frac{1}{2}(C - C^T) \in V_2$,所以 $V = V_1 + V_2$. 因为

$$D = (d_{ij})_{2\times 2} \in V_1 \cap V_2 \qquad D \in V_1 \text{ 且 } D \in V_2$$

$$d_{ij} = d_{ji} \text{ 且 } d_{ij} = - d_{ji}$$

$$d_{ij} = 0 \ (i, j = 1, 2)$$

$$D = O$$

所以 $V_1 \cap V_2 = \{O\}$,即 $V = V_1 \oplus V_2$.

习　题　1. 2

1. 判别下列变换中哪些是线性变换 .

(1) 在 R^3 中,设 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $Tx = (\xi_1^2, \xi_1 + \xi_2, \xi_3)$;

(2) 在矩阵空间 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 中, $TX = BXC$,这里 B, C是给定矩阵;

(3) 在线性空间 $P_n[t]$ 中, $Tf(t) = f(t + 1)$.

解　(1) 否 . 因为 $T(2x) = (4\xi_1^2, 2\xi_1 + 2\xi_2, 2\xi_3)$,而 $2(Tx) = (2\xi_1^2, 2\xi_1 + 2\xi_2, 2\xi_3)$,所以当 $\xi_1 \neq 0$ 时, $T(2x) \neq 2(Tx)$.

(2) 是 . 设 $X, Y \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $k \in \mathrm{R}$,则有

$$T(X + Y) = B(X + Y)C = BXC + BYC = TX + TY$$

$$T(kX) = B(kX)C = k(BXC) = k(TX)$$

(3) 是 . 设 $f(t), g(t) \in P_n[t]$, $k \in \mathrm{R}$,则有

$$T[f(t) + g(t)] = f(t + 1) + g(t + 1) = Tf(t) + Tg(t)$$

$$T[kf(t)] = kf(t + 1) = kTf(t)$$

2. 在 R^2 中,设 $x = (\xi_1, \xi_2)$,证明 $T_1 x = (\xi_2, - \xi_1)$ 与 $T_2 x = (\xi_1, - \xi_2)$ 是 R^2 的两个线性变换,并求 $T_1 + T_2$, $T_1 T_2$ 及 $T_2 T_1$.

解　设 $k, l \in \mathrm{R}$, $y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathrm{R}^2$,则

$$kx + ly = (k\xi_1 + l\eta_1, k\xi_2 + l\eta_2)$$

于是有

$$T_1(kx + ly) = (k\xi_2 + l\eta_2, - k\xi_1 - l\eta_1) = k(\xi_2, - \xi_1) + l(\eta_2, - \eta_1) =$$

$$k(T_1 x) + l(T_1 y)$$

所以 T_1 是线性变换．同理可得 T_2 是线性变换．

$$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x = (\xi_1 + \xi_2, -\xi_1 - \xi_2)$$

$$(T_1 T_2)x = T_1(T_2 x) = T_1(\xi_1, -\xi_2) = (-\xi_2, -\xi_1)$$

$$(T_2 T_1)x = T_2(T_1 x) = T_2(\xi_2, -\xi_1) = (\xi_2, \xi_1)$$

3．在 $P_n[t]$ 中，$T_1 f(t) = f'(t)$，$T_2 f(t) = tf(t)$，证明

$$T_1 T_2 - T_2 T_1 = T_e$$

证　设 $f(t) \in P_n[t]$，则

$$\begin{aligned}(T_1 T_2 - T_2 T_1)f(t) = {} & T_1[T_2 f(t)] - T_2[T_1 f(t)] = \\ & T_1[tf(t)] - T_2[f'(t)] = \\ & f(t) + tf'(t) - tf'(t) = \\ & f(t) = T_e f(t)\end{aligned}$$

故 $T_1 T_2 - T_2 T_1 = T_e$.

4．在 $\mathbf{R}^3$ 中，设 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，定义 $Tx = (2\xi_1 - \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_1)$，试求 T 在基 $e_1 = (1,0,0)$，$e_2 = (0,1,0)$，$e_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵．

解　$Te_1 = (2,0,1) = 2e_1 + 0e_2 + 1e_3$

$Te_2 = (-1,1,0) = (-1)e_1 + 1e_2 + 0e_3$

$Te_3 = (0,1,0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3$

故
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5．设 x_1, x_2 是线性空间 V^2 的基，T_1 与 T_2 是 V^2 的线性变换，$T_1 x_1 = y_1$，$T_1 x_2 = y_2$，且 $T_2(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$，$T_2(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$，证明 $T_1 = T_2$.

证　设 $x \in V^2$，则 $x = k_1 x_1 + k_2 x_2$．由于

$$\begin{cases} T_2 x_1 + T_2 x_2 = T_2(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \\ T_2 x_1 - T_2 x_2 = T_2(x_1 - x_2) = y_1 - y_2 \end{cases}$$

所以 $T_2 x_1 = y_1$，$T_2 x_2 = y_2$．于是

$$T_1 x = k_1 T_1 x_1 + k_2 T_1 x_2 =$$

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 = k_1 T_2 x_1 + k_2 T_2 x_2 = T_2 x$$

故 $T_1 = T_2$.

6. **六个函数**

$$x_1 = e^{at}\cos bt,\ x_2 = e^{at}\sin bt,\ x_3 = te^{at}\cos bt$$

$$x_4 = te^{at}\sin bt,\ x_5 = \frac{1}{2}t^2 e^{at}\cos bt,\ x_6 = \frac{1}{2}t^2 e^{at}\sin bt$$

的所有实系数线性组合构成实数域 R **上的一个六维线性空间** $V^6 = L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, **求微分变换** D **在基** $x_1, x_2, \cdots, x_6$ **下的矩阵**.

解 因为

$$Dx_1 = ae^{at}\cos bt - e^{at}b\sin bt = ax_1 - bx_2$$

$$Dx_2 = ae^{at}\sin bt + e^{at}b\cos bt = bx_1 + ax_2$$

$$Dx_3 = e^{at}\cos bt + tae^{at}\cos bt - te^{at}b\sin bt = x_1 + ax_3 - bx_4$$

$$Dx_4 = e^{at}\sin bt + tae^{at}\sin bt + te^{at}b\cos bt = x_2 + bx_3 + ax_4$$

$$Dx_5 = te^{at}\cos bt + \frac{1}{2}t^2 ae^{at}\cos bt - \frac{1}{2}t^2 e^{at}b\sin bt = x_3 + ax_5 - bx_6$$

$$Dx_6 = te^{at}\sin bt + \frac{1}{2}t^2 ae^{at}\sin bt + \frac{1}{2}t^2 e^{at}b\cos bt = x_4 + bx_5 + ax_6$$

故

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

7. **已知** R^3 **的线性变换** T **在基** $x_1 = (-1,1,1)$, $x_2 = (1,0,-1)$, $x_3 = (0,1,1)$ **下的矩阵为**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求 T 在基 $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵.

解　设基(Ⅰ)为 x_1, x_2, x_3；基(Ⅱ)为 e_1, e_2, e_3. 直接写出由基(Ⅱ)改变为基(Ⅰ)的过渡矩阵

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 C. 于是 T 在基(Ⅱ)下的矩阵为

$$C^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. 在 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 中定义线性变换

$$T_1 X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X, \quad T_2 X = X\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$T_3 X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

求 T_1, T_2, T_3 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

解

$$T_1 E_{11} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = aE_{11} + cE_{21}$$

$$T_1 E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = aE_{12} + cE_{22}$$

$$T_1 E_{21} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_{11} + dE_{21}$$

$$T_1 E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = bE_{12} + dE_{22}$$

故 T_1 在该基下的矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$$

类似地,可得 T_2 在该基下的矩阵为

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix}$$

由于 $T_3 = T_1 T_2$,所以 T_3 在该基下的矩阵为

$$A_3 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ bc & cd & bd & d^2 \end{bmatrix}$$

9. 设 T 是线性空间 V 的线性变换,且 $T^{k-1}x \neq 0$,但 $T^k x = 0$,求证 $x, Tx, \cdots, T^{k-1}x(k > 0)$ 线性无关.

证 设一组数 $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$,使得

$$c_0 x + c_1 Tx + \cdots + c_{k-1} T^{k-1} x = 0$$

两端用 T^{k-1} 变换,并利用 $T^k x = 0$ 可得

$$c_0 T^{k-1} x = 0$$

因为 $T^{k-1} x \neq 0$,所以 $c_0 = 0$.

同理可得 $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$,故 $x, Tx, \cdots, T^{k-1}x$ 线性无关.

10. 设 T 是 $\mathbf{R}^3$ 的线性变换,$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3$,而 $Tx = (0, \xi_1, \xi_2)$,求 T^2 的象子空间 $R(T^2)$ 和核子空间 $N(T^2)$ 的基与维数.

解 由 $T^2 x = T(Tx) = T(0, \xi_1, \xi_2) = (0, 0, \xi_1)$ 可得

$$R(T^2) = \{(0, 0, \xi) \mid \xi \in \mathbf{R}\}$$

$$N(T^2) = \{(0, \xi_2, \xi_3) \mid \xi_2, \xi_3 \in \mathbf{R}\}$$

因此,$\dim R(T^2) = 1$, $R(T^2)$ 的一个基为 $(0,0,1)$;$\dim N(T^2) = 2$, $N(T^2)$ 的一个基为 $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

11. 给定 $\mathbf{R}^3$ 的两个基

$x_1 = (1,0,1)$, $x_2 = (2,1,0)$, $x_3 = (1,1,1)$

$y_1 = (1,2,-1)$, $y_2 = (2,2,-1)$, $y_3 = (2,-1,-1)$

定义线性变换

$$Tx_i = y_i \quad (i = 1,2,3)$$

(1) 写出由基 x_1, x_2, x_3 改变为基 y_1, y_2, y_3 的过渡矩阵.

(2) 写出 T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵.

(3) 写出 T 在基 y_1, y_2, y_3 下的矩阵.

解　(1) 引进基 e_1, e_2, e_3,则有

$$(x_1, x_2, x_3) = (e_1, e_2, e_3)C_1, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(y_1, y_2, y_3) = (e_1, e_2, e_3)C_2, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

所以$(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3)C$,其中

$$C = C_1^{-1}C_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(2) 由 $T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3)C$ 知, T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵为 C.

(3) T 在基 y_1, y_2, y_3 下的矩阵为 $C^{-1}CC = C$.

12. 设 T 是数域 C 上线性空间 V^3 的线性变换,已知 T 在 V^3 的基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

求 T 的特征值与特征向量.

解　求得 A 的特征值和特征向量为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad k(3, -6, 20)^{\mathrm{T}} \quad (k \neq 0)$$

$$\lambda_3 = -2, \quad k(0,0,1)^{\mathrm{T}} \quad (k \neq 0)$$

故 T 的特征值和特征向量为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad k(3x_1 - 6x_2 + 20x_3) \quad (k \neq 0)$$

$\lambda_3 = -2,\qquad kx_3 \qquad\qquad (k \neq 0)$

13. **把矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

相似的变换为上三角矩阵.

解　第一步: $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$.

$$\lambda_1 = 2,\quad 2I - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

特征向量为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, **取** $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, **可求得**

$$P_1^{-1} AP_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

第 2 步: $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(\lambda I - A_1) = (\lambda - 1)^2$.

$$\lambda_1 = 1,\quad 1I - A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

特征向量为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, **取** $P_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, **可求得**

$$P_2^{-1} A_1 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $P = P_1 \begin{bmatrix} 1 & \\ & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, **则** $P^{-1} AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

14. **试计算** $2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I$, **其中**

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

解　$\det(\lambda I-A)=\lambda^3-2\lambda+1$,**利用长除法或待定系数法求得**

$$2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4=(\lambda^3-2\lambda+1)f(\lambda)+$$
$$(24\lambda^2-37\lambda+10)$$

其中 $f(\lambda)=2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14$. **由于** $A^3-2A+I=O$,**所以**

$$\text{原式}=24A^2-37A+10I=\begin{bmatrix}-3&48&-26\\0&95&-61\\0&-61&34\end{bmatrix}$$

15. **设** $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&5\end{bmatrix}$,**试求**

$$(2A^4-12A^3+19A^2-29A+37I)^{-1}$$

解　$\det(\lambda I-A)=\lambda^2-6\lambda+7$,**利用长除法或待定系数法求得**

$$2\lambda^4-12\lambda^3+19\lambda^2-29\lambda+37=(\lambda^2-6\lambda+7)(2\lambda^2+5)+(\lambda+2)$$

由于 $A^2-6A+7I=O$,**所以**

$$\text{原式}=(A+2I)^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\2&7\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{23}\begin{bmatrix}7&1\\-2&3\end{bmatrix}$$

16. **求下列矩阵的特征多项式和最小多项式**.

$$(1)\begin{bmatrix}7&4&-4\\4&-8&-1\\-4&-1&-8\end{bmatrix};\quad(2)\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\-a_1&a_0&-a_3&a_2\\-a_2&a_3&a_0&-a_1\\-a_3&-a_2&a_1&a_0\end{bmatrix}.$$

解　(1) $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-9)(\lambda+9)^2$, $m(\lambda)$ **是** $\varphi(\lambda)$ **的因式**,**检验知** $m(\lambda)=(\lambda-9)(\lambda+9)=\lambda^2-81$.

(2) **利用** $[\det(\lambda I-A)]^2=\det[(\lambda I-A)^{\mathrm T}(\lambda I-A)]$ **可求得**

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=$$
$$[\lambda^2-2a_0\lambda+(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)]^2$$

$m(\lambda)$ **是** $\varphi(\lambda)$ **的因式**,**检验知**

$$m(\lambda) = \lambda^2 - 2a_0\lambda + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

17. 证明任意矩阵与它的转置矩阵有相同的最小多项式.

证 设 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda)$, $B = A^{\mathrm{T}}$ 的最小多项式为 $m_B(\lambda)$. 由 $m_A(A) = O$ 可得

$$m_A(B) = m_A(A^{\mathrm{T}}) = [m_A(A)]^{\mathrm{T}} = O$$

故 $m_B(\lambda) \mid m_A(\lambda)$. 同理可得 $m_A(\lambda) \mid m_B(\lambda)$. 因此 $m_A(\lambda) = m_B(\lambda)$.

18. 设 T_1, T_2 是数域C上的线性空间 V^n 的线性变换, 且 $T_1T_2 = T_2T_1$, 证明: 如果 λ_0 是 T_1 的特征值, 那么 V_{λ_0} 是 T_2 的不变子空间.

证 对任意 $x \in V_{\lambda_0}$, 有 $T_1x = \lambda_0 x$. 由于

$$T_1(T_2x) = T_2(T_1x) = T_2(\lambda_0 x) = \lambda_0(T_2x)$$

所以 $T_2x \in V_{\lambda_0}$, 故 V_{λ_0} 是 T_2 的不变子空间.

19. 求下列各矩阵的 Jordan 标准形.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

解 (1) $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$, A 有 3 个不同的特征值, 从而 A 的 Jordan 标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

(2) $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$, A 有 3 个不同的特征值, 从而 A 的 Jordan 的标准形为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \mathrm{i} & \\ & & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

(3) 写出特征矩阵

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -7 & -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 7 & 6 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

容易求得 A 的行列式因子

$$D_1(\lambda) = 1,\quad D_2(\lambda) = 1,\quad D_4(\lambda) = (\lambda - 1)^4$$

位于 $\lambda I - A$ 的第 2,3,4 行与第 1,2,4 列处的三阶子式为

$$\begin{vmatrix} 4 & \lambda + 1 & 0 \\ -7 & -1 & -1 \\ 7 & 6 & \lambda \end{vmatrix} = 7\lambda^2 - 4\lambda + 17$$

它与 $D_4(\lambda)$ 互质,所以 $D_3(\lambda) = 1$,从而 A 的不变因子为 $1,1,1,(\lambda - 1)^4$. 于是 A 的初等因子为 $(\lambda - 1)^4$, A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

20. 设有正整数 m 使 $A^m = I$,证明 A 与对角矩阵相似.

证　设 A 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

即存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = J$. 由于

$$J^m = P^{-1}A^mP = P^{-1}IP = I$$

所以 $[J_i(\lambda_i)]^m = I_{m_i}$,从而 $m_i = 1$,即 $J_i(\lambda_i) = \lambda_i$,也就是 A 与对角矩阵相似.

21. **求解常微分方程组**

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi_1}{dt}=-\xi_1+\xi_2\\[2mm]\dfrac{d\xi_2}{dt}=-4\xi_1+3\xi_2\\[2mm]\dfrac{d\xi_3}{dt}=-8\xi_1+8\xi_2-\xi_3\end{cases}$$

这里 ξ_1,ξ_2,ξ_3 **都是** t **的未知函数**.

解 对方程组的系数矩阵 A 求可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=J$.

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\-8&8&-1\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&-1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&2&1\end{bmatrix}$$

作代换 $\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}$,将原方程化为

$$\begin{bmatrix}\eta_1'\\\eta_2'\\\eta_3'\end{bmatrix}=J\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1+\eta_2\\\eta_2\\-\eta_3\end{bmatrix}$$

可求得 $\eta_1=c_1e^t+c_2te^t$,$\eta_2=c_2e^t$,$\eta_3=c_3e^{-t}$,于是

$$\begin{cases}\xi_1(t)=c_1e^t+c_2te^t\\\xi_2(t)=2c_1e^t+c_2(2t+1)e^t\\\xi_3(t)=4c_1e^t+c_2(4t+2)e^t+c_3e^{-t}\end{cases}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

习 题 1.3

1. **设** $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ **是** R^n **的任意两个向量**, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ **是正定矩阵,定义** $(x,y)=xAy^{\mathrm{T}}$.

(1) **证明在该定义下** R^n **构成欧氏空间**;

(2) **求** R^n **中由单位坐标向量** $e_1=(1,0,\cdots,0)$, $e_2=(0,1,0,\cdots,$

$0),\cdots,e_n=(0,\cdots,0,1)$ 构成的基的度量矩阵;

(3) 写出 R^n 中 Cauchy - Бунияковский 不等式.

解　(1) $(x,y)=xAy^{\mathrm{T}}=[xAy^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=yAx^{\mathrm{T}}=(y,x)$

$$(kx,y)=(kx)Ay^{\mathrm{T}}=k[xAy^{\mathrm{T}}]=k(x,y)$$

$$(x+y,z)=(x+y)Az^{\mathrm{T}}=$$

$$xAz^{\mathrm{T}}+yAz^{\mathrm{T}}=(x,z)+(y,z)$$

当 $x=0$ 时, $(x,x)=xAx^{\mathrm{T}}=0$; 当 $x\neq 0$ 时, 由 A 正定知 $(x,x)=xAx^{\mathrm{T}}>0$. 因此, (x,y) 是 R^n 中的内积, 且在该内积定义下 R^n 构成欧氏空间.

(2) 由 $(e_i,e_j)=e_iAe_j^{\mathrm{T}}=a_{ij}$ 知, R^n 中基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的度量矩阵为 A.

(3) $(x,y)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j$, $|x|^2=(x,x)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j$, $|y|^2=(y,y)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\eta_i\eta_j$, 由 $|(x,y)|\leq|x||y|$ 得

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j\right|\leq\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\eta_i\eta_j}$$

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实线性空间 V^n 的基, 向量 $x=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n$ 和 $y=\eta_1x_1+\eta_2x_2+\cdots+\eta_nx_n$ 对应于实数 $(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i$. 试问 V^n 是否构成欧氏空间.

解　设 $z\in V^n$, 且 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$, 则有

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i=\sum_{i=1}^{n}i\eta_i\xi_i=(y,x)$$

$$(kx,y)=\sum_{i=1}^{n}i(k\xi_i)\eta_i=k\sum_{i=1}^{n}i\xi_i\eta_i=k(x,y)$$

$$(x+y,z)=\sum_{i=1}^{n}i(\xi_i+\eta_i)c_i=$$

$$\sum_{i=1}^{n}i\xi_ic_i+\sum_{i=1}^{n}i\eta_ic_i=(x,z)+(y,z)$$

当 $x = 0$ 时,$\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$,$(x, x) = 0$;当 $x \neq 0$ 时,实数 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 不全为零,$(x, x) > 0$. 因此,(x, y) 是 V^n 中的内积,且在该内积定义下 V^n 构成欧氏空间.

3. 在 R^4 中, 求下面向量 x 与 y 的夹角 $\langle x, y\rangle$, 其内积按式(1.3.1)给出.

(1) $x = (2,1,3,2)$, $y = (1,2,-2,1)$;

(2) $x = (1,2,2,3)$, $y = (3,1,5,1)$.

解 (1) $(x, y) = 0$, $\langle x, y\rangle = \dfrac{\pi}{2}$;

(2) $(x, y) = 18$, $|x|^2 = 18$, $|y|^2 = 36$

$$\cos\langle x, y\rangle = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \langle x, y\rangle = \frac{\pi}{4}$$

4. 在 R^4 中,求一单位向量与 $(1,1,-1,1)$, $(1,-1,-1,1)$ 及 $(2,1,1,3)$ 均正交.

解 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 和已知向量正交,即

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0 \\ \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + 3\xi_4 = 0 \end{cases}$$

该齐次线性方程组的一个非零解为 $x = (4,0,1,-3)$,单位化可得 $y = \dfrac{1}{|x|}x = \left(\dfrac{4}{\sqrt{26}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{26}}, \dfrac{-3}{\sqrt{26}}\right)$,即 y 为所求的单位向量.

5. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是欧氏空间 V^5 的一个标准正交基,$V_1 = L(y_1, y_2, y_3)$,其中 $y_1 = x_1 + x_5$, $y_2 = x_1 - x_2 + x_4$, $y_3 = 2x_1 + x_2 + x_3$,求 V_1 的一个标准正交基.

解 y_1, y_2, y_3 在给定基下的坐标依次为

$$\alpha_1 = (1,0,0,0,1)^{T}, \quad \alpha_2 = (1,-1,0,1,0)^{T}$$

$$\alpha_3 = (2,1,1,0,0)^{T}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,所以 y_1, y_2, y_3 线性无关,从而构成 V_1 的一个基,正交化可得

$$u_1 = y_1 = x_1 + x_5$$

$$u_2 = y_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5$$

$$u_3 = y_3 - 0u_2 - 1u_1 = x_1 + x_2 + x_3 - x_5$$

再单位化,可得 V_1 的一个标准正交基为

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_5)$$

$$v_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{10}}u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5)$$

$$v_3 = \frac{1}{2}u_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_5)$$

6. 在 $P_3[t]$ 中定义内积为 $(f(t), g(t)) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$, 求 $P_3[t]$ 的一个标准正交基(由基 $1, t, t^2, t^3$ 出发作正交单位化).

解　取 $P_3[t]$ 的一个基为 $1, t, t^2, t^3$,正交化可得

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = t - 0x_1 = t$$

$$x_3 = t^2 - 0x_2 - \frac{1}{3}x_1 = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$x_4 = t^3 - 0x_3 - \frac{3}{5}x_2 - 0x_1 = t^3 - \frac{3}{5}t$$

再单位化可得 $P_3[t]$ 的一个标准正交基为

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}t$$

$$y_3 = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}}x_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}(3t^2 - 1)$$

$$y_4 = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}} x_4 = \frac{\sqrt{14}}{4}(5t^3 - 3t)$$

7. **设** $x_1, x_2, \cdots, x_m$ **是欧氏空间** V^n **中的一组向量,而**

$$B = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_m) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \cdots & (x_2, x_m) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (x_m, x_1) & (x_m, x_2) & \cdots & (x_m, x_m) \end{bmatrix}$$

证明 $\det B \neq 0$ **的充要条件是** $x_1, x_2, \cdots, x_m$ **线性无关**.

证 设一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,使

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m = 0$$

用 x_i 与上式两端进行内积运算可得

$$k_1(x_i, x_1) + k_2(x_i, x_2) + \cdots + k_m(x_i, x_m) = 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m)$$

该齐次线性方程组仅有零解的充要条件是 $\det B \neq 0$,即 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 线性无关的充要条件是 $\det B \neq 0$.

8. **设** $A = (a_{ij}) \in \mathrm{C}^{m \times n}$,**证明定理** 1.35 **仍旧成立(将** A^{T} **改为** A^{H}).

证 设 A 的第 j 个列向量为 a_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$,记 $V_1 = R(A) = L(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ C^m,列向量空间 C^m 的内积定义为:对 $x, y \in \mathrm{C}^m$, $(x, y) = x^{\mathrm{H}} y$. 于是有

$$\begin{aligned} V_1^{\perp} = \{y \mid y \perp (k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n), k_j \in \mathrm{C}\} = \\ \{y \mid y \perp a_j, j = 1, 2, \cdots, n\} = \\ \{y \mid a_j^{\mathrm{H}} y = 0, j = 1, 2, \cdots, n\} = \\ \{y \mid A^{\mathrm{H}} y = 0\} = N(A^{\mathrm{H}}) \end{aligned}$$

根据西空间的基本结论(9),可得

$$\mathrm{C}^m = V_1 \oplus V_1^{\perp} = R(A) \oplus N(A^{\mathrm{H}})$$

将第一个结果用于 A^{H} 可得第二个结果.

9. **设** y **是欧氏空间** V **中的单位向量**, $x \in V$,**定义变换**

$$Tx = x - 2(y, x)y$$

证明 T 是正交变换.

证 先证 T 是线性变换. 设 $x_1, x_2 \in V, k_1, k_2 \in \mathrm{R}$,则有

$$\begin{aligned} T(k_1x_1 + k_2x_2) &= (k_1x_1 + k_2x_2) - 2(y, k_1x_1 + k_2x_2)y = \\ & k_1[x_1 - 2(y, x_1)y] + k_2[x_2 - 2(y, x_2)y] = \\ & k_1Tx_1 + k_2Tx_2 \end{aligned}$$

故 T 是线性变换.

再证 T 是正交变换. 因为

$$\begin{aligned} (Tx, Tx) &= (x, x) - 4(y, x)(x, y) + 4(y, x)^2(y, y) = \\ & (x, x) \end{aligned}$$

所以 T 是正交变换.

10. 设 T 是欧氏空间 V 的线性变换,且对 $x, y \in V$ 有

$$(Tx, y) = -(x, Ty)$$

则称 T 为反对称变换. 证明 T 为反对称变换的充要条件是, T 在 V 的标准正交基下的矩阵 A 为反对称矩阵,即有 $A^{\mathrm{T}} = -A$.

证 设 V^n 的标准正交基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, T 在该基下的矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,则有

$$Tx_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots + a_{ni}x_n, \quad (Tx_i, x_j) = a_{ji}$$

$$Tx_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \cdots + a_{nj}x_n, \quad (Tx_j, x_i) = a_{ij}$$

必要性. 若 T 是反对称变换,则 $(Tx_i, x_j) = -(x_i, Tx_j)$,即 $a_{ji} = -a_{ij}$,也就是 $A^{\mathrm{T}} = -A$.

充分性. 设 $A^{\mathrm{T}} = -A$,对任意 $x, y \in V^n$,有

$$x = (x_1, \cdots, x_n)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad Tx = (x_1, \cdots, x_n)A\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$y = (x_1, \cdots, x_n)\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \cdots \\ \eta_n \end{bmatrix}, \quad Ty = (x_1, \cdots, x_n)A\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \cdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

由于在 V^n 的标准正交基下,二向量的内积就等于它们的坐标向量的

内积,所以

$$(Tx, y) = (\xi_1, \cdots, \xi_n) A^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \cdots \\ \eta_n \end{bmatrix} =$$

$$-(\xi_1, \cdots, \xi_n) A \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \cdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = -(x, Ty)$$

即 T 是反对称变换.

11. 对于下列矩阵 A,求正交(酉)矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}; \quad (2)\ A = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解 (1) 可求得 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$,于是 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$. 对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为

$$x_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad x_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

正交化可得 $y_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, y_2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}}$;再单位化可得

$$p_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad p_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$$

对应 $\lambda_3 = 10$ 的特征向量为 $x_3 = \left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)^{\mathrm{T}}$,单位化可得

$p_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$. 故正交矩阵

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

使 $P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&10\end{bmatrix}$.

(2) 可求得 $\det(\lambda I-A)=\lambda(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})$,于是 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{2},\lambda_3=-\sqrt{2}$. 对应的特征向量分别为

$$x_1=(0,\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}},x_2=(\sqrt{2},-\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}},x_3=(-\sqrt{2},-\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}}$$

单位化可得

$$p_1=\left(0,\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\quad p_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$p_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\mathrm{i}}{2},\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

故酉矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}&-\frac{\mathrm{i}}{2}&-\frac{\mathrm{i}}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

使 $P^{\mathrm{H}}AP=\begin{bmatrix}0&&\\&\sqrt{2}&\\&&-\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

12. 求证实反对称矩阵的特征值是零或纯虚数.

证　设 A 的属于特征值 λ 的特征向量为 x,即 $Ax=\lambda x$. 两端左乘 x^{H},可得 $x^{\mathrm{H}}Ax=\lambda x^{\mathrm{H}}x$. 两端取共轭转置,并利用 A 为实反对称矩阵,可得 $-x^{\mathrm{H}}Ax=\bar{\lambda}x^{\mathrm{H}}x$. 从而有 $(\lambda-\bar{\lambda})x^{\mathrm{H}}x=0$. 因为 $x\neq0$,所以 $x^{\mathrm{H}}x\neq0$,于是有 $\lambda-\bar{\lambda}=0$,即 λ 为零或纯虚数.

13. 设 A 是 n 阶实对称矩阵,且 $A^2=A$(即 A 是幂等矩阵),证明存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$$

证　设 A 的属于特征值 λ 的特征向量为 x，即 $Ax = \lambda x$，则有 $A^2x = \lambda^2 x$. 因为 $A^2 = A$ 且 $x \neq 0$，所以 $\lambda^2 - \lambda = 0$，即 $\lambda = 0$ 或 1. 再由 A 实对称知，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$.

14. 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间，证明

$$(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$$

$$(V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$$

证　先证第一式. 设 $x \in (V_1 + V_2)^{\perp}$，即 $x \perp (V_1 + V_2)$. 于是 $x \perp V_1$ 且 $x \perp V_2$，或者 $x \in V_1^{\perp}$ 且 $x \in V_2^{\perp}$，即 $x \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$. 故

$$(V_1 + V_2)^{\perp} \qquad (V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp})$$

又设 $x \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$，即 $x \in V_1^{\perp}$ 且 $x \in V_2^{\perp}$. 于是 $x \perp V_1$ 且 $x \perp V_2$，或者 $x \perp (V_1 + V_2)$，即 $x \in (V_1 + V_2)^{\perp}$. 故

$$(V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}) \qquad (V_1 + V_2)^{\perp}$$

因此第一式成立.

对 $V_1^{\perp}$ 与 $V_2^{\perp}$ 应用第一式，有

$$(V_1^{\perp} + V_2^{\perp})^{\perp} = (V_1^{\perp})^{\perp} \cap (V_2^{\perp})^{\perp} = V_1 \cap V_2$$

故 $(V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$，即第二式成立.

15. 利用定理 1.42 之(1) 证明：酉空间 V^n 的 Hermite 变换 T 在 V^n 的某个基下的矩阵为对角矩阵.

证　设 V^n 的标准正交基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，又 T 在该基下的矩阵为 A，则 $A^{\mathrm{H}} = A$，从而 A 是正规矩阵. 根据定理 1.42 之(1)，存在酉矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{H}}AP = \Lambda$(对角矩阵). 构造 V^n 的另一个基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，使满足

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)P$$

则有

$$T(y_1, \cdots, y_n) = T(x_1, \cdots, x_n)P = (x_1, \cdots, x_n)AP =$$
$$(y_1, \cdots, y_n)P^{-1}AP = (y_1, \cdots, y_n)\Lambda$$

即 T 在基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 下的矩阵为 Λ.

六、学习效果测试题及答案

(一) 测试题

1. **说明向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的子集**

$$V = \{\alpha \mid \alpha = (b, \frac{1}{2}b(b+1)), b \in \mathbb{R}\}$$

不是 $\mathbb{R}^2$ 的子空间.

2. **设 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的子空间,证明:$V_1 \cup V_2$ 是 V 的子空间的充要条件是 $V_1 \quad V_2$ 或者 $V_2 \quad V_1$.**

3. **讨论 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的矩阵组**

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

的线性相关性,并在线性相关时,求其最大无关组.

4. **设 $\mathbb{R}^4$ 的两个子空间为**

$$V_1 = \{\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + 2a_2 - a_4 = 0\}$$

$$V_2 = L(\beta_1, \beta_2), \ \beta_1 = (0,1,1,1), \ \beta_2 = (1,1,1,0)$$

求 $V_1 + V_2$ 和 $V_1 \cap V_2$ 的基与维数.

5. **设实数域上的多项式空间 $P_3[t]$ 中的多项式 $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ 在线性变换 T 下的像为**

$$Tf(t) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)t + (a_2 - a_3)t^2 + (a_3 - a_0)t^3$$

求 $R(T)$ 和 $N(T)$ 的基与维数.

6. **设矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的两个基为**

$$(\mathrm{I})\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ⅱ) $B_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $B_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$,

$B_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

(1) 求由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵 C;

(2) 判断是否存在非零矩阵 $A\in\mathbf{R}^{2\times2}$,使得 A 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标相同.

7. 设多项式空间 $P_2[t]$ 的基为

$$f_1(t)=1-t,\quad f_2(t)=1+t^2,\quad f_3(t)=t+2t^2$$

线性变换 T 满足

$$Tf_1(t)=2+t^2,\quad Tf_2(t)=t,\quad Tf_3(t)=1+t+t^2$$

(1) 求 T 在已知基下的矩阵 A;

(2) 设 $f(t)=1+2t+3t^2$,求 $Tf(t)$.

8. 设矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的线性变换 T 和线性子空间 V 分别为

$$T(X)=XB+2X^{\mathrm{T}}\quad\left(X\in\mathbf{R}^{2\times2},\ B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)$$

$$V=\left\{X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}x_{11}-x_{22}=0\\x_{12}-x_{21}=0\end{matrix}\right\}$$

(1) 验证 V 是 T 的不变子空间;

(2) 将 T 看作 V 中的线性变换,求 V 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

9. 设 $A_1=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\-8&8&-1\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的 Jordan 标准形 J;

(2) 求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=J$.

10. 设欧氏空间 $P_2[t]$ 中的内积为 $(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

(1) 求基 $1,t,t^2$ 的度量矩阵;

(2) 采用矩阵乘法形式计算 $f(t)=1-t+t^2$ 与 $g(t)=1-4t-5t^2$ 的内积.

11. 设 x_0 是欧氏空间 V^n 中的非零元素, k 为非零实数, 定义变换:

$$Tx = x + k(x, x_0)x_0 \quad (x \in V^n)$$

(1) 验证 T 是线性变换;

(2) 设 x_0 在 V^n 的标准正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的坐标为 $\beta=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$, 求 T 在该基下的矩阵;

(3) 证明 T 为对称变换;

(4) 证明: T 为正交变换的充要条件是 $k=-\dfrac{2}{|x_0|^2}$.

12. 设欧氏空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中的内积为

$$A=(a_{ij})_{2\times 2}, \quad B=(b_{ij})_{2\times 2}, \quad (A, B)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{ij}$$

对于 $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ 及实数 a, b, c, 定义线性变换

$$T(X)=\begin{bmatrix} bx_2+cx_3+ax_4 & bx_1-ax_3+cx_4 \\ -cx_1-ax_2+bx_4 & ax_1-cx_2+bx_3 \end{bmatrix}$$

(1) 当 a, b, c 满足什么条件时, T 是对称变换;

(2) 当 a, b, c 满足什么条件时, T 是正交变换.

13. 设线性空间 V^3 的一个基为 x_1, x_2, x_3, 线性变换 T 在该基下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_1+x_2+x_3$, 证明子空间 $W=L(y_1, y_2)$ 是 T 的不变子空间.

14. 设线性空间 V 中的两个线性变换 T_1 与 T_2 满足 $T_1T_2=T_0$(零变换), 证明: $N(T_1)\cap R(T_2)=R(T_2)$.

15. 设 $C\in\mathbf{R}^{n\times n}$,欧氏空间 V^n 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的度量矩阵为 A,V^n 中的元素组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)C$,证明:$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 V^n 的标准正交基的充要条件是 $C^{\mathrm{T}}AC=I$.

(二) 测试题答案或提示

1. V 中 $\alpha=(1,1)$,$\beta=(2,3)$, $\alpha+\beta=(3,4)\notin V$.

2. 必要性 .否则,存在 $x\in V_1$ 但 $x\notin V_2$,存在 $y\in V_2$ 但 $y\notin V_1$,使得 $x\in V_1\cup V_2$,$y\in V_1\cup V_2$,而 $(x+y)\notin V_1\cup V_2$,因此 $V_1\cup V_2$ 不是子空间,这和已知冲突 .

3. 当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -3$ 时,矩阵组线性无关;当 $a=1$ 时,矩阵组线性相关,最大无关组为 A_1;当 $a=-3$ 时,矩阵组线性相关,最大无关组为 A_1,A_2,A_3 .

4. V_1+V_2 的基为 $\alpha_1=(2,-1,0,0)$,$\alpha_2=(0,0,1,0)$, $\alpha_3=(1,0,0,1)$,$\beta_2=(0,1,1,1)$;$V_1\cap V_2$ 的基为 $(1,-2,-2,-3)$.

5. $R(T)$ 的基为 $1-t^3$, $t-1$, t^2-t; $N(T)$ 的基为 $1+t+t^2+t^3$.

6. (1) $C=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&1&1&-2\\-1&-1&-1&3\end{bmatrix}$; (2) 不存在 .

7. (1) $A=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\3&2&3\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$; (2) $Tf(t)=-4+3t-2t^2$.

8. (2) 基为 $Y_1=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$, $Y_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$; 对角矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$.

9. (1) $J = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & -1 & & \\ \hline & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{array}\right]$;　(2) $P = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & & \\ 2 & 1 & 0 & & \\ 4 & 2 & 1 & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right]$.

10. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$;　(2) $-\dfrac{9}{4}$.

11. (2) $A = I + k\beta\beta^{T}$;　(4) 由 $A^{T}A = I$ 可得 $k = -\dfrac{2}{|x_0|^2}$.

12. (1) $c = 0$;　(2) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

13. 求得 $Ty_1 = 2y_1 \in W$, $Ty_2 = 2y_1 + y_2 \in W$.当 $x \in W$ 时,有

$$x = k_1 y_1 + k_2 y_2, \quad Tx = k_1(Ty_1) + k_2(Ty_2) \in W$$

14. 任意 $y \in R(T_2)$,存在 $x \in V$ 使得 $y = T_2 x$.因为 $T_1 y = T_1(T_2 x) = T_0 x = 0$,所以 $y \in N(T_1)$.由此可得 $R(T_2)$　$N(T_1)$,从而结论成立.

15. 必要性.已知 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是标准正交基,因而它的度量矩阵为 I.由$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C$知,基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的度量矩阵为 $C^{T}AC$,所以 $C^{T}AC = I$.

充分性.已知 $C^{T}AC = I$,那么 C为可逆矩阵,从而 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 V^n 的基.由$(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C$知,基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的度量矩阵为 $C^{T}AC = I$,因此 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是标准正交基.

第二章　范数理论及其应用

把一个向量(线性空间的元素)或者矩阵与一个非负实数相联系,在许多场合下,这个实数可以做为向量或者矩阵大小的一种度量.向量范数与矩阵范数就是这样的实数,它们在研究数值方法的收敛性和误差估计等方面有着重要的应用.

向量空间 C^n 中的向量范数是对三维空间中向量长度概念的推广,线性空间 V^n 中的向量(元素)范数是对向量空间 C^n 中向量范数概念的推广,而矩阵范数是对矩阵空间——一种特殊的线性空间中向量范数概念的深化. 因此,矩阵范数与向量范数既有联系,又有区别.

一、基 本 概 念

1. **向量范数**

向量范数是以线性空间的元素为自变量,且满足非负性、齐次性和三角不等式的一类实值函数.

(1) 向量空间 C^n 中向量的 p - 范数　设 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$,则有

1) p - 范数: $\|\alpha\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$　$(1 \leq p < +\infty)$

2) ∞ - 范数: $\|\alpha\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|$

(2) 向量空间 C^n 中向量的椭圆范数　设 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$,

$A \in C^{n\times n}$ 为 Hermite 正定矩阵,那么椭圆范数 $\|\alpha\|_A = [\alpha^H A\alpha]^{\frac{1}{2}}$.

〔评注〕　当 $A = I$ 时,椭圆范数 $\|\alpha\|_A$ 为 2 - 范数 $\|\alpha\|_2$.

(3) 线性空间 V^n 中的向量(元素)范数　设 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $x \in V^n$ 在该基下的坐标(列向量)为 α, $A \in C^{n\times n}$ 为 Hermite 正定矩阵,则有

1) p - 范数: $\|x\|_p = \|\alpha\|_p \quad (1 \le p < +\infty)$

2) ∞ - 范数: $\|x\|_\infty = \|\alpha\|_\infty$

3) 椭圆范数: $\|x\|_A = \|\alpha\|_A$

〔评注〕　通过元素的坐标定义的向量范数依赖于线性空间的基. 选取不同的基时,得到的向量范数一般是不相同的.

2. 矩阵范数

矩阵范数是以矩阵为自变量,且满足非负性、齐次性、三角不等式和乘法相容性的一类实值函数.

(1) 类似于向量 p - 范数的矩阵范数　设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$,则有

1) m_1 - 范数: $\|A\|_{m_1} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

2) m_2 - 范数(F - 范数): $\|A\|_{m_2} = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$

3) m_∞ - 范数: $\|A\|_{m_\infty} = n\max_{i,j} |a_{ij}|$

4) G - 范数: $\|A\|_G = \sqrt{mn}\max_{i,j} |a_{ij}|$

(2) 从属于向量范数的矩阵范数　设 $\|\cdot\|_v$ 是向量空间 C^m 和 C^n 中的同类向量范数, $A = (a_{ij})_{m\times n}$,那么从属于 $\|\cdot\|_v$ 的矩阵范数为

$$\|A\| = \max_{\|x\|_v = 1} \|Ax\|_v = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

1) 1 - 范数(列和范数): $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\left[\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\right]$

2) 2 - 范数(谱范数): $\|A\|_2 = [\rho(A^H A)]^{\frac{1}{2}}$

3) ∞ - 范数(行和范数): $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right]$

3. 矩阵范数与向量范数相容

矩阵范数与向量范数相容指矩阵空间 $C^{m\times n}$ 中的矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与向量空间 C^m 和 C^n 中的同类向量范数 $\|\cdot\|_v$ 满足不等式

$$\|Ax\|_v \le \|A\|_M \|x\|_v \quad (\text{任意 } A\in C^{m\times n}, \text{任意 } x\in C^n)$$

(1) $\|A\|_{m_1}$ 和 $\|A\|_1$ 都与 $\|x\|_1$ 相容.

(2) $\|A\|_{m_2}$ 和 $\|A\|_2$ 都与 $\|x\|_2$ 相容.

(3) $\|A\|_{m_\infty}$, $\|A\|_G$ 和 $\|A\|_\infty$ 都与 $\|x\|_\infty$ 相容.

二、主要结论

1. 范数的等价性

(1) 线性空间 V^n 中的任意两种向量范数等价,即对于 V^n 中的向量范数 $\|x\|_a$ 和 $\|x\|_b$,存在与 x 无关的正数 c_1 和 c_2,使得

$$c_1\|x\|_b \le \|x\|_a \le c_2\|x\|_b \quad (\text{任意 } x\in V^n)$$

(2) 矩阵空间 $C^{m\times n}$ 中的任意两种矩阵范数等价,即对于 $C^{m\times n}$ 中的矩阵范数 $\|A\|_a$ 和 $\|A\|_b$,存在与 A 无关的正数 c_1 和 c_2,使得

$$c_1\|A\|_b \le \|A\|_a \le c_2\|A\|_b \quad (\text{任意 } A\in C^{m\times n})$$

2. 矩阵范数与向量范数的相容性

(1) 对于任意给定的矩阵范数,一定有与之相容的向量范数.

(2) 对于任意给定的向量范数,一定有矩阵范数与之相容.

(3) 一种矩阵范数可以与多种向量范数相容.

(4) 多种矩阵范数可以与一种向量范数相容.

(5) 并非任意的矩阵范数与任意的向量范数相容.

3. **向量的 p - 范数与 ∞ - 范数**

设 $x \in \mathbf{C}^n$，**则** $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p$.

4. **矩阵的 F - 范数和 2 - 范数**

设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$，**且** $P \in \mathbf{C}^{m \times m}$ **与** $Q \in \mathbf{C}^{n \times n}$ **都是酉矩阵，则有**

(1) $\|PAQ\|_F = \|A\|_F$.

(2) $\|PAQ\|_2 = \|A\|_2$.

5. **矩阵的从属范数**

设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$，**且** $\|\cdot\|_M$ **是** $\mathbf{C}^{m \times n}$ **中从属于向量范数** $\|\cdot\|_v$ **的矩阵范数，则有**

(1) $\|I\|_M = 1$.

(2) **若** $x \in \mathbf{C}^n$ **满足** $\|x\|_v = 1$，**则** $\|A\|_M \geq \|Ax\|_v$.

(3) **存在** $x_0 \in \mathbf{C}^n$ **满足** $\|x_0\|_v = 1$，**使得** $\|A\|_M = \|Ax_0\|_v$.

6. **方阵的范数**

设 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$，$\rho(A)$ **表示** A **的谱半径**.

(1) **若有矩阵范数** $\|\cdot\|$ **使得** $\|A\| < 1$，**则** $I - A$ **为可逆矩阵，且有**

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{1 - \|A\|}$$

$$\|I - (I - A)^{-1}\| \leq \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}$$

(2) **若** $A^H A = AA^H$，**则** $\rho(A) = \|A\|_2$.

(3) **对任意的矩阵范数** $\|\cdot\|$，**有** $\rho(A) \leq \|A\|$.

(4) **对任意给定的矩阵** A **和正数** ε，**存在矩阵范数** $\|\cdot\|_M$，**使得** $\|A\|_M \leq \rho(A) + \varepsilon$

〔评注〕　**结论(4)中的矩阵范数** $\|\cdot\|_M$ **与给定的矩阵** A **有关. 针对矩阵** A **构造的矩阵范数** $\|\cdot\|_M$，**对于另一矩阵** $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$，**不等式** $\|B\|_M \leq \rho(B) + \varepsilon$ **不一定成立**.

三、常用方法

1. 由已知范数构造新的向量范数

设 $\|\cdot\|_v$ 是 C^n 中的向量范数，$\|\cdot\|_M$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数，S 为 n 阶可逆矩阵.

(1) $\|x\| = \|Sx\|_v$ 是 C^n 中的向量范数. 当 $\|x\|_v$ 为 $\|x\|_2$ 时，该向量范数是 Hermite 正定矩阵 $A = S^H S$ 对应的椭圆范数.

(2) $\|x\| = \|xy_0^T\|_M$（非零列向量 $y_0 \in C^n$）是 C^n 中的向量范数.

1) 取 $y_0 = e_i$ 时，若 $\|A\|_M$ 为 $\|A\|_{m_1}$，则 $\|x\|$ 为 $\|x\|_1$.

2) 取 $y_0 = e_i$ 时，若 $\|A\|_M$ 为 $\|A\|_{m_2}$，则 $\|x\|$ 为 $\|x\|_2$.

3) 取 $y_0 = e_i$ 时，若 $\|A\|_M$ 为 $\|A\|_2$，则 $\|x\|$ 为 $\|x\|_2$.

4) 取 $y_0 = e_i$ 时，若 $\|A\|_M$ 为 $\|A\|_\infty$，则 $\|x\|$ 为 $\|x\|_\infty$.

5) 取 $y_0 = (1,1,\cdots,1)^T$ 时，若 $\|A\|_M$ 为 $\|A\|_1$，则 $\|x\|$ 为 $\|x\|_1$.

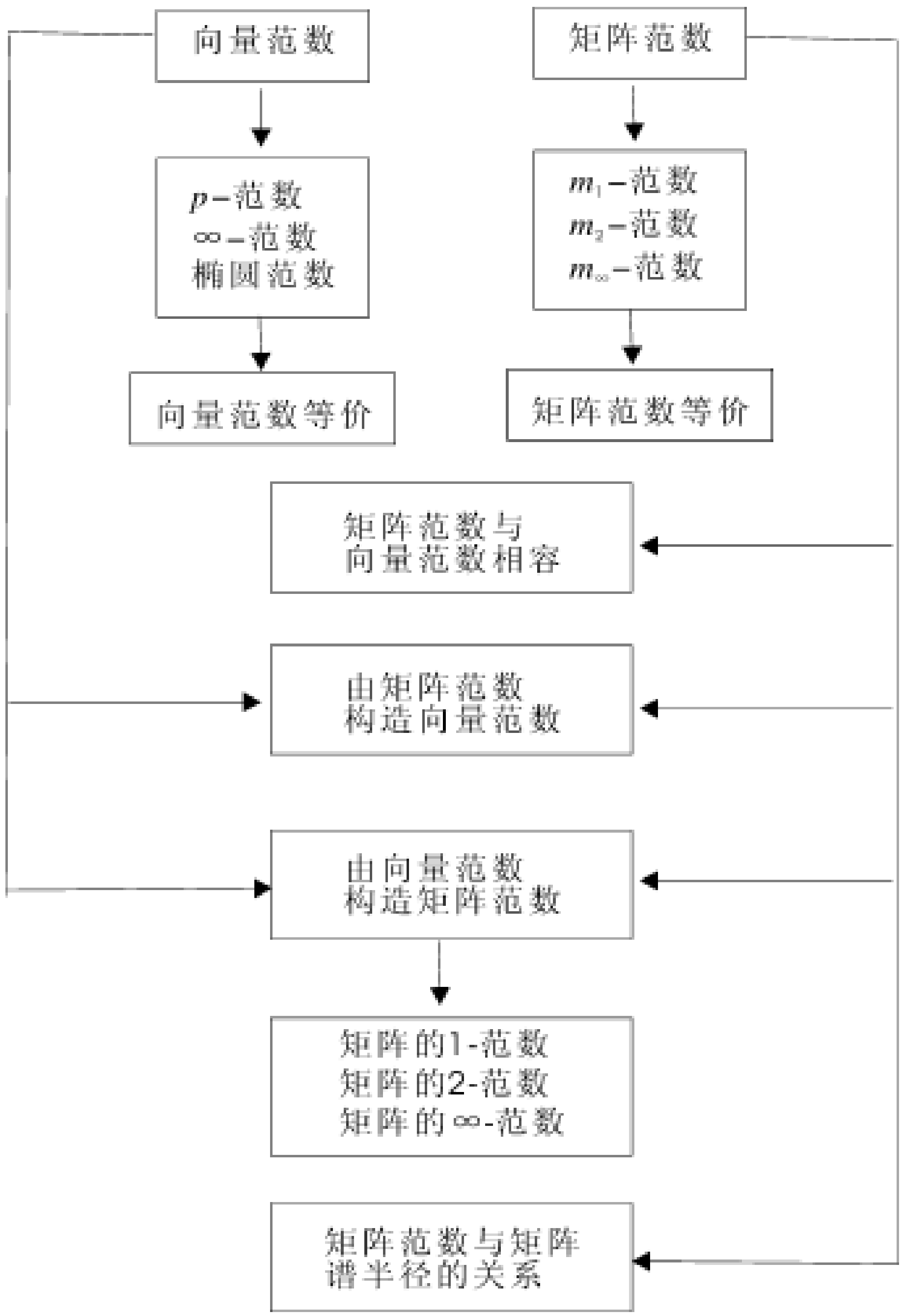
2. 由已知范数构造新的矩阵范数

设 $\|\cdot\|_v$ 是 C^n 中的向量范数，$\|\cdot\|_M$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数，S 为 n 阶可逆矩阵.

(1) $\|A\| = \|SAS^{-1}\|_M$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数.

(2) $\|A\| = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数.

四、内容结构框图


向量范数
矩阵范数
p-范数
∞-范数
椭圆范数
m_1-范数
m_2-范数
m_∞-范数
向量范数等价
矩阵范数等价
矩阵范数与向量范数相容
由矩阵范数构造向量范数
由向量范数构造矩阵范数
矩阵的1-范数
矩阵的2-范数
矩阵的∞-范数
矩阵范数与矩阵谱半径的关系

五、课后习题全解

习 题 2.1

1. **求向量** $e=(1,1,\cdots,1)$ **的** l_1, l_2 **及** l_∞ **范数**.

解 $\|e\|_1=n$, $\|e\|_2=\sqrt{n}$, $\|e\|_\infty=1$.

2. **在** $\mathbf{R}^2$ **中,将向量** $x=(\xi_1,\xi_2)$ **表示成平面上直角坐标系中的点** (ξ_1,ξ_2),**分别画出下列不等式决定的** x **全体所对应的几何图形**.

$$\|x\|_1\leq 1,\ \|x\|_2\leq 1,\ \|x\|_\infty\leq 1$$

解 $\|x\|_1\leq 1$,即 $|\xi_1|+|\xi_2|\leq 1$,如图 2-1(a) 所示;$\|x\|_2\leq 1$,即 $\xi_1^2+\xi_2^2\leq 1$,如图 2-1(b) 所示;$\|x\|_\infty\leq 1$,即 $\max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}\leq 1$,如图 2-1(c) 所示.

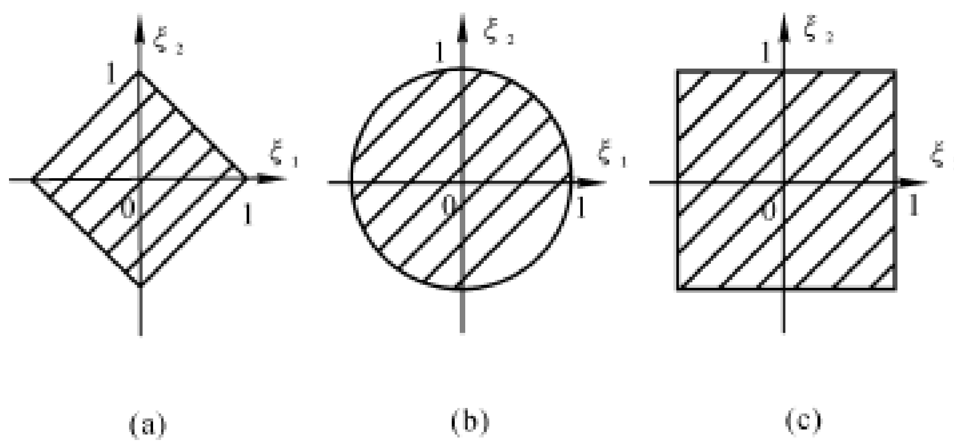


图 2-1

3. **证明例 2.5 所给各题**.

证 **先证第一式是范数**:

当 $f(t)\neq 0$ 时,$\|f(t)\|_1=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t>0$;

当 $f(t)=0$ 时,$\|f(t)\|_1=0$.

$\|\alpha f(t)\|_1=\int_a^b|\alpha f(t)|\,\mathrm{d}t=$

$$|\alpha|\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t = |\alpha| \, \|f(t)\|_1$$

$$\begin{aligned}\|f(t)+g(t)\|_1 &= \int_a^b |f(t)+g(t)|\mathrm{d}t \leq \\ &\int_a^b [|f(t)|+|g(t)|]\mathrm{d}t = \\ &\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t = \\ &\|f(t)\|_1 + \|g(t)\|_1\end{aligned}$$

再证第二式是范数:只需考虑 $p > 1$ 的情形.

当 $f(t) \neq 0$ 时, $\|f(t)\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} > 0$;

当 $f(t) = 0$ 时, $\|f(t)\|_p = 0$.

$$\begin{aligned}\|\alpha f(t)\|_p &= \left[\int_a^b |\alpha f(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} = \\ &\left[|\alpha|^p \int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} = \\ &|\alpha| \left[\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} = \\ &|\alpha| \, \|f(t)\|_p\end{aligned}$$

为了证明三角不等式成立,需要证明下面不等式

$$\left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}$$

因为

$$\begin{aligned}&\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \mathrm{d}t = \\ &\int_a^b |f(t)+g(t)|\,|f(t)+g(t)|^{p-1}\mathrm{d}t \leq \\ &\int_a^b [|f(t)|+|g(t)|]\,|f(t)+g(t)|^{p-1}\mathrm{d}t =\end{aligned}$$

$$\int_a^b |f(t)||f(t)+g(t)|^{p-1}\mathrm{d}t+$$
$$\int_a^b |g(t)||f(t)+g(t)|^{p-1}\mathrm{d}t$$

对上式右端使用积分形式的 Holder **不等式**

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\mathrm{d}t\leq\left[\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1,q>1\right)$$

可得

$$\int_a^b|f(t)+g(t)|^p\mathrm{d}t\leq$$
$$\left[\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b|f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}+$$
$$\left[\int_a^b|g(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b|f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}=$$
$$\left\{\left[\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_a^b|g(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\left[\int_a^b|f(t)+g(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}$$

两端同除以$\left[\int_a^b|f(t)+g(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{q}}$ **便得所需要的不等式**.

最后证第三式是范数:

当 $f(t)\neq 0$ **时**, $\|f(t)\|_\infty=\max\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|>0$;

当 $f(t)=0$ **时**, $\|f(t)\|_\infty=0$.

$$\|\alpha f(t)\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}|\alpha f(t)|=$$
$$|\alpha|\max_{t\in[a,b]}|f(t)|=|\alpha|\ \|f(t)\|_\infty$$

$$\|f(t)+g(t)\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}|f(t)+g(t)|\leq$$
$$\max_{t\in[a,b]}[|f(t)|+|g(t)|]\leq$$
$$\max_{t\in[a,b]}|f(t)|+\max_{t\in[a,b]}|g(t)|=$$
$$\|f(t)\|_\infty+\|g(t)\|_\infty$$

4. 设 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的两种范数, k_1, k_2 是正常数, 证明下列函数:

(1) $\max(\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta)$

(2) $k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta$

是 $\mathbf{C}^n$ 上的范数.

证　(1) 记 $\|x\| = \max(\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta)$, 则当 $x \neq 0$ 时, $\|x\| > 0$; 当 $x = 0$ 时, $\|x\| = 0$.

$$\begin{aligned}\|kx\| &= \max(\|kx\|_\alpha, \|kx\|_\beta) = \\ &\max(|k|\|x\|_\alpha, |k|\|x\|_\beta) = \\ &|k|\max(\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta) = |k|\|x\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \max(\|x+y\|_\alpha, \|x+y\|_\beta) \leq \\ &\max(\|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha, \|x\|_\beta + \|y\|_\beta) \leq \\ &\max(\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta) + \max(\|y\|_\alpha, \|y\|_\beta) = \\ &\|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

所以 $\|x\|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的范数.

(2) 记 $\|x\| = k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta$, 则当 $x \neq 0$ 时, $\|x\| > 0$; 当 $x = 0$ 时, $\|x\| = 0$.

$$\begin{aligned}\|kx\| &= k_1\|kx\|_\alpha + k_2\|kx\|_\beta = \\ &|k|(k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta) = |k|\|x\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= k_1\|x+y\|_\alpha + k_2\|x+y\|_\beta \leq \\ &k_1(\|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha) + k_2(\|x\|_\beta + \|y\|_\beta) = \\ &(k_1\|x\|_\alpha + k_2\|x\|_\beta) + \\ &(k_1\|y\|_\alpha + k_2\|y\|_\beta) = \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

所以 $\|x\|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的范数.

5. 设矩阵 $S \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 列满秩, 给定 $\mathbf{C}^m$ 上的一种向量范数 $\|\cdot\|$, 证明

$$\|x\|_S = \|Sx\| \quad (x \in \mathbf{C}^n)$$

是 $\mathbf{C}^n$ 上的向量范数.

证　当 $x \neq 0$ 时, 由于 S 列满秩, 所以 $Sx \neq 0$, 从而 $\|x\|_S =$

$\|Sx\| > 0$;当 $x = 0$ 时, $Sx = 0$,于是 $\|x\|_s = \|Sx\| = 0$.

$$\|kx\|_s = \|S(kx)\| = \|k(Sx)\| = |k|\,\|Sx\| = |k|\,\|x\|_s$$

$$\|x + y\|_s = \|S(x + y)\| = \|Sx + Sy\| \le \|Sx\| + \|Sy\| = \|x\|_s + \|y\|_s$$

因此, $\|x\|_s$ 是 C^n 上的范数.

习 题 2.2

1. 求矩阵 $A = [-1\ \ 2\ \ 1]$ 和 $B = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$ 的范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ 及 $\|\cdot\|_2$.

解 $\|A\|_1 = \max\{|-1|, 2, 1\} = 2$

$\|A\|_\infty = |-1| + 2 + 1 = 4$

$A^{\mathrm{H}}A$ 与 $AA^{\mathrm{H}} = [6]$ 的非零特征值相同,故 $\|A\|_2 = \sqrt{6}$.

$\|B\|_1 = \max\{|-\mathrm{i}| + 1, 2 + 0, 3 + |\mathrm{i}|\} = 4$

$\|B\|_\infty = \max\{|-\mathrm{i}| + 2 + 3, 1 + 0 + |\mathrm{i}|\} = 6$

$$B^{\mathrm{H}}B = \begin{bmatrix} 2 & 2\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 4 & 6 \\ -4\mathrm{i} & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B^{\mathrm{H}}B) = \lambda(\lambda - (8 + 2\sqrt{13}))(\lambda - (8 - 2\sqrt{13}))$$

$$\|B\|_2 = \sqrt{8 + 2\sqrt{13}}$$

2. 设 λ 为矩阵 $A \in \mathrm{C}^{m\times m}$ 的特征值,证明 $|\lambda| \le \sqrt[m]{\|A^m\|}$.

证 设 A 的属于特征值 λ 的特征向量为 x,即 $Ax = \lambda x$,从而有 $A^m x = \lambda^m x$. 取向量范数 $\|x\|$ 和题中给出的矩阵范数相容,则有

$$|\lambda|^m\|x\| = \|\lambda^m x\| = \|A^m x\| \le \|A^m\|\,\|x\|$$

即 $|\lambda|^m \le \|A^m\|$,也就是 $|\lambda| \le \sqrt[m]{\|A^m\|}$.

3. 对于定理 2.5 中的三种范数,能否举出矩阵例子使它的一种范数小于 1,而其他两种范数并不小于 1.

解　取 $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,则

$$\|A\|_1=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,\ \|A\|_\infty=\sqrt{2}>1,\ \|A\|_2=1$$

4. 设矩阵 A 非奇异,λ是它的任意一个特征值,证明

$$|\lambda|\geq\frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

证　设 A 的属于特征值 λ 的特征向量为 x,即 $Ax=\lambda x$,从而有 $A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$. 取向量范数 $\|x\|$ 和题中给出的矩阵范数相容,则有

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right|\|x\|=\left\|\frac{1}{\lambda}x\right\|=\|A^{-1}x\|\leq\|A^{-1}\|\|x\|$$

即 $\left|\frac{1}{\lambda}\right|\leq\|A^{-1}\|$,也就是 $|\lambda|\geq\frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

5. 设可逆方阵 $S\in\mathbf{R}^{n\times n}$,且知 $\|x\|_s=\|Sx\|_2$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的向量范数. 若 $\|A\|_s$ 表示 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 上从属于向量范数 $\|x\|_s$ 的矩阵范数,试导出 $\|A\|_s$ 与矩阵的 2 - 范数之间的关系式.

证　$\|A\|_s=\max\limits_{x\neq0}\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}=\max\limits_{x\neq0}\frac{\|SAx\|_2}{\|Sx\|_2}=$

$$\max_{y\neq0}\frac{\|SAS^{-1}y\|_2}{\|y\|_2}=\|SAS^{-1}\|_2$$

6. 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$,证明矩阵范数 $\|A\|_{m_1}$ 与向量范数 $\|x\|_p(1\leq p<\infty)$ 相容.

证　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$, E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1,其余元素均为 0 的 $m\times n$ 矩阵,则有

$$E_{ij}x=(0,\cdots,0,\xi_j,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \|E_{ij}x\|_p\leq\|x\|_p$$

于是

$$\|Ax\|_p=\left\|\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}x\right\|_p\leq\sum_{i,j}|a_{ij}|\,\|E_{ij}x\|_p\leq$$

$$\sum_{i,j}|a_{ij}|\,\|x\|_p=\|A\|_{m_1}\|x\|_p$$

习　题　2.3

1. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若对某种矩阵范数有 $\|B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, 则 $A+B$ 可逆.

证　$A+B = A(I+A^{-1}B)$. 由于 $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\|\,\|B\| < 1$, 所以 $\|(-A^{-1}B)\| < 1$. 根据定理 2.6 可得 $I+A^{-1}B$ 可逆, 从而 $A+B$ 可逆.

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.2 & 2 \end{bmatrix}$, 试估计

$$\frac{\|A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}\|_\infty}{\|A^{-1}\|_\infty} = ?$$

解　$A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $(A+\delta A)^{-1} = \dfrac{1}{42}\begin{bmatrix} 30 & -15 \\ -12 & 20 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} - (A+\delta A)^{-1} = \frac{1}{210}\begin{bmatrix} -24 & 33 \\ 18 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}\|_\infty}{\|A^{-1}\|_\infty} = \frac{57}{210} \div \frac{4}{5} = \frac{19}{56} \approx 0.34$$

六、学习效果测试题及答案

(一) 测试题

1. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的零空间满足 $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量 α, 定义实数 $\|\alpha\| = \|A\alpha\|_\infty + 2\|B\alpha\|_2$, 验证 $\|\alpha\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量范数.

2. 设数域 C 上的线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 且 $x \in V^n$ 在该基下的坐标 $\alpha = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$, 定义实数

$$\|x\| = (k_1|\xi_1|^2 + k_2|\xi_2|^2 + \cdots + k_n|\xi_n|^2)^{1/2} \quad (k_i \in \mathrm{C})$$

证明:$\|x\|$ 是 V^n 中的向量范数的充要条件是 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 都为正数.

3. 设列向量 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$,证明:$\|\alpha+\beta\|_2=\|\alpha\|_2+\|\beta\|_2$ 的充要条件是 α 与 β 线性相关,且 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta\geq 0$.

4. 给定 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的矩阵范数 $\|\cdot\|$,选取可逆矩阵 P,使得 $\|P\|=1$.对于 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,定义实数 $\|A\|_M=\|AP^{-1}\|$,验证 $\|A\|_M$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的矩阵范数.

5. 给定 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的矩阵范数 $\|\cdot\|_F$ 与 $\|\cdot\|_2$,对于 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,定义实数 $\|A\|=\|A\|_F+2\|A\|_2$,验证 $\|A\|$ 是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的矩阵范数.

6. 设 $A,B\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 都是可逆矩阵,且齐次线性方程组 $(A+B)x=0$ 有非零解,证明:对于 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的任何矩阵范数 $\|\cdot\|$,都有 $\|A^{-1}B\|\geq 1$ 及 $\|AB^{-1}\|\geq 1$.

7. 设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,证明:谱半径 $\rho(A)<1$ 的充要条件是,存在矩阵范数 $\|\cdot\|$,使得 $\|A\|<1$.

8. 设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,证明:矩阵范数 $\|A\|_{m_\infty}$ 与向量的 1-范数相容.

(二) 测试题答案或提示

1. 非负性.当 $\alpha\neq 0$ 时,由 $N(A)\cap N(B)=\{0\}$ 可得,$A\alpha=0$ 与 $B\alpha=0$ 不能同时成立,从而 $\|A\alpha\|_\infty>0$ 与 $\|B\alpha\|_2>0$ 至少有一个成立,故 $\|\alpha\|>0$.

2. 必要性.x_i 在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的坐标为 e_i,由 $\|x_i\|>0$ 知 $\sqrt{k_i}>0$,即 $k_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

3. 必要性.由 $\|\alpha+\beta\|_2^2=(\|\alpha\|_2+\|\beta\|_2)^2$ 可得 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\|\alpha\|_2\|\beta\|_2\geq 0$;当 $\beta\neq 0$ 时,取 $t=\dfrac{\|\alpha\|_2}{\|\beta\|_2}$,则有 $\|\alpha-t\beta\|_2^2=0$,即 $\alpha-t\beta=0$,也就是 α 与 β 线性相关.

充分性.当 $\alpha\neq 0$ 时,设 $\beta=k\alpha$,由 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta\geq 0$ 可得 $k\geq 0$,且有

$$\|\alpha+\beta\|_2=(1+k)\|\alpha\|_2=\|\alpha\|_2+\|k\alpha\|_2=$$

$$\|\alpha\|_2 + \|\beta\|_2$$

4. **相容性**.设 $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$,则有

$$\begin{aligned}\|AB\|_M &= \|(AB)P^{-1}\| = \|(AP^{-1})P(BP^{-1})\| \leq \\ &\|AP^{-1}\|\,\|P\|\,\|BP^{-1}\| = \\ &\|A\|_M\,\|B\|_M\end{aligned}$$

5. **相容性**.设 $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$,则有

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \|AB\|_F + 2\|AB\|_2 \leq \\ &\|A\|_F\|B\|_F + 2\|A\|_2\|B\|_2 \leq \\ &(\|A\|_F + 2\|A\|_2)(\|B\|_F + 2\|B\|_2) = \\ &\|A\|\,\|B\|\end{aligned}$$

6. **因为**$(A+B)x = 0$**有非零解**,**所以** $\det(A+B) = 0$.**由此可得**

$$\det[(-1)I - A^{-1}B] = 0, \quad \det[(-1)I - AB^{-1}] = 0$$

即 $\lambda = -1$ **是** $A^{-1}B$ **与** AB^{-1} **的特征值**,**从而可得结论**.

7. **必要性**.**取** $\varepsilon = \frac{1}{2}[1 - \rho(A)] > 0$,**对于矩阵** A,**存在矩阵范数** $\|\cdot\|$,**使得** $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$.

8. **设** $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$,**则有**

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|\,|\xi_k| \leq \\ &(\max_{i,j}|a_{ij}|)\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\xi_k| = \\ &(n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|)\sum_{k=1}^{n}|\xi_k| = \|A\|_{m_\infty}\|x\|_1\end{aligned}$$

第三章　矩阵分析及其应用

矩阵函数是以矩阵为自变量且取值为矩阵的一类函数,它是对一元函数概念的推广. 起先,矩阵函数是由一个收敛的矩阵幂级数的和来定义,之后根据计算矩阵函数值的 Jordan 标准形方法又对矩阵函数的概念进行了拓宽. 因此,矩阵函数的基础是矩阵序列与矩阵级数.

当一个矩阵的元素都是变量 t 的函数时,可以建立矩阵对变量 t 的导数和积分概念;当一个多元函数的自变量都是矩阵 X 的元素时,可以建立多元函数对矩阵 X 的导数概念;当一个矩阵的元素都是矩阵 X 的元素的多元函数时,可以建立矩阵对矩阵 X 的导数概念. 矩阵序列与矩阵级数的收敛性、函数矩阵(以函数为其元素的矩阵)与矩阵函数的导数和积分是矩阵分析的基本内容.

一、基 本 概 念

1. 矩阵序列

矩阵序列指无穷多个依次排列的同阶矩阵.

(1) 收敛性　设 $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{m\times n}$　$(k = 1,2,\cdots)$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 若

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}\quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$.

(2) 收敛矩阵　设 $A\in \mathrm{C}^{n\times n}$, 若 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$, 则称 A 为收敛矩阵.

2. 矩阵级数

矩阵级数指无穷多个有序同阶矩阵之和.

(1) 收敛性 设 $A^{(k)} \in \mathbf{C}^{m\times n}$ $(k=0,1,2,\cdots)$, $S^{(N)}=\sum_{k=0}^{N} A^{(k)}$ $(N=1,2,\cdots)$,若矩阵序列$\{S^{(N)}\}$收敛于 S,则称矩阵级数$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$收敛于 S,即$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}=S$.

(2) 幂级数 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$,则称$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$为矩阵 A 的幂级数,而称$\sum_{k=0}^{\infty} A^k$为矩阵 A 的 Neumann 级数.

3. 矩阵函数

矩阵函数指以矩阵为自变量且取值为矩阵的一类函数.

(1) 由矩阵幂级数定义的矩阵函数 设一元(复变)函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的幂级数为 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ $(|z|<r)$, $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的谱半径 $\rho(A)<r$,则称 $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 为对应于 $f(z)$ 的矩阵函数.

〔评注〕 由矩阵幂级数定义矩阵函数时,要求一元函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 能够展开为幂级数,且幂级数的收敛半径 $r>0$. 因此,一元函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 必须无穷阶可导.

(2) 由矩阵 Jordan 标准形定义的矩阵函数 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}, \quad J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

那么存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = J$. 再设一元函数 $f(z)$ 在 $z = \lambda_i$ 处 $m_i - 1$ 阶可导，令

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \dfrac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_j-1)!} \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \cdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix} =$$

$$f(\lambda_i) I_{m_i} + f'(\lambda_i) I_{m_i}^{(1)} + \cdots + \frac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} I_{m_i}^{(m_i-1)}$$

其中，$I_{m_i}^{(j)}$ 表示主对角线上方的第 j 条次对角线元素为 1，其余元素为 0 的 m_i 阶方阵. 称

$$f(A) = P\cdot \mathrm{diag}(f(J_1), f(J_2), \cdots, f(J_s))\cdot P^{-1}$$

为对应于 $f(z)$ 的矩阵函数.

〔评注〕　由矩阵 Jordan 标准形定义矩阵函数时，要求一元函数 $f(z)$ 在矩阵 A 的特征值 λ_i 处 $m_i - 1$ 阶可导，这里 $m_i \le n$. 当一元函数 $f(z)$ 在 $z = 0$ 能够展开为幂级数时，由(2) 定义的矩阵函数与由(1) 定义的矩阵函数相同.

4. 矩阵的导数与积分

(1) 矩阵对一个变量的导数　设 $A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$，且 $a_{ij}(t)$ 可导，则 $A(t)$ 对 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = (a_{ij}'(t))_{m\times n}$$

(2) 矩阵对一个变量的积分　设 $A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$，且 $a_{ij}(t)$ 在区间 $[t_0, t_1]$ 上可积，则 $A(t)$ 在区间 $[t_0, t_1]$ 上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1} A(t)\mathrm{d}t = \left(\int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right)_{m\times n}$$

(3) 函数对矩阵变量的导数　设 $X = (x_{ij})_{m\times n}$，多元函数 $f(X) = f(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{mn})$ 关于 x_{ij} 可导，则 $f(X)$ 对 X 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{m\times n}$$

(4) **矩阵对矩阵变量的导数** 设 $X=(x_{ij})_{m\times n}$, $F(X)=(f_{kl}(X))_{r\times s}$, 且 $f_{kl}(X)=f_{kl}(x_{11},x_{12},\cdots,x_{mn})$ 关于 x_{ij} 可导, 则 $F(X)$ 对 X 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}F(X)=\left[\frac{\partial F}{\partial x_{ij}}\right]_{m\times n\text{块}},\qquad \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}=\left[\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_{ij}}\right]_{r\times s}$$

二、主要结论

1. 矩阵序列的收敛性

(1) 矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A 的充要条件是, 对任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|A^{(k)}-A\|=0$.

(2) 若 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A_{m\times n}$, $\lim\limits_{k\to\infty}B^{(k)}=B_{n\times l}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}B^{(k)}=AB$.

(3) $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为收敛矩阵的充要条件是 $\rho(A)<1$.

(4) 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 若有矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\|<1$, 则 A 是收敛矩阵.

2. 矩阵级数的收敛性

(1) 设 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{m\times n}$, $S=(s_{ij})_{m\times n}$, 则矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{(k)}=S$ 的充要条件是

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}=s_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

(2) 矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛的充要条件是, 对任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$, 正项级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A^{(k)}\|$ 收敛.

(3) 若矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛于 S, 则对 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 的项任意重

新排列或者组合得到的矩阵级数仍然绝对收敛于 S.

(4) 设 $P \in \mathbb{C}^{l\times m}$, $Q \in \mathbb{C}^{n\times r}$, 若矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ (绝对) 收敛于 $S_{m\times n}$, 则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$(绝对) 收敛于 PSQ.

(5) 若矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}$ 分别绝对收敛于 $S_{m\times n}$ 与 $T_{n\times l}$, 则矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} A^{(i)}B^{(k-i)}\right)$绝对收敛于 ST.

(6) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则 Neumann 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛的充要条件是 $\rho(A) < 1$, 且其和为 $(I - A)^{-1}$.

(7) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 若有矩阵范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\| < 1$, 则 Neumann 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛.

(8) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 一元函数 $f(z)$ 在 $z = 0$ 的幂级数 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛半径 $r > 0$, 则

1) 当 $\rho(A) < r$ 时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛;

2) 当 $\rho(A) > r$ 时, 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散.

3. 矩阵函数的性质

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 矩阵函数 $f_1(A)$ 和 $f_2(A)$ 有意义, 则有:

(1) 矩阵函数的欧拉公式

1) $e^{iA} = \cos A + i\sin A \quad (i = \sqrt{-1})$

2) $\cos A = \dfrac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$

3) $\sin A = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A})$

(2) **矩阵指数函数**

1) **若** $AB = BA$,**则** $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{A+B}$.

2) $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.

3) $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$.

4) e^{At} **的列向量组线性无关**(**任意** $t \in \mathrm{C}$).

(3) **若** $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$,**则** $f(A) = f_1(A) + f_2(A)$.

(4) **若** $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, **则** $f(A) = f_1(A)f_2(A) = f_2(A)f_1(A)$.

〔**评注**〕 **矩阵** A **的两个不同矩阵函数的乘法运算是可交换的**.

4. **矩阵导数与积分的性质**

(1) **设函数矩阵** $A(t)$ **和** $B(t)$ **都可导**,**则有**

1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t) + B(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t)$.

2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)B(t)) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\right]B(t) + A(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t)\right]$

(2) **设函数矩阵** $A(t)$ **和** $B(t)$ **都可积**,**则有**

1) $\int_{t_0}^{t}(A(\tau) + B(\tau))\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t}B(\tau)\mathrm{d}\tau$.

2) A **为常数矩阵时**,$\int_{t_0}^{t}A \cdot B(\tau)\mathrm{d}\tau = A\left[\int_{t_0}^{t}B(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$.

3) B **为常数矩阵时**,$\int_{t_0}^{t}A(\tau) \cdot B\mathrm{d}\tau = \left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau\right]B$.

4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = A(t)$.

5) $\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)\right]\mathrm{d}t = A(t_1) - A(t_0)$

(3) **设** $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$,**则有**

1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At} = A\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At}A.$

2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(At) = A\cos(At) = [\cos(At)]A.$

3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(At) = -A\sin(At) = -[\sin(At)]A.$

(4) **设** $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$, $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$, **则** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = (A + A^{\mathrm{T}})x.$

5. 微分方程组的解

设 $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$, $x_0 \in \mathrm{C}^n$, $b(t) = (b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t))^{\mathrm{T}}$.

(1) **齐次微分方程组** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t)$ **满足初始条件** $x(t_0) = x_0$ **的解为** $x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x_0$.

(2) **非齐次微分方程组** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t) + b(t)$ **满足初始条件** $x(t_0) = x_0$ **的解为**

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}\left[\mathrm{e}^{-At_0}x_0 + \int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A\tau}b(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

6. 线性矩阵方程的解

(1) **设** $A \in \mathrm{C}^{m\times m}$ **和** $B \in \mathrm{C}^{n\times n}$ **的所有特征值具有负的实部**, $F \in \mathrm{C}^{m\times n}$, **则矩阵方程** $AX + XB = F$ **的惟一解为**

$$X = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{At}F\mathrm{e}^{Bt}\mathrm{d}t$$

〔评注〕 当 A 和 B 的所有特征值具有正的实部时,可给矩阵方程两端同乘以 -1,将矩阵方程转化为符合(1)中条件的矩阵方程进行求解.

(2) **设** $A, F \in \mathrm{C}^{n\times n}$, **且** A **的所有特征值具有负的实部,则矩阵方程** $A^{\mathrm{H}}X + XA = -F$ **的惟一解为**

$$X = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{A^{\mathrm{H}}t}F\mathrm{e}^{At}\mathrm{d}t$$

(3) 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的所有特征值具有负的实部, $F\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 为 Hermite 正定矩阵,则矩阵方程 $A^{\mathrm{H}}X+XA=-F$ 的解矩阵 X 也是 Hermite 正定矩阵.

三、常用方法

1. **求矩阵函数的值**

设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$,由一元函数 $f(z)$ 定义的矩阵函数为 $f(A)$.

(1) 待定系数法:

1) 求出 A 的一个零化多项式(通常是特征多项式或最小多项式)

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

并要求 $\psi(\lambda)$ 整除 A 的特征多项式,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互不相同;

2) 构造多项式 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\cdots+b_{m-1}\lambda^{m-1}$ $(m=m_1+m_2+\cdots+m_s)$,并由方程组

$$\left.\begin{array}{l} r(\lambda_i)=f(\lambda_i) \\ r'(\lambda_i)=f'(\lambda_i) \\ \cdots\cdots \\ r^{(m_i-1)}(\lambda_i)=f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \end{array}\right\}\quad (i=1,2,\cdots,s)$$

求出系数 $b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}$;

3) 计算 $f(A)=r(A)=b_0I+b_1A+\cdots+b_{m-1}A^{m-1}$.

(2) 对角矩阵法(仅适用于 A 可对角化的情形):

1) 求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$;

2) 计算 $f(A)=P\cdot\operatorname{diag}(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n))\cdot P^{-1}$.

(3) Jordan 标准形法:

1) 求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)$,其中 J_i 是

m_i 阶的 Jordan 块;

2) 对于 $i=1,2,\cdots,s$, 计算 $f^{(l)}(\lambda_i)(l=0,1,\cdots,m_i-1)$, 并构造 m_i 阶矩阵

$$f(J_i)=f(\lambda_i)I_{m_i}+f'(\lambda_i)I_{m_i}^{(1)}+\cdots+\frac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!}I_{m_i}^{(m_i-1)}$$

3) 计算 $f(A)=P\cdot\mathrm{diag}(f(J_1),f(J_2),\cdots,f(J_s))\cdot P^{-1}$.

2. 求微分方程组的解

设 $A\in\mathrm{C}^{n\times n}$, $x_0\in\mathrm{C}^n$, $b(t)=(b_1(t),b_2(t),\cdots,b_n(t))^{\mathrm{T}}$.

(1) 求齐次微分方程组 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=Ax(t)$ 的解:

1) 计算矩阵指数函数 e^{At};

2) 计算满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解 $x(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}x_0$.

(2) 求非齐次微分方程组 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=Ax(t)+b(t)$ 的解:

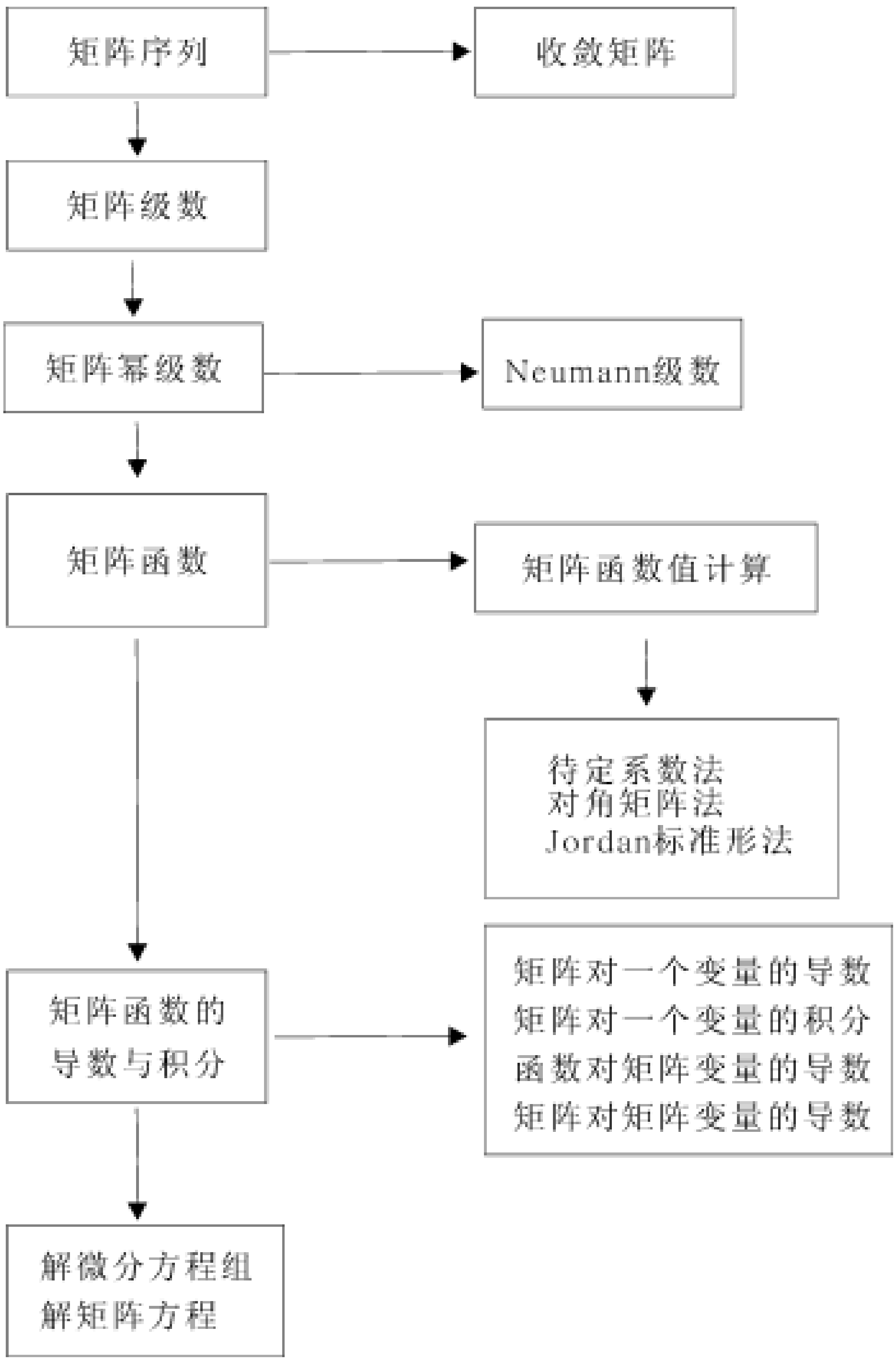
1) 计算矩阵指数函数 e^{At};

2) 计算积分 $y(t)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A\tau}b(\tau)\mathrm{d}\tau$;

3) 计算满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解

$$x(t)=\mathrm{e}^{At}[\mathrm{e}^{-At_0}x_0+y(t)]$$

四、内容结构框图


矩阵序列
收敛矩阵
矩阵级数
矩阵幂级数
Neumann级数
矩阵函数
矩阵函数值计算
待定系数法
对角矩阵法
Jordan标准形法
矩阵函数的导数与积分
矩阵对一个变量的导数
矩阵对一个变量的积分
函数对矩阵变量的导数
矩阵对矩阵变量的导数
解微分方程组
解矩阵方程

五、课后习题全解

习　题　3.1

1. **证明式**(3.1.1).

证　**由题设有** $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$, $b_{ij}^{(k)} \to b_{ij}$ $(k \to \infty)$, **从而有**

$$\alpha a_{ij}^{(k)} + \beta b_{ij}^{(k)} \to \alpha a_{ij} + \beta b_{ij} \ (k \to \infty)$$

由定义知式(3.1.1) **成立**.

2. **设** $A = \begin{bmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbf{R})$, **讨论** c **取何值时** A **为收敛矩阵**.

解　$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2c)(\lambda + c)^2$, $\rho(A) = 2|c|$. A **为收敛矩阵的充要条件是** $\rho(A) < 1$, **即** $-\dfrac{1}{2} < c < \dfrac{1}{2}$.

习　题　3.3

1. **证明** $e^{iA} = \cos A + i\sin A$.

证　**根据式**(3.3.3) ~ (3.3.5) **可得**

$$e^{iA} = I + (iA) + \frac{1}{2!}(iA)^2 + \frac{1}{3!}(iA)^3 + \frac{1}{4!}(iA)^4 + \cdots =$$

$$\left(I - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 - \cdots\right) + i\left(A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 - \cdots\right) =$$

$$\cos A + i\sin A$$

2. **证明** $e^{A+2\pi i I} = e^A$, $\sin(A + 2\pi I) = \sin A$.

证　**因为** $A(2\pi i I) = (2\pi i I)A$, **所以根据定理** 3.7 **可得**

$$e^{A+2\pi i I} = e^A e^{2\pi i I} = e^A\left[I + (2\pi i I) + \frac{1}{2!}(2\pi i I)^2 + \right.$$

$$\left.\frac{1}{3!}(2\pi i I)^3 + \cdots\right] =$$

$$\mathrm{e}^{A}\{[1-\frac{1}{2!}(2\pi)^{2}+\frac{1}{4!}(2\pi)^{4}-\cdots]+$$

$$\mathrm{i}[2\pi-\frac{1}{3!}(2\pi)^{3}+\frac{1}{5!}(2\pi)^{5}-\cdots]\}I=$$

$$\mathrm{e}^{A}\{\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi\}I=\mathrm{e}^{A}$$

又因为 $A(2\pi I)=(2\pi I)A$,**所以根据式**(3.3.8)**可得**

$$\sin(A+2\pi I)=\sin A\cos(2\pi I)+\cos A\sin(2\pi I)=$$

$$\sin A[I-\frac{1}{2!}(2\pi I)^{2}+\frac{1}{4!}(2\pi I)^{4}-\cdots]+$$

$$\cos A[2\pi I-\frac{1}{3!}(2\pi I)^{3}+\frac{1}{5!}(2\pi I)^{5}-\cdots]=$$

$$\sin A[1-\frac{1}{2!}(2\pi)^{2}+\frac{1}{4!}(2\pi)^{4}-\cdots]I+$$

$$\cos A[2\pi-\frac{1}{3!}(2\pi)^{3}+\frac{1}{5!}(2\pi)^{5}-\cdots]I=$$

$$\sin A\cos 2\pi+\cos A\sin 2\pi=\sin A$$

3. **若** A **为实反对称矩阵**($A^{\mathrm{T}}=-A$),**则** e^{A} **为正交矩阵**.

证　**由式**(3.3.3)**知**$(\mathrm{e}^{A})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}}=\mathrm{e}^{-A}$,**于是有**

$$\mathrm{e}^{A}(\mathrm{e}^{A})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}}=\mathrm{e}^{A-A}=\mathrm{e}^{O}=I$$

故 e^{A} **是正交矩阵**.

4. **若** A **是** Hermite **矩阵**,**则** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$ **是酉矩阵**.

证　**由式**(3.3.3)**知**$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}A})^{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{(\mathrm{i}A)^{\mathrm{H}}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}$,**于是有**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}A})^{\mathrm{H}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}=\mathrm{e}^{O}=I$$

故 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$ **是酉矩阵**.

5. **设** $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,**求** e^{A},e^{tA} ($t\in\mathbf{R}$),$\sin A$.

解　**对** A **求得**

$$P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-3&1&0\\3&1&0\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&3&3\\6&4&2\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

根据式(3.3.15) **可得**

$$e^{A} = P\cdot \operatorname{diag}(e^{-1}, e, e^{2})\cdot P^{-1} =$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6e^{2} & 4e^{2}-3e-e^{-1} & 2e^{2}-3e+e^{-1} \\ 0 & 3e+3e^{-1} & 3e-3e^{-1} \\ 0 & 3e-3e^{-1} & 3e+3e^{-1} \end{bmatrix}$$

$$e^{tA} = P\cdot \operatorname{diag}(e^{-t}, e^{t}, e^{2t})\cdot P^{-1} =$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6e^{2t} & 4e^{2t}-3e^{t}-e^{-t} & 2e^{2t}-3e^{t}+e^{-t} \\ 0 & 3e^{t}+3e^{-t} & 3e^{t}-3e^{-t} \\ 0 & 3e^{t}-3e^{-t} & 3e^{t}+3e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\sin A = P\cdot \operatorname{diag}(\sin(-1), \sin 1, \sin 2)\cdot P^{-1} =$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} \sin 2 & 4\sin 2-2\sin 1 & 2\sin 2-4\sin 1 \\ 0 & 0 & 6\sin 1 \\ 0 & 6\sin 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. **设** $f(z) = \ln z$, **求** $f(A)$, **这里** A **为**

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};\quad (2)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

解　(1) **对** A **求得**

$$P = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix},\quad P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

根据式(3.3.18) **和**(3.3.19) **可得**

$$\ln A = P \cdot \ln J \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$, $J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

根据式(3.3.18) **可得**

$$\ln J_1 = \begin{bmatrix} \ln 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \ln 2 \end{bmatrix}, \quad \ln J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再根据式(3.3.19) **可得**

$$\ln A = \begin{bmatrix} \ln J_1 & \\ & \ln J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & \ln 2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

习　题　3.4

1. **证明式**(3.4.4).

证　**设** $A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$, **则**

$$a(t)A(t) = (a(t)a_{ij}(t))_{m\times n}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(t)a_{ij}(t)) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} \cdot a_{ij}(t) + a(t) \cdot \frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(t)A(t)) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} \cdot A(t) + a(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)$$

2. **证明式**(3.4.6).

证　根据式(3.3.4)和(3.3.5)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos tA = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[I - \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{4!}(tA)^4 - \frac{1}{6!}(tA)^6 + \cdots\right] =$$

$$O - tA^2 + \frac{1}{3!}t^3A^4 - \frac{1}{5!}t^5A^6 + \cdots =$$

$$-A\left(tA - \frac{1}{3!}t^3A^3 + \frac{1}{5!}t^5A^5 - \cdots\right) =$$

$$-A(\sin tA)$$

把上式中的 A 提到右边,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos A = -(\sin tA)A$$

3. 证明式(3.4.11).

证　设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B(t) = (b_{ij}(t))_{n\times l}$,则

$$A\cdot B(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}(t)\right)_{m\times l}$$

因为 $$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\int_{t_0}^{t_1} b_{kj}(t)\,\mathrm{d}t$$

所以 $$\int_{t_0}^{t_1} A\cdot B(t)\,\mathrm{d}t = A\cdot\int_{t_0}^{t_1} B(t)\,\mathrm{d}t$$

4. 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称矩阵, $b = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维向量, c 为常数,试求 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax - b^{\mathrm{T}}x + c$ 对于 x 的导数.

解　由例 3.11 知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{\mathrm{T}}Ax) = 2Ax$,再由 $b^{\mathrm{T}}x = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ 知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(b^{\mathrm{T}}x) = b$,而 $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$. 因此 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 2Ax - b$.

5. 若 $A = A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$ 非奇异,证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{-1} = -A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}A^{-1}$$

证　对 $AA^{-1} = I$ 两端关于 t 求导数可得

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\cdot A^{-1} + A\cdot\frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}t} = O$$

两端左乘 A^{-1},**并整理可得**

$$\frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}t} = - A^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \cdot A^{-1}$$

6. **设** X **为** $n\times m$ **矩阵**, A **和** B **依次为** $n\times n$ **和** $m\times n$ **的常数矩阵**,**证明**

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(\mathrm{tr}(BX)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(\mathrm{tr}(X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})) = B^{\mathrm{T}}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(\mathrm{tr}(X^{\mathrm{T}}AX)) = (A + A^{\mathrm{T}})X.$

证 (1) **设** $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $X = (\xi_{ij})_{n\times m}$,**则** $BX = \left[\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\xi_{kj}\right]_{m\times m}$,**于是有**

$$\mathrm{tr}(BX) = \sum_{k=1}^{n} b_{1k}\xi_{k1} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\xi_{kj} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} b_{mk}\xi_{km}$$

$$\frac{\mathrm{tr}(BX)}{\xi_{ij}} = b_{ji} \quad (i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(\mathrm{tr}(BX)) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{m1} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = B^{\mathrm{T}}$$

注意到 BX **与** $(BX)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$ **有相同的迹**,**所以**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(\mathrm{tr}(X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{tr}(BX)) = B^{\mathrm{T}}$$

(2) **设** $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $X = (\xi_{ij})_{n\times m}$, $f = \mathrm{tr}(X^{\mathrm{T}}AX)$,**则有**

$$X^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{n1} \\ \cdots & & \cdots \\ \xi_{1m} & \cdots & \xi_{nm} \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} \sum_k a_{1k}\xi_{k1} & \cdots & \sum_k a_{1k}\xi_{km} \\ \cdots & & \cdots \\ \sum_k a_{nk}\xi_{k1} & \cdots & \sum_k a_{nk}\xi_{km} \end{bmatrix}$$

$$f = \sum_l \xi_{l1} \sum_k a_{lk}\xi_{k1} + \cdots + \sum_l \xi_{lj} \sum_k a_{lk}\xi_{kj} + \cdots + \sum_l \xi_{lm} \sum_k a_{lk}\xi_{km}$$

$$\frac{f}{\xi_{ij}} = \frac{}{\xi_{ij}}\left[\sum_l \xi_{lj} \sum_k a_{lk}\xi_{kj}\right] =$$

$$\sum_l \left[\frac{\xi_{lj}}{\xi_{ij}} \cdot \left(\sum_k a_{lk}\xi_{kj} \right) + \xi_{lj} \cdot \frac{}{\xi_{ij}} \left(\sum_k a_{lk}\xi_{kj} \right) \right] =$$

$$\sum_k a_{ik}\xi_{kj} + \sum_k a_{li}\xi_{lj}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X} = \left(\frac{f}{\xi_{ij}} \right)_{n\times m} = AX + A^{\mathrm{T}}X = (A + A^{\mathrm{T}})X$$

7. **设** x **为** n **维列向量**, u **为** n **维常数列向量**, A **为** n **阶常数对称矩阵**, **证明**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((x-u)^{\mathrm{T}}A(x-u)) = 2A(x-u)$$

证　**设** $f = (x-u)^{\mathrm{T}}A(x-u)$, **由于** $A^{\mathrm{T}} = A$, **所以** $f = x^{\mathrm{T}}Ax - 2(Au)^{\mathrm{T}}x + u^{\mathrm{T}}Au$, **利用第 4 题的结果可得**

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2Ax - 2Au = 2A(x-u)$$

8. **设** $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))^{\mathrm{T}}$, **其中**, $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j + \delta \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$, **求** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

解　**由定义有**

$$\frac{f}{\xi_i} = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\xi_i} \\ \cdots \\ \frac{f_n}{\xi_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} a_i, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} \frac{f}{\xi_1} \\ \cdots \\ \frac{f}{\xi_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

9. **举例说明关系式**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t))^m = m(A(t))^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)$$

一般不成立, **此处** $A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$. **又在什么条件下**, **它才能够成立**?

解　$m = 2$ **时**, **取** $A(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t \\ 0 & t \end{bmatrix}$, **则**

$$A^2(t) = \begin{bmatrix} t^4 & t^3 + t^2 \\ 0 & t^2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^2(t) = \begin{bmatrix} 4t^3 & 3t^2 + 2t \\ 0 & 2t \end{bmatrix}$$

$$2A(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = \begin{bmatrix} 4t^3 & 2t^2+2t \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^2(t)$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)]^m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)A(t)\cdots A(t)] =$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)[A(t)]^{m-1} + A(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)[A(t)]^{m-2} + \cdots +$$
$$[A(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)$$

所以当$[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)]A(t) = A(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)$时,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)]^m = [A(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) + [A(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) +$$
$$\cdots + [A(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) =$$
$$m[A(t)]^{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)$$

习　　题　3.5

1. 证明 Jacobi 恒等式(3.5.8).

证　设 $A = (a_{ij}(t))_{n\times n}$, $X = (\xi_{ij}(t))_{n\times n}$. 由行列式定义可得

$$\det X = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t \xi_{1p_1}\xi_{2p_2}\cdots\xi_{np_n}$$

其中, $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, t 是该排列的逆序数. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det X) = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t [\sum_{i=1}^{n} (\xi_{1p_1}\cdots\xi'_{ip_i}\cdots\xi_{np_n})] =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t (\xi_{1p_1}\cdots\xi'_{ip_i}\cdots\xi_{np_n})$$

由式(3.5.7)和(3.5.2)知

$$\xi'_{ip_i} = a_{i1}\xi_{1p_i} + \cdots + a_{ii}\xi_{ip_i} + \cdots + a_{in}\xi_{np_i}$$

当 $k \neq i$时,行列式 $\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t \xi_{1p_1} \cdots (a_{ik} \xi_{kp_i}) \cdots \xi_{np_n}$ 的第 i 行与第 k 行对应元素成比例,该行列式的值等于零. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t \xi_{1p_1} \cdots (a_{ii} \xi_{ip_i}) \cdots \xi_{np_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} (\det X) = (\mathrm{tr} A)(\det X)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}(\det X)}{\det X} = (\mathrm{tr} A) \mathrm{d} t$$

积分并整理可得

$$\det X = c \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} (\mathrm{tr} A) \mathrm{d} t} \qquad (c\text{是积分常数})$$

2. 求微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} = 3\xi_1 + 8\xi_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} = 3\xi_1 - \xi_2 + 6\xi_3 \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi_3}{\mathrm{d}t} = -2\xi_1 - 5\xi_3 \end{cases}$$

满足初始条件 $\xi_1(0) = 1, \xi_2(0) = 1, \xi_3(0) = 1$ 的解.

解　$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^3$. 经判断知, A不能相似于对角矩阵. 下面采用待定系数法求 e^{At}. 容易验证, A的最小多项式为 $\psi(\lambda) = (\lambda + 1)^2$. 记 $f(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda t}$,并设

$$f(\lambda) = g(\lambda)\psi(\lambda) + (b_0 + b_1 \lambda)$$

由 $f(-1) = \mathrm{e}^{-t}, f'(-1) = t\mathrm{e}^{-t}$ 可得

$$\begin{cases} b_0 - b_1 = \mathrm{e}^{-t} \\ b_1 = t\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

解此方程组得 $b_0 = (1 + t)\mathrm{e}^{-t}, b_1 = t\mathrm{e}^{-t}$. 于是

$$e^{At} = (1+t)e^{-t}I + te^{-t}A = e^{-t}\begin{bmatrix} 1+4t & 0 & 8t \\ 3t & 1 & 6t \\ -2t & 0 & 1-4t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1+12t \\ 1+9t \\ 1-6t \end{bmatrix}$$

3. **求微分方程组**

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = -2\xi_1 + \xi_2 + 1 \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = -4\xi_1 + 2\xi_2 + 2 \\ \dfrac{d\xi_3}{dt} = \xi_1 + \xi_3 + e^t - 1 \end{cases}$$

满足初始条件 $\xi_1(0) = 1, \xi_2(0) = 1, \xi_3(0) = -1$ **的解**.

解 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ e^t - 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2$,**采用数项级数求和法求** e^{At}. **由** $\varphi(A) = O$ **知** $A^3 = A^2$,**从而** $A^4 = A^2, A^5 = A^2, \cdots$. **于是可得**

$$e^{At} = I + (At) + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \frac{1}{4!}(At)^4 + \cdots =$$

$$I + tA + \left(\frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots\right)A^2 =$$

$$I + tA + (e^t - 1 - t)A^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1-2t & t & 0 \\ -4t & 2t+1 & 0 \\ 1+2t-e^t & e^t - t - 1 & e^t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\left\{x(0) + \int_0^t e^{-As}b(s)ds\right\} =$$

$$e^{At}\left\{x(0)+\int_0^t\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}ds\right\}=$$

$$e^{At}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\2t\\0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1\\1\\(t-1)e^t\end{bmatrix}$$

4. **设** $A=(a_{ij})_{n\times n}$ **为常数矩阵**, $X=(\xi_{ij}(t))_{n\times n}$, a**为常数, 证明下面的** Cauchy **微分方程组**

$$\frac{dX}{dt}=\frac{AX}{t-a}$$

可简化为

$$\frac{dX}{du}=AX$$

其中 $u=\ln(t-a)$, **并进而证明其通解为**

$$X=(t-a)^AC$$

其中 C**为** n **阶常数矩阵**.

证　**作变量代换** $u=\ln(t-a)$, **即** $t-a=e^u$, **则**

$$\frac{dX}{du}=\frac{dX}{dt}\cdot\frac{dt}{du}=\frac{AX}{t-a}(t-a)=AX$$

通解为　$X(t)=e^{Au}C=e^{A\ln(t-a)}C=(t-a)^AC$

其中 C**为** n **阶常数矩阵**.

六、学习效果测试题及答案

(一) 测试题

1. **讨论下列矩阵幂级数的敛散性**:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\begin{bmatrix}1&7\\-1&-3\end{bmatrix}^k$;　(2) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{6^k}\begin{bmatrix}1&-8\\-2&1\end{bmatrix}^k$.

2. **求矩阵幂级数** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\begin{bmatrix}2&-1/2\\2&0\end{bmatrix}^k$ **的和**.

3. 设 A 是幂等矩阵($A^2 = A$),求 $\cos(\pi A)$.

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,求 $\sin At$.

5. 已知 $e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} + e^{t}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$,求矩阵 A .

6. 设 A 是可逆矩阵,证明:$\int_0^t e^{A\tau}\mathrm{d}\tau = A^{-1}e^{At} - A^{-1}$.

7. 设 A 为 n 阶常数对称矩阵,$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))^{\mathrm{T}}$,$f(y) = y^{\mathrm{T}}Ay$,证明:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 2y^{\mathrm{T}}A\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$;　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y\|_2^2 = 2y^{\mathrm{T}}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

8. 设 A 为 n 阶矩阵,证明:$\det e^{A} = e^{\mathrm{tr}A}$.

9. 已知 $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求 e^{At};

(2) 用矩阵函数方法求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解 .

10. 已知 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $b(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求 e^{At};

(2) 用矩阵函数方法求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t) + b(t)$ 满足初始条件 $x(0) = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 的解 .

(二) 测试题答案或提示

1. (1) 发散;　(2) 绝对收敛 .

2. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. 3. $I-2A$.

4. $\dfrac{\sin 5t}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}+\dfrac{\sin t}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (提示:两边求导数,并利用 $e^{O}=I$).

6. 提示:利用$\dfrac{d}{d\tau}e^{A\tau}=Ae^{A\tau}$.

7. 提示:利用$\dfrac{dy^{T}}{dt}Ay=\left[\dfrac{dy^{T}}{dt}Ay\right]^{T}=y^{T}A\dfrac{dy}{dt}$.

8. 设 A 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 A 的 Jordan 标准形可写为

$$J=\begin{bmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1} \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\delta_i=0 \text{ 或 } 1)$$

于是

$$e^{A}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\det e^{A}=e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=e^{\operatorname{tr}A}$$

9. $e^{At}=\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}+e^{t}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $x(t)=\begin{bmatrix} 5e^{t}-4 \\ 3e^{t}-2 \\ 4e^{t}-2 \end{bmatrix}$.

10. $e^{At}=\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}+e^{t}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+e^{-t}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^t + te^{-t} \\ e^t \\ 2te^{-t} \end{bmatrix}.$$

第四章　矩阵分解

在有限维线性空间中,线性变换问题可以转化为矩阵问题进行讨论. 因此,将一个矩阵分解为若干个特殊矩阵的乘积意味着将一个线性变换分解为若干个特殊线性变换的乘积.

矩阵的三角分解、正交三角分解、满秩分解及奇异值分解是将矩阵分解为形式比较简单或性质比较熟悉的一些矩阵的乘积,这些分解式能够明显地反映出原矩阵的许多数值特征,如矩阵的秩、行列式、特征值及奇异值等. 另一方面,构造分解式的方法和过程也能够为某些数值计算方法的建立提供理论依据.

一、基 本 概 念

1. 矩阵的三角分解

三角分解是将方阵分解为下三角矩阵与上三角矩阵的乘积.

(1) LDU 分解　$A = LDU$,其中 L 为单位下三角矩阵,D 为对角矩阵,U 为单位上三角矩阵.

(2) Crout 分解　$A = LU$,其中 L 为下三角矩阵,U 为单位上三角矩阵.

(3) Doolittle 分解　$A = LU$,其中 L 为单位下三角矩阵,U 为上三角矩阵.

(4) Cholesky 分解　$A = GG^{H}$,其中 A 为 Hermite 正定矩阵,G 为下三角矩阵.

2. 矩阵的正交三角分解

正交三角分解是将方阵分解为正交矩阵与上三角矩阵的乘积.

(1) **方阵的 QR 分解** 对于方阵 A,求正交(酉)矩阵 Q 和上三角矩阵 R,使得 $A = QR$.

(2) **长方阵的 QR 分解** 对于矩阵 $A_{m\times n}(m\geq n)$,求列向量组单位正交的矩阵 $Q_{m\times n}$ 和上三角矩阵 $R_{n\times n}$,使得 $A = QR$.

3. **矩阵的满秩分解**

满秩分解是将矩阵分解为列满秩矩阵与行满秩矩阵的乘积.

(1) **置换矩阵** 对单位矩阵进行列对换之后得到的矩阵.

(2) **矩阵的 Hermite 标准形** 指满足下列条件的矩阵 $B\in \mathbf{C}_r^{m\times n}(r>0)$:

1) B 是阶梯形矩阵;

2) B 中第 i 行的第一个非零元素是 1,且位于第 j_i 列($i = 1, 2,\cdots, r$);

3) B 中的 $j_1, j_2,\cdots, j_r$ 列是单位矩阵 I_m 的前 r 列.

4. **矩阵的奇异值分解**

设 $A\in \mathbf{C}_r^{m\times n}(r>0)$.

(1) **矩阵的奇异值** 指 Hermite 矩阵 $A^{\mathrm{H}}A$ 的特征值的算术平方根.

(2) **矩阵的奇异值分解** 设 A 的非零奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$,构造矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

求酉矩阵 $U_{m\times m}$ 和 $V_{n\times n}$,使得 $A = UDV^{\mathrm{H}}$.

(3) **正交相抵** 设 $A, B\in \mathbf{C}^{m\times n}$,若存在酉矩阵 U 和 V 使得 $U^{\mathrm{H}}AV = B$,称 A 与 B 正交相抵.

二、主要结论

1. **矩阵三角分解的存在性**

(1) $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 可进行三角分解(LDU 分解、Crout 分解、Doolittle

分解)的充要条件是 A 的顺序主子式 $\Delta_k \neq 0(k=1,2,\cdots,n-1)$.

(2) 设 $A\in \mathrm{C}^{n\times n}$ 为 Hermite 正定矩阵,则存在可逆下三角矩阵 G,使得 $A=GG^{\mathrm{H}}$.

2. Givens 矩阵与 Householder 矩阵的性质

(1) Givens 矩阵　设实数 c 和 s 满足 $c^2+s^2=1$,对应的 Givens 矩阵为 $T_{ij}(c,s)(i\neq j)$,则

1) $T_{ij}(c,s)$ 是正交矩阵.

2) $[T_{ij}(c,s)]^{-1}=T_{ij}(c,-s)$.

3) $\det[T_{ij}(c,s)]=1$.

4) 设实向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$, $y=T_{ij}(c,s)x=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$,则

$$\eta_i=c\xi_i+s\xi_j,\quad \eta_j=-s\xi_i+c\xi_j$$
$$\eta_k=\xi_k\quad(k\neq i,j;\ k=1,2,\cdots,n)$$

5) 设 $x\in\mathrm{R}^n$ 非零, $z\in\mathrm{R}^n$ 是单位向量,则存在有限个 Givens 矩阵的乘积,记作 T,使得 $Tx=|x|z$.

(2) Householder 矩阵　设 $u\in\mathrm{R}^n$ 是单位列向量,对应的 Householder 矩阵为 $H_u=I_n-2uu^{\mathrm{T}}$,则

1) H_u 是对称矩阵.

2) H_u 是正交矩阵.

3) H_u 是自逆矩阵.

4) H_u 是对合矩阵.

5) $\det H_u=-1$.

6) 设 $x\in\mathrm{R}^n$ 非零, $z\in\mathrm{R}^n$ 是单位向量,且 $x\neq|x|z$. 若取 $u=\dfrac{x-|x|z}{|x-|x|z|}$,则 $H_u x=|x|z$.

(3) 一个 Givens 矩阵可以表示为两个 Householder 矩阵的乘积.

(4) 对于 $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$,存在有限个 Givens 矩阵(或者 Householder 矩阵)的乘积,记作 S,使得 SA 为上三角矩阵;当 A 为可逆矩阵时, SA

为可逆上三角矩阵.

3. 矩阵满秩分解的存在性

(1) 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$,则使用初等行变换可将 A 化为 Hermite 标准形.

(2) 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$,则存在 $F\in C_r^{m\times r}$ 和 $G\in C_r^{r\times n}$,使得 $A=FG$.

4. 矩阵奇异值分解的存在性及应用

(1) 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$ 的非零奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$,则存在酉矩阵 $U_{m\times m}$ 和 $V_{n\times n}$,使得

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}V^{H},\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$$

(2) 设 A 的奇异值分解式中的矩阵 U 和 V 的列向量分别为 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 和 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,则有

1) $N(A)=\mathrm{span}\{v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_n\}$.

2) $R(A)=\mathrm{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_r\}$.

3) $A=\sigma_1u_1v_1^{H}+\sigma_2u_2v_2^{H}+\cdots+\sigma_ru_rv_r^{H}$.

(3) 若矩阵 A 与 B 正交相抵,则 A 与 B 有相同的奇异值.

三、常用方法

1. 求矩阵三角分解的紧凑格式

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 Crout 分解为 $A=LU$,其中 $L=(l_{ij})_{n\times n}$(当 $i<j$ 时 $l_{ij}=0$),$U=(u_{ij})_{n\times n}$(当 $i>j$ 时 $u_{ij}=0$,且 $u_{ii}=1$).

(1) 计算步骤(以 $n=4$ 为例):

1) 计算 L 的第 1 列 $\quad l_{i1}=a_{i1}\quad(i=1,2,3,4)$

计算 U 的第 1 行 $\quad u_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{l_{11}}\quad(j=2,3,4)$

2) **计算 L 的第 2 列**

$$l_{i2} = a_{i2} - l_{i1} u_{12} \quad (i = 2,3,4)$$

计算 U 的第 2 行

$$u_{2j} = \frac{1}{l_{22}}(a_{2j} - l_{21} u_{1j}) \quad (j = 3,4)$$

3) **计算 L 的第 3 列**

$$l_{i3} = a_{i3} - (l_{i1} u_{13} + l_{i2} u_{23}) \quad (i = 3,4)$$

计算 U 的第 3 行

$$u_{3j} = \frac{1}{l_{33}}[a_{3j} - (l_{31} u_{1j} + l_{32} u_{2j})] \quad (j = 4)$$

4) **计算 L 的第 4 列**

$$l_{44} = a_{44} - (l_{41} u_{14} + l_{42} u_{24} + l_{43} u_{34})$$

(2) **计算框图(以 $n = 4$ 为例)**:

l_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	第①框
l_{21}	l_{22}	u_{23}	u_{24}	第②框
l_{31}	l_{32}	l_{33}	u_{34}	第③框
l_{41}	l_{42}	l_{43}	l_{44}	第④框

〔评注〕 第③框中的 l_{i3} 为 A 的对应元素 a_{i3} 先减去“第①框中同行的 l_{i1} 与同列的 u_{13} 之积”,再减去“第②框中同行的 l_{i2} 与同列的 u_{23} 之积”;第③框中的 u_{34} 为 A 的对应元素 a_{34} 先减去“第①框中同行的 l_{31} 与同列的 u_{14} 之积”,再减去“第②框中同行的 l_{32} 与同列的 u_{24} 之积”,最后除以 l_{33}(第③框的主对角线元素).

(3) **由矩阵的 Crout 分解构造矩阵的 LDU 分解** 令 $D = \mathrm{diag}(l_{11}, l_{22}, \cdots, l_{nn})$, L 的第 i 列为 L 的第 i 列除以 l_{ii} $(i = 1,2,\cdots,n-1)$, L 的第 n 列为 e_n, 那么 $A = LDU$.

(4) **由矩阵的 Crout 分解构造矩阵的 Cholesky 分解** 令 $\Lambda =$

$\mathrm{diag}(\sqrt{l_{11}}, \sqrt{l_{22}}, \cdots, \sqrt{l_{nn}})$, $G = L\Lambda^{-1}$, **那么** $A = GG^{\mathrm{H}}$.

2. 求矩阵的 QR 分解

设 $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ **是可逆矩阵**.

(1) Schmidt **正交化方法**:

1) **对** A **的列向量组** $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **正交化得正交向量组** $b_1, b_2, \cdots, b_n$, **且有**

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n)K$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \ddots & \cdots \\ & & \ddots & k_{n,n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

2) **构造正交矩阵** $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$, **其中** $q_j = \dfrac{b_j}{|b_j|}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$;

3) **构造上三角矩阵** $R = \mathrm{diag}(|b_1|, |b_2|, \cdots, |b_n|) \cdot K$, **那么** $A = QR$.

(2) Givens **变换方法**:

1) **对** A **的第 1 列** $\beta^{(1)}$ **构造有限个** Givens **矩阵的乘积** T_1, **使得**

$$T_1\beta^{(1)} = |\beta^{(1)}| e_1 \quad (e_1 \in \mathrm{R}^n)$$

$$T_1 A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \hline 0 & & & \\ \cdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

2) **对** $A^{(1)}$ **的第 1 列** $\beta^{(2)}$ **构造有限个** Givens **矩阵的乘积** T_2, **使得**

$$T_2\beta^{(2)} = |\beta^{(2)}| e_1 \quad (e_1 \in \mathrm{R}^{n-1})$$

$$T_2 A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \hline 0 & & & \\ \cdots & & A^{(2)} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

3) ……

…

$n-1$) **对** $A^{(n-2)}$ **的第 1 列** $\beta^{(n-1)}$ **构造** Givens **矩阵** T_{n-1},**使得**

$$T_{n-1}\beta^{(n-1)} = |\beta^{(n-1)}| e_1 \quad (e_1 \in \mathbf{R}^2)$$

$$T_{n-1} A^{(n-2)} = \begin{bmatrix} a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

构造上三角矩阵

$$R = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

计算正交矩阵

$$Q = \left[\begin{bmatrix} I_{n-2} & \\ & T_{n-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} T_1\right]^{\mathrm{T}}$$

那么 $A = QR$

〔评注〕　上三角矩阵 R 的主对角线上方(含主对角线)的第 i 行元素是第 i 步中矩阵 $T_i A^{(i-1)}$ 的第 1 行元素($i = 1,2,\cdots,n-1$),而 R 的 n 行 n 列元素是第 $n-1$ 步中矩阵 $T_{n-1}A^{(n-2)}$ 的 2 行 2 列元素. 另外,当 A 为不可逆矩阵时,各步中的 $\beta^{(i)}$ ($i = 1,2,\cdots,n-1$) 有可能是零向量,遇此情形直接进行下一步即可.

(3) Householder **变换方法**:**在** Givens **变换方法的各步中**,**将"构造有限个** Givens **矩阵的乘积** T_i **使得** $T_i\beta^{(i)} = |\beta^{(i)}| e_1$ **"改作"构造**

Householder 矩阵 H_i 使得 $H_i\beta^{(i)}=|\beta^{(i)}|e_1$”,并将涉及到的矩阵 T_i 改作矩阵 H_i 即可.

3. 化矩阵与 Hessenberg 矩阵正交相似

设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$.

(1) Householder 变换方法:

1) 记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的第 1 列中后 $n-1$ 个元素构成的列向量为 $b^{(1)}$,当 $b^{(1)}=0$ 时,进行下一步;否则,构造 Householder 矩阵 H_1,使得

$$H_1 b^{(1)}=|b^{(1)}|e_1\quad(e_1\in\mathbf{R}^{n-1})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0^{\mathrm{T}}\\ 0 & H_1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1 & 0^{\mathrm{T}}\\ 0 & H_1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ 0 & & & \\ \cdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

2) 记 $A^{(1)}$ 的第 1 列中后 $n-2$ 个元素构成的列向量为 $b^{(2)}$,当 $b^{(2)}=0$ 时,进行下一步;否则,构造 Householder 矩阵 H_2,使得

$$H_2 b^{(2)}=|b^{(2)}|e_1\quad(e_1\in\mathbf{R}^{n-2})$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0^{\mathrm{T}}\\ 0 & H_2\end{bmatrix}A^{(1)}\begin{bmatrix}1 & 0^{\mathrm{T}}\\ 0 & H_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{22}^{(1)} & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ 0 & & & \\ \cdots & & A^{(2)} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

3)……

…

$n-2$) 记 $A^{(n-3)}$ 的第 1 列中后两个元素构成的列向量为 $b^{(n-2)}$,当 $b^{(n-2)}=0$ 时,过程结束;否则,构造 Householder 矩阵 H_{n-2},使得

$$H_{n-2}b^{(n-2)}=|b^{(n-2)}|e_1\quad(e_1\in\mathbf{R}^2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & H_{n-2} \end{bmatrix} A^{(n-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & H_{n-2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{n-2,n-2}^{(n-3)} & * & * \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$$

计算正交矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} I_{n-2} & O \\ O & H_{n-2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & O \\ O & H_1 \end{bmatrix}$$

那么 QAQ^T 为上 Hessenberg 矩阵.

〔评注〕　当 A 为实对称矩阵时, QAQ^T 为实对称三对角矩阵.

(2) Givens 变换方法: 在 Householder 变换方法的各步中, 将"构造 Householder 矩阵 H_i 使得 $H_i b^{(i)} = |b^{(i)}| e_1$"改作"构造有限个 Givens 矩阵的乘积 T_i 使得 $T_i b^{(i)} = |b^{(i)}| e_1$", 并将涉及到的矩阵 H_i 改作矩阵 T_i 即可.

4. 求矩阵的满秩分解

$A \in \mathbb{C}_r^{m \times n} (r > 0)$.

(1) 逆矩阵方法:

1) $[A \mid I] \xrightarrow{\text{行}} [B \mid P]$, 其中 B 为阶梯形矩阵;

2) 计算 P^{-1} (或者 P^{-1} 的前 r 列);

3) 取 F 为 P^{-1} 的前 r 列构成的列满秩矩阵, G 为 B 的前 r 行构成的行满秩矩阵, 那么 $A = FG$.

(2) Hermite 标准形方法:

1) $A \xrightarrow{\text{行}} B$, 其中 B 为 Hermite 标准形矩阵, 且 B 的 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列为单位矩阵 I_m 的前 r 列;

2) 取 F 为 A 的 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 列构成的列满秩矩阵, G 为 B 的前 r 行构成的行满秩矩阵, 那么 $A = FG$.

〔评注〕 采用 Hermite 标准形方法求矩阵 A 的满秩分解时, 对 A 的 Hermite 标准形矩阵 B 可以取消限制条件 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

5. **求矩阵的奇异值分解**

设 $A\in C_r^{m\times n}$ $(r>0)$ **的非零奇异值为** $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$, **对角矩阵** $\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$, $\lambda_i=\sigma_i^2$ $(i=1,2,\cdots,r)$.

(1) **直接构造法**:

1) **求酉矩阵** $V_{n\times n}$ **使得**

$$V^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}A)V=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$$

2) **计算** $U_1=AV_1\Sigma^{-1}$, **其中** V_1 **为** V **的前** r **列构成的矩阵**;

3) **扩充** U_1 **的** r **个列向量为** C^m **的标准正交基**, **并记由增加的** $m-r$ **个列向量构成的矩阵为** U_2, **那么** $U=[U_1 \mid U_2]$ **是酉矩阵**;

4) **写出** A **的奇异值分解** $A=U\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}V^{\mathrm{H}}$.

(2) **试算验证法**:

1) **求酉矩阵** $V_{n\times n}$ **使得**

$$V^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}A)V=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$$

2) **求酉矩阵** $U_{m\times m}$ **使得**

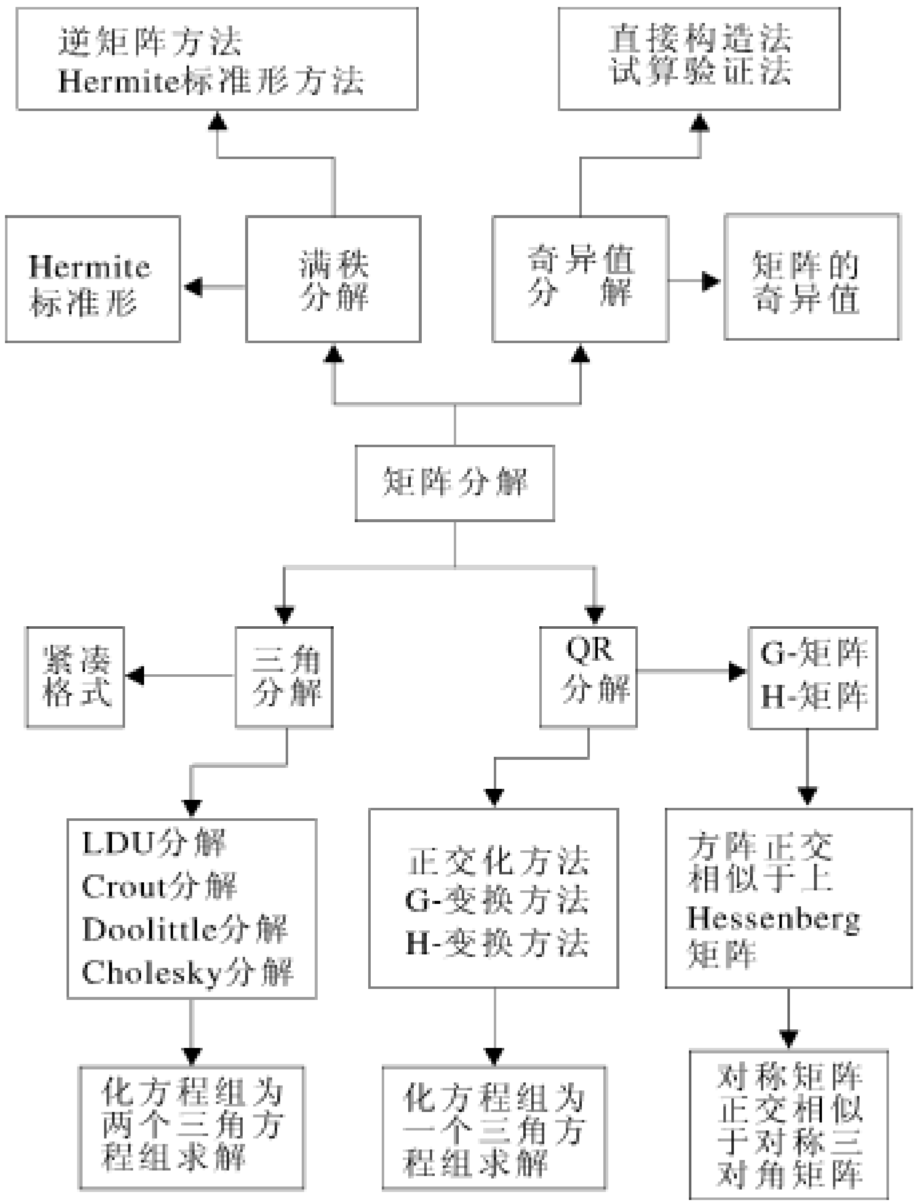
$$U^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}})U=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$$

3) **计算矩阵** $U\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}V^{\mathrm{H}}$;

4) **若** 3) **中的矩阵等于** A, **则它是** A **的一个奇异值分解**; **若** 3) **中的矩阵不等于** A, **需要重新调整** V **或**(**和**)U **的列向量**, **直至乘积等于** A.

〔**评注**〕 **当** $A^{\mathrm{H}}A$(**或** AA^{H}) **的非零特征值的重数为** 1 **时**, **只需调整** V **或**(**和**)U **中对应非零特征值的特征向量的正负号即可**; **而当** $A^{\mathrm{H}}A$(**或** AA^{H}) **的非零特征值的重数大于** 1 **时**, **调整** V **或**(**和**)U **的列向量使得** $U\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}V^{\mathrm{H}}=A$ **是十分困难的**.

四、内容结构框图



逆矩阵方法
Hermite标准形方法
直接构造法
试算验证法
Hermite标准形
满秩分解
奇异值分解
矩阵的奇异值
矩阵分解
紧凑格式
三角分解
QR分解
G-矩阵
H-矩阵
LDU分解
Crout分解
Doolittle分解
Cholesky分解
正交化方法
G-变换方法
H-变换方法
方阵正交相似于上Hessenberg矩阵
化方程组为两个三角方程组求解
化方程组为一个三角方程组求解
对称矩阵正交相似于对称三对角矩阵

五、课后习题全解

习 题 4.1

1. 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 1\\ -4 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的 LDU 分解和 Doolittle 分解.

解 对 A 作矩阵

$$L_1=\begin{bmatrix}1 & & & \\ \frac{2}{5} & 1 & & \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ -\frac{2}{5} & 1 & & \\ \frac{4}{5} & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算

$$L_1^{-1}A=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1\\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=A^{(1)}$$

对 $A^{(1)}$ 作矩阵

$$L_2=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -2 & 1 & \\ 0 & 5 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & -5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算
$$L_2^{-1}A^{(1)}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -3\end{bmatrix}=A^{(2)}$$

对 $A^{(2)}$ 作矩阵
$$L_3=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad L_3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

计算
$$L_3^{-1}A^{(2)}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -4 & 0\\ & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1\\ & & 1 & 2\\ & & & -7\end{bmatrix}=A^{(3)}$$

令
$$L=L_1L_2L_3=\begin{bmatrix}1 & & & \\ \frac{2}{5} & 1 & & \\ -\frac{4}{5} & -2 & 1 & \\ 0 & 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

可得 A 的 Doolittle 分解为 $A=LA^{(3)}$，A 的 LDU 分解为
$$A=L\begin{bmatrix}5 & & & \\ & \frac{1}{5} & & \\ & & 1 & \\ & & & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 0\\ & 1 & -2 & 5\\ & & 1 & 2\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

2. **证明式**(4.1.30).

证　**设** $A=(a_{ij})_{n\times n}$，**令**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

比较 $A = LU$ **两端的对应元素可得**

$$a_{1k} = u_{1k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$a_{k1} = l_{k1} u_{11} \qquad (k = 2, \cdots, n)$$

$$a_{ik} = l_{i1} u_{1k} + \cdots + l_{i,i-1} u_{i-1,k} + u_{ik}$$

$$(k = i, i+1, \cdots, n; i > 1)$$

$$a_{ki} = l_{k1} u_{1i} + \cdots + l_{k,i-1} u_{i-1,i} + l_{ki} u_{ii}$$

$$(k = i+1, \cdots, n; i > 1)$$

即

$$u_{1k} = a_{1k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$l_{k1} = \frac{1}{u_{11}} a_{k1} \qquad (k = 2, \cdots, n)$$

$$u_{ik} = a_{ik} - (l_{i1} u_{1k} + \cdots + l_{i,i-1} u_{i-1,k})$$

$$(k = i, i+1, \cdots, n; i > 1)$$

$$l_{ki} = \frac{1}{u_{ii}} [a_{ki} - (l_{k1} u_{1i} + \cdots + l_{k,i-1} u_{i-1,i})]$$

$$(k = i+1, \cdots, n; i > 1)$$

3. **设** A **为实对称正定矩阵,且 Gauss 消去法第一步得到的矩阵为**

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \cdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

证明 B **仍是实对称正定矩阵,且对角元素不增加.**

证 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,记 $\alpha = (a_{21}, \cdots, a_{n1})^{\mathrm{T}}$,由于 A 对称,所以 A 可分块为 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^{\mathrm{T}} \\ \alpha & A_1 \end{bmatrix}$,其中 A_1 是 $n-1$ 阶对称矩阵,于是

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_1 - \dfrac{\alpha\alpha^T}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

即 $B = A_1 - \dfrac{\alpha\alpha^T}{a_{11}}$. 下面证明 B 是正定矩阵.

容易验证 $B^T = B$. 任取非零列向量 $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, 则 $x = \begin{bmatrix} -\dfrac{\alpha^T y}{a_{11}} \\ y \end{bmatrix} \neq 0$, 从而 $x^T A x > 0$, 即

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{y^T\alpha}{a_{11}} & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{\alpha^T y}{a_{11}} \\ y \end{bmatrix} > 0$$

上式左端进行乘法运算后可得

$$y^T \left(A_1 - \frac{\alpha\alpha^T}{a_{11}} \right) y > 0$$

故 $B = A_1 - \dfrac{\alpha\alpha^T}{a_{11}}$ 为正定矩阵.

4. 求对称正定矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

的 Cholesky 分解.

解　根据式(4.1.28)和(4.1.29)求出 A 的 Crout 分解为

$$A = \begin{bmatrix} 5 & & \\ 2 & \frac{1}{5} & \\ -4 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

变形可得 A 的 Cholesky 分解为

$$A=\begin{bmatrix}1&&\\ \frac{2}{5}&1&\\ -\frac{4}{5}&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&&\\&\frac{1}{5}&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}\\&1&-2\\&&1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sqrt{5}&&\\ \frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\\ \frac{-4}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-4}{\sqrt{5}}\\&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\\&&1\end{bmatrix}$$

习 题 4.2

1. **用** Schmidt **正交化方法求矩阵**

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

的 QR **分解** .

解 **令** $a_1=(0,1,1)^T$, $a_2=(1,1,0)^T$, $a_3=(1,0,1)^T$, **正交化可得**

$$b_1=a_1=(0,1,1)^T$$

$$b_2=a_2-\frac{1}{2}b_1=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)^T$$

$$b_3=a_3-\frac{1}{3}b_2-\frac{1}{2}b_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$$

根据式(4.2.8) **构造矩阵**

$$Q=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ &&\frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

则有 $A = QR$.

2. 用 Givens 变换将向量 $x = (2,3,0,5)^{\mathrm{T}}$ 变换为与 e_1 同方向.

解　对 x 构造 $T_{12}(c, s): c = \frac{2}{\sqrt{13}}, s = \frac{3}{\sqrt{13}}$,则有

$$T_{12}x = (\sqrt{13},0,0,5)^{\mathrm{T}}$$

对 $T_{12}x$ 构造 $T_{14}(c, s): c = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}}, s = \frac{5}{\sqrt{38}}$,则有

$$T_{14}(T_{12}x) = (\sqrt{38},0,0,0)^{\mathrm{T}} = \sqrt{38}e_1$$

于是

$$T = T_{14}T_{12} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{38}} & \frac{3}{\sqrt{38}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{38}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-10}{\sqrt{494}} & \frac{-15}{\sqrt{494}} & 0 & \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}} \end{bmatrix}$$

且 $Tx = \sqrt{38}e_1$.

3. 写出 R^2 中的向量 x 关于 e_1 正交的轴的反射变换.

解　反射矩阵 $H = I - 2e_1e_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,反射变换为

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

4. 设变换 $Hx = x - a(x, w)w\ (x \in \mathrm{R}^n)$,其中 w 是欧氏长度为 1 的向量. 问 a 取何值时, H 是正交矩阵?

解　对任意 $x \in \mathrm{R}^n$,由 $(Hx, Hx) = (x, x)$ 可得

$$(x, x) + (a^2 - 2a)(x, w)^2 = (x, x)$$

即 $(a^2 - 2a)(x, w)^2 = 0$. 特别地,取 $x = w$ 时,有 $a^2 - 2a = 0$,即 $a = 0$ 或 $a = 2$.

5. 已知向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，且 $x-\xi_1e_1-\xi_2e_2\neq0$，证明：存在正交矩阵 Q(初等旋转矩阵之积)，使 $Qx=(\xi_1,c_2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

证 由条件 $x-\xi_1e_1-\xi_2e_2\neq0$ 知，$(0,0,\xi_3,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\neq0$. 令 $y=(\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n-1}$，则存在初等旋转矩阵之积，记作 Q_1，使得

$$Q_1y=|y|e_1\quad(e_1\in\mathbf{R}^{n-1})$$

令 $Q=\begin{bmatrix}1&\\&Q_1\end{bmatrix}$，则 Q仍是初等旋转矩阵之积，从而 Q是正交矩阵，且有

$$Qx=\begin{bmatrix}1&\\&Q_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1\\Q_1y\end{bmatrix}=(\xi_1,c_2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

$$(c_2=|y|)$$

6. 已知向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，求初等反射矩阵 H，使 $Hx=(\xi_1,\eta_2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

解 令 $y=(\xi_1,\eta_2,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，由 $Hx=y$ 知 $|y|=|Hx|=|x|$. 将 y 单位化，可得 $y_0=\dfrac{1}{|y|}y$. 取

$$u=\frac{x-|x|y_0}{|x-|x|y_0|}=\frac{x-y}{|x-y|}$$

构造初等反射矩阵 $H=I-2uu^{\mathrm{T}}$，则有

$$Hx=|x|y_0=y$$

7. 用 Givens 变换求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1\\0&2&2\\2&1&2\end{bmatrix}$$

的 QR 分解.

解 第1步：对 A的第1列 $b^{(1)}=(2,0,2)^{\mathrm{T}}$，构造 T_1 使 $T_1b^{(1)}=|b^{(1)}|e_1$.

$$T_{13}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad T_{13}b^{(1)}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$T_1=T_{13},\quad T_1A=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

第 2 步:对 $A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ **的第 1 列** $b^{(2)}=\begin{bmatrix}2\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$**,构造** T_2**,使** $T_2b^{(2)}=|b^{(2)}|e_1$.

$$T_{12}=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix},\quad T_{12}b^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$T_2=T_{12},\quad T_2A^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{3\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

最后,令 $T=\begin{bmatrix}1 & \\ & T_2\end{bmatrix}T_1$**,则有**

$$Q=T^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{3\sqrt{2}}\\ & & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

且 $A = QR$.

8. 用 Householder 变换求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解 .

解 对 A 的第 1 列,构造 H_1 如下:

$$b^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b^{(1)} - |b^{(1)}| e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = I - 2uu^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

对 $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 的第 1 列,构造 H_2 如下:

$$b^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b^{(2)} - |b^{(2)}| e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I - 2uu^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad H_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

最后,令 $S = \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix} H_1$,则有

$$Q = S^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

且 $A = QR$.

9. 用 Householder 变换化矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&12&16\\12&288&309\\16&309&312\end{bmatrix}$$

正交相似于三对角矩阵.

解　**对** $b^{(1)}=\begin{bmatrix}12\\16\end{bmatrix}$,**计算**

$$b^{(1)}-|b^{(1)}|e_1=\begin{bmatrix}-8\\16\end{bmatrix},\quad u=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

$$H=I-2uu^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}$$

令

$$Q=\begin{bmatrix}1&\\&H\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&4\\0&4&-3\end{bmatrix}$$

则

$$QAQ^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&20&0\\20&600&75\\0&75&0\end{bmatrix}$$

习　题　4.3

1. **求下列各矩阵的满秩分解**:

(1) $\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&2&1&-1\\1&0&2&1\end{bmatrix}$;　(2) $\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\end{bmatrix}$.

解　(1) $A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B,\ \operatorname{rank}B=2$ **且** B **中的第** 1 **列和第** 2 **列为单位矩阵的前两列,故**

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(2) $A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B$, $\operatorname{rank}B=2$ 且 B 中的第 1 列和第 2 列为单位矩阵的前两列，故

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\\-1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}$$

2. 设 $B\in\mathbf{R}_r^{m\times r}(r>0)$，证明 $B^{\mathrm{T}}B$ 非奇异 .

证 由 $\operatorname{rank}B=r$ 知，B 的列向量组 $b_1, b_2,\cdots, b_r$ 线性无关 . 因此，对任意 $x=(k_1, k_2,\cdots, k_r)^{\mathrm{T}}\neq 0$，有

$$Bx=k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_rb_r\neq 0$$

于是

$$x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}B)x=(Bx)^{\mathrm{T}}(Bx)>0$$

故 $B^{\mathrm{T}}B$ 是对称正定矩阵，从而 $B^{\mathrm{T}}B$ 非奇异 .

3. 设 B 和 A 依次是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，若 $BA=I$，则称 B 为 A 的左逆矩阵 . 证明 A 有左逆矩阵的充要条件是 A 为列满秩矩阵 .

证 必要性 . 已知 $BA=I_m$，因为

$$\operatorname{rank}(BA)\leq\operatorname{rank}A\leq m,\quad \operatorname{rank}(BA)=\operatorname{rank}I_m=m$$

所以 $\operatorname{rank}A=m$，即 A 列满秩 .

充分性 . 已知 A 列满秩，所以 $A^{\mathrm{T}}A$ 非奇异(见第 2 题). 构造 $m\times n$ 矩阵 $B=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$，则有 $BA=I$，即 A 有左逆矩阵 .

4. 设矩阵 $F\in\mathbf{C}_r^{m\times r}$，$G\in\mathbf{C}_r^{r\times n}$，证明 $\operatorname{rank}(FG)=r$.

证 令 $A=FG$，则 $\operatorname{rank}A\leq\operatorname{rank}F=r$. 因为 F 列满秩，类似于第 2 题的证明可得 $F^{\mathrm{H}}F$ 可逆，于是有

$$(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}}A=(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}}FG=G$$

从而
$$r = \operatorname{rank} G \leq \operatorname{rank} A$$
故 $\operatorname{rank} A = r$.

5. 设 $A \in \mathbf{R}_r^{m\times r}$,证明
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}} A) = \operatorname{rank}(AA^{\mathrm{T}})$$

证　已知 $A\in \mathbf{R}_r^{m\times r}$,根据第2题可得 $A^{\mathrm{T}} A$ 可逆,所以 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}} A) = r$. 又 $A \in \mathbf{R}_r^{m\times r}$, $A^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_r^{r\times m}$,根据第 4 题可得 $\operatorname{rank}(AA^{\mathrm{T}}) = r$. 因此
$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}} A) = \operatorname{rank}(AA^{\mathrm{T}})$$

习　题　4.4

1. 设 σ_1 和 σ_n 是矩阵 A 的最大奇异值和最小奇异值,证明: $\sigma_1 = \|A\|_2$;当 A 是非奇异矩阵时, $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\sigma_n}$.

证　由 $\|A\|_2^2 = \max\lambda(A^{\mathrm{H}} A) = \sigma_1^2$ 得 $\|A\|_2 = \sigma_1$;当 A 非奇异时, AA^{H} 与 $A^{\mathrm{H}} A$ 都是 Hermite 正定矩阵,它们的特征值都大于零,且有
$$\|A^{-1}\|_2^2 = \max \lambda[(A^{-1})^{\mathrm{H}} A^{-1}] = \max \lambda[(AA^{\mathrm{H}})^{-1}] =$$
$$\frac{1}{\min \lambda(AA^{\mathrm{H}})} = \frac{1}{\min \lambda(A^{\mathrm{H}} A)} = \frac{1}{\sigma_n^2}$$
即 $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\sigma_n}$.

2. 给出应用奇异值分解(4.4.7)求解齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的方法.

解　设 $A \in \mathbf{R}_r^{m\times n}$ 的奇异值分解为
$$A = UDV^{\mathrm{T}}, \quad D = \begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
其中, U 是 m 阶正交矩阵, V 是 n 阶正交矩阵, $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$. 于是 $Ax = 0$ 可写为 $UDV^{\mathrm{T}} x = 0$. 左乘 U^{T} 得 $DV^{\mathrm{T}} x = 0$. 令 $V^{\mathrm{T}} x = y$,则有 $Dy = 0$,容易写出通解
$$y = k_1 e_{r+1} + \cdots + k_{n-r} e_n \qquad (k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbf{R})$$

设 V 的第 j 个列向量为 $v_j\ (j=1,2,\cdots,n)$,则

$$x = Vy = k_1 v_{r+1} + \cdots + k_{n-r} v_n \qquad (k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathrm{R})$$

3. 设 $A \in \mathrm{R}_r^{m\times n}\ (r>0, m \geq n)$,$\sigma_i$ 是 A 的奇异值,证明 $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$.

证 由 $\operatorname{rank} A = r$,可设 A 的非零奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$. 于是可得

$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} A) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$$

4. 求 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

解 $A^{\mathrm{T}} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值是 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$,对应的特征向量依次为 $(1,1)^{\mathrm{T}}, (-1,1)^{\mathrm{T}}$. 于是可得

$$\operatorname{rank} A = 2, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

此时 $V_1 = V$. 计算

$$U_1 = A V_1 \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

取
$$U_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

构造正交矩阵
$$U=[U_1 \mid U_2]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

则 A 的奇异值分解为
$$A=U\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}$$

5. 设 $A\in\mathbf{C}_r^{m\times n}(r>0)$ 的奇异值分解为式(4.4.7),试求矩阵 $B=\begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix}$ 的一个奇异值分解.

解　对 A 有 $U^{\mathrm{H}}AV=\begin{bmatrix}\Sigma&O\\O&O\end{bmatrix}$, U 与 V 有下列关系:
$$V^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}A)V=\begin{bmatrix}\Sigma^2&O\\O&O\end{bmatrix}$$
$$V_1^{\mathrm{H}}(A^{\mathrm{H}}A)V_1=\Sigma^2,\quad U_1=AV_1\Sigma^{-1}$$

考虑 $B=\begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix}$, 由 $B^{\mathrm{H}}B=2A^{\mathrm{H}}A$ 可得

$$V^{H}(B^{H}B)V=\begin{bmatrix}2\Sigma^{2} & O\\ O & O\end{bmatrix},\quad V_{1}^{H}(B^{H}B)V_{1}=(\sqrt{2}\Sigma)^{2}$$

构造

$$U_1=BV_1(\sqrt{2}\Sigma)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}U_1\\ \frac{1}{\sqrt{2}}U_1\end{bmatrix},\ U_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & U_2 & O\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}U_1 & O & U_2\end{bmatrix}$$

则$U=[U_1 \mid U_2]$ **是** $2m$ **阶酉矩阵,且有**

$$U^{H}BV=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}U_1^{H} & \frac{1}{\sqrt{2}}U_1^{H}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}U_1^{H} & \frac{-1}{\sqrt{2}}U_1^{H}\\ U_2^{H} & O\\ O & U_2^{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ A\end{bmatrix}[V_1 \mid V_2]=$$

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2}U_1^{H}AV_1 & \sqrt{2}U_1^{H}AV_2\\ O & O\\ U_2^{H}AV_1 & U_2^{H}AV_2\\ U_2^{H}AV_1 & U_2^{H}AV_2\end{bmatrix}$$

注意到 $AV_1=U_1\Sigma$,**而** $AV_2=O$,$U_2^{H}U_1=O$,**于是可得**

$$U^{H}BV=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}$$

B**的奇异值分解为**

$$B=U\begin{bmatrix}\sqrt{2}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}V^{H}$$

六、学习效果测试题及答案

(一) 测试题

1. 求 $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$ 的 Crout 分解和 Cholesky 分解.

2. 用 Schmidt 正交化方法求 $A=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&1&1\\0&3&2\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

3. 用 Givens 变换求 $A=\begin{bmatrix}3&3&2&5\\0&3&6&4\\4&4&1&0\\0&4&8&2\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

4. 用 Householder 变换求 $A=\begin{bmatrix}1&2&5&0\\1&2&1&0\\1&2&-1&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

5. 求 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&1&2\\0&1&1&0&1\\1&0&1&1&0\\2&1&2&2&1\end{bmatrix}$ 的满秩分解.

6. 求 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

7. 设 H_u 与 H_w 都是 n 阶 Householder 矩阵, T 是 n 阶 Givens 矩阵,判断下列矩阵是否为 Householder 矩阵:

(1) $H_wH_uH_w$;　　(2) TH_uT^{-1};

(3) $H_w T H_w$;　　(4) $\begin{bmatrix} H_u & O \\ O & H_w \end{bmatrix}$.

8. **设** H_u **是** n **阶** Householder **矩阵**, I_n **是** n **阶单位矩阵**, **证明**:

$$B = \begin{bmatrix} I_n & & \\ & H_u & \\ & & I_n \end{bmatrix}$$ **也是** Householder **矩阵** .

(二) 测试题答案或提示

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & & \\ 2 & 2/3 & \\ 1 & -2/3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ 2/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & \\ 1/\sqrt{3} & -2\sqrt{6} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ & 2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & -3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 5 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

3. $A = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 & 3 \\ & 5 & 10 & 4 \\ & & -1 & -4 \\ & & & -2 \end{bmatrix}$.

4. $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ & 0 & 2 & -4 \\ & & 4 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. $U=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}, V=I_3, A=U\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}V^{H}$.

7. (1) 是; (2) 是; (3) 不是; (4) 不是.

8. 设 $H_u=I_n-2uu^{T}(u^{T}u=1)$, 令 $w^{T}=(0^{T},u^{T},0^{T})$, 则有

$$B=I_{3n}-2ww^{T}\quad(w^{T}w=1)$$

故 B 是 $3n$ 阶 Householder 矩阵.

第五章　特征值的估计及对称矩阵的极性

矩阵的特征值是矩阵的重要参数之一,它可以用复平面上的点来表示．当矩阵的阶数较高时,计算矩阵的特征值一般比较困难,而对矩阵的特征值给出一个适当的范围就是特征值的估计问题．估计矩阵的特征值的基本原则是寻找一些包含全体特征值的较小区域,并使每一个区域中包含尽可能少的互异特征值．

Gerschgorin 提出用复平面上的一组圆盘覆盖矩阵的全体特征值,由于圆盘的几何图形简单,所以在工程设计中被广泛应用．Ostrowski 提出用复平面上的一组 Cassini 卵形覆盖矩阵的全体特征值,由于这组图形的几何面积较小,所以具有重要的理论价值．

将求 Hermite 矩阵的特征值问题转化为求多元函数的局部极值问题,既能给出特征值的显式表达式,又能开辟计算特征值的新途径．借助于矩阵的直积运算,可以将线性矩阵方程转化为线性代数方程组,并通过研究有关矩阵的特征值分布情况来讨论线性矩阵方程的可解性等问题．

一、基本概念

1. 矩阵的盖尔圆和 Cassini 卵形

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $R_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$, $R_j'=\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|$,则有

(1) A 的行盖尔圆　$G_i=\{z\,|\,|z-a_{ii}|\leq R_i,\ z\in \mathbb{C}\}$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

(2) A **的列盖尔圆**　$G_j' = \{z \mid |z - a_{jj}| \leq R_j', z \in \mathrm{C}\}$

$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

(3) A **的 Cassini 卵形**

$$\Omega_{ij} = \{z \mid |z - a_{ii}||z - a_{jj}| \leq R_i R_j, z \in \mathrm{C}\}$$

$$(i < j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

〖评注〗　当 $i > j$ 时，$\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$. 因此，$n$ 阶矩阵有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个 Cassini 卵形(重叠时重复计数). 上面给出的是 A 的行 Cassini 卵形，而 A^{T} 的行 Cassini 卵形为 A 的列 Cassini 卵形.

2. Hermite 矩阵的广义特征值问题

设 $A, B \in \mathrm{C}^{n \times n}$ 都是 Hermite 矩阵，且 B 为正定矩阵，$\lambda \in \mathrm{C}$, $x \in \mathrm{C}^n$.

(1) **广义特征值问题**　求 λ 及 $x \neq 0$，使得 $Ax = \lambda Bx$.

(2) **常义 Rayleigh 商**　$R(x) = \dfrac{x^{\mathrm{H}} Ax}{x^{\mathrm{H}} x}$　$(x \neq 0)$.

(2) **广义 Rayleigh 商**　$R_B(x) = \dfrac{x^{\mathrm{H}} Ax}{x^{\mathrm{H}} Bx}$　$(x \neq 0)$.

3. 矩阵的直积与行拉直向量

(1) **矩阵的直积**　设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{p \times q}$，那么 A 与 B 的直积为

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

(2) **矩阵的行拉直向量**　设 $X \in \mathrm{C}^{p \times q}$，划分 $X^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$，那么 X 的行拉直向量为 $\overline{\mathrm{vec}}(X) = (x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, \cdots, x_p^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

二、主 要 结 论

1. 特征值的界

(1) **设** $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$**,则** A **的任一特征值** λ **满足**

1) $|\operatorname{Re}(\lambda)|\leq \frac{1}{2}\|A+A^{H}\|_{m_\infty}$;

2) $|\operatorname{Im}(\lambda)|\leq \frac{1}{2}\|A-A^{H}\|_{m_\infty}$.

(2) **设** $A\in \mathbb{R}^{n\times n}$**,则** A **的任一特征值** λ **满足**

$$|\operatorname{Im}(\lambda)|\leq \sqrt{\frac{n-1}{8n}}\|A-A^{T}\|_{m_\infty}$$

(3) **设** $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$ **的特征值为** $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$**,则有**

1) $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leq \|A\|_F^2$;

2) $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\|A\|_F^2$ **的充要条件是** $AA^{H}=A^{H}A$.

2. 特征值的包含区域

(1) **矩阵** $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$ **的特征值都在它的** n **个行(或列)盖尔圆构成的并集之中**.

(2) **设** S **是** $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$ **的行(或列)盖尔圆构成的一个连通部分,那么** S **由** A **的** k **个行(或列)盖尔圆构成的充要条件是** S **中正好有** A **的** k **个特征值(盖尔圆相重时重复计数,特征值相同时也重复计数)**.

(3) **矩阵** $A\in \mathbb{C}^{n\times n}$ **的特征值都在它的** $\frac{1}{2}n(n-1)$ **个行(或列)Cassini 卵形构成的并集之中**.

(4) **矩阵的全体行 Cassini 卵形的并集是全体行盖尔圆的并集的子集**.

3. 广义特征值与广义特征向量的性质

设 $A,B\in \mathbb{C}^{n\times n}$ **都是 Hermite 矩阵,且** B **为正定矩阵**.

(1) 分解 $B = GG^{\mathrm{H}}$, 则 $Ax = \lambda Bx$ 等价于 $Sy = \lambda y$, 其中 $S = G^{-1}A(G^{-1})^{\mathrm{H}}$, $y = G^{\mathrm{H}}x$.

(2) A 相对于 B 的广义特征值都是实数, 且存在按 B 标准正交的广义特征向量系.

(3) $R_B(x)$ 在 $\mathbf{C}^n$ 的一维子空间上的值是常数.

(4) $R_B(x)$ 在 $\mathbf{C}^n$ 的 k 维子空间 V_k 上的最值存在, 且能够在 V_k 的子集 $\{x \mid x^{\mathrm{H}}BX = 1, x \in V_k\}$ 上达到.

(5) $R_B(x)$ 的驻点是 A 相对于 B 的广义特征向量, 反之亦然.

(6) 若 x_0 是 $R_B(x)$ 的驻点, 则 $R_B(x_0)$ 是 A 相对于 B 的广义特征值.

(7) A 相对于 B 的最小和最大广义特征值分别为 $\min\limits_{x\neq 0} R_B(x)$ 和 $\max\limits_{x\neq 0} R_B(x)$.

(8) A 相对于 B 的从小到大排列的第 k 个广义特征值为

$$\min_{V_k}\left[\max_{0\neq x\in V_k} R_B(x)\right]$$

A 相对于 B 的从大到小排列的第 k 个广义特征值为

$$\max_{V_k}\left[\min_{0\neq x\in V_k} R_B(x)\right]$$

其中, V_k 表示 $\mathbf{C}^n$ 的任意一个 k 维子空间.

4. 矩阵直积的性质与应用

(1) 设 $A_1 \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $A_2 \in \mathbf{C}^{n\times l}$, $B_1 \in \mathbf{C}^{p\times q}$, $B_2 \in \mathbf{C}^{q\times r}$, 则

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$$

(2) 设 $A_1 \in \mathbf{C}^{m\times m}$, $B_1 \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的特征值分别为 $\lambda_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 和 $\mu_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 二元多项式 $f(x, y) = \sum\limits_{i,j=0}^{l} c_{ij}x^iy^j$, 则 mn 阶矩阵 $f(A, B) = \sum\limits_{i,j=0}^{l} c_{ij}A^i \otimes B^j$ 的全体特征值为 $f(\lambda_i, \mu_j)\quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$.

(3) 设 $A_i \in \mathbf{C}^{m\times p}, X \in \mathbf{C}^{p\times q}, B_i \in \mathbf{C}^{q\times n}, F \in \mathbf{C}^{m\times n}$,则

1) $\overline{\mathrm{vec}}(A_i X B_i) = (A_i \otimes B_i^{\mathrm{T}})\overline{\mathrm{vec}}(X)$;

2) 矩阵方程 $\sum\limits_{i=1}^{l} A_i X B_i = F$ 有解的充要条件是 $\overline{\mathrm{vec}}(F) \in$

$$R\left[\sum_{i=1}^{l} A_i \otimes B_i^{\mathrm{T}}\right].$$

(4) 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times m}$ 和 $B\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 的特征值分别为$\lambda_i\ (i = 1,2,\cdots, m)$ 和 $\mu_j\ (j = 1,2,\cdots, n)$, $F \in \mathbf{C}^{m\times n}$,则

1) 矩阵方程 $AX + XB = F$ 有惟一解的充要条件是 $\lambda_i + \mu_j \neq 0\quad (i = 1,2,\cdots, m; j = 1,2,\cdots, n)$;

2) 矩阵方程 $X + AXB + \cdots + A^l X B^l = F$ 有惟一解的充要条件是 $1 + (\lambda_i\mu_j) + \cdots + (\lambda_i\mu_j)^l \neq 0 (i = 1,2,\cdots, m; j = 1,2,\cdots, n)$.

三、常用方法

1. 用盖尔圆定理分离矩阵的特征值

(1) 写出 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个行盖尔圆 $G_i\ (i = 1,2,\cdots, n)$:

1) 若 G_i 都是孤立的盖尔圆,那么其中各有 A 的一个特征值;

2) 否则,进行下一步.

(2) 写出 A 的 n 个列盖尔圆 $G_i'\quad (i = 1,2,\cdots, n)$:

1) 若 G_i' 都是孤立的盖尔圆,那么其中各有 A 的一个特征值;

2) 否则,进行下一步.

(3) 对于矩阵 A,选取正数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$,并构造对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$. 选取正数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的一般原则如下:欲使 A 的第 i 个盖尔圆缩小,可取 $d_i < 1$,其余取为 1;欲使 A 的第 i 个盖尔圆放大,可取 $d_i > 1$,其余取为 1.

(4) 写出 $B = DAD^{-1} = \left(a_{ij}\dfrac{d_i}{d_j}\right)_{n\times n}$ 的 n 个行盖尔圆 $G_i''\quad (i = 1,$

$2, \cdots, n$):

1) 若 G_i'' 都是孤立的盖尔圆,那么其中各有 A 的一个特征值;

2) 否则,转入(3) 重新选取正数 $d_1, d_2, \cdots, d_n$.

〔评注〕　上述分离矩阵的特征值的方法中,由于限制 D 为对角矩阵,所以不一定对任意的具有互异特征值的矩阵都有效. 比如,当矩阵的主对角线上有相同元素时,这种方法失效.

2. 广义特征值问题的解法

设 $A, B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 都是 Hermite 矩阵,且 B 为正定矩阵.

(1) 直接法:

1) 计算特征多项式 $\det(\lambda B - A)$ 的零点,即广义特征值,并记互异广义特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$;

2) 对于 $i = 1, 2, \cdots, k$,分别求特征方程 $(\lambda_i B - A)x = 0$ 的基础解系 $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \cdots, p_{r_i}^{(i)}$　(r_i 为 λ_i 的重数);

3) 对于 $i = 1, 2, \cdots, k$,写出对应于 λ_i 的全体广义特征向量 $p^{(i)} = k_1 p_1^{(i)} + k_2 p_2^{(i)} + \cdots + k_{r_i} p_{r_i}^{(i)}$　($k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}$ 是不全为零的数).

(2) 第一种常义转化法:将广义特征值问题 $Ax = \lambda Bx$ 转化为常义值问题 $(B^{-1}A)x = \lambda x$,即求矩阵 $B^{-1}A$ 的特征值与特征向量.

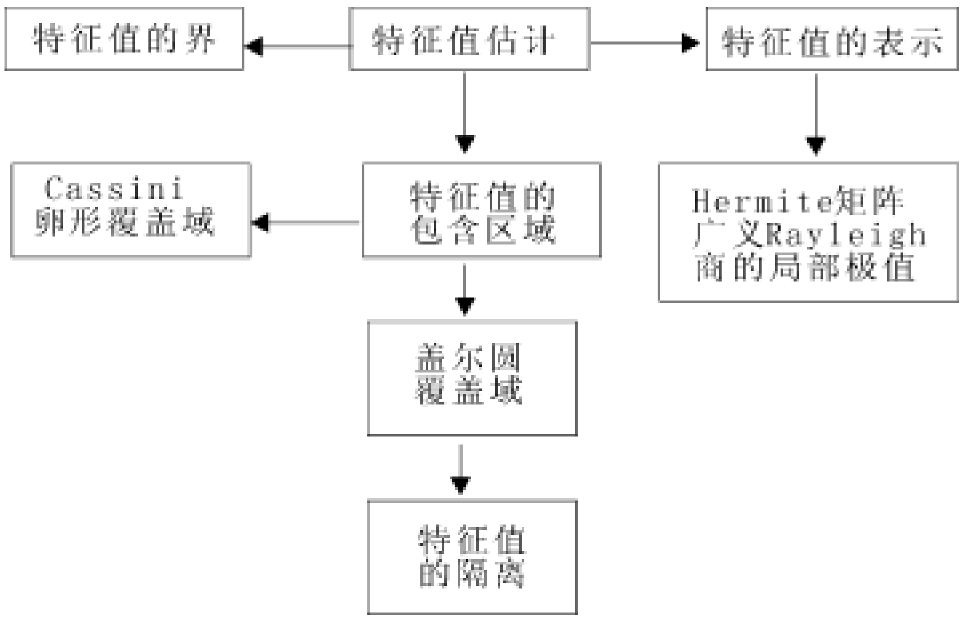
(3) 第二种常义转化法:将广义特征值问题 $Ax = \lambda Bx$ 转化为常义特征值问题 $Sy = \lambda y$.

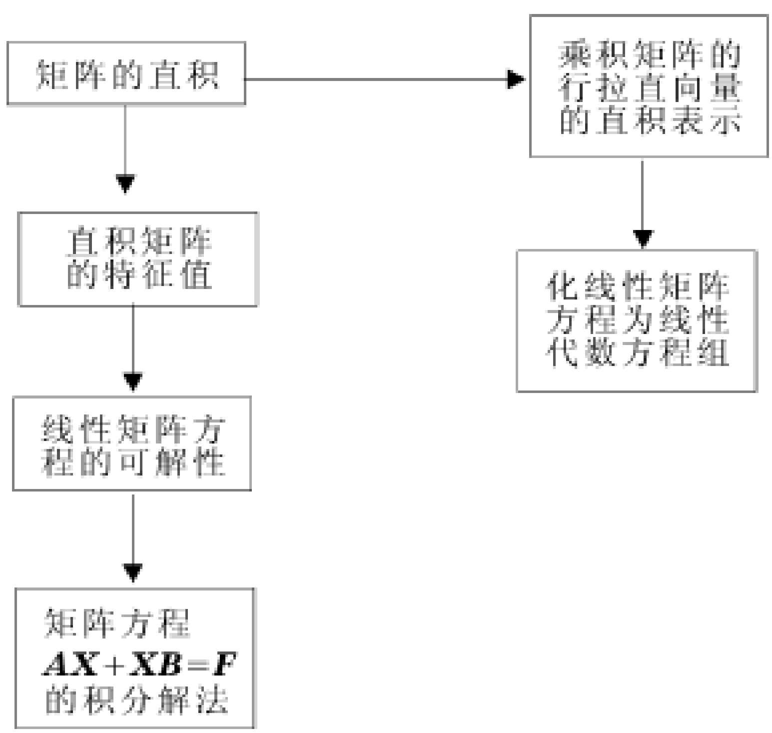
1) 分解 $B = GG^{\mathrm{H}}$,并计算 $S = G^{-1}A(G^{-1})^{\mathrm{H}}$;

2) 求 S 的互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 及对应的特征向量 $y_1, y_2, \cdots, y_k$;

3) 计算对应于 λ_i 的广义特征向量 $x_i = (G^{-1})^{\mathrm{H}} y_i$　($i = 1, 2, \cdots, k$).

四、内容结构框图


特征值的界
特征值估计
特征值的表示
Cassini
卵形覆盖域
特征值的
包含区域
Hermite矩阵
广义Rayleigh
商的局部极值
盖尔圆
覆盖域
特征值
的隔离


矩阵的直积
乘积矩阵的
行拉直向量
的直积表示
直积矩阵
的特征值
化线性矩阵
方程为线性
代数方程组
线性矩阵方
程的可解性
矩阵方程
AX+XB=F
的积分解法

五、课后习题全解

习　题　5.1

1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $\alpha_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 证明

$$\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i(A)|\le\left[\prod_{j=1}^{n}\alpha_j^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{2}\,|a_{ij}|^{2}\right)\right]^{1/2}$$

并讨论在什么条件下等号成立.

证　令 $\Lambda=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $B=\Lambda A\Lambda^{-1}=\left(a_{ij}\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)_{n\times n}$, 根据定理 5.4 可得

$$\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j(A)|=\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j(B)|\le\left[\prod_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|^{2}\right]\right]^{1/2}=$$

$$\left[\prod_{j=1}^{n}\alpha_j^{-2}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{2}\,|a_{ij}|^{2}\right]\right]^{1/2}$$

划分 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 则有

等号成立　某 $b_{j_0}=0$ 或 $(b_i,b_j)=0\quad(i\neq j)$

由于　　$b_{j_0}=0\qquad a_{j_0}=0$

$$(b_i,b_j)=(\Lambda a_i\alpha_i^{-1},\Lambda a_j\alpha_j^{-1})=(\alpha_i\alpha_j)^{-1}(\Lambda a_i,\Lambda a_j)$$

所以

等号成立　某 $a_{j_0}=0$ 或 $(\Lambda a_i,\Lambda a_j)=0\quad(i\neq j)$

2. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$, 证明下面的 Schur 不等式:

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{Re}(\lambda_i(A))]^2\le\sum_{r,s=1}^{n}\left|\frac{a_{rs}+\overline{a}_{sr}}{2}\right|^2$;

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{Im}(\lambda_i(A))]^2\le\sum_{r,s=1}^{n}\left|\frac{a_{rs}-\overline{a}_{sr}}{2}\right|^2$.

证　存在酉矩阵 P, 使 $A=PTP^{\mathrm{H}}$　(T 为上三角矩阵). 设 $T=(t_{ij})_{n\times n}$, 并由 $\dfrac{A+A^{\mathrm{H}}}{2}=P\dfrac{T+T^{\mathrm{H}}}{2}P^{\mathrm{H}}$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{Re}(\lambda_i(A))]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda_i(A)+\bar{\lambda}_i(A)}{2}\right]^2=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{t_{ii}+\bar{t}_{ii}}{2}\right]^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{t_{ij}+\bar{t}_{ji}}{2}\right|^2=$$

$$\left\|\frac{1}{2}(T+T^{\mathrm{H}})\right\|_{\mathrm{F}}^2=\left\|\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{H}})\right\|_{\mathrm{F}}^2=$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{a_{ij}+\bar{a}_{ji}}{2}\right|^2$$

由$\frac{A-A^{\mathrm{H}}}{2}=P\frac{T-T^{\mathrm{H}}}{2}P^{\mathrm{H}}$可得

$$\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{Im}(\lambda_i(A))]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\lambda_i(A)-\bar{\lambda}_i(A)}{2\mathrm{i}}\right]^2=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{t_{ii}-\bar{t}_{ii}}{2\mathrm{i}}\right]^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{t_{ij}-\bar{t}_{ji}}{2}\right|^2=$$

$$\left\|\frac{1}{2}(T-T^{\mathrm{H}})\right\|_{\mathrm{F}}^2=\left\|\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{H}})\right\|_{\mathrm{F}}^2=$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{a_{ij}-\bar{a}_{ji}}{2}\right|^2$$

3. 应用 Gerschgorin 定理隔离矩阵

$$A=\begin{bmatrix}20 & 3 & 1\\ 2 & 10 & 2\\ 8 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

的特征值,再应用实矩阵特征值的性质改进得出的结果.

解　A的3个盖尔圆为

$$G_1:|z-20|\leq 4;\quad G_2:|z-10|\leq 4;\quad G_3:|z|\leq 9$$

易见G_2与G_3相交,而G_1孤立.欲使G_3的半径小一些,取对角矩阵$D=\mathrm{diag}(1,1,\frac{1}{2})$,计算

$$B=DAD^{-1}=\begin{bmatrix}20 & 3 & 2\\ 2 & 10 & 4\\ 4 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

B的前两个盖尔圆相交,但 B^T 的 3 个盖尔圆为

$$G_1' : |z - 20| \leq 6; \quad G_2' : |z - 10| \leq 3.5$$

$$G_3' : |z| \leq 6$$

易见 G_1',G_2' 及 G_3' 都孤立,其中各含 B^T 的一个特征值 λ_1,λ_2 及 λ_3,它们也是 B的特征值,从而也是 A 的特征值.

由于 $G_1 \subset G_1'$ 且 G_1 中也含 A的一个特征值,所以$\lambda_1 \in G_1$,而$\lambda_2 \in G_2'$,$\lambda_3 \in G_3'$. 注意到盖尔圆 G_1,G_2' 及 G_3' 关于实轴对称,利用实矩阵的复特征值一定成对共轭出现的性质可得

$$\lambda_1 \in [16,24], \quad \lambda_2 \in [6.5,13.5], \quad \lambda_3 \in [-6,6]$$

4. 证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 4 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 2n \end{bmatrix}$$

能够相似于对角矩阵,且 A 的特征值都是实数.

证　A的 n 个盖尔圆为

$$G_1 : |z - 2| \leq 1; \quad G_i : |z - 2i| \leq \frac{n-1}{n} \quad (i = 2,3,\cdots,n)$$

它们都是孤立的,所以 A有 n 个不同的特征值,从而 A相似于对角矩阵. 因为 G_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ 关于实轴对称,且 A是实矩阵,所以 G_i 中的特征值只能是实数.

5. 设 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$,如果 A的 n 个盖尔圆互不相交,则 $\lambda(A)$ 是实数.

证　A是实矩阵,它的盖尔圆关于实轴对称,且每个盖尔圆中只有 A的一个特征值,所以 $\lambda(A)$ 是实数(因为复特征值一定成对共轭出现).

6. 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 严格对角占优(或弱对角占优且不可约),其对角

线元素均为正数,则 $\mathrm{Re}(\lambda(A)) > 0$.

证 设 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ (α和β都是实数),若 $\alpha \leq 0$,则由 $\lambda \in G_k$ 可得

$$|\lambda - a_{kk}| \leq R_k \qquad |\alpha - a_{kk}| \leq |(\alpha - a_{kk}) + \mathrm{i}\beta| \leq R_k$$

故$(-\alpha) + a_{kk} \leq R_k$,即 $a_{kk} \leq R_k + \alpha \leq R_k$,矛盾.

7. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$.

(1) 若 $a_{ii}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是实数,则

$$|\mathrm{Im}(\lambda(A))| \leq \max_i \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

(2) 若 $a_{ii}(i = 1,2,\cdots,n)$ 是纯虚数,则

$$|\mathrm{Re}(\lambda(A))| \leq \max_i \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

证 (1) 当 a_{ii} 是实数时,有

$$|\mathrm{Im}(\lambda)|^2 \leq |\mathrm{Im}(\lambda)|^2 + [\mathrm{Re}(\lambda) - a_{kk}]^2 = |\lambda - a_{kk}|^2 \leq R_k^2 \leq [\max_i(R_i)]^2$$

(2) 当 a_{ii} 是纯虚数时,有

$$|\mathrm{Re}(\lambda)|^2 \leq |\mathrm{Re}(\lambda)|^2 + |\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\lambda) - a_{kk}|^2 = |\lambda - a_{kk}|^2 \leq R_k^2 \leq [\max_i(R_i)]^2$$

8. 证明

(1) $A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/6 & 1/6 & 3/6 & 1/6 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 & 3/7 \end{bmatrix}$ 的谱半径 $\rho(A) < 1$;

(2) 将(1)中矩阵 A 的元素“a_{44}”改作“$4/7$”,则 $\rho(A) < 1$.

证 (1) 因为 A 不可约,且 $\sum_{j=1}^{4} |a_{4j}| = \frac{6}{7} < 1 = \|A\|_\infty$,所以由定理 5.9 可得 $\rho(A) < 1$.

(2) 因为 $\rho(A) \leq \|A\|_\infty = 1$,且 $\det(1I - A) = 0$,所以 $\rho(A) = 1$.

9. **在盖尔圆定理中,如果一个连通部分是由两个盖尔圆构成的,那么:**

(1) **何时每个盖尔圆上可能都有两个特征值?**

(2) **何时每个盖尔圆上不可能都有两个特征值?**

解(1) **二盖尔圆相交,特征值位于交集中.**

(2) **二盖尔圆外切,切点是单特征值.**

10. **应用** Ostrowski **定理(或推论),证明矩阵**

$$A=\begin{bmatrix}6&5&1&2\\1&7&0&2\\0&4&7&5\\2&0&1&5\end{bmatrix}$$

的谱半径 $\rho(A)<13$.

证　$\rho_1(A)\rho_1(A^{\mathrm{T}})=14\times 9=126$

$\rho_2(A)\rho_2(A^{\mathrm{T}})=10\times 16=160$

$\rho_3(A)\rho_3(A^{\mathrm{T}})=16\times 9=144$

$\rho_4(A)\rho_4(A^{\mathrm{T}})=8\times 14=112$

根据定理 5.11 **的推论** 5 **可得**

$$\rho(A)\le\max_i[\rho_i(A)\rho_i(A^{\mathrm{T}})]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{160}<13$$

习　题　5.2

1. **设** $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ **为实对称矩阵** A **相对于正定矩阵** B **的特征值,相应的特征向量** $x_1,x_2,\cdots,x_n$ **为按** B **标准正交的向量系.令** $Q=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,**试证** $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$, $Q^{\mathrm{T}}BQ=I$,**其中** $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

证　**由** $x_1,x_2,\cdots,x_n$ **按** B **标准正交可得** $Q^{\mathrm{T}}BQ=I$,**再由** $Ax_i=\lambda_iBx_i$ **知** $AQ=BQ\Lambda$,**故** $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$.

2. **已知** $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{bmatrix}$,**试用两**

种方法求解广义特征值问题 $Ax=\lambda Bx$(转化成普通的特征值问题即可).

解 (1) $B^{-1}Ax=\lambda x$: $B^{-1}A=\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -9 & 20 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $Sy=\lambda y$, $x=(G^{-1})^{\mathrm{T}}y$:

$$G=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 5 & & \\ 2 & 1 & \\ -4 & -2 & \sqrt{5} \end{bmatrix},\quad S=(G^{-1})A(G^{-1})^{\mathrm{T}}$$

习 题 5.3

1. 设实对称矩阵 A 和 B 的特征值分别是

$$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n,\quad \mu_1\leq\mu_2\leq\cdots\leq\mu_n$$

如果对于任何单位向量 x,恒有

$$|x^{\mathrm{T}}(B-A)x|\leq\varepsilon\quad(\varepsilon>0)$$

证明 $|\mu_k-\lambda_k|\leq\varepsilon\quad(k=1,2,\cdots,n)$.

证 设 A 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的标准正交特征向量系为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,B 的属于 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 的标准正交特征向量系为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,记 $V_k^0(x)=L(x_1,x_2,\cdots,x_k)$,$V_k^0(y)=L(y_1,y_2,\cdots,y_k)$,于是有

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \min_{V_k}\max\{x^{\mathrm{T}}Ax \mid x\in V_k,\ \|x\|_2=1\}\leq\\ &\max\{x^{\mathrm{T}}Ax \mid x\in V_k^0(y),\ \|x\|_2=1\}\leq\\ &\max\{x^{\mathrm{T}}Bx+\varepsilon \mid x\in V_k^0(y),\ \|x\|_2=1\}=\\ &\max\{x^{\mathrm{T}}Bx \mid x\in V_k^0(y),\ \|x\|_2=1\}+\varepsilon=\\ &\mu_k+\varepsilon\quad(k=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

同理可得 $\mu_k\leq\lambda_k+\varepsilon\ (k=1,2,\cdots,n)$. 因此 $|\mu_k-\lambda_k|\leq\varepsilon$.

2. (Weyl 定理) 设实对称矩阵 A, $A+Q$ 和 Q 的特征值分别是 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$, $\mu_1\leq\mu_2\leq\cdots\leq\mu_n$ 和 $\gamma_1\leq\gamma_2\leq\cdots\leq\gamma_n$,证明 $\lambda_i+\gamma_1\leq\mu_i\leq\lambda_i+\gamma_n\ (i=1,2,\cdots,n)$.

证　设 A 的属于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的标准正交特征向量系为 $x_1,\cdots,x_n$，$A+Q$ 的属于 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 的标准正交特征量系为 $y_1,\cdots,y_n$. $V_k^0(x)=L(x_1,x_2,\cdots,x_k)$，$V_k^0(y)=L(y_1,y_2,\cdots,y_k)$，于是有

$$
\begin{aligned}
\mu_k = {} & \min_{V_k}\max\{x^{\mathrm T}(A+Q)x \mid x\in V_k,\ \|x\|_2=1\}\leq \\
& \min_{V_k}[\max\{x^{\mathrm T}Ax \mid x\in V_k,\ \|x\|_2=1\}+ \\
& \max\{x^{\mathrm T}Qx \mid x\in V_k,\ \|x\|_2=1\}]\leq \\
& \max\{x^{\mathrm T}Ax \mid x\in V_k^0(x),\ \|x\|_2=1\}+\gamma_n = \\
& \lambda_k+\gamma_n \quad (k=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_k = {} & \min_{V_k}\max\{x^{\mathrm T}Ax \mid x\in V_k,\ \|x\|_2=1\} = \\
& \min_{V_k}\max\{x^{\mathrm T}(A+Q)x+x^{\mathrm T}(-Q)x \mid x\in V_k,\ \|x\|_2=1\}\leq \\
& \min_{V_k}[\max\{x^{\mathrm T}(A+Q)x \mid x\in V_k,\ \|x\|_2=1\}+ \\
& \max\{x^{\mathrm T}(-Q)x \mid x\in V_k,\ \|x\|_2=1\}]\leq \\
& \max\{x^{\mathrm T}(A+Q)x \mid x\in V_k^0(y),\ \|x\|_2=1\}+(-\gamma_1) = \\
& \mu_k-\gamma_1 \quad (k=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

因此 $\lambda_k+\gamma_1\leq\mu_k\leq\lambda_k+\gamma_n$.

3. 在第 2 题的条件下，再设 Q 正定，证明 $\mu_i>\lambda_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

证　由 Q 正定知 $\gamma_1>0$，根据第 2 题的结论即得所求.

习　题　5.4

1. 设 $A^2=A$，$B^2=B$，证明 $(A\otimes B)^2=A\otimes B$.

证　根据性质(4)可得

$$
\begin{aligned}
(A\otimes B)^2 &= (A\otimes B)(A\otimes B) = \\
&(AA)\otimes(BB) = A\otimes B
\end{aligned}
$$

2. 设 A 和 B 都是(半)正定矩阵，证明 $A\otimes B$ 也是(半)正定矩阵.

证　$(A\otimes B)^{\mathrm H}=A^{\mathrm H}\otimes B^{\mathrm H}=A\otimes B$，所以 $A\otimes B$ 是 Hermite

矩阵. 又 $\lambda(A \otimes B) = \lambda(A)\lambda(B) > (\geq) 0$, 故 $A \otimes B$(半) 正定.

3. 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 它们的特征向量分别为 ξ 和 η, 证明 $\xi \otimes \eta$ 是 $A \otimes B$ 的特征向量.

证 $A\xi = \lambda\xi$, $B\eta = \mu\eta$, 则有

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B)(\xi \otimes \eta) &= (A\xi) \otimes (B\eta) = \\
&(\lambda\xi) \otimes (\mu\eta) = (\lambda\mu)(\xi \otimes \eta)
\end{aligned}
$$

4. 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, 证明 $B = (u_n u_n^{\mathrm{T}}) \otimes A$ 的特征值是 $n\lambda_1, \cdots, n\lambda_m$ 和 $m(n-1)$ 重零. 这里 $u_n = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$.

证 因为 $\mathrm{rank}(u_n u_n^{\mathrm{T}}) = 1$, 所以 $u_n u_n^{\mathrm{T}}$ 仅有一个非零特征值. 容易求出 $u_n u_n^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值 $\mu_1 = n$, 而 $\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$, 故 B 的特征值集合为

$$
\{\lambda_i \mu_j \mid i = 1, 2, \cdots, m; \quad j = 1, 2, \cdots, n\}
$$

也就是 $n\lambda_1, \cdots, n\lambda_m$ 和 $m(n-1)$ 重零.

5. 证明: 两个反 Hermite 矩阵的直积是 Hermite 矩阵.

证 设 A 和 B 都是反 Hermite 矩阵, 即 $A^{\mathrm{H}} = -A$, $B^{\mathrm{H}} = -B$, 根据性质(7) 可得

$$
(A \otimes B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} \otimes B^{\mathrm{H}} = (-A) \otimes (-B) = A \otimes B
$$

即 $A \otimes B$ 是 Hermite 矩阵.

6. $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 都是半正定矩阵, 证明矩阵方程 $\sum_{k=0}^{l} A^k X B^k = F$ 存在惟一解.

证 设 A 和 B 的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 和 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, 由于 $\lambda_i \mu_j \geq 0$, 所以 $1 + (\lambda_i \mu_j) + \cdots + (\lambda_i \mu_j)^l > 0$. 根据定理 5.30 即得所求.

7. 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 的特征值都是实数, 证明矩阵方程 $X + AXB + A^2 X B^2 = F$ 存在惟一解.

证 设 A 和 B 的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 和 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$, 由 $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $\mu_j \in \mathbf{R}$ 知 $\lambda_i \mu_j \in \mathbf{R}$. 对于任意实数 t, 恒有 $1 + t + t^2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, 所以 $1 + (\lambda_i \mu_j) + (\lambda_i \mu_j)^2 > 0$. 根据定理 5.30 即得

所求.

8. 使用矩阵函数方法求解矩阵方程 $AX + XA = I$,其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

解　A的特征值为 $-1, -1, -2$,根据定理5.31的推论1知,该矩阵方程有惟一解

$$X = -\int_0^{+\infty} e^{At} I e^{At} dt = -\int_0^{+\infty} e^{A(2t)} dt$$

对 A求得

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

于是

$$e^{A(2t)} = P\begin{bmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-4t} \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & & \\ 0 & e^{-2t} & \\ e^{-4t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & & \\ 0 & 2 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

六、学习效果测试题及答案

(一) 测试题

1. **应用盖尔圆定理证明**

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

至少有两个实特征值 .

2. **应用盖尔圆定理证明**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3^2} & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ -\frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3^2} & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3^2} & 3 & \cdots & \frac{1}{3^{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3^2} & -\frac{1}{3^3} & \cdots & n \end{bmatrix}$$

相似于对角矩阵,且 A **的特征值都是实数** .

3. **设** $A=(a_{ij})_{n\times n}\,(n>1)$ **按列严格对角占优,且** $a_{ii}<0\ (i=1,2,\cdots,n)$ **,证明:** A **的特征值的实部小于零** .

4. **应用** Ostrowski **定理证明** $A=\begin{bmatrix} 20 & 11 & 10 \\ -8 & 30 & 20 \\ 13 & 15 & 30 \end{bmatrix}$ **可逆** .

5. **应用盖尔圆定理隔离**

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\1&10&-1\\8&2&20\end{bmatrix}$$

的特征值,并根据实矩阵的性质改进所得结果。

6. 应用盖尔圆定理隔离 $A=\begin{bmatrix}3i&1&1\\1&2&1\\1&1&5+4i\end{bmatrix}$ $(i=\sqrt{-1})$ 的特征值.

7. 设 $A=\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&4\end{bmatrix}$,求解广义特征值问题 $Ax=\lambda Bx$.

8. 设 A, B 及 $F\in C^{n\times n}$,且 A 与 B 无公共特征值,证明:矩阵方程 $A^2X+XB^2-2AXB=F$ 存在惟一解.

(二) 测试题答案或提示

1. 孤立盖尔圆 G_4 中有一个实特征值,连通部分 $G_1\cup G_2\cup G_3$ 中至少有一个实特征值.

2. 提示:盖尔圆的半径 $R_i=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]<\frac{1}{2}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

3. 对于 A 的特征值 $\lambda=a+ib$ $(a,b\in R, i=\sqrt{-1})$,存在列盖尔圆 G_k,使得 $\lambda\in G_k$,记 G_k 的半径为 r_k,则有

$$|\lambda-a_{kk}|\leq r_k<|a_{kk}|=-a_{kk}$$

$$a-a_{kk}\leq|a-a_{kk}|\leq|(a-a_{kk})+ib|=|\lambda-a_{kk}|<-a_{kk}$$

故 $a<0$.

4. 提示:A 按行广义严格对角占优.

5. 提示:取 $D=\mathrm{diag}(2,1,1)$,讨论 $B=DAD^{-1}$ 即可.

6. 取 $D=\mathrm{diag}(1,1,\frac{3}{2})$,则 $B=DAD^{-1}$ 的 3 个孤立盖尔圆中各

有 A 的一个特征值 .

7. $\lambda_1 = 2,\quad x = k_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\ (k_1 \neq 0)$;

$\lambda_2 = -\dfrac{2}{3},\quad x = k_2\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\ (k_2 \neq 0)$.

8. 原方程等价于 $[A^2 \otimes I + I \otimes (B^{\mathrm{T}})^2 - 2A \otimes B^{\mathrm{T}}]\overline{\mathrm{vec}}(X) = \overline{\mathrm{vec}}(F)$, 它的系数矩阵的特征值为 $\lambda_i^2 + \mu_j^2 - 2\lambda_i\mu_j = (\lambda_i - \mu_j)^2 \neq 0$, 从而存在惟一解 .

第六章　广义逆矩阵

广义逆矩阵是通常的逆矩阵概念对于不可逆矩阵和长方矩阵的推广．利用广义逆矩阵的性质,可以将线性代数方程组的某个解向量(或最小二乘解向量)表示为系数矩阵的广义逆矩阵与其右端向量的乘积,也可以将它的一般解向量明显的表示出来．

由 Penrose 的四个矩阵方程给出的广义逆矩阵分为 15 类,其中常用的广义逆矩阵有{1} - 逆,{1, i} - 逆(i = 2,3,4)及 Moore - Penrose 逆．矩阵的 Moore - Penrose 逆是惟一的,通常利用矩阵的满秩分解或奇异值分解来计算．矩阵的{1} - 逆集合、{1,3} - 逆集合及{1,4} - 逆集合可以用线性矩阵方程的一般解来表示,而矩阵的{1,2} - 逆集合是矩阵{1} - 逆集合中与原矩阵有相同秩的{1} - 逆的子集．

一、基本概念

1. Penrose 矩阵方程

设 $A\in \mathbb{C}^{m\times n}$, $X\in \mathbb{C}^{n\times m}$,则 Penrose 方程为

(1) $AXA = A$　　(2) $XAX = X$

(3) $(AX)^{\mathrm{H}} = AX$　　(4) $(XA)^{\mathrm{H}} = XA$

2. 常用广义逆矩阵

(1) 矩阵 A 的{1} - 逆 $A^{(1)}$:　指 Penrose 方程(1)的解矩阵,全体记作 $A\{1\}$.

(2) 矩阵 A 的{1, i} - 逆 $A^{(1,i)}$:　指 Penrose 方程(1)和(i)的解矩阵,全体记作 $A\{1, i\}$　(i = 2,3,4).

(3) **矩阵 A 的 Moore - Penrose 逆 A^+**: 指 Penrose 方程(1) ～ (4) 的解矩阵.

3. **极小范数解与极小范数最小二乘解**

(1) **线性代数方程组的极小范数解**: 方程组 $Ax = b$ 有解时,求 x_0 使得 $\|x_0\|_2 = \min\limits_{Ax=b}\|x\|_2$.

(2) **线性代数方程组的极小范数最小二乘解**: 方程组 $Ax = b$ 无解时,求 x_0 使得 $\|x_0\|_2 = \min\limits_{\min\|Ax-b\|_2}\|x\|_2$.

(3) **线性矩阵方程的极小范数解**: 矩阵方程 $AXB = D$ 有解时,求 X_0 使得 $\|X_0\|_F = \min\limits_{AXB=D}\|X\|_F$.

(4) **线性矩阵方程的极小范数最小二乘解**: 矩阵方程 $AXB = D$ 无解时,求 X_0 使得 $\|X_0\|_F = \min\limits_{\min\|AXB-D\|_F}\|X\|_F$.

4. **投影变换与投影矩阵**

(1) **投影变换** 设向量空间 $\mathbf{C}^n$ 的直和分解为 $\mathbf{C}^n = L \oplus M$,即对任意 $x \in \mathbf{C}^n$,有惟一的 $y \in L$ 和 $z \in M$ 使得 $x = y + z$. 称变换 $T_{L,M}x = y$ 为沿着子空间 M 到子空间 L 的投影变换. 特别的,当 $M = L^{\perp}$ 时,称 $T_{L,L^{\perp}}$ 为子空间 L 上的正交投影变换,记作 T_L.

(2) **投影矩阵** 指投影变换 $T_{L,M}$(或 T_L)在向量空间 $\mathbf{C}^n$ 的基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的矩阵,记作 $P_{L,M}$(或 P_L).

5. **Moore 广义逆矩阵**

设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$,若 $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ 满足 Moore 矩阵方程 $AX = P_{R(A)}$ 和 $XA = P_{R(X)}$,则称 X 为 A 的 Moore 广义逆矩阵.

6. **Drazin 广义逆矩阵**

(1) **方阵 A 的指标**: 指使得 $\operatorname{rank}A^k = \operatorname{rank}A^{k+1}$ 成立的最小正整数 k.

(2) **方阵 A 的 Drazin 逆 $A^{(d)}$**: 指矩阵方程 $A^kXA = A^k$, $XAX = X$, $AX = XA$ 的惟一解矩阵,其中 k 为 A 的指标.

(3) **方阵 A 的群逆 $A^{\#}$**: 指 $k = 1$ 时矩阵 A 的 Drazin 逆 $A^{(d)}$.

二、主要结论

1. 广义逆矩阵的计算公式

设 $A\in \mathbb{C}_r^{m\times n}(r>0)$.

(1) 若 $F\in \mathbb{C}_r^{m\times r}(r>0)$,则 $F^+ = (F^H F)^{-1}F^H$.

(2) 若 $G\in \mathbb{C}_r^{r\times n}(r>0)$,则 $G^+ = G^H(GG^H)^{-1}$.

(3) 设 A 的一个满秩分解为 $A = FG\quad(F\in \mathbb{C}_r^{m\times r}, G\in \mathbb{C}_r^{r\times n})$,则 $A^+ = G^+ F^+ = G^H(F^H AG^H)^{-1}F^H$.

(4) 设 A 的一个奇异值分解为 $A = U\begin{bmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n}V^H\quad$($U$ 和 V 是酉矩阵,Σ 是以 A 的非零奇异值为对角线元素的对角矩阵),则 $A^+ = V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & O\\ O & O\end{bmatrix}_{n\times m}U^H$.

(5) 若可逆矩阵 $Q\in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $P\in \mathbb{C}^{n\times n}$,使得 $QAP = \begin{bmatrix}I_r & K\\ O & O\end{bmatrix}$,则 $P\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & L\end{bmatrix}Q\in A\{1\}$, $P\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q\in A\{1,2\}$. 其中 $L\in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ 为任意矩阵.

(6) $A^+ = A^H(A^H AA^H)^{(1)}A^H$.

〔评注〕 虽然矩阵 $A^H AA^H$ 的 $\{1\}$-逆不惟一,但是对任何一个 $(A^H AA^H)^{(1)}$,乘积 $A^H(A^H AA^H)^{(1)}A^H$ 都是相同的,因为 A 的 Moore-Penrose 逆惟一.

2. 广义逆矩阵的性质

设 $A\in \mathbb{C}^{m\times n}$, $X\in \mathbb{C}^{n\times m}$.

(1) A 的 $\{1\}$-逆惟一的充要条件是 A 为可逆方阵.

(2) $R(AA^{(1)}) = R(A)$, $N(A^{(1)}A) = N(A)$.

(3) 若 $Y, Z \in A\{1\}$, 则 $YAZ \in A\{1,2\}$.

(4) 设 $X \in A\{1\}$, 则 $X \in A\{1,2\}$ 的充要条件是 $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$.

(5) $(A^{\mathrm{H}} A)^{(1)} A^{\mathrm{H}} \in A\{1,2,3\}$.

(6) $A^{\mathrm{H}} (AA^{\mathrm{H}})^{(1)} \in A\{1,2,4\}$.

(7) $A^{+} = A^{(1,4)} AA^{(1,3)}$.

(8) $R(A^{+}) = R(A^{\mathrm{H}})$, $N(A^{+}) = N(A^{\mathrm{H}})$.

(9) Moore - Penrose 逆的等价定义:下面 4 组矩阵方程等价 .

1) $AXA = A, XAX = X, (AX)^{\mathrm{H}} = AX, (XA)^{\mathrm{H}} = XA$.

2) $AX = P_{R(A)}$, $XA = P_{R(X)}$.

3) $AXA = A, X = A^{\mathrm{H}} U, X = VA^{\mathrm{H}}$

$$(U \in \mathbf{C}^{m \times n}, \quad V \in \mathbf{C}^{n \times n})$$

4) $AXA = A, X = A^{\mathrm{H}} ZA^{\mathrm{H}} \quad (Z \in \mathbf{C}^{m \times n})$.

3. **投影矩阵的判定与计算**

(1) $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 为投影矩阵的充要条件是 $P^2 = P$.

(2) $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 为正交投影矩阵的充要条件是 $P^2 = P$ 且 $P^{\mathrm{H}} = P$.

(3) 设直和分解 $\mathbf{C}^n = L \dotplus M$ 中的子空间 L 的基为 $x_1, x_2, \cdots, x_r$, 子空间 M 的基为 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-r}$, 构造矩阵 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_{n-r})$, 则

1) 沿着 M 到 L 的投影矩阵为 $P_{L,M} = (X \mid O)(X \mid Y)^{-1}$;

2) L 上的正交投影矩阵为 $P_L = X(X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}} = XX^{+}$.

4. **广义逆矩阵与方程求解**

(1) 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{C}^{p \times q}$, $D \in \mathbf{C}^{m \times q}$, 则

1) $AXB = D$ 有解的充要条件是 $AA^{(1)} DB^{(1)} B = D$;

2) 若 $AXB = D$ 有解, 则通解为 $X = A^{(1)} DB^{(1)} + Y - A^{(1)} AYBB^{(1)} \quad$ (任意 $Y \in \mathbf{C}^{n \times p}$);

3) 若 $AXB = D$ 有解, 则极小 F - 范数解为 $X_0 = A^{+} DB^{+}$, 且

惟一;

4) 若 $AXB = D$ 无解,则极小 F - 范数最小二乘解为 $X_0 = A^{+} DB^{+}$,且惟一.

(2) $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbf{C}^{n}$,则

1) $Ax = b$ 有解的充要条件是 $AA^{(1)} b = b$;

2) 若 $Ax = b$ 有解,则通解为 $x = A^{(1)} b + (I - A^{(1)} A) y$ (任意 $y \in \mathbf{C}^{n}$);

3) 若 $Ax = b$ 有解,则极小 2 - 范数解为 $x_0 = A^{+} b$,且惟一;

4) 若 $Ax = b$ 无解,则极小 2 - 范数最小二乘解为 $x_0 = A^{+} b$,且惟一.

5. 矩阵的{1} - 逆集合与{1, i} - 逆集合的表示

设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$.

(1) $A\{1\} = \{X \mid AXA = A, X \in \mathbf{C}^{n\times m}\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)} AZAA^{(1)} \mid Z \in \mathbf{C}^{n\times m}\}$

(2) $A\{1,3\} = \{X \mid AX = AA^{(1,3)}, X \in \mathbf{C}^{n\times m}\} = \{A^{(1,3)} + (I - A^{(1,3)} A) Z \mid Z \in \mathbf{C}^{n\times m}\}$

(3) $A\{1,4\} = \{X \mid XA = A^{(1,4)} A, X \in \mathbf{C}^{n\times m}\} = \{A^{(1,4)} + Z(I - AA^{(1,4)}) \mid Z \in \mathbf{C}^{n\times m}\}$

(4) $A\{1,2\} = \{X \mid \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A, X \in A\{1\}\}$

6. Drazin 广义逆矩阵的性质

设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$,且 A 的指标为 k.

(1) $A^{(d)} = A^{k} (A^{2k+1})^{(1)} A^{k}$.

(2) 设 A 的一个满秩分解为 $A = FG$,则 $A^{\#}$ 存在的充要条件是 GF 为可逆矩阵,且 $A^{\#} = F(GF)^{-2} G$.

(3) $A^{(d)} = A^{+}$ 的充要条件是 $AA^{+} = A^{+} A$.

三、常用方法

1. 求矩阵的一个{1} - 逆或{1,2} - 逆

设 $A \in \mathbf{C}_r^{m\times n}\quad(r>0)$.

(1) $[A \mid I] \xrightarrow{\text{行}} [B \mid Q]$,其中 B 为 Hermite 标准形矩阵;

(2) 构造置换矩阵 P,使得 $BP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}$;

(3) 计算 $\quad X = P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix}_{n\times m} Q \quad$ (任意 $L \in \mathbf{C}^{(n-r)\times(m-r)}$)

或者 $\quad X_0 = P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times m} Q$

那么 $X \in A\{1\}$, $X_0 \in A\{1,2\}$.

2. 求矩阵的 Moore - Penrose 逆

设 $A \in \mathbf{C}_r^{m\times n}\quad(r>0)$.

(1) 满秩分解法:

1) 求 A 的满秩分解 $A = FG$;

2) 计算 $F^+ = (F^{\mathrm{H}} F)^{-1} F^{\mathrm{H}}$ 和 $G^+ = G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}$;

3) 计算 $A^+ = G^+ F^+$.

〔评注〕 第 ②,③ 步可以合并为计算 $A^+ = G^{\mathrm{H}}(F^{\mathrm{H}} A G^{\mathrm{H}})^{-1} F^{\mathrm{H}}$.

(2) 奇异值分解法:

1) 求 A 的奇异值分解 $A = U\begin{bmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n} V^{\mathrm{H}}$;

2) 计算 $A^+ = V\begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}_{n\times m} U^{\mathrm{H}}$.

〔评注〕 因为求矩阵的奇异值分解比较麻烦,所以常用矩阵的满秩分解法求矩阵的 Moore - Penrose 逆.

(3) Greville 递推法:　划分 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 并记

$$A_k = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$$

$$d_k = A_{k-1}^{+} a_k, \quad c_k = a_k - A_{k-1} d_k$$

$$b_k^{\mathrm{H}} = \begin{cases} c_k^{+} & (c_k \neq 0) \\ (1 + d_k^{\mathrm{H}} d_k)^{-1} d_k^{\mathrm{H}} A_{k-1}^{+} & (c_k = 0) \end{cases}$$

计算
$$A_k^{+} = \begin{bmatrix} A_{k-1}^{+} - d_k b_k^{\mathrm{H}} \\ b_k^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \quad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

那么 $A^{+} = A_n^{+}$.

〔评注〕　在上述递推算法中,除了计算列矩阵的广义逆之外,不再需要计算其他矩阵的逆或广义逆.

(4) 迭代法:　取 $X_0 = A^{\mathrm{H}} Y_0 A^{\mathrm{H}}$, 且 $Y_0 \in \mathrm{C}^{m \times n}$ 使得

$$\rho(P_{R(A)} - AX_0) < 1$$

1) 一阶迭代格式

$$X_{k+1} = X_k + X_0 (I - AX_k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\lim_{k \to \infty} X_k = A^{+}$$

2) 二阶迭代格式

$$X_{k+1} = X_k (2I - AX_k) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\lim_{k \to \infty} X_k = A^{+}$$

〔评注〕　取 $Y_0 = \beta (A^{\mathrm{H}})^{(1)}$ 时, $X_0 = \beta A^{\mathrm{H}}$. 若 β 满足 $0 < \beta < 2[\lambda_{\max}(AA^{\mathrm{H}})]^{-1}$, 则不等式 $\rho(P_{R(A)} - AX_0) < 1$ 成立.

3. 求矩阵的群逆

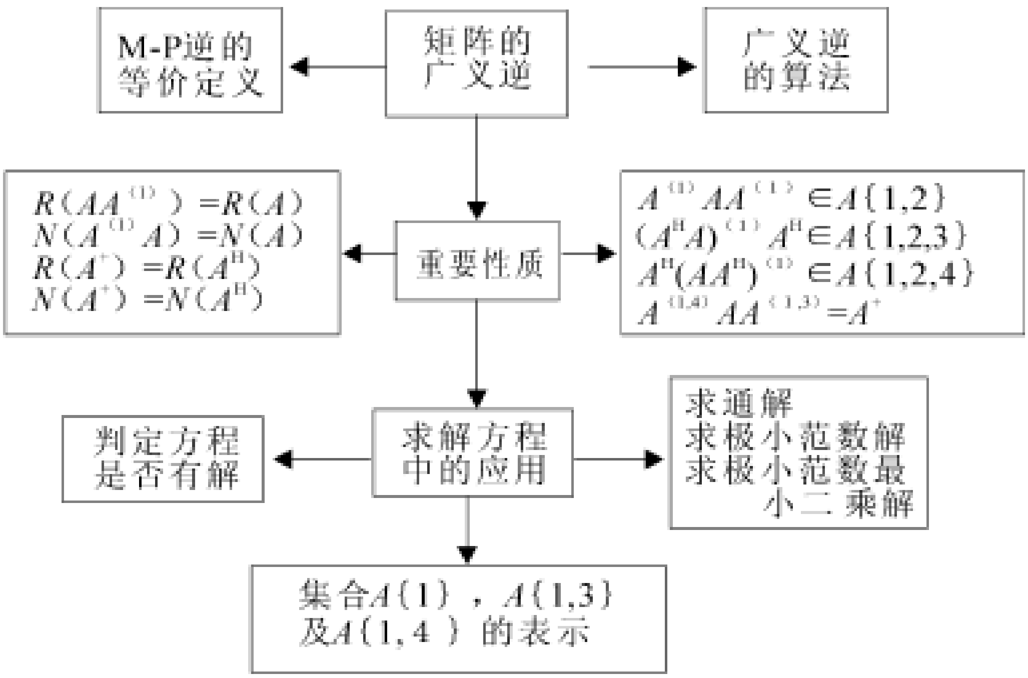
设 $A \in \mathrm{C}_r^{n \times n} \quad (r > 0)$.

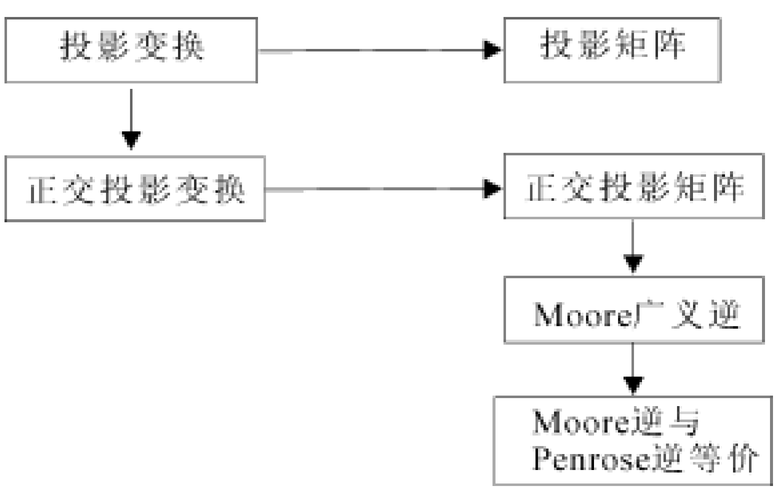
(1) 求 A 的满秩分解 $A = FG$;

(2) 判断矩阵 GF 是否可逆;

(3) 当矩阵 GF 可逆时, 计算 $A^{\#} = F(GF)^{-2} G$.

四、内容结构框图


矩阵的广义逆
M-P逆的等价定义
广义逆的算法
重要性质
$R(AA^{(1)})=R(A)$
$N(A^{(1)}A)=N(A)$
$R(A^{+})=R(A^{H})$
$N(A^{+})=N(A^{H})$
$A^{(1)}AA^{(1)}\in A\{1,2\}$
$(A^{H}A)^{(1)}A^{H}\in A\{1,2,3\}$
$A^{H}(AA^{H})^{(1)}\in A\{1,2,4\}$
$A^{(1,4)}AA^{(1,3)}=A^{+}$
求解方程中的应用
判定方程是否有解
求通解
求极小范数解
求极小范数最小二乘解
集合$A\{1\}$，$A\{1,3\}$及$A\{1,4\}$的表示


投影变换
投影矩阵
正交投影变换
正交投影矩阵
Moore广义逆
Moore逆与Penrose逆等价

五、课后习题全解

习　题　6.1

1. **设 L, M 是 $\mathbf{C}^n$ 的子空间,且 $L \oplus M = \mathbf{C}^n$,证明投影算子 $P_{L,M}$ 是线性算子.**

证　将 $x, y \in \mathbf{C}^n$ 分解为

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2 \quad (x_1, y_1 \in L, x_2, y_2 \in M)$$

则
$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$$

其中,$\lambda x_1 + \mu y_1 \in L, \lambda x_2 + \mu y_2 \in M$. 故

$$P_{L,M}(\lambda x + \mu y) = \lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda P_{L,M} x + \mu P_{L,M} y$$

2. **若 P 是投影矩阵,证明:$P^{\mathrm{H}}, I - P, T^{-1}PT$($T$ 为非奇异矩阵)均为投影矩阵.**

证　$(P^{\mathrm{H}})^2 = (P^2)^{\mathrm{H}} = P^{\mathrm{H}}$

$$(I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P$$

$$(T^{-1}PT)^2 = T^{-1}P^2T = T^{-1}PT$$

3. **证明 $I - P_{L,M} = P_{M,L}$.**

证　由第 2 题知,$I - P_{L,M}$ 是投影矩阵. 将任意 $x \in \mathbf{C}^n$ 分解为

$$x = y + z \quad (y \in L, z \in M)$$

则
$$(I - P_{L,M})x = x - P_{L,M}x = x - y = z = P_{M,L}x$$

故
$$I - P_{L,M} = P_{M,L}$$

4. **设 P_1, P_2 均为投影矩阵,证明:**

(1) $P = P_1 + P_2$ 是投影矩阵的充要条件是

$$P_1P_2 = P_2P_1 = O$$

(2) $P = P_1 - P_2$ 是投影矩阵的充要条件是

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$$

(3) 若 $P_1P_2 = P_2P_1$,则 $P = P_1P_2$ 是投影矩阵.

证　(1) 若 $P = P_1 + P_2$ 是投影矩阵,则 $P^2 = P$,即$(P_1 + P_2)^2 =$

$P_1 + P_2$,整理得(利用 $P_1^2 = P_1$ 和 $P_2^2 = P_2$)

$$P_1 P_2 + P_2 P_1 = O$$

上式分别左乘和右乘 P_1,得

$$P_1 P_2 + P_1 P_2 P_1 = O, \quad P_1 P_2 P_1 + P_2 P_1 = O$$

两式相减得 $P_1 P_2 - P_2 P_1 = O$,与前一式联立求解即得 $P_1 P_2 = P_2 P_1 = O$. 反之,由 $P_1 P_2 = P_2 P_1 = O$ 易知 $P^2 = P$.

(2) 如果 $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_2$,则

$$P^2 = (P_1 - P_2)^2 = P_1^2 - P_1 P_2 - P_2 P_1 + P_2^2 = $$
$$P_1 - P_2 - P_2 + P_2 = P_1 - P_2 = P$$

反之,由$(P_1 - P_2)^2 = P_1 - P_2$ 得 $P_1 P_2 + P_2 P_1 = 2P_2$. 分别左乘和右乘 P_2,得

$$P_2 P_1 P_2 + P_2 P_1 = 2P_2, \quad P_1 P_2 + P_2 P_1 P_2 = 2P_2$$

两式相减得 $P_1 P_2 = P_2 P_1$,代入前一式即得 $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_2$.

(3) $P^2 = (P_1 P_2)^2 = P_1 (P_2 P_1) P_2 =$
$$P_1 (P_1 P_2) P_2 = P_1 P_2 = P$$

5. 设 P 是投影矩阵,证明 P 的特征值为 1 或 0.

证 设 $Px = \lambda x$,则 $\lambda x = Px = P^2 x = \lambda^2 x$. 由 $x \neq 0$ 得 $\lambda^2 - \lambda = 0$,从而 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$.

6. 设 P 是正交投影矩阵,证明 P 是半正定矩阵.

证 由于 P 是正交投影矩阵,所以 $P = P^{\mathrm{H}} P$,从而对任意 $x \in \mathbf{C}^n$,有

$$x^{\mathrm{H}} Px = x^{\mathrm{H}} P^{\mathrm{H}} Px = (Px)^{\mathrm{H}} (Px) \geq 0$$

故 $x^{\mathrm{H}} Px$ 是半正定二次型,从而 P 是半正定矩阵.

7. 设 $\mathbf{R}^3$ 的子空间 L 由向量 $e_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 张成.

(1) 若子空间 M 由 $\alpha = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 张成,求投影矩阵 $P_{L,M}$ 和向量 $x = (2,3,1)^{\mathrm{T}}$ 沿着 M 到 L 的投影;

(2) 求正交投影矩阵 P_L 和向量 $x = (2,3,1)^{\mathrm{T}}$ 在 L 上的正交投影.

解 (1) 由式(6.1.5),得

$$P_{L,M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{L,M}\,x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 由式(6.1.6),得

$$P_L = e_1 (e_1^{\mathrm{H}} e_1)^{-1} e_1^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_L\, x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

习 题 6.2

1. 设 A 是 $m\times n$ 零矩阵,哪一类矩阵 X 是 A 的$\{1\}$-逆?

答 所有 $n\times m$ 矩阵.

2. 设 $m\times n$ 矩阵 A 除第 i 行第 j 列的元素为 1 外,其余元素均为 0,哪一类矩阵 X 是 A 的$\{1\}$-逆?

解 设 $X=(x_{ij})_{n\times m}$,则由 $AXA=A$ 得 $x_{ij}=1$,其余元素任意.

3. 设 I 是 n 阶单位矩阵,J 是所有元素的均为 1 的 n 阶矩阵,记 $A=(a-b)I+bJ$. 证明:若 $a+(n-1)b=0$,则 $X=(a-b)^{-1}I$ 是 A 的$\{1\}$-逆.

证 $AXA=[(a-b)I+bJ](a-b)^{-1}A=$

$A+b(a-b)^{-1}JA=$

$A+b(a-b)^{-1}J[(a-b)I+bJ]=$

$A+b(a-b)^{-1}[(a-b)J+bJ^2]=$

$A+b(a-b)^{-1}[a+(n-1)b]J=A$

上式用到 $J^2=nJ$.

4. 已知

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

证明 $X=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1}A$ 是 A 的\{1\} - 逆.

证 经计算得 $A^3=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)A$, 于是

$$AXA=-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{-1}A^3=A$$

5. 证明定理 6.5 之(2) ～ (5).

证 定理 6.5(2): 若 $\lambda=0$, 则 $\lambda^+A^{(1)}=O\in(\lambda A)\{1\}$; 若 $\lambda\neq 0$, 则 $(\lambda A)(\lambda^+A^{(1)})(\lambda A)=(\lambda\lambda^+\lambda)(AA^{(1)}A)=\lambda A$, 所以 $\lambda^+A^{(1)}\in(\lambda A)\{1\}$.

定理 6.5(3): 因为

$$(SAT)(T^{-1}A^{(1)}S^{-1})(SAT)=SAA^{(1)}AT=SAT$$

所以
$$T^{-1}A^{(1)}S^{-1}\in(SAT)\{1\}$$

定理 6.5(4): $\text{rank}A=\text{rank}(AA^{(1)}A)\leq\text{rank}A^{(1)}$

定理 6.5(5): $(AA^{(1)})^2=AA^{(1)}AA^{(1)}=AA^{(1)}$

$$(A^{(1)}A)^2=A^{(1)}AA^{(1)}A=A^{(1)}A$$

因为
$$\text{rank}A=\text{rank}(AA^{(1)}A)\leq\text{rank}(AA^{(1)})\leq\text{rank}A$$

所以
$$\text{rank}(AA^{(1)})=\text{rank}A$$

同理可证 $\text{rank}(A^{(1)}A)=\text{rank}A$.

6. 证明定理 6.10 之(3) 和(4).

证 定理 6.10(3): 对 Penrose 方程(1) ～(4) 取共轭转置, 并由 $(A^H)^+$ 的惟一性即知 $(A^H)^+=(A^+)^H$.

定理 6.10(4): 令 $X=A^+(A^H)^+$, 直接验证

$$(A^HA)X(A^HA)=A^HA,\qquad X(A^HA)X=X$$

$$(A^HAX)^H=A^HAX,\qquad (XA^HA)^H=XA^HA$$

由 $(A^HA)^+$ 的惟一性即得 $(A^HA)^+=X$. 同理可证另一式.

7. 设 $D=\text{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 证明

$$D^+=\text{diag}(d_1^+,d_2^+,\cdots,d_n^+)$$

证 由定义直接验证.

8. 证明 $\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}^+=[A^+\ \vdots\ O^H]$.

证 方法 1. 由定义直接验证(略).

方法2. 利用矩阵的满秩分解. 当 $A=O$ 时,结论成立;当 $A\neq O$ 时,设 A 的一个满秩分解为 $A=FG$,则

$$B=\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}FG\\O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F\\O\end{bmatrix}G=FG$$

为 B 的一个满秩分解,且有

$$F^{+}=\left\{(F^{H}\mid O^{H})\begin{bmatrix}F\\O\end{bmatrix}\right\}^{-1}(F^{H}\mid O^{H})=$$

$$(F^{H}F)^{-1}(F^{H}\mid O^{H})=(F^{+}\mid O^{H})$$

故 $B^{+}=G^{+}F^{+}=(G^{+}F^{+}\mid O^{H})=(A^{+}\mid O^{H})$.

9. 设 $A\in \mathrm{C}^{m\times n}$,且 $U\in \mathrm{C}^{m\times m}$ 和 $V\in \mathrm{C}^{n\times n}$ 均为酉矩阵,证明 $(UAV)^{+}=V^{H}A^{+}U^{H}$.

证　当 $A=O$ 时,结论成立;当 $A\neq O$ 时,设 A 的一个奇异值分解为

$$A=U_1\begin{bmatrix}\Sigma & O\\O & O\end{bmatrix}V_1^{H}$$

则
$$B=UAV=(UU_1)\begin{bmatrix}\Sigma & O\\O & O\end{bmatrix}(V^{H}V_1)^{H}$$

为 B 的一个奇异值分解,因此

$$B^{+}=(V^{H}V_1)\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & O\\O & O\end{bmatrix}(UU_1)^{H}=$$

$$V^{H}V_1\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & O\\O & O\end{bmatrix}U_1^{H}U^{H}=V^{H}A^{+}U^{H}$$

10. 证明:

(1) $X\in A\{i\}$ 的充要条件是 $X^{H}\in A^{H}\{i\}(i=1,2)$;

(2) $X\in A\{3\}$ 的充要条件是 $X^{H}\in A^{H}\{4\}$;

(3) $X\in A\{4\}$ 的充要条件是 $X^{H}\in A^{H}\{3\}$.

证　因为 $AXA=A$ 等价于 $A^{H}X^{H}A^{H}=A^{H}$, $XAX=X$ 等价于 $X^{H}A^{H}X^{H}=X^{H}$,所以 $X\in A\{i\}$ 等价于 $X^{H}\in A^{H}\{i\}(i=1,2)$.

因为 $(AX)^{H}=AX$ 等价于 $(X^{H}A^{H})^{H}=X^{H}A^{H}$,所以 $X\in A\{3\}$ 等

价于 $X^{\mathrm{H}} \in A^{\mathrm{H}}\{4\}$.

同理可证(3).

11. **设** H **是幂等** Hermite **矩阵,证明** $H^{+} = H$.

证　**由** $H^2 = H$ **和** $H^{\mathrm{H}} = H$ **得** $H^3 = H$, $(H^2)^{\mathrm{H}} = H^2$, **故** $H^{+} = H$.

12. **证明**: $H^{+} = H$ **的充要条件是** H^2 **为幂等** Hermite **矩阵且** $\mathrm{rank}\,H^2 = \mathrm{rank}\,H$.

证　**如果** $H^{+} = H$, **则** $(H^2)^2 = H^4 = H^3H = H^2$, $(H^2)^{\mathrm{H}} = (HH^{+})^{\mathrm{H}} = HH^{+} = H^2$, **即** H^2 **为幂等** Hermite **矩阵,又**

$$\mathrm{rank}\,H = \mathrm{rank}\,H^3 \leq \mathrm{rank}\,H^2 \leq \mathrm{rank}\,H$$

故 $\mathrm{rank}\,H^2 = \mathrm{rank}\,H$. **反之,由** $(H^2)^{\mathrm{H}} = H^2$ **知**, $H \in H\{3,4\}$; **又由** $\mathrm{rank}\,H^2 = \mathrm{rank}\,H$ **知,存在矩阵** U **使得** $H = H^2U$, **从而**

$$H^3 = H^2H = H^2H^2U = (H^2)^2U = H^2U = H$$

此即 $H \in H\{1,2\}$, **故** $H \in H\{1,2,3,4\}$, **即** $H = H^{+}$.

13. **证明: 若** A **是正规矩阵(即满足** $A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}$), **则** $A^{+}A = AA^{+}$, **且** $(A^n)^{+} = (A^{+})^n$, **其中** n **是正整数**.

证　**由定理** 6.10(5), **即** $A^{+} = (A^{\mathrm{H}}A)^{+}A^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}})^{+}$ **得**

$$\begin{aligned} A^{+}A = (A^{\mathrm{H}}A)^{+}A^{\mathrm{H}}A = (AA^{\mathrm{H}})^{+}AA^{\mathrm{H}} = \\ [(AA^{\mathrm{H}})^{+}AA^{\mathrm{H}}]^{\mathrm{H}} = (AA^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}[(AA^{\mathrm{H}})^{+}]^{\mathrm{H}} = \\ AA^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}})^{+} = AA^{+} \end{aligned}$$

利用上面结果,有

$$A^n(A^{+})^nA^n = (AA^{+}A)^n = A^n$$

$$(A^{+})^nA^n(A^{+})^n = (A^{+}AA^{+})^n = (A^{+})^n$$

$$[A^n(A^{+})^n]^{\mathrm{H}} = [(AA^{+})^n]^{\mathrm{H}} = [(AA^{+})^{\mathrm{H}}]^n = (AA^{+})^n = A^n(A^{+})^n$$

同理 $[(A^{+})^nA^n]^{\mathrm{H}} = (A^{+})^nA^n$, **故而** $(A^n)^{+} = (A^{+})^n$.

14. **证明** $(A \otimes B)^{+} = A^{+} \otimes B^{+}$.

证　**根据直积和性质,有**

$$(A \otimes B)(A^{+} \otimes B^{+})(A \otimes B) =$$

$$(AA^{+}A)\otimes(BB^{+}B) = A\otimes B$$

$$(A^{+}\otimes B^{+})(A\otimes B)(A^{+}\otimes B^{+}) =$$
$$(A^{+}AA^{+})\otimes(B^{+}BB^{+}) = A^{+}\otimes B^{+}$$

$$[(A\otimes B)(A^{+}\otimes B^{+})]^{\mathrm{H}} = [(AA^{+})\otimes(BB^{+})]^{\mathrm{H}} =$$
$$(AA^{+})^{\mathrm{H}}\otimes(BB^{+})^{\mathrm{H}} = (AA^{+})\otimes(BB^{+}) =$$
$$(A\otimes B)(A^{+}\otimes B^{+})$$

同理　$[(A^{+}\otimes B^{+})(A\otimes B)]^{\mathrm{H}} = (A^{+}\otimes B^{+})(A\otimes B)$

故　$(A\otimes B)^{+} = A^{+}\otimes B^{+}$

15. **举例说明:对** P, Q **为非奇异矩阵,结论** $(PAQ)^{+} = Q^{-1}A^{+}P^{-1}$ **不真,并与习题** 9 **比较** .

解　**例如,取** $A = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, Q = [1]$, **则有**

$$PAQ = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\quad (PAQ)^{+} = \frac{1}{5}[2\quad 1]$$

$$Q^{-1}A^{+}P^{-1} = \frac{1}{2}[1\quad 0]$$

可见 $(PAQ)^{+} \neq Q^{-1}A^{+}P^{-1}$.

16. **证明满足如下三个矩阵方程**

$$AX = B,\quad XA = D,\quad XAX = X$$

的矩阵 X **是惟一的(如果它存在的话)**.

证　**设** X, Y **均满足这三个矩阵方程,则**

$$X = XAX = XB = XAY = DY = YAY = Y$$

17. **设** $A_i \in \mathrm{C}^{m\times n}, A_iA_j^{\mathrm{H}} = O, A_i^{\mathrm{H}}A_j = O(i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, r)$, **证明**

$$\left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)^{+} = \sum_{i=1}^{r} A_i^{+}$$

证　**利用定理** 6.10(5) **可得**

$$\left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r} A_i^{+}\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r} A_i^{\mathrm{H}}(A_iA_i^{\mathrm{H}})^{+}\right) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r}(A_iA_i^{\mathrm{H}})(A_iA_i^{\mathrm{H}})^{+}\right)=\sum_{i=1}^{r}A_iA_i^{+}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r}A_i^{+}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{r}(A_i^{\mathrm{H}}A_i)^{+}A_i^{\mathrm{H}}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{r}(A_i^{\mathrm{H}}A_i)^{+}(A_i^{\mathrm{H}}A_i)=\sum_{i=1}^{r}A_i^{+}A_i$$

上面两式右边均是 Hermite 矩阵,因而左边也是 Hermite 矩阵 . 又

$$\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r}A_i^{+}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{r}A_iA_i^{+}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r}A_i(A_i^{\mathrm{H}}A_i)^{+}A_i^{\mathrm{H}}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)=\sum_{i=1}^{r}A_i(A_i^{\mathrm{H}}A_i)^{+}A_i^{\mathrm{H}}A_i=$$

$$\sum_{i=1}^{r}A_iA_i^{+}A_i=\sum_{i=1}^{r}A_i$$

同理可证

$$\left(\sum_{i=1}^{r}A_i^{+}\right)\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r}A_i^{+}\right)=\sum_{i=1}^{r}A_i^{+}$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{r}A_i\right)^{+}=\sum_{i=1}^{r}A_i^{+}$$

习 题 6.3

1. 证明每个方阵都有非奇异的{1} - 逆 .

证　在式(6.3.3) 中取 L 为非奇异矩阵即得 .

2. 非奇异矩阵 A 的 Hermite 标准形是什么 ?矩阵 Q 与 A 的关系如何 ?置换矩阵 P 是什么矩阵 ?由式(6.3.3) 给出的 X 是什么 ?

答　Hermite 标准形是单位矩阵, $Q=A^{-1}$, $P=I$, $X=A^{-1}$.

3. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

(1) 求 A 的 Hermite 标准形,利用式(6.3.3)求 A 的{1} - 逆和{1,2} - 逆;

(2) 作 A 的满秩分解,利用定理 6.15 之(5)求 A^+;

(3) 利用 Zlobec 公式(6.3.6)计算 A^+;

(4) 利用 Greville 方法计算 A^+;

(5) 利用定理 6.18 计算 $A^{(1,2)}$, $A^{(1,2,3)}$, $A^{(1,2,4)}$ 和 A^+;

(6) 矩阵 A 是上 Hessenberg 矩阵,根据式(6.3.23),(6.3.24),(6.3.30)和(6.3.36)计算 A^+.

解　(1) $QA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -a & a & -a & a \end{bmatrix} \quad (a\text{任意})$$

$$A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ A = FG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = G^H (F^H A G^H)^{-1} F^H = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3)\ B = A^H A A^H = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$QB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 8 & -8 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

由式(6.3.3) **求得**

$$B^{(1)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故

$$A^+ = A^H B^{(1)} A^H = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(4) **由式**(6.2.3) **计算** $A_1^+ = \frac{1}{2}(1,1,0,0)$, **再由式**(6.3.7) ～ (6.3.9) **依次计算**

$$d_2 = A_1^+ a_2 = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = a_2 - A_1 d_2 = \frac{1}{2}(-1,1,2,0)^{\mathrm{T}}$$

$$b_2^{\mathrm{H}} = c_2^+ = \frac{1}{3}(-1,1,2,0)$$

$$A_2^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ - d_2 b_2^{\mathrm{H}} \\ b_2^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d_3 = A_2^+ a_3 = \frac{1}{3}(-1,2)^{\mathrm{T}}$$

$$c_3 = a_3 - A_2 d_3 = \frac{1}{3}(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}$$

$$b_3^{\mathrm{H}} = c_3^+ = \frac{1}{4}(1,-1,1,3)$$

$$A_3^+ = \begin{bmatrix} A_2^+ - d_3 b_3^{\mathrm{H}} \\ b_3^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$d_4 = A_3^+ a_4 = (1,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

$$c_4 = a_4 - A_3 d_4 = (0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$$

$$b_4^{\mathrm{H}} = (1 + d_4^{\mathrm{H}} d_4)^{-1} d_4^{\mathrm{H}} A_3^+ = \frac{1}{8}(3,-1,1,3)$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_3^+ - d_4 b_4^{\mathrm{H}} \\ b_4^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(5) $P = Q = I_4$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = A_{11}^{-1} A_{12} = (1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \quad S = A_{21} A_{11}^{-1} = (1,-1,1)$$

$$(I_3 + S^H S)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (I_3 + TT^H)^{-1}$$

从而

$$A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1,2,3)} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1,2,4)} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(6) **对** A^T **进行计算**:

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -1$$

$$y_4 = 1, y_3 = -1, y_2 = 1, y_1 = -1$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{x^T P_3^{-1}}{1 + x^T x}\left[I_3 - \frac{yy^T}{1 + y^T y}\right] = \frac{1}{8}(3, -1, -1)$$

同理$(\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34})^T = \frac{1}{8}(-1, -1, 3)^T$, $\alpha_{44} = \frac{3}{8}$, **故**

$$(A^{\mathrm{T}})^{+}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{8}(3,-1,-1,3)+$$

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\3\end{bmatrix}(-1,1,-1,1)-\frac{3}{8}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}(-1,1,-1,1)=$$

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3&-1&-1&3\\3&3&-1&-1\\-1&3&3&-1\\-1&-1&3&3\end{bmatrix}$$

从而　$A^{+}=[(A^{\mathrm{T}})^{+}]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3&3&-1&-1\\-1&3&3&-1\\-1&-1&3&3\\3&-1&-1&3\end{bmatrix}$

习　题　6.4

1. **证明:向量** x **是方程组** $Ax=b$ **的最小二乘解的充要条件是,存在向量** y**,使得向量** $\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$ **为**

$$\begin{bmatrix}I&A\\A^{\mathrm{H}}&O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\0\end{bmatrix}$$

的解.

证　**令** $y=b-Ax$**,因为** x **是** $Ax=b$ **的最小二乘解的充要条件是** x **满足** $A^{\mathrm{H}}Ax=A^{\mathrm{H}}b$**,所以**

$$A^{\mathrm{H}}y=A^{\mathrm{H}}(b-Ax)=A^{\mathrm{H}}b-A^{\mathrm{H}}Ax=0$$

可见 $\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$ **满足所给方程. 反之可推出** x **满足** $A^{\mathrm{H}}Ax=A^{\mathrm{H}}b$.

2. 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, 列向量 $b_1, b_2, \cdots, b_k \in \mathbf{C}^m$, 证明: 向量 x_0 使得

$$\min_{x \in \mathbf{C}^n} \sum_{i=1}^{k} \| Ax - b_i \|^2$$

成立的充要条件是, x_0 为方程

$$Ax = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} b_i$$

的最小二乘解.

证 x_0 使得 $\sum_{i=1}^{k} \| Ax - b_i \|^2$ 最小

x_0 是 $Ax = b_i\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ 的最小二乘解

x_0 是 $\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ A \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{bmatrix}$ 的最小二乘解

x_0 是正规方程组 $\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ A \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ A \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ A \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{bmatrix}$ 的解

x_0 是 $A^{\mathrm{H}} Ax = \frac{1}{k} A^{\mathrm{H}} \sum_{i=1}^{k} b_i$ 的解

x_0 是 $Ax = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} b_i$ 的最小二乘解

3. 设 $A_i \in \mathbf{C}^{m \times n}$, 列向量 $b_i \in \mathbf{C}^m\ (i = 1, 2, \cdots, k)$, 证明: 向量 x_0 使得

$$\min_{x \in \mathbf{C}^n} \sum_{i=1}^{k} \| A_i x - b_i \|^2$$

成立的充要条件是, x_0 为方程

$$\left(\sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{H}} A_i \right) x = \sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{H}} b_i$$

的解.

证 x_0 使得 $\sum_{i=1}^{k} \| A_i x - b_i \|^2$ 最小

$$x_0 \text{ 是 } A_i x = b_i \ (i = 1,2,\cdots,k) \text{ 的最小二乘解}$$

$$x_0 \text{ 是} \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_k \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{bmatrix} \text{的最小二乘解}$$

$$x_0 \text{ 是} \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_k \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_k \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_k \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{bmatrix} \text{的解}$$

$$x_0 \text{ 是} \left(\sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{H}} A_i \right) x = \sum_{i=1}^{k} A_i^{\mathrm{H}} b_i \text{ 的解}$$

4. 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{C}^m$, α^2 是正实数, 证明:满足

$$\min_{x \in \mathbf{C}^n} \{ \| Ax - b \|^2 + \alpha^2 \| x \|^2 \}$$

的 x_0 为 $x_0 = (A^{\mathrm{H}} A + \alpha^2 I)^{-1} A^{\mathrm{H}} b$.

证　这是第 3 题中取 $k = 2$, $A_1 = A$, $A_2 = \alpha I$, $b_1 = b$, $b_2 = 0$ 的特殊情形,从而 x_0 满足 $(A^{\mathrm{H}} A + \alpha^2 I) x = A^{\mathrm{H}} b$. 故 $x_0 = (A^{\mathrm{H}} A + \alpha^2 I)^{-1} A^{\mathrm{H}} b$.

5. 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{C}^m$, $a \in \mathbf{C}^n$. 若方程组 $Ax = b$ 相容,证明:使得

$$\min_{Ax = b} \| x - a \|$$

成立的惟一解是

$$x = A^{(1,4)} b + (I - A^{(1,4)} A) a$$

其中, $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$.

证　问题转化为求方程组 $A(x - a) = b - Aa$ 的惟一极小范数解. 由定理 6.30 可得 $x - a = A^{(1,4)}(b - Aa)$, 于是

$$x = A^{(1,4)}(b - Aa) + a = A^{(1,4)} b + (I - A^{(1,4)} A) a$$

6. 取习题 6.3 第 3 题的矩阵 A, 问:

(1) 当 $b = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 时, 方程组 $Ax = b$ 是否相容?

(2) 当 $b = (1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 时, 方程组 $Ax = b$ 是否相容?

若方程组相容, 求其通解和极小范数解; 若方程组不相容, 求其极小

范数最小二乘解.

解　取最简单的 $A^{(1)}$，即

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 因为 $AA^{(1)}b = b$，所以 $Ax = b$ 相容，通解为

$x = A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\xi_4$$

极小范数解为 $x = A^{(1,2,4)}b = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 因为 $AA^{(1)}b \neq b$，所以 $Ax = b$ 不相容，极小范数最小二乘解为 $x = A^{+}b = \frac{1}{4}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

习　题　6.5

1. 设 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$，$b \in \mathbf{C}^{m}$，$S$ 是 $\mathbf{C}^{n}$ 的子空间，证明：解约束问题

$$Ax = b \quad (x \in S)$$

等价于解无约束方程组

$$\begin{bmatrix} A \\ P_{S^{\perp}} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 $P_{S^{\perp}} = I - P_S$.

证　若 x 是约束问题的解，则 $Ax = b$，$P_S x = x$. 从而

$$P_{S^{\perp}} x = (I - P_S)x = x - P_{S^{\perp}} x = 0$$

即 x 满足 $\begin{bmatrix} A \\ P_{S^{\perp}} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$. 逆推回去即知 x 是约束问题的解.

2. **证明定理** 6.36, 6.37, 6.38.

证　定理 6.36 **的证明**: **因为** $x = P_S z$ **是式**(6.5.1) **的极小范数解**　z **是式**(6.5.2) **的极小范数解**; **由定理** 6.30, $z = Zb$ **是式**(6.5.2) **的极小范数解**　$Z = (AP_S)^{(1,4)}$; **故** $x = Xb$ **是式**(6.5.1) **的极小范数解**　$X = P_S Z = P_S(AP_S)^{(1,4)}$.

定理 6.37 **的证明**: $x = P_S z$ **是式**(6.5.1) **的最小二乘解**　z **是式**(6.5.2) **的最小二乘解**; **其余证明同上**.

定理 6.38 **的证明类似**.

3. **证明定理** 6.40, 6.41.

证　定理 6.40 **的证明**: **将正定矩阵** N **进行** Cholesky **分解** $N = G_N^H G_N$, **其中** G_N **是非奇异上三角矩阵**, **则** $\min_{Ax=b} \| x \|_N$ **等价于** $\min_{Ax=b} \| x \|$, **这里** $x = G_N x$, $A = AG_N^{-1}$, $b = b$. **而后者的解为** $x = Yb$, $Y \in A\{1,4\}$. **令** $X = G_N^{-1} Y$, **则**

$$x = Yb \qquad x = Xb$$

$$AYA = A \qquad AXA = A$$

$$(YA)^H = YA \qquad (NXA)^H = NXA$$

定理 6.41 **的证明**: **将正定矩阵** M **和** N **进行** Cholesky **分解** $M = G_M^H G_M$, $N = G_N^H G_N$, **则** $\min_{\min \| Ax-b \|_M} \| x \|_N$ **等价于** $\min_{\min \| Ax-b \|} \| x \|$, **其中** $A = G_M A G_N^{-1}$, $x = G_N x$, $b = G_M b$. **而后者的解为** $x = A^+ b$, **于是** $x = G_N^{-1} A^+ G_M b$. **令** $X = G_N^{-1} A^+ G_M$, **则**

$$x = A^+ b \qquad x \qquad Xb$$

$$AA^+ A = A \qquad AXA = A$$

$$A^+ AA^+ = A^+ \qquad XAX = X$$

$$(AA^+)^H = AA^+ \qquad (MAX)^H = MAX$$

$$(A^+ A)^H = A^+ A \qquad (NXA)^H = NXA$$

4. **设** $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$, $b\in R(A)$, **又设** $N\in \mathbf{C}^{n\times n}$ **是正定矩阵，证明如下问题**:

$$\min_{Ax=b}\|x\|_N$$

有惟一极小因子

$$x_0 = N^{-1}A^{\mathrm{H}}(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}b$$

且极小值为

$$\sqrt{b^{\mathrm{H}}(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}b}$$

其中, $(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}\in(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})\{1\}$.

证 **由第** 3 **题的推证知，该问题的惟一极小范数解为** $x_0 = G_N^{-1}Yb$, **其中** $Y\in(AG_N^{-1})\{1,4\}$. **取**

$$Y = (AG_N^{-1})^{\mathrm{H}}[(AG_N^{-1})(AG_N^{-1})^{\mathrm{H}}]^{(1)}$$

由定理 6.8 **知** $Y\in(AG_N^{-1})\{1,2,4\}$, **从而**

$$x_0 = G_N^{-1}Yb = G_N^{-1}(G_N^{-1})^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}[AG_N^{-1}(G_N^{-1})^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}]^{(1)}b = N^{-1}A^{\mathrm{H}}(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}b$$

如同引理 2 **可证得** $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})$, **于是存在矩阵** U **使得** $A = AN^{-1}A^{\mathrm{H}}U$, **又由** $b\in R(A)$ **知，存在列向量** z **使得** $b = Az = AN^{-1}A^{\mathrm{H}}Uz$, **故有**

$$\begin{aligned}\|x_0\|_N^2 = x_0^{\mathrm{H}}Nx_0 = {} & b^{\mathrm{H}}[(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}]^{\mathrm{H}}AN^{-1}A^{\mathrm{H}}(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}b = \\ & z^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}[(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}]^{\mathrm{H}}\times \\ & (AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}b = \\ & b^{\mathrm{H}}(AN^{-1}A^{\mathrm{H}})^{(1)}b\end{aligned}$$

5. **证明**: $A_{MN}^{+} = G_N^{-1}(G_MAG_N^{-1})^{+}G_M$.

证 **将正定矩阵** M **和** N **进行** Cholesky **分解** $M = G_M^{\mathrm{H}}G_M$, $N = G_N^{\mathrm{H}}G_N$. **令** $\tilde{A} = G_MAG_N^{-1}$, $\tilde{x} = G_NXG_M^{-1}$, **则** $\tilde{x} = \tilde{A}^{+}$. **从而**

$$A_{MN}^{+} = X = G_N^{-1}\tilde{A}^{+}G_M = G_N^{-1}(G_MAG_N^{-1})^{+}G_M$$

6. **利用** Zlobec **公式**(6.3.6) **证明**

$$A_{MN}^{+} = N^{-1}A^{\mathrm{H}}MA(A^{\mathrm{H}}MAN^{-1}A^{\mathrm{H}}MA)^{(1)}A^{\mathrm{H}}M$$

证　由第 5 题及 Zlobec 公式得

$$A_{MN}^{+} = G_N^{-1} A^{+} G_M = G_N^{-1} A^{H}(A^{H} A A^{H})^{(1)} A^{H} G_M =$$

$$N^{-1} A^{H} G_M^{H} (G_N^{-H} A^{H} MAN^{-1} A^{H} G_M)^{(1)} G_N^{-1} A^{H} M$$

可以验证: $G_M A(A^{H} MAN^{-1} A^{H} MA)^{(1)} G_N$ **是** $G_N^{-H} A^{H} MAN^{-1} A^{H} G_M$ **的** $\{1\}$ - **逆**, **代入前一式即得**.

习　题　6.6

1. **证明** $(A^{H})^{(d)} = (A^{(d)})^{H}$, $(A^{T})^{(d)} = (A^{(d)})^{T}$.

证　对定义 6.10 中的三个矩阵方程取共轭转置(或转置), 再由 Drazin 逆的惟一性即得.

2. **证明** $(A^{l})^{(d)} = (A^{(d)})^{l}$, $l = 1,2,\cdots$.

证　利用 $AA^{(d)} = A^{(d)}A$, 得

$$A^{l}(A^{(d)})^{l} = (A^{(d)})^{l}A^{l}$$

$$(A^{(d)})^{l}A^{l}(A^{(d)})^{l} = (A^{(d)}AA^{(d)})^{l} = (A^{(d)})^{l}$$

$$(A^{l})^{k}(A^{(d)})^{l}A^{l} = (A^{k}A^{(d)}A)^{l} = A^{l}$$

故 $(A^{l})^{(d)} = (A^{(d)})^{l}$, $l = 1,2,\cdots$.

3. **设** A **的指标为** k, **证明**: **对** $l \geq k$, A^{l} **的指标为** 1, **且**

$$(A^{l})^{\#} = (A^{(d)})^{l}$$

证　当 $l \geq k$ 时, $\operatorname{rank}A^{l} = \operatorname{rank}A^{k}$, 从而 $\operatorname{rank}(A^{l})^{2} = \operatorname{rank}A^{l}$, 即 A^{l} 的指标为 1. 由第 2 题得

$$(A^{(d)})^{\#} = (A^{l})^{(d)} = (A^{(d)})^{l}$$

4. **证明** $(A^{\#})^{\#} = A$.

证　由 $A^{\#}$ 的定义可看出, A 与 $A^{\#}$ 在矩阵方程中的位置对称, 故而 $(A^{\#})^{\#} = A$.

5. **证明**: $(A^{(d)})^{(d)} = A$ **的充要条件是** A **的指标为** 1.

证　如果 $(A^{(d)})^{(d)} = A$, 则

$$A^{2}A^{(d)} = AA^{(d)}A = (A^{(d)})^{(d)}A^{(d)}(A^{(d)})^{(d)} =$$

$$(A^{(d)})^{(d)} = A$$

于是由定理 6.42(2) 知, A 的指标为 1.

反之,如果 A 的指标为 1,则 $A^{(d)} = A^{\#}$,而

$$\operatorname{rank}A^{\#} = \operatorname{rank}(A^{\#}AA^{\#}) = \operatorname{rank}[(A^{\#})^2A] \leq$$
$$\operatorname{rank}(A^{\#})^2 \leq \operatorname{rank}A^{\#}$$

即 $\operatorname{rank}(A^{\#})^2 = \operatorname{rank}A^{\#}$,可见 $A^{\#}$ 的指标也为 1,故有

$$(A^{(d)})^{(d)} = (A^{\#})^{(d)} = (A^{\#})^{\#} = A$$

6. 证明:$A^{(d)}$ 的指标为 1,且 $(A^{(d)})^{\#} = A^2A^{(d)}$.

证　因为

$$\operatorname{rank}A^{(d)} = \operatorname{rank}((A^{(d)})^2A) \leq \operatorname{rank}(A^{(d)})^2 \leq \operatorname{rank}A^{(d)}$$

所以 $A^{(d)}$ 的指标为 1. 又

$$A^{(d)}(A^2A^{(d)})A^{(d)} = A^{(d)}AA^{(d)}AA^{(d)} = A^{(d)}$$
$$(A^2A^{(d)})A^{(d)}(A^2A^{(d)}) = AA^{(d)}AA^{(d)}AA^{(d)}A =$$
$$AA^{(d)}A = A^2A^{(d)}$$
$$A^{(d)}(A^2A^{(d)}) = (A^2A^{(d)})A^{(d)}$$

由 $(A^{(d)})^{\#}$ 的惟一性知 $(A^{(d)})^{\#} = A^2A^{(d)}$.

7. 证明 $((A^{(d)})^{(d)})^{(d)} = A^{(d)}$.

证　由第 6 题知 $A^{(d)}$ 的指标为 1,再由第 5 题得

$$((A^{(d)})^{(d)})^{(d)} = A^{(d)}$$

8. 证明 $A^{(d)}(A^{(d)})^{\#} = AA^{(d)}$.

证　由第 6 题的结果得

$$A^{(d)}(A^{(d)})^{\#} = A^{(d)}A^2A^{(d)} = AA^{(d)}$$

9. 证明:若 A 是幂零矩阵(即存在正整数 l,使得 $A^l = O$),则 $A^{(d)} = O$.

证　存在正整数 l 使得 $A^l = O$. 容易证明,使得 $A^l = O$ 的最小正整数即为 A 的指标. 再由式(6.6.11) 即得 $A^{(d)} = O$.

10. 证明:若 A 是非奇异矩阵,则 $A^{(d)} = A^{-1}$.

证　非奇异矩阵 A 的指标为 1,由定义即知 $A^{(d)} = A^{-1}$.

11. 证明:若整数 $l > m > 0$,则 $A^m(A^{(d)})^l = (A^{(d)})^{l-m}$.

证　因为 $l > m > 0$,所以

$$A^m(A^{(d)})^l = A^m(A^{(d)})^m(A^{(d)})^{l-m} =$$

$$A^{(d)}AA^{(d)}A\cdots A^{(d)}A(A^{(d)})^{l-m}=$$
$$A^{(d)}A(A^{(d)})^{l-m}=(A^{(d)})^{l-m}.$$

12. **证明**:**若整数** $m>0$ **且** $l-m\geq k$,**则** $A^l(A^{(d)})^m=A^{l-m}$.

证　因为 $m>0$ 且 $l-m\geq k$,所以

$$\begin{aligned}A^l(A^{(d)})^m&=A^{l-m-k}A^kA^m(A^{(d)})^m=\\&A^{l-m-k}A^k(A^{(d)}A\cdots A^{(d)}A)=\\&A^{l-m-k}A^k=A^{l-m}\end{aligned}$$

13. **设** A **的指标为** 1,**记** $(A^{\#})^j$ **为** $A^{-j}(j=1,2,\cdots)$,**又记** $AA^{\#}$ **为** A^0,**证明**:**对所有整数** l **和** m,**有** $A^lA^m=A^{l+m}$.

证　(1) 当 $l,m>0$ 时,$A^lA^m=A^{l+m}$ 显然成立.

(2) 当 $l>0,m<0$ 时,有

$$A^lA^m=A^l(A^{\#})^{-m}=\begin{cases}A^{l-(-m)} & (l>-m)\\(A^{\#})^{-m-l} & (l<-m)\\AA^{\#} & (l=-m)\end{cases}$$
$$=A^{l+m}$$

(3) 当 $l<0,m>0$ 时,有

$$A^lA^m=(A^{\#})^{-l}A^m=\begin{cases}(A^{\#})^{-l-m} & (-l>m)\\(A^{\#})^{m-(-l)} & (-l<m)\\AA^{\#} & (-l=m)\end{cases}$$
$$=A^{l+m}$$

(4) 当 $l,m<0$ 时,有

$$A^lA^m=(A^{\#})^{-l}(A^{\#})^{-m}=(A^{\#})^{-l-m}=A^{l+m}$$

(5) 当 $m=0$ 时,有

$$A^lA^0=A^lAA^{\#}=\begin{cases}A^lA^{\#}A=A^l & (l>0)\\(A^{\#})^{-l}AA^{\#}=(A^{\#})^{-l}=A^l & (l<0)\\AA^{\#}AA^{\#}=AA^{\#}=A^0 & (l=0)\end{cases}$$
$$=A^{l+m}$$

14. **对于习题** 6.3 **第** 3 **题的矩阵** A,**分别用式**(6.6.7),(6.6.9)**和**(6.6.12) **计算** $A^{(d)}$.

解 (1) 利用式(6.6.7) 计算 $A^{(d)}$. 因为 A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = \lambda(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda - 4) = -4\lambda\left[1 - \frac{\lambda}{4}(\lambda^2 - 4\lambda + 6)\right]$$

所以 A 的指标为 1, 且 $q(\lambda) = \frac{1}{4}(\lambda^2 - 4\lambda + 6)$, 故

$$A^{(d)} = A(q(A))^2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) 利用式(6.6.9) 计算 $A^{(d)}$. 因为

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, (A^3)^{(1)} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

所以

$$A^{(d)} = A(A^3)^{(1)}A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) 利用式(6.6.12) 计算 $A^{(d)}$. 因为

$$A = FG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$GF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(GF) \neq 0$$

所以

$$A^{(d)} = A^{\#} = F(GF)^{-2}G = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

六、学习效果测试题及答案

(一) 测试题

1. **在向量空间** $\mathbf{C}^3$ **中**, $\alpha = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \beta_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, **线性子空间** $L = L(\alpha), M = L(\beta_1, \beta_2)$.

(1) **求投影矩阵** $P_{L,M}$ **和向量** $x = (2,3,1)^{\mathrm{T}}$ **沿着** M **到** L **的投影**;

(2) **求正交投影矩阵** P_L **和向量** $x = (2,3,1)^{\mathrm{T}}$ **在** L **上的投影**.

2. **设** $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ **列满秩, 且** $b \in N(A^{\mathrm{T}})$, **证明**: $[A \mid b]^{+} = \begin{bmatrix} A^{+} \\ b^{+} \end{bmatrix}$.

3. **已知** A **的** Moore-Penrose **逆为** A^{+}, **求** $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}^{+}$.

4. **用广义逆矩阵方法判断线性方程组** $Ax = b$ **是否有解, 并在有解时求其通解**.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. **求下列矩阵的** Moore-Penrose **逆**:

(1) $A=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(i=\sqrt{-1})$;　(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

6. 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 A^+;

(2) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解;

(3) 求 $Ax=b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解.

7. 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$,证明:满足 $\min\limits_{\min\|AX-I\|_F}\|X\|_F$ 的惟一解为 $X=A^+$.

8. 设 $P\in \mathbf{C}^{m\times n}$ 行满秩,证明:$\|P^+P\|_2=1$.

(二) 测试题答案或提示

1. (1) $P_{L,M}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$P_{L,M}x=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(2) $P_L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$P_Lx=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. 提示:当 $b=0$ 时,$[A \mid b]=A[I_n \mid 0]$ 为满秩分解;当 $b\neq 0$ 时,$[A \mid b]$ 列满秩.

3. $\begin{bmatrix} A^+ & A^+ \\ A^+ & A^+ \end{bmatrix}$. 提示:设 A 的满秩分解为 $A=FG$,则 $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F \\ F \end{bmatrix}[G \mid G]$ 为满秩分解.

4. (1) $A^{(1,2)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}$;

(2) $A^{(1,2)}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$$x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1&-1\\0&0&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}.$$

5. (1) $A^{+}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\mathrm{i}&1&-\mathrm{i}\\1&-\mathrm{i}&2\end{bmatrix}$;

(2) $A^{+}=\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix}2&-2&2&2\\-1&3&-1&1\\1&-3&1&-1\end{bmatrix}$.

6. (1) $A^{+}=\dfrac{1}{15}\begin{bmatrix}3&1&5&-2\\1&2&0&1\\-2&1&-5&3\\1&2&0&1\end{bmatrix}$;　(2) 有解;

(3) 极小范数解为 $x_0=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

7. 因为 $\min\|AX-I\|_F$ 等价于 $\min\|Ax_i-e_i\|_2$ ($i=1,2,\cdots,n$), 而后者的惟一极小范数解为 $x_i=A^{+}e_i$ ($i=1,2,\cdots,n$), 所以前者的惟一极小范数解为

$$X=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_m]=A^{+}[e_1\ \ e_2\ \ \cdots\ \ e_m]=A^{+}$$

8. 令 $B=P^{+}P$, 则有 $B^2=B$, 从而 B 的特征值只能是 0 或者 1 . 由 P 行满秩可得, $P^{+}=P^{\mathrm{H}}(PP^{\mathrm{H}})^{-1}$ 列满秩 .当 $x\in\mathbf{C}^m$ 为非零列向量时, $P^{+}x\neq0$, 且有

$$B(P^{+}x)=P^{+}PP^{+}x=P^{+}x=1(P^{+}x)$$

即 $\lambda = 1$ 是 B 的特征值,故 $\rho(B) = 1$.由此可得

$$\| B \|_2^2 = \rho(B^H B) = \rho(B^2) = \rho(B) = 1$$

附录　试题精解

试题一

一、判断正误、填空或计算填空(20 分):

1. **任给非零列向量** $x \in \mathbf{R}^n$ **及单位列向量** $z \in \mathbf{R}^n (n > 1)$,**则存在** n**阶正交矩阵** Q**使** $Qx = |x| z$. (　　)

2. **设** H_m **是** m **阶** Householder **矩阵**, I_{n-m} **是** $n - m$**阶单位矩阵**($m < n$),**则** $H_n = \begin{bmatrix} H_m & O \\ O & I_{n-m} \end{bmatrix}$**是** n **阶** Householder **矩阵**. (　　)

3. **设** $A = \mathrm{diag}(1, 2, \cdots, n)$, m**阶矩阵** B**的特征值是**$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, ($m > 1$),**则** $A \otimes B$**的特征值是**(　　).

4. **已知矩阵** $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$ **及** $C_{m\times m}$,**则矩阵方程** $AXB = C$**有解的充分必要条件是**(　　).

5. **已知** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,**则** $A^{(1,2)} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

6. **已知** $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,**则** A **的** Jordan **标准形** $J = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

二、(10 分) **证明**: $\mathbf{C}^{n\times n}$ **中的矩阵范数** $\|\cdot\|_{m_\infty}$ **与** $\|\cdot\|_F$ **等价**.

三、(12 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. 求 e^{At}.

2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解.(提示:可用待定法求 e^{At})

四、(12 分) 用 Givens 变换求 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

五、(12 分) 用 Gerschgorin 定理分离矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 10\mathrm{i} \end{bmatrix} \quad (\mathrm{i} = \sqrt{-1})$$

的特征值,并在复平面上画图表示.

六、(12 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. 求 A 的满秩分解.

2. 求 A^+.

3. 求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0(指出 x_0 的类型).

七、(12 分) 在矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$,定义线性变换 T: $TX = XB$ $(X \in \mathbf{R}^{2\times 2})$. 求 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

八、(10 分) 设欧氏空间 V^n 的基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的度量矩阵为 A, 证明:在 V^n 中存在基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$,使满足

$$(x_i, y_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

试题一解答

一、1. 正确. 因为可取 Q 为 Householder 矩阵, 或者有限个 Givens 矩阵的乘积.

2. 正确. 设 $H_m = I_n - 2u_m u_m^{\mathrm{T}}\ (|u_m| = 1)$, 则

$$H_n = \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_{n-m} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} u_m u_m^{\mathrm{T}} & O \\ O & O \end{bmatrix} = I_n - 2\begin{bmatrix} u_m \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_m^{\mathrm{T}} & | & 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

令 $v_n = \begin{bmatrix} u_m \\ 0 \end{bmatrix}$, 则 $v_n^{\mathrm{T}} v_n = u_m^{\mathrm{T}} u_m = 1$, 即 $|v_n| = 1$, 故 $H_n = I_n - 2v_n v_n^{\mathrm{T}}$ 是 Householder 矩阵.

3. $A \otimes B$ 的特征值为 $i\lambda_j$, 即 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, 2\lambda_1, \cdots, 2\lambda_m, \cdots, n\lambda_1, \cdots, n\lambda_m$.

4. $AA^{(1)}CB^{(1)}B = C$, 或者 $\overline{\mathrm{vec}}(C) \in R(A \otimes B^{\mathrm{T}})$.

5. 取置换矩阵 $P = (e_1, e_3, e_2)$, 则

$$A^{(1,2)} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$, 由 $\mathrm{rank}((-1)I - A) = 2$ 知, $(\lambda + 1)^2$ 是 $3 - 2 = 1$ 个初等因子. 故 A 的初等因子为 $(\lambda - 1), (\lambda + 1)^2$, 从而

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

二、设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$\| A \|_{m_\infty} = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|, \quad \| A \|_{\mathrm{F}} = \left[\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

且有

$$\|A\|_{m_\infty} = n[\max_{i,j}|a_{ij}|^2]^{\frac{1}{2}} \le n[\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2]^{\frac{1}{2}} = n\|A\|_F$$

$$\|A\|_F \le [n^2\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|^2]^{\frac{1}{2}} = n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}| = \|A\|_{m_\infty}$$

故 $1\|A\|_F \le \|A\|_{m_\infty} \le n\|A\|_F$,即 $\|A\|_{m_\infty}$ 与 $\|A\|_F$ 等价.

三、$\det(\lambda I - A) = (\lambda+1)^3$,由于 $A+I\ne O,(A+I)^2 = O$,所以 A 的最小多项式 $m(\lambda) = (\lambda+1)^2$. 设 $f(\lambda) = e^{\lambda t} = m(\lambda)g(\lambda) + (a+b\lambda)$,则 $f'(\lambda) = te^{\lambda t} = [mg]' + b$,且有

$$\begin{cases} f(-1) = e^{-t} = a-b \\ f'(-1) = e^{-t} = b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = (t+1)e^{-t} \\ b = te^{-t} \end{cases}$$

于是

$$e^{At} = aI + bA = e^{-t}[(1+t)I + tA] = e^{-t}\begin{bmatrix} 1+4t & 0 & 8t \\ 3t & 1 & 6t \\ -2t & 0 & 1-4t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1+12t \\ 1+9t \\ 1-6t \end{bmatrix}$$

四、$\beta = (3,0,4)^T$,构造 $T_{13}(c,s): c = \frac{3}{5}\cdot s = \frac{4}{5}$,则

$$T_1 = T_{13} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad T_1A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix},\qquad \beta_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

构造 $T_{12}(c,s): c = \frac{3}{5}, s = -\frac{4}{5}$,则

$$T_2 = T_{12} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\quad T_2A_1 = \begin{bmatrix} 5 & \frac{16}{5} \\ 0 & \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

于是

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} T_1, \quad Q = T^{\mathrm{T}} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 15 & 16 & -12 \\ 0 & 15 & 20 \\ 20 & -12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ & 5 & \frac{16}{5} \\ & & \frac{13}{5} \end{bmatrix}, \quad A = QR$$

五、取 $D = \mathrm{diag}(1,1,3)$,**则** $B = DAD^{-1}$ **的** 3 **个孤立盖尔圆中各有** A **的一个特征值**.

六、1. $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = FG$

2. $F^{+} = (F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} F^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$G^{+} = (F^{\mathrm{T}})^{+} = (F^{+})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $x_0 = A^{+}b = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, AA^{+}b = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq b$,**故** x_0 **是极小范数最小二乘解**.

七、取 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ **的简单基** $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$,**并计算**

$$TE_{11} = E_{11}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0E_{11} + 1E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$TE_{12} = E_{12}B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 4E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$TE_{21} = E_{21}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22}$$

$$TE_{22} = E_{22}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + 4E_{21} + 0E_{22}$$

于是, T 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可求得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & -2 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

由 $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})P$ 可得

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

T 在基 X_1, X_2, X_3, X_4 下的矩阵为 Λ.

八、设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $C = (c_{ij})_{n\times n}$, 且 $(y_1, \cdots, y_n) = (x_1, \cdots, x_n)C$, 那么

$$y_j = c_{1j}x_1 + \cdots + c_{nj}x_n$$

$$(x_i, y_j) = c_{1j}(x_i, x_1) + \cdots + c_{nj}(x_i, x_n) = a_{i1}c_{1j} + \cdots + a_{in}c_{nj}$$

$$I = \begin{bmatrix} (x_1, y_1) & \cdots & (x_1, y_n) \\ \cdots & & \cdots \\ (x_n, y_1) & \cdots & (x_n, y_n) \end{bmatrix} = AC$$

因为度量矩阵 A 可逆,所以 $C = A^{-1}$. 因此,满足要求的基 $y_1, \cdots, y_n$ 存在,且由$(y_1, \cdots, y_n) = (x_1, \cdots, x_n) A^{-1}$ 确定.

试 题 二

一、(20 分) 判断正误、填空或计算填空:

1. 设 n 阶矩阵 A 不可逆,则 $\cos A$ 亦不可逆.( )

2. 设 T_m 是 m 阶 Givens 矩阵, I_{n-m} 是 $n-m$ 阶单位矩阵($m < n$),则 $T_n = \begin{bmatrix} T_m & O \\ O & I_{n-m} \end{bmatrix}$ 是 n 阶 Givens 矩阵.( )

3. 设 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,且 $A^{\mathrm{T}} = A$. 若 $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 与 A 正交相抵,则 B 的奇异值是(   ).

4. 已知 $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 及 A^+,设 $B = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$,则 $B^+ = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$.

5. 给定欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 的基 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,子空间 $L = L(\alpha)$,则正交投影矩阵 $P_L = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$.

6. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,则 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$.

二、(10 分) 证明: $\mathbf{C}^{n \times n}$ 中的矩阵范数 $\| \cdot \|_{m_1}$ 与 $\mathbf{C}^n$ 中的向量范数 $\| \cdot \|_p$ $(p \geq 1)$ 相容.

(提示: $A = (a_{ij})_{n \times n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$)

三、(12 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. 求 e^{At}.

2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b(t)$ 满足初始条件 $x(0) = (1,1,1,1,1)^T$ 的解.

四、(12 分) 用 Householder 变换求 $A = \begin{bmatrix} 3 & 14 & 9 \\ 6 & 43 & 3 \\ 6 & 22 & 15 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

五、(12 分) 用 Gerschgorin 定理分离 $A = \begin{bmatrix} 20 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 3i \end{bmatrix}$ $(i = \sqrt{-1})$ 的特征值,并在复平面上画图表示.

六、(12 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1. 求 A 的奇异值分解.

2. 利用 A 的奇异值分解求 A^+.

3. 求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (指出 x_0 的类型).

七、(12 分) 已知多项式空间 $P_2[t]$ 的一个基为

$$f_1(t) = 1 - t, \quad f_2(t) = 1 + t^2, \quad f_3(t) = t + 2t^2$$

线性变换 T 满足

$$Tf_1(t) = 2 + t^2, \quad Tf_2(t) = t, \quad Tf_3(t) = 1 + t + t^2$$

1. 求 T 在已知基下的矩阵.

2. 设 $f(t)=1+2t+3t^2$,求 $Tf(t)$.

八、(10 分) 已知欧氏空间 V^n 的一个标准正交基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,且 $\alpha_0=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n$,定义变换

$$T\alpha=\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0 \quad (\alpha\in V^n, k\text{为非零实数})$$

1. 验证 T 是线性变换.

2. 证明 T 是正交变换的充要条件为 $k=-\dfrac{2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

试题二解答

一、1. 错误. 例如 $A=O$ 时,$\cos A=I$ 可逆.

2. 正确.

3. 由 $\sigma(B)=\sigma(A)=\sqrt{\lambda(A^{\mathrm{T}}A)}=\sqrt{\lambda(A^2)}=|\lambda(A)|$ 知,B 的奇异值为 $|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|$.

4. $A\neq O$ 时,设 A 的满秩分解为 $A=FG$,则有

$$B=\begin{bmatrix}FG\\FG\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F\\F\end{bmatrix}G=\tilde{F}G$$

$$\tilde{F}^{+}=\left\{[F^{\mathrm{H}}\ \vdots\ F^{\mathrm{H}}]\begin{bmatrix}F\\F\end{bmatrix}\right\}^{-1}[F^{\mathrm{H}}\ \vdots\ F^{\mathrm{H}}]=$$

$$\frac{1}{2}(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}[F^{\mathrm{H}}\ \vdots\ F^{\mathrm{H}}]=\frac{1}{2}[F^{+}\ \vdots\ F^{+}]$$

$$B^{+}=G^{+}\tilde{F}^{+}=G^{+}\cdot\frac{1}{2}[F^{+}\ \vdots\ F^{+}]=\frac{1}{2}[A^{+}\ \vdots\ A^{+}]$$

$A=O$ 时,上述结果亦成立.

5. $P_L=\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)^{-1}\alpha^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$.

6. $\det(\lambda I-A)=\lambda(\lambda-1)^2$. 由 $\operatorname{rank}(1I-A)=2$ 知,$(\lambda-1)^2$ 是 $3-2=1$ 个初等因子. 故 A 的初等因子为 $\lambda,(\lambda-1)^2$,从而

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

二、设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$, 则

$$Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} x$$

且有

$$E_{ij} x = \xi_j e_i,\ \| E_{ij} x \|_p = [\, |\xi_j|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \| x \|_p$$

$$\| Ax \|_p \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\ \| E_{ij} x \|_p \leq$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\ \| x \|_p = \| A \|_{m_1} \| x \|_p$$

故 $\| A \|_{m_1}$ 与 $\| x \|_p$ 相容.

三、令 $J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $J_2 = [\,0\,]$, $J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & e^{J_2 t} & \\ & & e^{J_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & e^t & te^t \\ & & & & e^t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\left\{ x(0) + \int_0^t e^{-As} b(s)\,ds \right\} =$$

$$e^{At}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 + t + t^2 \\ 1 \\ 1 \\ (1+t)e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

四、$\beta_1 - |\beta_1| e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$H_1 = I - 2u_1 u_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 A = \left[\begin{array}{c|cc} 9 & 48 & 15 \\ \hline 0 & 9 & -3 \\ 0 & -12 & 9 \end{array}\right], \quad A_1 = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 - |\beta_2| e_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \end{bmatrix} - 15\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -6\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I - 2u_2 u_2^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, H_2 A_1 = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q = H_1\begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -14 \\ 10 & 11 & 2 \\ 10 & -10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 9 & 48 & 15 \\ & 15 & -9 \\ & & -3 \end{bmatrix}, \quad A = QR$$

五、取 $A = \mathrm{diag}(1, 1, 0.5)$，则 $B = DAD^{-1}$ 的3个孤立盖尔圆中各有 A 的一个特征值.

六、1. $B = A^{\mathrm{T}} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(\lambda I - B) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$.

$$\lambda_1 = 3, p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = 1, p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

由 $\mathrm{rank} A = 2$ 知 $V_1 = V$，于是

$$U_1 = AV_1\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$U = [U_1 \vdots U_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$A = U\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^{\mathrm{T}}$$

2. $$A^{+} = V\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}U^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $x_0 = A^{+}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $AA^{+}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = b$,故 x_0 是极小范数解.

七、1. $$(f_1, f_2, f_3) = (1, t, t^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (1, t, t^2)B_1$$

$$(Tf_1, Tf_2, Tf_3) = (1, t, t^2)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1, t, t^2)B_2$$

由此可得 $T(f_1, f_2, f_3) = (f_1, f_2, f_3)B_1^{-1}B_2$,故 T 在已知基下的矩阵为

$$A = B_1^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2.\ f = (1, t, t^2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (f_1, f_2, f_3)B_1^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (f_1, f_2, f_3)\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Tf = (f_1, f_2, f_3)A\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = (f_1, f_2, f_3)\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -4 + 3t - 2t^2$$

八、1. 设 $\alpha, \beta \in V^n$, $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$, 则有

$$\begin{aligned} T(l_1\alpha + l_2\beta) &= (l_1\alpha + l_2\beta) + k(l_1\alpha + l_2\beta, \alpha_0)\alpha_0 = \\ & l_1[\alpha + k(\alpha, \alpha_0)\alpha_0] + l_2[\beta + k(\beta, \alpha_0)\alpha_0] = \\ & l_1(T\alpha) + l_2(T\beta) \end{aligned}$$

故 T 是线性变换.

2. T 是正交变换等价于 $(T\alpha, T\alpha) = (\alpha, \alpha)$(任意 $\alpha \in V^n$),即

$$(\alpha, \alpha) + 2k(\alpha, \alpha_0)^2 + k^2(\alpha, \alpha_0)^2(\alpha_0, \alpha_0) = (\alpha, \alpha)$$

也就是

$$k(\alpha, \alpha_0)^2[2 + k(\alpha_0, \alpha_0)] = 0$$

由 $\alpha \in V^n$ 的任意性知,上式等价于 $2 + k(\alpha_0, \alpha_0) = 0$,即

$$k = -\frac{2}{(\alpha_0, \alpha_0)} = -\frac{2}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$$

试 题 三

一、(15 分) 填空或计算填空:

1. 设 A 是 n 阶 Householder 矩阵,则 $\cos(2\pi A) = ($　　$)$.

2. 已知向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, 且 $1 \leq p < +\infty$, 则

$$\begin{cases} \|x\|_\infty = (\qquad) \\ \|x\|_p = (\qquad) \end{cases}.$$

3. 设 $A_{m\times m}$ 和 $B_{n\times n}$ 都是酉矩阵,则 $(A^{\mathrm{H}}\quad B)(A\quad B^{\mathrm{H}}) = ($　　$)$.

4 .设 $X = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \end{bmatrix}$, $f(X) = \xi_{11} + \xi_{12}^2 + \xi_{13}^3$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X} =$ $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$.

5 .已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$.

二、(12 分) 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, 定义实数

$$\| A \|_G = \sqrt{mn} \max_{i,j} | a_{ij} |$$

证明: $\| A \|_G$ 是 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的矩阵范数, 且与向量的 2 - 范数相容 .

三、(12 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1 .求 e^{At} .

2 .用矩阵函数方法求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t)$ 满足初始条件 $x(0) = (1, 0, 0 - 1)^{\mathrm{T}}$ 的解 .

四、(12 分) 用 Householder 变换求 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解 .

五、(12 分) 用 Gerschgorin 定理隔离 $A = \begin{bmatrix} 90 & 1 & 7 \\ 1 & 80 & 8 \\ 15 & 2 & 40 \end{bmatrix}$ 的特征值(要求画图表示), 并根据实矩阵特征值的性质改进所得结果 .

六、(13 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 154 \end{bmatrix}$.

1 .求 A 的满秩分解 .

2 .求 A^+ .

3 .用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax = b$ 是否有解 .

4 .求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (要求指出所求的是哪种解) .

七、(12 分) 在矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中,已知 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,定义变换 T:

$$TX = PXP^{-1} \qquad (X \in \mathbf{R}^{2\times 2})$$

1 .验证 T 是线性变换 .

2 .求 T 的特征值与特征向量 .

八、(12 分) 给定实线性空间 V^n 的基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,设 $x, y \in V^n$ 在该基下的坐标分别为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$,定义实数 $(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n$,证明:

1 .实数 (x, y) 是 V^n 的内积 .

2 .在该内积下,基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 V^n 的标准正交基 .

试题三解答

一、1 .由于 A 是 Householder 矩阵,所以 $A^2 = I$,于是有

$$\cos(2\pi A) = I - \frac{1}{2\,!}(2\pi A)^2 + \frac{1}{4\,!}(2\pi A)^4 - \cdots =$$

$$\left[1 - \frac{(2\pi)^2}{2\,!} + \frac{(2\pi)^4}{4\,!} - \cdots\right] I = [\cos(2\pi)]\, I = I$$

2 .$\max\limits_{1\leq i\leq n} |\xi_i|, \left[\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$.

3 .$(A^{\mathrm{H}} \quad B)(A \quad B^{\mathrm{H}}) = (A^{\mathrm{H}} A) \quad (BB^{\mathrm{H}}) =$

$$I_m \quad I_n = I_{(mn)}$$

4 .$\begin{bmatrix} 1 & 2\xi_2 & 3\xi_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5 .$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^3$.由 $\operatorname{rank}(1I - A) = 1$ 知,$(\lambda - 1)^3$ 是 $3 - 1 = 2$ 个初等因子的乘积,故 A 的初等因子为 $(\lambda - 1)^2$,$(\lambda - 1)$,从而

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

二、非负性:$A = O$ 时,$a_{ij} = 0$,$\max\limits_{i,j} |a_{ij}| = 0$,从而 $\|A\|_G = 0$;$A \neq O$ 时,存在 $a_{i_0 j_0} \neq 0$,$\|A\|_G = \sqrt{mn} \max\limits_{i,j} |a_{ij}| \geq \sqrt{mn} |a_{i_0 j_0}| > 0$.

容易验证齐次性与三角不等式成立 .

乘法相容性:设 $B = (b_{ij})_{n \times p}$,则有

$$\begin{aligned} \|AB\|_G &= \sqrt{mp} \max_{i,j} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leq \\ & \sqrt{mp} \max_{i,j} \left[\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| |b_{kj}| \right] \leq \\ & \sqrt{mp} \cdot n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot \max_{i,j} |b_{ij}| = \\ & \left[\sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}| \right] \left[\sqrt{np} \max_{i,j} |b_{ij}| \right] = \\ & \|A\|_G \|B\|_G \end{aligned}$$

因此,$\|A\|_G$ 是矩阵范数 .

设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$,则有

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |\xi_j| \right]^2 \leq \\ & \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \right) \right] = \\ & \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right] \left[\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \right] \leq \\ & \left[(mn) \max_{i,j} |a_{ij}|^2 \right] \|x\|_2^2 = \|A\|_G^2 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

即 $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_G \|x\|_2$.

三、对于实对称矩阵 A, 可求得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2}P$$

于是

$$e^{At} = P\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & e^{2t} & \\ & & & e^{2t} \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$P\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}P^{-1} + e^{2t}P\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{t}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+e^{2t} & 0 & 0 & 1-e^{2t} \\ 0 & 1+e^{2t} & 1-e^{2t} & 0 \\ 0 & 1-e^{2t} & 1+e^{2t} & 0 \\ 1-e^{2t} & 0 & 0 & 1+e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}x(0) = (e^{2t}, 0, 0, -e^{2t})^{\mathrm{T}}.$$

四、$\beta - |\beta| e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$H_1 = I - 2u_1u_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ H_1A = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 2 \\ \cline{2-3} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 - |\beta_2| e_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I - 2u_2 u_2^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},\ H_2 A_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q = H_1\begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & 5 & -1 \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

五、取 $D = \mathrm{diag}(1,1,2)$,**则** $B = DAD^{-1}$ **的** 3 **个孤立盖尔圆中各有** A **的一个特征值** .**因为** A **是实矩阵,所以复特征值必成对共轭出现,从而关于实轴对称的孤立盖尔圆中的特征值必为实数** .

六、1 .$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = FG$$

2 .$F^{+} = (F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} F^{\mathrm{T}} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$G^{+} = G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1} = G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \\ -5 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{154}\begin{bmatrix} -18 & 33 & -1 \\ 8 & 11 & 9 \\ 26 & -22 & 10 \\ -16 & -22 & -18 \end{bmatrix}$$

3．$AA^{+}b = A\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 10 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 33 \\ 54 \end{bmatrix} \neq b$，故 $Ax = b$ 无解．

4．极小范数最小二乘数 $x_0 = A^{+}b = (-1,9,10,-18)^{\mathrm{T}}$．

七、1．设 $X,Y \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ 及 $k,l \in \mathbf{R}$，则有

$$\begin{aligned} T(kX + lY) = P(kX + lY)P^{-1} &= \\ k(PXP^{-1}) + l(PYP^{-1}) &= \\ k(TX) + l(TY) & \end{aligned}$$

故 T 是线性变换．

2．$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，取 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的简单基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$，并计算

$$TE_{11} = PE_{11}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 1E_{11} + 0E_{12} + 2E_{21} + 0E_{22}$$

$$TE_{12} = PE_{12}P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$-2E_{11} + 1E_{12} - 4E_{21} + 2E_{22}$$

$$TE_{21} = PE_{21}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22}$$

$$TE_{22} = PE_{22}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$0E_{11} + 0E_{12} - 2E_{21} + 1E_{22}$$

于是，T 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可求得 A 的特征值与特征向量为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1,\quad p_1 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, p_2 = (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

于是,T 的特征值与特征向量为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$$

$$X=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})(k_1p_1+k_2p_2)=$$

$$k_1\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad(k_1\text{ 与 }k_2\text{ 不同时为 }0)$$

八、1.交换律:

$(x,y)=\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n=\eta_1\xi_1+\cdots+\eta_n\xi_n=(y,x)$

分配律:设 z 在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的坐标为 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)^{\mathrm{T}}$,则有

$$(x,y+z)=\xi_1(\eta_1+\gamma_1)+\cdots+\xi_n(\eta_n+\gamma_n)=$$

$$(\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n)+(\xi_1\gamma_1+\cdots+\xi_n\gamma_n)=$$

$$(x,y)+(x,z)$$

齐次性:设 $k\in\mathrm{R}$,则有

$$(kx,y)=(k\xi_1)\eta_1+\cdots+(k\xi_n)\eta_n=$$

$$k(\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_n\eta_n)=k(x,y)$$

非负性:$x=0$ 时,$\xi_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$,$(x,x)=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2=0$;$x\neq0$ 时,存在 i_0 使得 $\xi_{i_0}\neq0$,$(x,x)=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2\geq\xi_{i_0}^2>0$.

因此,(x,y) 是 x 与 y 的内积.

2.x_i 在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的坐标为 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$,于是有

$$(x_i,x_i)=1\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$(x_i,x_j)=0\quad(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$$

故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是标准正交基.

试 题 四

一、(18 分)填空或计算填空:

1.线性空间 V^n 中,设由基(Ⅰ)$x_1,\cdots,x_n$ 改变为基(Ⅱ)$y_1,\cdots,y_n$ 的过渡矩阵为 C,给定矩阵 $B_{n\times n}$,线性变换 T 满足:$(Ty_1,\cdots,Ty_n)=(x_1,\cdots,x_n)B$,则 T 在基(Ⅱ)下的矩阵是(　　).

2．已知 $A=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{i} & 2 & 3\\ 3 & 0 & \mathrm{i} & 2\\ 2 & 3 & 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，则 $\begin{cases}\|A\|_1=(\quad\quad)\\ \|A\|_{m_\infty}=(\quad\quad)\\ \|A\|_F=(\quad\quad)\end{cases}$．

3．已知 $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.7 & 0.6\end{bmatrix}$，判定矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛的根据是(　　　)，幂级数的和是$\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$．

4．已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $A\quad B$ 的全部特征值是(　　　)．

5．已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准形 $J=\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$．

6．已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，则 $A^{(1,2)}=\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$．

二、(12 分) 设可逆矩阵 $S\in \mathrm{R}^{n\times n}$，且 $\|x\|_s=\|Sx\|_2\quad(x\in \mathrm{R}^n)$ 是 R^n 中的向量范数．

1．若 $\|A\|_s$ 表示 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 中从属于向量范数 $\|x\|_s$ 的矩阵范数，试导出 $\|A\|_s$ 与矩阵的 2－范数之间的关系式．

2．给定非零列向量 $y\in \mathrm{R}^n$，证明 $\|x\|=\|xy^{\mathrm{T}}\|_s\,(x\in \mathrm{R}^n)$ 是 R^n 中的向量范数．

三、(14 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ \mathrm{e}^t-1\end{bmatrix}$．

1．求 e^{At}．

2．用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 的解．

四、(10 分) 用 Householder 变换求 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\2&1&6\end{bmatrix}$的 QR 分解.

五、(10 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&3&1\\1&1&10\end{bmatrix}$.

1 .用 Gerschgorin 定理分离 A 的特征值,并在复平面上画图表示.

2 .用实对称矩阵特征值的性质,改进上面得出的结果.

六、(14 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$.

1 .求 A 的满秩分解.

2 .求 A^{+}.

3 .用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解.

4 .求方程组 $Ax=b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (指出所求的是哪种解).

七、(14 分) 给定线性空间 V^6 的基 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 及线性变换 T:

$$Tx_i = x_i + 2x_{7-i} \qquad (i=1,2,\cdots,6)$$

1 .求 T 的全部特征值与特征向量(利用已知基表示).

2 .判断是否存在另一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵?若存在,把它构造出来(利用已知基表示).

八、(8 分) 设 $A\in \mathrm{R}^{m\times n}$,证明在列向量空间 R^m 中, $R^{\perp}(A)=N(A^{\mathrm{T}})$.

试题四解答

一、1 .$T(y_1,\cdots,y_n)=(x_1,\cdots,x_n)B=(y_1,\cdots,y_n)C^{-1}B$

2 .6,　12,　$\sqrt{42}$

3 .$\rho(A)\leq\|A\|_1=0.9<1,(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3}&2\\\frac{14}{3}&6\end{bmatrix}$.

4 .因为 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$, B 的特征值为 $\mu_1=1,\mu_2=-1$,所以 A　B 的特征值为 $\lambda_i\mu_j$,即 2, -1, -2, 1 .

5 .$\det(\lambda I-A)=\lambda^3$,由 $\operatorname{rank}(0I-A)=1$ 知, λ^3 是 $3-1=2$ 个初等因子的乘积,故 A 的初等因子为 λ^2,λ,从而

$$J=\begin{bmatrix}0&1&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$$

6 .$[A\ \vdots\ I]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{cccc|cc}1&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&-1&1\end{array}\right]$

$$A^{(1,2)}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

二、1 .根据从属范数的定义可得

$$\|A\|_s=\max_{x\neq0}\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}=\max_{x\neq0}\frac{\|SAx\|_2}{\|Sx\|_2}$$

令 $y=Sx$,因为 S 可逆,所以 $x\neq0$ 等价于 $y\neq0$,于是有

$$\|A\|_s=\max_{y\neq0}\frac{\|SAS^{-1}y\|_2}{\|y\|_2}=\|SAS^{-1}\|_2$$

2 .非负性: $x=0$ 时, $\|x\|=\|xy^{\mathrm{T}}\|_s=\|O\|_s=0$; $x\neq0$ 时, $xy^{\mathrm{T}}\neq O$, $\|x\|=\|xy^{\mathrm{T}}\|_s>0$.

齐次性:任意 $k\in \mathbf{R}$,有

$$|kx| = |(kx)y^{\mathrm{T}}|_s = |k|\,|xy^{\mathrm{T}}|_s = |k|\,|x|$$

三角不等式:任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$,有

$$|x_1+x_2| = |(x_1+x_2)y^{\mathrm{T}}|_s = |x_1y^{\mathrm{T}}+x_2y^{\mathrm{T}}|_s \leq$$
$$|x_1y^{\mathrm{T}}|_s + |x_2y^{\mathrm{T}}|_s = |x_1|+|x_2|$$

因此,$|x|$是向量范数 .

三、1 .方法一(级数求和法) .$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2$,由 $\varphi(A) = O$ 知 $A^3 = A^2$,于是有

$$\mathrm{e}^{At} = I + \frac{1}{1\,!}(At) + \frac{1}{2\,!}(At)^2 + \frac{1}{3\,!}(At)^3 + \cdots =$$
$$I + At + \left[\frac{t^2}{2\,!}+\frac{t^3}{3\,!}+\cdots\right]A^2 = I + At + (\mathrm{e}^t - t - 1)A^2 =$$
$$\begin{bmatrix} 1-2t & t & 0 \\ -4t & 2t+1 & 0 \\ -\mathrm{e}^t+2t+1 & \mathrm{e}^t - t - 1 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

方法二(待定法) .$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2(\lambda - 1)$,设 $f(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda t} = \varphi(\lambda)g(\lambda) + (a + b\lambda + c\lambda^2)$,则 $f'(\lambda) = t\mathrm{e}^{\lambda t} = [\varphi g]' + (b + 2c\lambda)$,且有

$$\begin{cases} f(0) = 1 = a \\ f'(0) = t = b \\ f(1) = \mathrm{e}^t = a + b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = t \\ c = \mathrm{e}^t - t - 1 \end{cases}$$

于是

$$\mathrm{e}^{At} = aI + bA + cA^2 = \begin{bmatrix} 1-2t & t & 0 \\ -4t & 2t+1 & 0 \\ -\mathrm{e}^t+2t+1 & \mathrm{e}^t - t - 1 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

2 .$x(t) = \mathrm{e}^{At}\left\{x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-As}b(s)\,\mathrm{d}s\right\} =$

$$\mathrm{e}^{At}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ (t-1)\mathrm{e}^t \end{bmatrix}$$

四、$\beta_1 - |\beta_1| e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$H_1 = I - 2u_1 u_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 A = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right], \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 - |\beta_2| e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I - 2u_2 u_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q = H_1\begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ & 1 & -2 \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

五、取 $D = \mathrm{diag}(1,1,2.5)$**,则** $B = DAD^{-1}$ **的** 3 **个孤立盖尔圆中各有** A**的一个特征值.因为** A**是实对称矩阵,所以** A **的特征值都是实数,从而孤立盖尔圆中的特征值都在实轴上.**

六、1. $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = FG$

2. $F^{+} = (F^{\mathrm{T}} F)^{-1} F^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} F^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$G^{+} = G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1} = G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = G^+ F^+ = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -5 & 7 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

3 .$AA^+ b = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = b$, **故** $Ax = b$ **有解** .

4 .**极小范数解** $x_0 = A^+ b = (1,1,0,1)^T$.

七、1 .T **在基** $x_1, x_2, \cdots, x_6$ **下的矩阵为**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 2 \\ & 1 & & & 2 & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & 2 & & & 1 & \\ 2 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

求得 $\det(\lambda I - A) = [(\lambda - 1)^2 - 2^2]^3 = (\lambda - 3)^3(\lambda + 1)^3$, A **的特征值与特值向量为**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$
$$p_1 = (1,0,0,0,0,1)^T$$
$$p_2 = (0,1,0,0,1,0)^T$$
$$p_3 = (0,0,1,1,0,0)^T$$
$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -1$$
$$p_4 = (1,0,0,0,0,-1)^T$$
$$p_5 = (0,1,0,0,-1,0)^T$$
$$p_6 = (0,0,1,-1,0,0)^T$$

T **的特征值与特征向量为**

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \\ y_1 = x_1 + x_6, \quad y_2 = x_2 + x_5, \quad y_3 = x_3 + x_4 \\ y = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ 不同时为 } 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = -1 \\ y_4 = x_1 - x_6, \quad y_5 = x_2 - x_5, \quad y_6 = x_3 - x_4 \\ y = k_4 y_4 + k_5 y_5 + k_6 y_6 \quad (k_4, k_5, k_6 \text{ 不同时为 } 0) \end{cases}$$

2 .因为 $y_1, y_2, \cdots, y_6$ 线性无关,即 T 有 6 个线性无关的特征向量,所以 T 在基 $y_1, y_2, \cdots, y_6$ 下的矩阵为 $\Lambda = \mathrm{diag}(3,3,3,-1,-1,-1)$.

八、划分 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,则有

$$a_j \in \mathrm{R}^m, \quad R(A) = \{k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n \mid k_j \in \mathrm{R}\}$$

$$\begin{aligned}[R(A)]^{\perp} = & \{y \mid y \perp (k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n), k_j \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{R}^m\} = \\ & \{y \mid y \perp a_j, j = 1,2,\cdots,n, y \in \mathrm{R}^m\} = \\ & \{y \mid a_j^{\mathrm{T}} y = 0, j = 1,2,\cdots,n, y \in \mathrm{R}^m\} = \\ & \{y \mid A^{\mathrm{T}} y = 0, y \in \mathrm{R}^m\} = N(A^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

试 题 五

一、(20 分) 填空或计算填空:

1 .已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,则 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

2 .已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 2 \\ -\mathrm{i} & 2 & 5 \end{bmatrix}$,$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$,则 $\begin{cases} \|A\|_1 = (\quad) \\ \|A\|_2 = (\quad) \\ \|A\|_F = (\quad) \end{cases}$.

3 .已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,且幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k}{6^k} x^k$ 的收敛半径为 6,则矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k}{6^k} A^k$ 是(　　),其理由是(　　) .

4 .设 $A \in \mathrm{C}^{n \times n}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$,则 A A 的 n^2 个线性无关的特征向量是(　　) .

5 .设 $x_1, x_2, \cdots, x_m (m > 1)$ 是 R^n 中两两正交的单位列向量,记

$A=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,则 $A^+=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$.

二、(10 分) 设 V^n 是数域 R 上的线性空间, $x\in V^n$ 在基(Ⅰ) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的坐标为 $\alpha=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)^{\mathrm T}$, $|\cdot|_2$ 表示 $\mathrm R^n$ 中向量的 2 - 范数 .

1 .证明: $|x|=|\alpha|_2$ 是 V^n 中的向量范数 .

2 .设 $x\in V^n$ 在基(Ⅱ) $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 下的坐标为 $\beta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm T}$,且由基(Ⅰ) 改变为基(Ⅱ) 的过渡矩阵为 C,证明: $|x|=|\beta|_2$ 的充要条件是 C 为正交矩阵 .

三、(12 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-2&2\end{bmatrix}$, $b(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\\mathrm e^t\end{bmatrix}$.

1 .求 $\mathrm e^{At}$.

2 .用矩阵函数方法求微分方程 $\dfrac{\mathrm d}{\mathrm dt}x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)=\left(-1,0,-\dfrac{1}{2}\right)^{\mathrm T}$ 的解 .

四、(12 分) 用 Givens 变换求 $A=\begin{bmatrix}0&3&4\\3&5&0\\4&0&5\end{bmatrix}$ 的 QR 分解 .

五、(12 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}100\mathrm i&10&20\\8&200&50\\10&40&100\end{bmatrix}$ $(\mathrm i=\sqrt{-1})$, 用 Gerschgorin 定理分离 A 的特征值,并在复平面上画图表示 .

六、(12 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\1&1&1&1\\2&1&1&2\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

1 .求 A 的满秩分解 .

2 .求 A^{+} .

3 .用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax = b$ 是否有解 .

4 .求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (指出所求的是哪种解) .

七、(12 分) 欧氏空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中的内积定义为

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} \quad (A = (a_{ij})_{2\times 2},\ B = (b_{ij})_{2\times 2})$$

选取 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,构造子空间 $W = L(A_1, A_2)$.

1 .求 $W^{\perp}$ 的一个基 .

2 .利用已知的 W 和 $W^{\perp}$ 的基求 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个标准正交基 .

八、(10 分) 设欧氏空间 V^n 的两个子空间 V_1 和 V_2 正交,即

$$(x, y) = 0 \quad (\text{任意 } x \in V_1, \text{任意 } y \in V_2)$$

若 V_1 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_r (r \geq 1)$, V_2 的一个基为 $y_1, y_2, \cdots, y_s (s \geq 1)$, 证明: V_1 与 V_2 正交的充要条件是 $(x_i, y_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r; j = 1, 2, \cdots, s)$.

试题五解答

一、1 .$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.由 $\mathrm{rank}(1I - A) = 2$ 知, $(\lambda - 1)^2$ 是 $3 - 2 = 1$ 个初等因子,故 A 的初等因子为 $(\lambda - 1)^2, (\lambda - 2)$,从而

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

2 .8,　6,　$\sqrt{37}$

3 .因为 A 的特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$,所以 $\rho(A) = 5 < 6$,故矩阵幂级数是收敛的 .

4 .记 $P = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$,则 $P^{-1}AP = \Lambda$(对角矩阵),且有

$(P \quad P)^{-1}(A \quad A)(P \quad P) = (P^{-1}AP) \quad (P^{-1}AP) = \Lambda \quad \Lambda$

故 $P \quad P$ 的列向量 $\xi_i \quad \xi_j\ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $A \quad A$ 的线性无关的特征向量 .

5 .由 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 标准正交知, A 是列满秩矩阵, 于是 $A^+ = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} = I^{-1}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}$.

二、1 非负性: $x = 0$ 时, $\alpha = 0$, $|x| = |\alpha|_2 = 0$; $x \neq 0$ 时, $\alpha \neq 0$, $|x| = |\alpha|_2 > 0$.

齐次性:任意 $k \in \mathrm{R}$, kx 的坐标为 $k\alpha$,则有

$$|kx| = |k\alpha|_2 = |k|\,|\alpha|_2 = |k|\,|x|$$

三角不等式:任意 $y \in V^n$ 的坐标为 β, $x + y$ 的坐标为 $\alpha + \beta$, 则有

$$|x + y| = |\alpha + \beta|_2 \leq |\alpha|_2 + |\beta|_2 = |x| + |y|$$

因此, $|x|$ 是向量范数 .

2 .因为 V^n 是实线性空间,所以 C 是实矩阵, α 与 β 是实向量 .

充分性 .由 $C^{\mathrm{T}}C = I$ 可得

$$|x|^2 = |\alpha|_2^2 = \alpha^{\mathrm{T}}\alpha = (C\beta)^{\mathrm{T}}(C\beta) =$$

$$\beta^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\beta = \beta^{\mathrm{T}}\beta = |\beta|_2^2$$

即 $|x| = |\beta|_2$.

必要性 .由 $|x| = |\alpha|_2$ 和 $|x| = |\beta|_2$ 可得 $|\alpha|_2^2 = |\beta|_2^2$, 即

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = \beta^{\mathrm{T}}\beta, \quad \beta^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}C)\beta = \beta^{\mathrm{T}}\beta$$

记 $B = C^{\mathrm{T}}C = (b_{ij})_{n\times n}$, 则 $B^{\mathrm{T}} = B$.取 $x = y_i$ 时, $\beta = e_i$, 且有

$$\beta^{\mathrm{T}}B\beta = b_{ii}, \quad \beta^{\mathrm{T}}\beta = 1$$

故 $b_{ii} = 1\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 取 $x = y_i + y_j\ (i \neq j)$ 时, $\beta = e_i + e_j$, 且有

$$\beta^{\mathrm{T}}B\beta = 2 + 2b_{ij}, \quad \beta^{\mathrm{T}}\beta = 2$$

故 $b_{ij} = 0\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, n)$.因此 $B = I$, 即 $C^{\mathrm{T}}C = I$.

三、1 .方法一(待定法) .$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 由 $(A - I)(A - 2I) = O$ 知, A 的最小多项式 $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.设 $f(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda t} = m(\lambda)g(\lambda) + (a + b\lambda)$, 则

$$\begin{cases} f(1) = \mathrm{e}^t = a + b \\ f(2) = \mathrm{e}^{2t} = a + 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} \\ b = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t \end{cases}$$

于是

$$\mathrm{e}^{At}=aI+bA=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{t}&0\\\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&2\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

方法二(对角化法) 对于矩阵 A,可求得 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

于是

$$\mathrm{e}^{At}=P\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{t}&&\\&\mathrm{e}^{t}&\\&&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{t}&0&0\\0&\mathrm{e}^{t}&0\\\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}&2\mathrm{e}^{t}-2\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{2t}\end{bmatrix}$$

2 . $x(t)=\mathrm{e}^{At}\left\{x(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{-As}b(s)\mathrm{d}s\right\}=$

$$\mathrm{e}^{At}\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-\mathrm{e}^{-t}\\0\\\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t})\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{t}\end{bmatrix}$$

四、$\beta=(0,3,4)^{\mathrm{T}}$,**构造** $T_{12}(c,s):c=0,s=1$,**则**

$$T_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_{12}\beta=\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}$$

再构造 $T_{13}(c,s):c=\frac{3}{5},s=\frac{4}{5}$,**则**

$$T_{13}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&0&4\\0&5&0\\-4&0&3\end{bmatrix},\quad T_{13}(T_{12}\beta)=\begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}$$

于是可得

$$T_1 = T_{13}T_{12} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}, T_1 A = \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 3 & 4 \\ \hline 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

构造 $T_{12}(c, s): c = -\dfrac{3}{5}, s = -\dfrac{4}{5}$,**则**

$$T_2 = T_{12} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad T_2 A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

于是

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} T_1, \quad Q = T^{\mathrm{T}} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & 15 & -20 \\ 15 & 16 & 12 \\ 20 & -12 & -9 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ & 5 & 0 \\ & & -5 \end{bmatrix}, \quad A = QR$$

五、取 $D = \mathrm{diag}(2, 1, 1)$,**则** $B = DAD^{-1}$ **的** 3 **个孤立盖尔圆中各有** A **的一个特征值** .

六、1 .$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = FG$

2 .$F^{+} = (F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} F^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

$$G^{+} = G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1} = G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+} F^{+} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3 .$AA^{+} b = A \cdot \frac{2}{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{11}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \neq b$,故 $Ax = b$ 无解 .

4 .极小范数最小二乘解 $x_0 = A^{+} b = \frac{2}{11}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

七、1 .设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in W^{\perp}$,则有 $A_1 \perp X, A_2 \perp X$,即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

该齐次线性方程组的基础解系为 $(1, -1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (1, -1, -2, 3)^{\mathrm{T}}$,故 $W^{\perp}$ 的一个基为

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

2 .对 W 的基 A_1, A_2 正交化:

$B_1 = A_1$

$$B_2 = A_2 - \frac{(A_2, B_1)}{(B_1, B_1)} B_1 = A_2 - \frac{1}{2} B_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

对 B_1, B_2 单位化:$(B_1, B_1) = 2, (B_2, B_2) = \frac{5}{2}$,$W$ 的一个标准正交基为

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{5/2}} B_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$W^{\perp}$ 的正交基为 A_3, A_4,单位化可得标准正交基为

$$C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}A_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \frac{1}{\sqrt{15}}A_4 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

于是, $\mathrm{R}^{2\times 2} = W \quad W^{\perp}$ **的一个标准正交基为** C_1, C_2, C_3, C_4 .

八、必要性 .**已知** $V_1 \perp V_2$,**因为** $x_i \in V_1$, $y_j \in V_2$,**所以**$(x_i, y_j) = 0(i = 1,2,\cdots,r; j = 1,2,\cdots,s)$.

充分性 .**已知**$(x_i, y_j) = 0(i = 1,2,\cdots,r; j = 1,2,\cdots,s)$,**对于任意的** $x \in V_1$, $y \in V_2$ **有**

$$x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_r x_r, \quad y = \eta_1 y_1 + \cdots + \eta_s y_s$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\xi_i x_i, \eta_j y_j) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\xi_i\eta_j(x_i, y_j) = 0$$

故 $V_1 \perp V_2$.

试 题 六

一、(20 **分**) **填空或计算填空**:

1 .**已知** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,**则** A **的** Jordan **标准** $J = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

2 .**已知** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$,**则**$\begin{cases} \|A\|_{m_1} = (\qquad) \\ \|A\|_{m_\infty} = (\qquad) \\ \|A\|_1 = (\qquad) \end{cases}$.

3 .**设** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,**则矩阵幂级数** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}A^k$ **是**$(\qquad)$.

4 .**设** x **是** m **维列向量**, y **是** n **维列向量**, $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$,**则** $\|x \quad y\|_2 = (\qquad)$.

5．设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\end{bmatrix}$，则 $A^{(1,2)}=\begin{bmatrix}\quad\end{bmatrix}$．

二、(10 分) 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中矩阵的从属范数，若 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 满足 $\|A\|<1$，证明 $\|(I-A)^{-1}\|\leq\dfrac{1}{1-\|A\|}$．

三、(12 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\t\end{bmatrix}$．

1．求 e^{At}．

2．用矩阵函数方法求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 的解．

四、(12 分) 用 Householder 变换求 $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&0&2\\2&1&1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解．

五、(12 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}9&1&1\\1&\mathrm{i}&1\\1&1&3\end{bmatrix}$ $(\mathrm{i}=\sqrt{-1})$，用 Gerschgorin 定理分离 A 的特征值，并在复平面上画图表示．

六、(12 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\2&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\-2\end{bmatrix}$．

1．求 A 的满秩分解．

2．求 A^{+}．

3．用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解．

4 .**求方程组** $Ax = b$ **的极小范数解或极小范数最小二乘解** x_0 (**指出所求的是哪种解**) .

七、(12 **分**) **在多项式空间** $P_2[t]$ **中,设** $f(t) = k_1 + k_2 t + k_3 t^2$,**线性变换** T **为**

$$Tf(t) = (k_2 + k_3) + (k_1 + k_3)t + (k_1 + k_2)t^2$$

求 $P_2[t]$ **的一个基,使** T **在该基下的矩阵为对角矩阵** .

八、(10 **分**) **设实线性空间** V **中的两个线性变换** T_1 **和** T_2 **满足** $T_1 T_2 = T_2 T_1$,**给定** $\lambda_0 \in \mathrm{R}$,**证明**:

1 .**集合** $W = \{x \mid T_1 x = \lambda_0 x, x \in V\}$ **是** V **的子空间** .

2 .W **是** T_2 **的不变子空间** .

试题六解答

一、$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$,**由** $\mathrm{rank}(2I - A) = 2$ **知**,$(\lambda - 2)^2$ **是** $3 - 2 = 1$ **个初等因子,故** A **的初等因子为**$(\lambda - 1)$,$(\lambda - 2)^2$,**从而**

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

2 .$\frac{1}{2}(n + 1)n^2$, n^2 , $\frac{1}{2}n(n + 1)$

3 .**因为** $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,**且** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ **与** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ **都收敛,所以** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} A^k$ **收敛** .

4 .**因为**$\| x \quad y \|_2^2 = (x \quad y)^{\mathrm{H}} (x \quad y) = (x^{\mathrm{H}} x) \quad (y^{\mathrm{H}} y) = 1$,**所以**$\| x \quad y \|_2 = 1$.

5 .**因为**$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

所以

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = I_4$$

$$A^{(1,2)} = P\begin{bmatrix} I_2 \\ O \end{bmatrix} Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

或者,由 A **行满秩求得**

$$A^+ = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

也是一个 $A^{(1,2)}$.

二、若 $\det(I - A) = 0$,**则** 1 **是** A **的一个特征值,从而有** $\|A\| \geq \rho(A) \geq 1$ **这与题设** $\|A\| < 1$ **矛盾,故** $\det(I - A) \neq 0$,**即** $I - A$ **为可逆矩阵.因为**

$$(I - A)^{-1}(I - A) = I, \quad (I - A)^{-1} = I + (I - A)^{-1}A$$

所以

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|(I - A)^{-1}\|\|A\| = 1 + \|(I - A)^{-1}\|\|A\|$$

故

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

三、设 $A = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,**则** $P_2^{-1}A_2P_2 = J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,**从而有**

$$P = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & P_2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{At} = P\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & & \\ & \mathrm{e}^{2t} & & \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}P^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & & \\ & \mathrm{e}^{2t} & & \\ \hline & & 1 & \\ & & t & 1 \end{array}\right]$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}\left\{ x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-As} b(s)\mathrm{d}s \right\} =$$

$$\mathrm{e}^{At}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{e}^{-2t} \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ t \\ t^2 + 1 \end{bmatrix}$$

四、$\beta_1 - |\beta_1| e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$H_1 = I - 2u_1u_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, H_1A = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 - |\beta_2| e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = I - 2u_2u_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = H_1\begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

五、取 $D = \mathrm{diag}(2, 1, 1)$**,则** $B = DAD^{-1}$ **的** 3 **个孤立盖尔圆中各**

有 A 的一个特征值.

六、1. $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = FG$

2. $F^{+} = (F^{T} F)^{-1} F^{T} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} F^{T} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$G^{+} = G^{T} (GG^{T})^{-1} = G^{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+} F^{+} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $A^{+} b = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $AA^{+} b = b$, 故 $Ax = b$ 有解.

4. 极小范数解 $x_0 = A^{+} b = \left(-2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)^{T}$.

七、取 $P_2[t]$ 的简单基 $1, t, t^2$, 计算

$$T1 = t + t^2, \quad Tt = 1 + t^2, \quad Tt^2 = 1 + t$$

于是, T 在基 $1, t, t^2$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可求得 $P^{-1} AP = \Lambda$, 其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

由 $(f_1, f_2, f_3) = (1, t, t^2) P$ 可得

$$f_1 = 1 + t + t^2, \quad f_2 = 1 - t, \quad f_3 = 1 - t^2$$

T 在基 f_1, f_2, f_3 下的矩阵为 Λ.

八、1.因为 $T_1 0 = 0 = \lambda_0 0$,所以 $0 \in W$,故 W 非空.设 $x, y \in W$, $k \in \mathrm{R}$,则有

$$T_1(x + y) = T_1 x + T_1 y = \lambda_0 x + \lambda_0 y = \lambda_0 (x + y)$$

$$T_1(kx) = k(T_1 x) = k(\lambda_0 x) = \lambda_0 (kx)$$

故 $x + y \in W, kx \in W$.因此,W 是 V 的子空间.

2.设 $x \in W$,则 $T_1 x = \lambda_0 x$,且有

$$T_1(T_2 x) = (T_1 T_2)x = (T_2 T_1)x = T_2(T_1 x) = T_2(\lambda_0 x) = \lambda_0 (T_2 x)$$

故 $T_2 x \in W$.因此,W 是 T_2 的不变子空间.

试 题 七

一、(20 分) 填空或计算填空:

1.设 T 是线性空间 $V^n (n > 1)$ 中的线性变换,若数 λ 不是 T 的特征值,则 V^n 的子空间 $V_\lambda = \{x \mid Tx = \lambda x, x \in V^n\}$ 的维数是 (   ).

2.已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,则$\begin{cases} |A|_1 = (\quad\quad) \\ |A|_{m_\infty} = (\quad\quad) \\ |A|_F = (\quad\quad) \\ |Ax|_\infty = (\quad\quad) \end{cases}$.

3.已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,则 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$.

4.矩阵 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ 是否为收敛矩阵?其原因是(   ).

5. 设 A 是 n 阶可逆矩阵, O 是 n 阶零矩阵, 则 $\begin{bmatrix} O & A \\ O & O \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$.

二、(10 分) 给定矩阵 $A, B \in \mathbf{C}^{n \times n}$, 且 B 可逆, $|x|_p$ 表示 $\mathbf{C}^n$ 中列向量 x 的 p - 范数 $(1 \leq p < +\infty)$. 定义实数 $|x| = |Ax|_1 + 3|Bx|_3$, 验证 $|x|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的向量范数.

三、(14 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}, b(t) = \begin{bmatrix} e^{9t} \\ e^{9t} \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. 求 e^{At}.

2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b(t)$ 满足初始条件 $x(0) = (1, 0, 2)^T$ 的解.

四、(12 分) 用 Givens 变换求

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解.

五、(10 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & 0.1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 用 Gerschgorin 定理分离 A 的特征值, 并在复平面上画图表示.

六、(14 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. 求 A 的满秩分解.

2 .求 A^{+} .

3 .用广义逆矩阵方法判断方法组 $Ax = b$ 是否有解 .

4 .求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (指出所求的是哪种解) .

七、(12 分) 设矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的子集 $V = \{X = (x_{ij})_{2\times 2} \mid x_{11} + x_{22} = 0\}$.

1 .验证 V 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的子空间,并求 V 的一个基 .

2 .给定 V 中的变换 T: $TX = X + X^{\mathrm{T}}$ $(X \in V)$,验证 T 是线性变换 .

3 .求 T 的全体特征值与特征向量 .

八、(8 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times k$ 矩阵, $R(A)$ 和 $R(AB)$ 分别表示 A 和 AB 的值域,证明: $R(AB) = R(A)$ 的充要条件是,存在 $k \times n$ 矩阵 C 使得 $ABC = A$.

试题七解答

一、1 .因为 λ 不是 T 的特征值,所以仅当 $x = 0$ 时才有 $Tx = \lambda x$,即 $V_\lambda = \{0\}$,故 $\dim V_\lambda = 0$.

2 .24, 36, $2\sqrt{106}$, 30

3 .$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$,由 $\mathrm{rank}(1I - A) = 2$ 知,$(\lambda - 1)^2$ 是 $3 - 2 = 1$ 个初等因子 .故 A 的初等因子为 $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda - 3)$,从而

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

4 .因为 A 的特征值为 $\lambda_1 = \dfrac{5}{6}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$,所以 $\rho(A) = \dfrac{5}{6} < 1$,故 A 是收敛矩阵 .

5．$\begin{bmatrix} O & A \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix} [O \mid A] = FG, G^{+} F^{+} = \begin{bmatrix} O & O \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$．

二、非负性：$x = 0$ **时**，$|x| = |A0|_1 + 3|B0|_3 = |0|_1 + 3|0|_3 = 0$；$x \neq 0$ **时**，**由** B **可逆知** $Bx \neq 0$，**从而** $|Bx|_3 > 0$，**于是** $|x| = |Ax|_1 + 3|Bx|_3 \geq 3|Bx|_3 > 0$．

容易验证齐次性与三角不等式都成立．**因此**，$|x|$ **是向量范数**．

三、1．**方法一(待定法)**．$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 9)^2$，**由** $A(A - 9I) = O$ **知**，A **的最小多项式** $m(\lambda) = \lambda(\lambda - 9)$．**设** $f(\lambda) = e^{\lambda t} = m(\lambda) g(\lambda) + (a + b\lambda)$，**则**

$$\begin{cases} f(0) = 1 = a \\ f(9) = e^{9t} = a + 9b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{9}(e^{9t} - 1) \end{cases}$$

于是

$$e^{At} = aI + bA = \frac{1}{9}(9I - A) + \frac{e^{9t}}{9} A =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{9t}}{9}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 + 5y & -4 + 4y & -2 + 2y \\ -4 + 4y & 4 + 5y & 2 - 2y \\ -2 + 2y & 2 - 2y & 1 + 8y \end{bmatrix}$$

其中，$y = e^{9t}$．

方法二(对角化法)．**对于实对称矩阵** A，**可求得** $P^{-1} AP = \Lambda$，**其中**

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

于是

$$e^{At} = P\begin{bmatrix}1 & & \\ & e^{9t} & \\ & & e^{9t}\end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$P\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}P^{-1} + e^{9t}P\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & -4 & -2\\ -4 & 4 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix} + \frac{e^{9t}}{9}\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 4 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 8\end{bmatrix}$$

方法三(级数求和法) .同方法一,求得 A 的最小多项式 $m(\lambda) = \lambda(\lambda - 9)$.由 $m(A) = O$ 知 $A^2 = 9A$,于是有

$$e^{At} = I + \frac{1}{1\,!}(At) + \frac{1}{2\,!}(At)^2 + \frac{1}{3\,!}(At)^3 + \cdots =$$

$$I + \left(\frac{t}{1\,!} + \frac{9t^2}{2\,!} + \frac{9^2t^3}{3\,!} + \cdots\right)A =$$

$$I + \frac{1}{9}[(-1) + e^{9t}]A = \frac{1}{9}(9I - A) + \frac{e^{9t}}{9}A =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & -4 & -2\\ -4 & 4 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix} + \frac{e^{9t}}{9}\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 4 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 8\end{bmatrix}$$

2 .$x(t) = e^{At}\left\{x(0) + \int_0^t e^{-As}b(s)\,ds\right\} =$

$$e^{At}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\} = e^{9t}\begin{bmatrix}1+t\\ t\\ 2\end{bmatrix}$$

四、$\beta = (0,0,2,0)^{\mathrm T}$,**构造** $T_{13}(c,s): c = 0, s = 1$,**则**

$$T_1 = T_{13} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ T_1A = \left[\begin{array}{c|ccc}2 & 1 & 2 & 4\\ \hline 0 & 4 & -2 & 3\\ 0 & -3 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{array}\right]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

构造 $T_{12}(c, s): c = \dfrac{4}{5}, s = -\dfrac{3}{5}$,**则**

$$T_2 = T_{12} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad T_2 A_1 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

于是

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} T_1, \quad Q = T^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ & 5 & -1 & 0 \\ & & -2 & 5 \\ & & & -5 \end{bmatrix}, \quad A = QR$$

五、取 $D = \mathrm{diag}(1, 1, 2.5, 1)$,**则** $B = DAD^{-1}$ **的** 4 **个孤立盖尔圆中各有** A **的一个特征值**.

六、1. $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = FG$$

2. $F^{+} = (F^{\mathrm{T}} F)^{-1} F^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} F^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$G^{+} = G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1} = G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 17 & 4 & -13 \\ 9 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

3 .$AA^{+}b = A \cdot \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = b$,故 $Ax = b$ 有解 .

4 .极小范数解 $x_0 = A^{+}b = \frac{1}{10}(4,3,2,1)^{\mathrm{T}}$.

七、1 .因为 $O_{2\times 2} \in V$,所以 V 非空 .设 $X = (x_{ij})_{2\times 2} \in V$,$Y = (y_{ij})_{2\times 2} \in V$,则 $x_{11} + x_{22} = 0$,$y_{11} + y_{22} = 0$,因为

$$(x_{11} + y_{11}) + (x_{22} + y_{22}) = (x_{11} + x_{22}) + (y_{11} + y_{22}) = 0$$

$$(kx_{11}) + (kx_{22}) = k(x_{11} + x_{22}) = 0$$

所以 $X + Y \in V$,$kX \in V$,故 V 是 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 的子空间 .

当 $X = (x_{ij})_{2\times 2} \in V$ 时,由 $x_{11} + x_{22} = 0$ 可得

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = x_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + x_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

容易验证 $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 线性无关,故 X_1,X_2,X_3 是 V 的一个基 .

2 .略

3 .计算

$$TX_1 = X_1 + X_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2X_1 + 0X_2 + 0X_3$$

$$TX_2 = X_2 + X_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0X_1 + 1X_2 + 1X_3$$

$$TX_3 = X_3 + X_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0X_1 + 1X_2 + 1X_3$$

于是,T 在基 X_1, X_2, X_3 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,可求得 A 的特征值与特征向量为

$$\lambda_1 = 0,\quad p_1 = (0,1,-1)^{\mathrm{T}}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2,\quad p_2 = (1,0,0)^{\mathrm{T}},\ p_3 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$$

于是,T 的特征值与特征向量为

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ X = (X_1, X_2, X_3)(k_1 p_1) = k_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (k_1 \neq 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \\ X = (X_1, X_2, X_3)(k_2 p_2 + k_3 p_3) = \\ \qquad k_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (k_2 \text{ 与 } k_3 \text{ 不同时为 } 0) \end{cases}$$

八、必要性 . 划分 $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 因为 $a_i \in R(A) = R(AB)$,所以存在 $x_i \in \mathrm{C}^k$,使得 $a_i = (AB)x_i$,于是可得

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = (ABx_1, ABx_2, \cdots, ABx_n) = AB(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

令 $C = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,则有 $A = ABC$.

充分性 . 设 $x \in R(A) = R(ABC)$, 则存在 $y \in \mathrm{C}^n$, 使得 $x = (ABC)y = (AB)(Cy) \in R(AB)$, 故 $R(A) \quad R(AB)$; 再设 $x \in R(AB)$, 则存在 $u \in \mathrm{C}^k$, 使得 $x = (AB)u = A(Bu) \in R(A)$, 故 $R(AB) \quad R(A)$. 因此 $R(AB) = R(A)$.

试 题 八

一、(20 分) 填空或计算填空:

1 .在欧氏空间 V^n 中,满足条件$(x_i, x_i) = i$ 的正交基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的度量矩阵 $A = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$.

2 .已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 8 \\ 4 & -6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,则$\begin{cases} \|A\|_1 = (\quad) \\ \|A\|_F = (\quad) \\ \|A\|_{m_\infty} = (\quad) \\ \|Ax\|_\infty = (\quad) \end{cases}$.

3 .已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,则 $\sin(At) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$.

4 .设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{bmatrix}$ $(a \in \mathrm{R})$,则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛的充要条件是 $a \in (\qquad)$.

5 .已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,则 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$.

二、(10 分) 设 $A \in \mathrm{C}_n^{m \times n}$,证明$\|AA^+\|_2 = 1$.

三、(14 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$

1 .求 e^{At} .

2 .用矩阵函数方法求微分方程$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b(t)$ 满足初始条件 $x(0) = (0,1,-1)^T$ 的解 .

四、(12 分) 用 Householder 变换求

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 15 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解 .

五、(10 分) 用 Gerschgorin 定理证明

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \frac{2}{3^4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3} & \frac{3}{4^4} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & 8 & \frac{4}{5^4} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6^2} & \frac{5}{6^3} & \frac{5}{6^4} & 10 \end{bmatrix}$$

能够相似于对角矩阵,且 A 的特征值都是实数 .

六、(14 分) 已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1 .求 A 的满秩分解 .

2 .求 A^+ .

3 .用广义逆矩阵方法判断方程 $Ax = b$ 是否有解 .

4 .求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (指

出所求的是哪种解).

七、(12 分) 设 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, **矩阵空间** $\mathrm{R}^{2\times 2}$ **的线性变换** T **为**

$$TX = MXN \quad (X \in \mathrm{R}^{2\times 2})$$

求 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ **的一个基, 使** T **在该基下的矩阵为对角矩阵**.

八、(8 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **是欧氏空间** V^3 **的一个基, 该基的度量矩阵为**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1 .**计算内积**

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3)$$

2 .**求** V **的一个标准正交基(用** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **表示)**.

试题八解答

一、1 .**当** $i \neq j$ **时**, $(x_i, x_j) = 0$, **从而** $A = \mathrm{diag}(1, 2, \cdots, n)$.

2 .15, $\sqrt{237}$, 32, 13

3 .$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1^{-1} A_1 P_1 = J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & \\ & 1 & \\ & & I_2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} AP = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}$$

$$\sin(At) = P\begin{bmatrix} \sin J_1 t & & \\ & \sin J_2 t & \\ & & \sin J_3 t \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ t & 0 & 0 & & & \\ 0 & t & 0 & & & \\ & & & \sin 2t & & \\ & & & & -\sin t & t\cos t \\ & & & & 0 & -\sin t \end{bmatrix}$$

4 .$\rho(A) = |2a| < 1$,即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

5 .$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$.由 $\operatorname{rank}(1I - A) = 3$ 知,$(\lambda - 1)^2$ 是 $4 - 3 = 1$ 个初等因子;由 $\operatorname{rank}((-1)I - A) = 3$ 知,$(\lambda + 1)^2$ 是 $4 - 3 = 1$ 个初等因子,因此

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

二、令 $B = AA^+$,则 $B^2 = AA^+ AA^+ = AA^+ = B$.设 B 的特征值为 λ,则有 $\lambda^2 = \lambda$,即 $\lambda = 0$ 或 1 .设 $x \in \mathbf{C}^n$ 且 $x \neq 0$,由 A 列满秩知 $Ax \neq 0$,从而

$$B(Ax) = AA^+ Ax = Ax = 1(Ax)$$

即 1 是 B 的特征值,故 $\rho(B) = 1$,$\|B\|_2 = [\rho(B^H B)]^{\frac{1}{2}} = [\rho(B)]^{\frac{1}{2}} = 1$.

三、1 .$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$.因为 $A - 2I \neq O$,$(A - 2I)^2 = O$,所以 A 的最小多项式为 $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2$.设 $f(\lambda) = e^{\lambda t} = m(\lambda)g(\lambda) + (a + b\lambda)$,则 $f'(\lambda) = te^{\lambda t} = [mg]' + b$,且有

$$\begin{cases} f(2) = e^{2t} = a + 2b \\ f'(2) = te^{2t} = b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = (1 - 2t)e^{2t} \\ b = te^{2t} \end{cases}$$

于是

$$
\mathrm{e}^{At} = aI + bA = \mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} 1-t & t & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & t & 1+t \end{bmatrix}
$$

$$
2.\ x(t) = \mathrm{e}^{At}\left\{ x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{-As} b(s)\,\mathrm{d}s \right\} =
$$

$$
\mathrm{e}^{At}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix} t \\ 2t+1 \\ -t-1 \end{bmatrix}
$$

四、 $\beta_1 - |\beta_1| e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$
H_1 = I - 2u_1u_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

$$
H_1A = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right],\ A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\beta_3 - |\beta_3| e_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

$$
H_3 = I - 2u_3u_3^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},\ H_3A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}
$$

$$
Q = H_1\begin{bmatrix} I_2 & \\ & H_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 10 & 10 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & -8 & -6 \\ 5 & -10 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & -12 \end{bmatrix}
$$

$$R=\begin{bmatrix}3&6&2&10\\&0&-4&-5\\&&5&-8\\&&&-6\end{bmatrix},\quad A=QR$$

五、A 的 5 个盖尔圆为

$$G_i=\left\{z\,\middle|\,|z-2i|\leq 1-\frac{1}{(i+1)^4}\right\}\quad(i=1,2,3,4,5)$$

它们都是孤立的,从而 A 有 5 个互异特征值,故 A 能够相似于对角矩阵 .

再由 G_i 关于实轴对称,以及实矩阵的复特征值成对共轭出现的性质知,G_i 中的特征值必为实数,故 A 的特征值都是实数 .

六、1 .$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&1\\0&0&1&-1&1\end{bmatrix}=FG$$

2 .$F^+=(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1\\1&5\end{bmatrix}^{-1}F^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}5&-2&-4\\-1&4&-1\end{bmatrix}$

$$G^+=G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}=G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}3&-2\\-3&2\\-2&4\\-1&-2\\1&2\end{bmatrix}$$

$$A^+=G^+F^+=\frac{1}{72}\begin{bmatrix}17&-14&-10\\-17&14&10\\-14&20&4\\-3&-6&6\\3&6&-6\end{bmatrix}$$

3 .$A^{+}b=(1,-1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $AA^{+}b=b$, 故 $Ax=b$ 有解 .

4 .极小范数解 $x_0=A^{+}b=(1,-1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

七、取 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 的简单基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, 计算

$$TE_{11}=ME_{11}N=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix},\ TE_{12}=ME_{12}N=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$TE_{21}=ME_{21}N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix},\ TE_{22}=ME_{22}N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

于是, T 在该基下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 3 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

可求得 $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & -3\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}-10 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0\\ -5 & 0 & -5 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

由 $(B_1, B_2, B_3, B_4)=(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})P$ 可得

$$B_1=\begin{bmatrix}-10 & 2\\ -5 & 1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix},\quad B_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

T 在基 B_1, B_2, B_3, B_4 下的矩阵为 Λ .

八、1 .记 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, 则 $(\alpha_i, \alpha_j)=a_{ij}$, 从而有

$$(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1)=(\alpha_1, \alpha_1)+(\alpha_2, \alpha_1)=1+(-1)=0$$

$$(\alpha_2, \alpha_3)=0$$

$$(\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3, 2\alpha_2+\alpha_3)=3$$

2 .方法一(Schmidt 正交化法) .根据 Schmidt 正交化过程依次计算:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \alpha_2 - (-1)\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 =$$

$$\alpha_3 - 1\beta_2 - 1\beta_1 = \alpha_3 - \alpha_2 - 2\alpha_1$$

$$|\beta_1| = 1, \quad |\beta_2| = 1, \quad |\beta_3| = \sqrt{2}$$

标准正交基为 $\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_1, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_3 - \alpha_2 - 2\alpha_1)$.

方法二(矩阵分解法).**根据矩阵的三角分解方法求得** $A = U^{\mathrm{T}} U$,**其中**

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

令 $C = U^{-1}$,**则** $C^{\mathrm{T}} AC = I$.**由**$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$**可得**

$$\gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)$$

因为基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ **的度量矩阵为** $C^{\mathrm{T}} AC = I$,**所以** $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ **是标准正交基**.

试题九

一、(18 **分**) **填空或计算填空**:

1. **已知** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, **则** A **的** Jordan **标准形** $J = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$.

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$,则 $\begin{cases}\|A\|_{m_1}=(\quad)\\ \|A\|_{\infty}=(\quad)\\ \|Ax\|_2=(\quad)\\ \|Ax\|_1=(\quad)\end{cases}$.

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}-1&&&&\\1&-1&&&\\&&0&1&\\&&&0&1\\&&&&0\end{bmatrix}$, 则 $\cos(At)=\begin{bmatrix}&&\\&&\end{bmatrix}$.

4. 设 A 是 n 阶可逆矩阵,则 $\begin{bmatrix}A&A\\A&A\end{bmatrix}^{+}=\begin{bmatrix}&&\\&&\end{bmatrix}$.

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$,则 A í $I+A^2$ í A 的全体特征值为( ).

6. 设 A 是可逆矩阵,则 $\int_0^1 e^{At}\,dt=(\quad)$.

二、(12 分) 设 $\|\cdot\|_a$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数, C 和 D 都是 n 阶可逆矩阵, 且 $\|C^{-1}\|_a\le 1$, $\|D^{-1}\|_a\le 1$. 证明: $\|A\|_b=\|CAD\|_a\,(A\in C^{n\times n})$ 是 $C^{n\times n}$ 中的矩阵范数.

三、(15 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\1&0&1\\1&2&-1\end{bmatrix}$, $b(t)=\begin{bmatrix}e^{-2t}\\0\\-e^{-2t}\end{bmatrix}$.

1. 求 e^{At}.

2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)=(0,-1,2)^T$ 的解.

四、(10 分) 用 Householder 变换求

$$A=\begin{bmatrix}1&-4&1&-1\\-1&0&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&-3&1&-1\end{bmatrix}$$

的 QR 分解.

五、(10 分) 用 Gerschgorin 定理隔离 $A=\begin{bmatrix}20 & 3 & 1\\ 2 & 10 & 2\\ 8 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 的特征值(要求画图表示),并根据实矩阵特征值的性质改进所得结果.

六、(15 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}6\\ -8\\ 2\\ -7\end{bmatrix}$.

1.求 A 的满秩分解.

2.求 A^+.

3.用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解.

4.求方程组 $Ax=b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (要求指出所求的是哪种解).

七、(12 分) 在向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中,设 $\alpha=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$,线性变换为

$$T\alpha=(2\xi_2+3\xi_3,2\xi_1-3\xi_2+\xi_3,2\xi_1+\xi_2-3\xi_3)$$

求 $\mathbf{R}^3$ 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

八、(8 分) 设欧氏空间 V^n 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的度量矩阵为 G,正交变换 T 在该基下的矩阵为 A,证明:

1. $Tx_2,Tx_2,\cdots,Tx_n$ 是 V^n 的一个基.

2. $A^{\mathrm{T}}GA=G$.

试题九解答

一、1.$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^3(\lambda-2)$.由 $\operatorname{rank}(1I-A)=2$ 知,$(\lambda-1)^3$ 是 $4-2=2$ 个初等因子的乘积,故 A 的初等因子为 $(\lambda-1)^2$,$(\lambda-1)$,$(\lambda-2)$,从而

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

2 .9, 3, $\sqrt{86}$, 18

3 .$A = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1^{-1} A_1 P_1 = J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \\ & I_3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} AP = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$$

$$\cos(At) = P\begin{bmatrix} \cos J_1 t & \\ & \cos J_2 t \end{bmatrix} P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos t & & & & \\ t\sin t & \cos t & & & \\ & & 1 & 0 & -t^2/2 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

4 .$\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}\left[A \mid A \right] = FG, G^{+} F^{+} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1} \\ A^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix}$

5 .A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, 而 $A \quad I + A^2 \quad A$ 的特征值为 $\lambda_i \cdot 1 + \lambda_i^2 \lambda_j$, 即 0,0,2,10 .

6 .$\int_0^1 e^{At} dt = A^{-1}\int_0^1 \left[\dfrac{de^{At}}{dt} \right] dt = A^{-1}(e^{A} - I)$

二、非负性: $A = O$ 时, $\| A \|_b = \| COD \|_a = \| O \|_a = 0$; $A \neq O$ 时, 由 C 与 D 可逆知 $CAD \neq O$, 故 $\| A \|_b = \| CAD \|_a > 0$.

容易验证齐次性与三角不等式都成立 .

相容性: 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则有

$\| AB \|_b = \| C(AB)D \|_a = \| (CAD)D^{-1} C^{1} (CBD) \|_a \leq$

$$\| CAD \|_a \| D^{-1} \|_a \| C^{-1} \|_a \| CBD \|_a \leq$$
$$\| CAD \|_a \| CBD \|_a = \| A \|_b \| B \|_b$$

因此，$\| A \|_b$ 是矩阵范数．

三、1 方法一(待定法)．$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)^2 (\lambda - 2)$．由 $(A + 2I)(A - 2I) = O$ 知，A 的最小多项式 $m(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)$．设 $f(\lambda) = e^{\lambda t} = m(\lambda) g(\lambda) + (a + b\lambda)$，则

$$\begin{cases} f(-2) = e^{-2t} = a - 2b \\ f(2) = e^{2t} = a + 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t}) \\ b = \dfrac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) \end{cases}$$

于是

$$e^{At} = aI + bA = \frac{e^{2t}}{4}(2I + A) + \frac{e^{-2t}}{4}(2I - A) =$$

$$\frac{e^{2t}}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-2t}}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{2t} + 3e^{-2t} & 2e^{2t} - 2e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{2t} - e^{-2t} & 2e^{2t} + 2e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ e^{2t} - e^{-2t} & 2e^{2t} - 2e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

方法二(对角化法)　对于 A，可求得 $P^{-1}AP = \Lambda$，其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$e^{At} = P\begin{bmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{2t} \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$\mathrm{e}^{2t}P\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}+\mathrm{e}^{-2t}P\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}P^{-1}=$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\begin{bmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{bmatrix}+\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4}\begin{bmatrix}3&-2&-1\\-1&2&-1\\-1&-2&3\end{bmatrix}$$

2 . $$x(t)=\mathrm{e}^{At}\left\{x(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{-As}b(s)\mathrm{d}s\right\}=$$

$$\mathrm{e}^{At}\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}=\mathrm{e}^{-2t}\begin{bmatrix}t\\-1\\2-t\end{bmatrix}$$

四、 $$\beta_1-|\beta_1|e_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad u_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$H_1=I-2u_1u_1^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$H_1A=\left[\begin{array}{c|ccc}2&-1&0&0\\\hline 0&3&-2&2\\0&-4&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right],\quad A_1=\begin{bmatrix}3&-2&2\\-4&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\beta_2-|\beta_2|e_1=\begin{bmatrix}3\\-4\\0\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\quad u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$H_2=I-2u_2u_2^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-4&0\\-4&-3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$H_2A_1=\begin{bmatrix}5 & -\frac{6}{5} & \frac{6}{5}\\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{8}{5}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$Q=H_1\begin{bmatrix}1 & \\ & H_2\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & -7 & 1 & -5\\ -5 & -1 & -7 & -5\\ 5 & -1 & -7 & 5\\ -5 & -7 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ & 5 & -\frac{6}{5} & \frac{6}{5}\\ & & \frac{8}{5} & -\frac{8}{5}\\ & & & 0\end{bmatrix},\quad A=QR$$

五、取 $D=\mathrm{diag}(1.5,1,1)$**,则** $B=DAD^{-1}$ **的 3 个孤立盖尔圆中各有** A**的一个特征值. 因为** A**是实矩阵,所以复特征值必成对共轭出现,从而关于实轴对称的孤立盖尔圆中的特征值必为实数.**

六、1. $A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=FG$$

2. $F^{+}=(F^{T}F)^{-1}F^{T}=\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & 6\end{bmatrix}^{-1}F^{T}=\dfrac{1}{35}\begin{bmatrix}7 & -4 & 12 & -1\\ 7 & 11 & 2 & -6\end{bmatrix}$

$$G^{+} = G^{T}(GG^{T})^{-1} = G^{T}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{105}\begin{bmatrix} 7 & -4 & 12 & -1 \\ -7 & 4 & -12 & 1 \\ 7 & -4 & 12 & -1 \\ 21 & 33 & 6 & -18 \end{bmatrix}$$

3 . $AA^{+}b = A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \neq b$, 故 $Ax = b$ 无解 .

4 .极小范数最小二乘解 $x_0 = A^{+}b = (1, -1, 1, 0)^{T}$.

七、取 $\mathbf{R}^3$ 的简单基 e_1, e_2, e_3, 计算 $Te_1 = (0,2,2)$, $Te_2 = (2, -3, 1)$, $Te_3 = (2, 1, -3)$ 于是, T 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ 可求得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -4 & & \\ & -4 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (e_1, e_2, e_3)P$ 可得

$$\beta_1 = (-1, 2, 0), \quad \beta_2 = (-1, 0, 2), \quad \beta_3 = (2, 1, 1)$$

T 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵为 Λ .

八、1 .由于 T 是正交变换, 所以 T 也是可逆变换, 从而 A 是可逆矩阵 .由 $(Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A$ 知, 元素组 $Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$ 线性无关, 因此也是 V^n 的一个基 .

2 .将 A 看作由基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 改变为基 $Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$ 的过渡矩阵, 那么基 $Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$ 的度量矩阵为 $A^{T}GA$; 另一方面, 由

于 T 是正交变换,所以$(Tx_i, Tx_j) = (x_i, x_j)$,故基 $Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$ 的度量矩阵为 G,于是可得 $A^{T}GA = G$.

试 题 十

一、(18 分) 填空或计算填空:

1 .已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,则 A 的 Jordan 标准形 $J = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$.

2 .已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$,则

$$\begin{cases} \|A\|_{m_1} = (\quad) \\ \|A\|_{\infty} = (\quad) \\ \|Ax\|_2 = (\quad) \\ \|Ax\|_1 = (\quad) \end{cases}.$$

3 .已知 $X = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_5 & t_6 \end{bmatrix}$, $f(X) = t_1 t_6 + t_2 t_5 + t_3 t_4$,则 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X} =$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}.$$

4 .设 $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$ 的一个$\{1\}$ - 逆为 $A^{(1)}$,则 $A\{1\} = (\qquad)$.

5 .设 $x \in \mathrm{R}^n$ 是单位列向量,$A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 是正交矩阵,则 $\|A \quad x\|_F = (\qquad)$.

6 .欧氏空间 V^n 中,若 2 是对称变换 T 的一个 2 重特征值,则 T 在子空间 $V_1 = \{x \mid Tx = 2x, x \in V^n\}$ 的基下的矩阵是(　　).

二、(12 分) 已知 $\mathrm{C}^{n\times n}$ 中的两种矩阵范数 $\|\cdot\|_a$ 与 $\|\cdot\|_b$,对

于 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$,验证

$$\|A\| = \|A\|_a + \|A^{\mathrm{H}}\|_b$$

是 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中的矩阵范数 .

三、(15 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$.

1 .求 e^{At} .

2 .用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b(t)$ 满足初始条件 $x(0) = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$ 的解 .

四、(10 分) 用 Givens 变换求 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解 .

五、(10 分) 用 Gerschgorin 定理说明 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ 至少有两个实特征值 .

六、(15 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$.

1 .求 A 的满秩分解 .

2 .求 A^{+} .

3 .用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax = b$ 是否有解 .

4 .求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (要求指出所求的是哪种解) .

七、(12分) 设 $P_3[t]$ 中的多项式为 $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$，线性变换为

$$Tf(t)=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)t+(a_2-a_3)t^2+(a_3-a_0)t^3$$

1. 求 $R(T)$ 的基与维数.
2. 求 $N(T)$ 的基与维数.

八、(8分) 在线性空间 V^n 中，设由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为 C，又 $x\in V^n$ 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的坐标(列向量)分别为 α 和 β，证明：存在 $x\neq 0$ 使得 $\alpha=\lambda\beta$ 的充要条件是，λ 为 C 的一个特征值.

试题十解答

一、1. $\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^3(\lambda-2)$. 由 $\mathrm{rank}(1I-A)=2$ 知，$(\lambda-1)^3$ 是 $4-2=2$ 个初等因子的乘积，故 A 的初等因子为 $(\lambda-1)^2$，$(\lambda-1)$，$(\lambda-2)$，从而

$$J=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&1&\\&&&2\end{bmatrix}$$

2. 20，　8，　$\sqrt{502}$，　32

3. $\begin{bmatrix}t_6&t_5&t_4\\t_3&t_2&t_1\end{bmatrix}$

4. 全体{1}-逆为矩阵方程 $AXA=A$ 的通解，即

$$A^{(1)}AA^{(1)}+Z-A^{(1)}AZAA^{(1)}$$

或者

$$A^{(1)}+Z-A^{(1)}AZAA^{(1)}\quad(\forall Z\in \mathbf{C}^{n\times m})$$

5. 因为 $\|A\quad x\|_F^2=\mathrm{tr}[(A\quad x)^{\mathrm T}(A\quad x)]=\mathrm{tr}[(A^{\mathrm T}A)(x^{\mathrm T}x)]=\mathrm{tr}(I_n)=n$，所以 $\|A\quad x\|_F=\sqrt{n}$.

6. 因为 T 是对称变换，且特征值 $\lambda=2$ 的重数为2，所以 $\dim V_1$

$=2$.设 V_1 的一个基为 x_1,x_2,则有 $Tx_1=2x_1$, $Tx_2=2x_2$,故 T 在基 x_1,x_2 下的矩阵为 $2I_2$.

二、非负性: $A=O$ 时, $\|A\|_a=0$, $\|A^{\mathrm{H}}\|_b=0$,从而 $\|A\|=0$; $A\neq O$ 时, $\|A\|_a>0$, $\|A^{\mathrm{H}}\|_b>0$,从而 $\|A\|>0$.

容易验证齐次性与三角不等式都成立 .

相容性:设 $A,B\in\mathbf{C}^{n\times n}$,则有

$$\begin{aligned}\|AB\|&=\|AB\|_a+\|(AB)^{\mathrm{H}}\|_b\leq\\&\|A\|_a\|B\|_a+\|B^{\mathrm{H}}\|_b\|A^{\mathrm{H}}\|_b\leq\\&(\|A\|_a+\|A^{\mathrm{H}}\|_b)(\|B\|_a+\|B^{\mathrm{H}}\|_b)=\\&\|A\|\|B\|\end{aligned}$$

因此, $\|A\|$ 是矩阵范数 .

三、1 . $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$.由于 $A-2I\neq O$, $(A-2I)^2=O$,所以 A 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2$. 设 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}=m(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$,则 $f'(\lambda)=t\mathrm{e}^{\lambda t}=[mg]'+b$,且有

$$\begin{cases}f(2)=\mathrm{e}^{2t}=a+2b\\f'(2)=t\mathrm{e}^{2t}=b\end{cases}\qquad\begin{cases}a=(1-2t)\mathrm{e}^{2t}\\b=t\mathrm{e}^{2t}\end{cases}$$

于是

$$\mathrm{e}^{At}=aI+bA=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1+t&0&t\\-t&1&-t\\-t&0&1-t\end{bmatrix}$$

2 . $x(t)=\mathrm{e}^{At}\left\{x(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{-As}b(s)\mathrm{d}s\right\}=$

$$\mathrm{e}^{At}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\t\\0\end{bmatrix}\right\}=\mathrm{e}^{2t}\begin{bmatrix}1\\t\\-1\end{bmatrix}$$

四、$\beta=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,构造 $T_{13}(c,s)$: $c=0$, $s=1$,则

$$T_1=T_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad T_1A=\begin{bmatrix}1&1&2&4\\0&4&3&2\\0&0&-1&-3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-1&-3\\1&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

构造 $T_{12}(c,s):c=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,**则**

$$T_3=T_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\ T_3A_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2&5\\0&1\end{bmatrix}$$

于是

$$T=\begin{bmatrix}I_2&\\&T_3\end{bmatrix}T_1,\ Q=T^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}1&1&2&4\\&4&3&2\\&&\sqrt{2}&\frac{5}{\sqrt{2}}\\&&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\ A=QR$$

五、A 的 4 个盖尔圆为

$$G_1=\{z\mid |z|\leq 1\},\qquad G_2=\{z\mid |z-4|\leq 2\}$$
$$G_3=\{z\mid |z-6|\leq 3\},\qquad G_4=\{z\mid |z-8|\leq 2\}$$

它们构成的两个连通部分为 $S_1=G_1,S_2=G_2\cup G_3\cup G_4$.易见,$S_1$ 与 S_2 都关于实轴对称.因为实矩阵的复特征值必成对共轭出现,所以 S_1 中含 A 的一个实特征值.而 S_2 中至少含 A 的一个实特征值.因此 A 至少有两个实特征值.

六、1 .$A \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = FG$

2 .$F^+ = (F^T F)^{-1} F^T = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}^{-1} F^T =$

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & -5 & -6 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G^+ = G^T (GG^T)^{-1} = G^T \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = G^+ F^+ = \frac{1}{72}\begin{bmatrix} 17 & -17 & -14 & -3 & 3 \\ -14 & 14 & 20 & -6 & 6 \\ -10 & 10 & 4 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

3 .$A^+ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $AA^+ b \neq b$, 故 $Ax = b$ 无解 .

4 .极小范数最小二乘解 $x_0 = A^+ b = (1, 0, -1)^T$.

七、取 $P_3[t]$ 的简单基 $1, t, t^2, t^3$, 计算

$T1 = 1 - t^3$, $Tt = -1 + t$, $Tt^2 = -t + t^2$, $Tt^3 = -t^2 + t^3$

于是, T 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 .$\dim R(T) = \operatorname{rank} A = 3$.因为 A 的后 3 个列向量线性无关, 所以 $R(T)$ 的一个基为 $f_1 = Tt = -1 + t$, $f_2 = Tt^2 = -t + t^2$, $f_3 = Tt^3 = -t^2 + t^3$.

2. $\dim N(T)=4-\dim R(T)=1$.因为齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系数为 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$,所以 $N(T)$ 的一个基为$(1,t,t^2,t^3)\alpha_1=1+t+t^2+t^3$.

八、必要性.已知 $\alpha=\lambda_0\beta$,利用坐标变换公式 $\alpha=C\beta$ 可得 $C\beta=\lambda_0\beta$.因为 $x\neq 0$ 所以 $\beta\neq 0$.由定义知,λ_0 是 C 的一个特征值.

充分性.已知 λ_0 是 C 的一个特征值,设对应的特征向量为 β,则 $\beta\neq 0$,且有 $C\beta=\lambda_0\beta$.设基(Ⅱ)为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,则 $x=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\beta\neq 0$,且 x 在基(Ⅱ)下的坐标为 β,而 x 在基(Ⅰ)下的坐标 $\alpha=C\beta=\lambda_0\beta$.

试 题 十 一

一、(18 分)填空或计算填空:

1.已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&2&1\end{bmatrix}$,则 A 的 Jordan 标准形

$J=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$.

2.已知 $A=\begin{bmatrix}-1&0&2&i\\-3i&5&-2&-1\\2&1&-1&-7\end{bmatrix}$,$x=\begin{bmatrix}i\\-2i\\0\\3\end{bmatrix}$,$i=\sqrt{-1}$,则

$$\begin{cases}\|A\|_1=(\quad)\\\|A\|_F=(\quad)\\\|Ax\|_\infty=(\quad)\end{cases}.$$

3.设 A 和 B 都是 n 阶酉矩阵,则$\begin{bmatrix}A&B\\A&B\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$.

4 .已知 n 阶矩阵 A 和 B 的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$，则矩阵方程 $A^2X + XB^2 - 2AXB = O$ 有非零解的充要条件是(　　).

5 .设线性空间 V^n 的一个基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，线性变换 T 在该基下的矩阵为 A，则 $Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$ 也是 V^n 的基的充要条件是 A 为(　　).

6 .设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$，$R(A)$ 和 $N(A)$ 分别表示 A 的值域和零空间，则 $\dim[R(A) \cap N(A)] = $(　　).

二、(10 分) 设 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathrm{C}^{n \times n}$，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{C}^n$.

1 .证明：方阵的 m_∞ - 范数与向量的 1 - 范数相容.

2 .验证：方阵的 m_1 - 范数与方阵的 F - 范数等价.

三、(15 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$，$b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{9t} \\ \mathrm{e}^{9t} \end{bmatrix}$.

1 .求 e^{At}.

2 .用矩阵函数方法求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t) + b(t)$ 满足初始条件 $x(0) = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 的解.

四、(10 分) 用 Householder 变换求

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解.

五、(10 分) 用 Gerschgorin 定理隔离

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 3 & 5 \\ 4 & 10 & 2 \\ 2 & 1.6 & 10\mathrm{i} \end{bmatrix} \quad (\mathrm{i} = \sqrt{-1})$$

的特征值(要求画图表示).

六、(15 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$.

1 .求 A 的满秩分解 .

2 .求 A^+ .

3 .用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax = b$ 是否有解 .

4 .求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (要求指出所求的是哪种解) .

七、(14 分) 在多项式空间 $P_2[t]$ 中, $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$,线性变换为

$$\begin{aligned} Tf(t) = {} & (a_0 + 3a_1 + 2a_2) + (2a_0 + 2a_1 + 3a_2)t + \\ & (2a_0 - 2a_1 + 2a_2)t^2 \end{aligned}$$

求 $P_2[t]$ 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵 .

八、(8 分) 设 $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $b \in \mathrm{R}^m$.若线性方程组 $Ax = b$ 有解,证明:

1 .在 A^{T} 的值域 $R(A^{\mathrm{T}})$ 中,必有 $Ax = b$ 的解向量 .

2 .在 A^{T} 的值域 $R(A^{\mathrm{T}})$ 中,只有 $Ax = b$ 的一个解向量 .

提示:可以使用公式 $[N(A)]^{\perp} = R(A^{\mathrm{T}})$.

试题十一解答

一、1 .$A = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$, A_1 与 A_2 的 Jordan 标准形分别是

$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 与 $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$,故 $J = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$.

2 .9, 10, 21

3 . $\begin{bmatrix} A & B \\ A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \mid B \end{bmatrix} = FG, G^+ F^+ = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} A^H & A^H \\ B^H & B^H \end{bmatrix}$.

4 .原方程等价于$[A^2 \otimes I + I \otimes (B^2)^T - 2A \otimes B^T]\,\mathrm{vec}(X) = 0$,其系数矩阵的特征值为$\lambda_i^2 \cdot 1 + 1 \cdot \mu_j^2 - 2\lambda_i\mu_j = (\lambda_i - \mu_j)^2$.因此,存在非零解的充要条件是 A 与 B 有公共特征值 .

5 .可逆矩阵 .

6 .设 $\alpha \in R(A) \cap N(A)$, 由 $\alpha \in N(A)$ 知 $A\alpha = 0$; 而由 $\alpha \in R(A)$ 知,存在 u 使得 $\alpha = Au$.于是 $\alpha = Au = A^2 u = A(Au) = A\alpha = 0$,故 $\dim[R(A) \cap N(A)] = 0$.

二、1 .
$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{k=1}^n \left|\sum_{i=1}^n a_{ik}\xi_k\right| \le \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ik}|\,|\xi_k| \le \\ &\max_{i,j}|a_{ij}| \cdot \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n |\xi_k| = \\ &n \cdot \max_{i,j}|a_{ij}| \cdot \sum_{k=1}^n |\xi_k| = \\ &\|A\|_{m_\infty}\|x\|_1\end{aligned}$$

2 .
$$\begin{aligned}\|A\|_{m_1} &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \le n^2 \max_{i,j}|a_{ij}| \le \\ &n^2\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}} = n^2\|A\|_F\end{aligned}$$

$$\|A\|_{m_1} \ge \max_{i,j}|a_{ij}| = \frac{1}{n}\left(n^2 \max_{i,j}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge$$
$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}\|A\|_F$$

故$\dfrac{1}{n}\|A\|_F \le \|A\|_{m_1} \le n^2\|A\|_F$.

三、方法一(待定法) .$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 9)^2$,由 $A(A - 9I) = O$ 知, A 的最小多项式 $m(\lambda) = \lambda(\lambda - 9)$. 设 $f(\lambda) = e^{\lambda t} = m(\lambda)g(\lambda) + (a + b\lambda)$,则

$$\begin{cases} f(0) = 1 = a \\ f(9) = e^{9t} = a + 9b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{9}(e^{9t} - 1) \end{cases}$$

于是

$$e^{At} = aI + bA = \frac{1}{9}(9I - A) + \frac{e^{9t}}{9}A =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{e^{9t}}{9}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8e^{9t}+1 & -2e^{9t}+2 & 2e^{9t}-2 \\ -2e^{9t}+2 & 5e^{9t}+4 & 4e^{9t}-4 \\ 2e^{9t}-2 & 4e^{9t}-4 & 5e^{9t}+4 \end{bmatrix}$$

方法二(对角化法)　对于实对称矩阵 A**,可求得** $P^{-1}AP = \Lambda$**,其中**

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{bmatrix}, P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = P^{T}$$

于是

$$e^{At} = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{9t} & \\ & & e^{9t} \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}P^{-1} + e^{9t}P\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{e^{9t}}{9}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2 . $x(t) = e^{At}\left\{ x(0) + \int_0^t e^{-As}b(s)\,ds \right\} =$

$$\mathrm{e}^{At}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}=(t+1)\mathrm{e}^{At}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=(t+1)\mathrm{e}^{9t}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

四、 $\boldsymbol{\beta}_1-|\boldsymbol{\beta}_1|\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|ccc}2&1&2&4\\\hline 0&0&0&-5\\0&-3&6&4\\0&4&-8&3\end{array}\right],\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0&0&-5\\-3&6&4\\4&-8&3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2-|\boldsymbol{\beta}_2|\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}0\\-3\\4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-3\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{50}}\begin{bmatrix}-5\\-3\\4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}0&-15&20\\-15&16&12\\20&12&9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}5&-10&0\\0&0&7\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}_1\begin{bmatrix}1&\\&\boldsymbol{H}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}0&20&12&9\\0&0&-15&20\\0&-15&16&12\\25&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}2&1&2&4\\&5&-10&0\\&&0&7\\&&&-1\end{bmatrix},\ A=QR$$

五、取 $D=\mathrm{diag}(1,1,2.5)$**,则** $B=DAD^{-1}$ **的** 3 **个孤立盖尔圆中各有** A **的一个特征值**.

六、1.$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\2&0\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}=FG$$

2.$F^{+}=(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}25&10\\10&5\end{bmatrix}^{-1}F^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\-2&1&-4&2\end{bmatrix}$

$$G^{+}=G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}=G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}3&-1\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2&1\\1&3\\2&1\\1&-2\end{bmatrix}$$

$$A^{+}=G^{+}F^{+}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}0&1&0&2\\-5&3&-10&6\\0&1&0&2\\5&-2&10&-4\end{bmatrix}$$

3.$AA^{+}b=A\begin{bmatrix}1\\4\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\\-2\\10\end{bmatrix}=b$**,故** $Ax=b$ **有解**.

4.**极小范数解** $x_0=A^{+}b=(1,4,1,-3)^{\mathrm{T}}$.

七、取 $P_2[t]$ **的简单基** $1, t, t^2$**,计算**

$$T1 = 1 + 2t + 2t^2, \quad Tt = 3 + 2t - 2t^2, \quad Tt^2 = 2 + 3t + 2t^2$$

于是, T **在基** $1, t, t^2$ **下的矩阵为**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

可求得 $P^{-1}AP = \Lambda$**,其中**

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $(f_1, f_2, f_3) = (1, t, t^2)P$ **可得**

$$f_1 = 5 + t - 4t^2, \quad f_2 = 7 + 4t - 6t^2, \quad f_3 = 1 + t$$

T **在基** f_1, f_2, f_3 **下的矩阵为** Λ.

八、1 .方法一 .因为 $Ax = b$ **有解,所以** $x_0 = A^+ b$ **是一个解,而且**

$$x_0 = A^+ AA^+ b = (A^+ A)^H A^+ b = A^H (A^+)^H A^+ b =$$
$$A^T [(A^+)^T A^+ b] \in R(A^T)$$

方法二 .设 $x_0 \in \mathrm{R}^n$ **且** $Ax_0 = b$**,由于** $\mathrm{R}^n = R(A^T) \quad N(A)$**,所以**

$$x_0 = y_0 + z_0, \quad y_0 \in R(A^T), \quad z_0 \in N(A)$$

于是 $$Ay_0 = Ay_0 + Az_0 = A(y_0 + z_0) = Ax_0 = b$$

即 $y_0 \in R(A^T)$ **是** $Ax = b$ **的一个解** .

2 .**设** $x_1, x_2 \in R(A^T)$**,且** $Ax_1 = b, Ax_2 = b$**,则有**

$$x_1 - x_2 \in R(A^T) = [N(A)]^{\perp}$$

因为 $$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$$

所以 $$x_1 - x_2 \in N(A)$$

故 $x_1 - x_2 = 0$**,即** $x_1 = x_2$**,也就是在** $R(A^T)$ **中只有** $Ax = b$ **的一个解** .

试 题 十 二

一、(18 **分**) **填空或计算填空**:

1 .**已知** $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,**则** A **的** Jordan **标准形**

$$J=\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

2 . **已知向量** $x=(2,0,\mathrm{i},-1)$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, $A=x^{\mathrm{T}}x$, **则**

$$\begin{cases} \|A\|_1=(\quad) \\ \|A\|_F=(\quad) \\ \|A\|_{m_\infty}=(\quad) \end{cases}.$$

3 .**设** A **是元素全为** 1 **的** $m\times n$ **矩阵**,**则** $A^{+}=(\quad)$.

4 .**设** A **和** B **分别是** m **阶和** n **阶酉矩阵**,**则** $\|A\quad B\|_2=(\quad)$.

5 .**设** $X=(x_{ij})_{n\times n}\in \mathbf{R}^{n\times n}$,**则** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\mathrm{tr}(X)=(\quad)$.

6 .**设线性空间** V **的线性变换** T **的两个不同特征值为** λ_1 **和** λ_2 ,**记特征子空间** $V_{\lambda_i}=\{x\mid Tx=\lambda_i x, x\in V\}(i=1,2)$, **则** $\dim[V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}]=(\quad)$.

二、(8 **分**) **设** $\|\cdot\|$ **是** $\mathbf{C}^{n\times n}$ **中从属于向量范数** $\|\cdot\|_v$ **的矩阵范数**,**证明**:**当** A **为** n **阶可逆矩阵时**, $\|A^{-1}\|^{-1}=\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$.

三、(15 **分**) **已知** $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $b(t)=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{bmatrix}$.

1 .**求** e^{At} .

2 .**用矩阵函数方法求微分程** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=Ax(t)+b(t)$ **满足初始条件** $x(0)=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ **的解** .

四、(10 分) 用 Householder 变换求 $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 3\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$的 QR 分解.

五、(10 分) 用 Gerschgorin 定理隔离

$$A=\begin{bmatrix}9 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 15 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

的特征值(要求画图表示),并根据实矩阵特征值的性质改进所得结果.

六、(15 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

1.求 A 的满秩分解.

2.求 A^+.

3.用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$是否有解.

4.求方程组 $Ax=b$的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0(要求指出所求的是哪种解).

七、(14 分) 已知矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的线性变换 T将 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的基(Ⅰ):

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

变换为基(Ⅱ):

$$B_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B_4=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

1.分别求 T 在基(Ⅰ)和基(Ⅱ)下的矩阵.

2.求 $R(T)$ 和 $N(T)$ 的维数.

八、(10 分) 设线性空间 V^3 的线性变换 T在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩

阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，证明：$W=L(\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1)$ 是 T 的不变子空间．

试题十二解答

一、1．$\det(\lambda I-A)=\lambda^2(\lambda-2)^2$．因为 $\operatorname{rank}(0I-A)=2$，所以 λ^2 是 $4-2=2$ 个初等因子的乘积；又 $\operatorname{rank}(2I-A)=3$，所以 $(\lambda-2)^2$ 是 $4-3=1$ 个初等因子．因此，A 的初等因子为 $\lambda,\lambda,(\lambda-2)^2$，从而

$$J=\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$$

2．4，　6，　16

3．令 $F=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^{m\times1}$，$G=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^{1\times n}$，则 $A=FG$，$A^+=G^+F^+=\dfrac{1}{mn}A^{\mathrm T}$．

4．由 $\|A\quad B\|_2^2=\rho[(A\quad B)^{\mathrm H}(A\quad B)]=\rho[(A^{\mathrm H}A)(B^{\mathrm H}B)]=\rho(I)=1$，知，$\|A\quad B\|_2=1$．

5．I_n．

6．设 $x\in V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}$，则有 $Tx=\lambda_1x$，$Tx=\lambda_2x$，即 $(\lambda_1-\lambda_2)x=0$，由 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 知 $x=0$，故 $\dim[V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}]=0$．

二、因为

$$\|A^{-1}\|=\max_{x\neq0}\frac{\|A^{-1}x\|_{v}}{\|x\|_{v}}=\max_{x\neq0}\frac{\|A^{-1}x\|_{v}}{\|A(A^{-1}x)\|_{v}}=\max_{y\neq0}\frac{\|y\|_{v}}{\|Ay\|_{v}}$$

所以

$$\| A^{-1} \|^{-1} = \min_{y \neq 0} \frac{1}{\dfrac{\| y \|_v}{\| Ay \|_v}} = \min_{y \neq 0} \frac{\| Ay \|_v}{\| y \|_v} = \min_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|_v}{\| x \|_v}$$

三、1 .$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^3$,由于 $A - I \neq O, (A - I)^2 = O$,所以 A 的最小多项式 $m(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. 设 $f(\lambda) = e^{\lambda t} = m(\lambda) g(\lambda) + (a + b\lambda)$,则 $f'(\lambda) = te^{\lambda t} = [mg]' + b$,且有

$$\begin{cases} f(1) = e^t = a + b \\ f'(1) = te^t = b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = (1 - t)e^t \\ b = te^t \end{cases}$$

于是

$$e^{At} = aI + bA = e^t \begin{bmatrix} 1 - 2t & -2t & 6t \\ -t & 1 - t & 3t \\ -t & -t & 1 + 3t \end{bmatrix}$$

2 .$x(t) = e^{At}\left\{ x(0) + \int_0^t e^{-As} b(s) \mathrm{d}s \right\} =$

$$e^{At}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = e^t \begin{bmatrix} 9t - 1 \\ 6t \\ 5t + 1 \end{bmatrix}$$

四、$\beta - |\beta| e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$H_1 = I - 2u_1 u_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 A = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \beta_2 - |\beta_2| e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, H_2 = I - 2u_2 u_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_2 A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = H_1 \begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ & 4 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

五、取 $D = \mathrm{diag}(1,1,1,1.5)$,**则** $B = DAD^{-1}$ **的4个孤立盖尔圆中各有** A**的一个特征值.因为** A**是实矩阵,所以复特征值必成对共轭出现,从而关于实轴对称的孤立盖尔圆中的特征值必为实数.**

六、1.$A \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = FG$$

2.$F^{+} = (F^{T}F)^{-1}F^{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} F^{T} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$G^{+} = G^{T}(GG^{T})^{-1} = G^{T}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

3.$AA^{+}b = A \cdot \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b$,**故** $Ax = b$ **有解.**

4.**极小范数解** $x_0 = A^{+}b = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)^{T}$.

七、1.**取** $\mathbf{R}^{2\times 2}$ **的简单基** $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$,**则有**

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})C_1$$

$$(B_1, B_2, B_3, B_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})C_2$$

其中

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

设$(B_1, B_2, B_3, B_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)C$,则

$$C = C_1^{-1} C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$T(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4)C$$

$$T(B_1, B_2, B_3, B_4) = T(A_1, A_2, A_3, A_4)C = (B_1, B_2, B_3, B_4)C$$

故 T 在基(Ⅰ)与基(Ⅱ)下的矩阵都是 C.

2.因为 $\det C = -3 \neq 0$,所以 $\dim R(T) = \dim R(C) = 4$, $\dim N(T) = \dim N(C) = 0$.

八、证法一.由 $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$ 知

$$T\alpha_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \quad T\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$$

$$T\alpha_3 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$$

对于任意的 $\alpha \in W$,存在常数 k_1 与 k_2,使得

$$\alpha = k_1(\alpha_2 - \alpha_1) + k_2(\alpha_3 - \alpha_1) = -(k_1 + k_2)\alpha_1 + k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3$$

从而有

$$T\alpha = -(k_1 + k_2)(T\alpha_1) + k_1(T\alpha_2) + k_2(T\alpha_3) = -k_1(\alpha_2 - \alpha_1) - k_2(\alpha_3 - \alpha_1) \in W$$

故 W 是 T 的不变子空间.

证法二.对于任意的 $\alpha \in W$,存在常数 k_1 与 k_2,使得

$$\alpha = k_1(\alpha_2 - \alpha_1) + k_2(\alpha_3 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} -k_1 - k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

从而有

$$T\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A\begin{bmatrix} -k_1-k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} k_1+k_2 \\ -k_1 \\ -k_2 \end{bmatrix} = -\alpha \in W$$

故 W 是 T 的不变子空间 .

试 题 十 三

(博士生入学考试试题)

1 .(8 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,求 A 的 Jordan 标准形 .

二、(7 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 8 \\ 4 & -6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 试求 $\|A\|_{m_1}$, $\|A\|_F$, $\|A\|_{m_\infty}$, $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|Ax\|_2$, $\|Ax\|_\infty$.

三、(10 分) 设 $A \in C_n^{m\times n}$, A^+ 表示 A 的 Moore - Penrose 逆,证明 $\|AA^+\|_2 = 1$.

四、(15 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

1 .求 e^{At} .

2 .用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b(t)$ 满足初始条件 $x(0) = (1,0,0,0)^T$ 的解 .

五、(10 分) 用 Givens 变换求 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$ 的 QR 分解 .

六、(10 分) 用 Gerschgorin 定理隔离 $A=\begin{bmatrix}0&8&1\\1&20&3\\2&2&10\end{bmatrix}$ 的特征值(要求画图表示) .

七、(15 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\1&-2&-3&-1\\-1&4&5&3\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}3\\3\\-3\end{bmatrix}$.

1 .求 A 的满秩分解 .

2 .求 A^+ .

3 .用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解 .

4 .求方程组 $Ax=b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (要求指出所求的是哪种解) .

八、(10 分) 设多项式空间 $P_3[t]=\{f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \mid a_i\in\mathbf{R}\}$ 中的线性变换为

$$Tf(t)=(a_0-a_1)+(a_1-a_2)t+(a_2-a_3)t^2+(a_3-a_0)t^3$$

1 .求 T 的值域 $R(T)$ 的基与维数 .

2 .求 T 的核 $N(T)$ 的基与维数 .

九、(8 分) 设 T 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, T 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A .证明 T 为对称变换的充要条件是 $A^{\mathrm{T}}G=GA$, 其中 G 为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵 .

十、(7 分) 已知线性空间 $V^n(n>1)$ 的基(Ⅰ) 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 可逆线性变换 T 不满足 $T\alpha_1=\alpha_1$, 证明:在 V^n 中存在与基(Ⅰ) 不同的基(Ⅱ) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 使得 T 在基(Ⅰ) 与基(Ⅱ) 下的矩阵相同 .

试题十三解答

一、见试题八第一题之 5 .

二、47， $\sqrt{237}$， 32， 15， 21， $\sqrt{203}$， 13

三、见试题八第二题 .

四、令 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, **则** $A = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$, **可求得**

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1^{-1} A_1 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{A_1 t} = P_1 \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P_2^{-1} A_2 P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A_2 t} = P_2 \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} P_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & \\ & e^{A_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ t & 1 & & \\ & & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ & & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-As} b(s) \mathrm{d}s = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}s = \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\left\{ x(0) + \int_0^t e^{-As} b(s) \mathrm{d}s \right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ te^t \\ te^t \end{bmatrix}$$

五、$\beta_1=(0,1,0,1)^{\mathrm T}$,**构造** $T_{12}(c,s):c=0,s=1$,**则** $T_{12}\beta_1=(1,0,0,1)^{\mathrm T}$;**构造** $T_{14}(c,s):c=\frac{1}{\sqrt2},s=\frac{1}{\sqrt2}$,**则** $T_{14}(T_{12}\beta_1)=(\sqrt2,0,0,0)^{\mathrm T}$,**于是有**

$$T_1=T_{14}T_{12}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&0&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{-1}{\sqrt2}&0&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&\frac{-1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

$$T_1A=\left[\begin{array}{c|ccc}\sqrt2&0&\sqrt2&0\\\hline 0&-1&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right],\quad A_1=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\beta_2=(-1,1,0)^{\mathrm T}$,**构造** $T_{12}(c,s):c=-\frac{1}{\sqrt2},s=\frac{1}{\sqrt2}$,**则** $T_{12}\beta_2=(\sqrt2,0,0)^{\mathrm T}$,**于是有**

$$T_2=T_{12}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_2A_1=\begin{bmatrix}\sqrt2&0&\sqrt2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1 & \\ & T_2\end{bmatrix}T_1,\quad Q=T^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0\\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ & & 0 & 0\\ & & & 0\end{bmatrix},\quad A=QR$$

六、取 $D=\mathrm{diag}(1,1.5,1)$,**则** $B=DAD^{-1}$ **的** 3 **个孤立盖尔圆中各有** A **的一个特征值** .

七、1 .$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=FG$$

2 .$F^{+}=(F^{\mathrm{T}}F)^{-1}F^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ -6 & 20\end{bmatrix}^{-1}F^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}$

$$G^{+}=G^{\mathrm{T}}(GG^{\mathrm{T}})^{-1}=G^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{+}=G^{+}F^{+}=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}10 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ -7 & -4 & 1\\ 13 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

3 .$A^{+}b=(1,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$, $AA^{+}b=b$,**故** $Ax=b$ **有解** .

4 .**极小范数解** $x_0=A^{+}b=(1,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

八、见试题十第七题 .

九、必要性.在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下,α_i 和 $T\alpha_i$ 的坐标分别为 e_i 和 Ae_i.因为 T 是对称变换,所以 $(T\alpha_i,\alpha_j)=(\alpha_i,T\alpha_j)$.由内积的矩阵乘法形式可得

$$(Ae_i)^{\mathrm{T}}Ge_j=e_i^{\mathrm{T}}G(Ae_j)$$

或者

$$e_i^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}G)e_j=e_i^{\mathrm{T}}(GA)e_j$$

即 $A^{\mathrm{T}}G=GA$.

充分性.设 $\alpha,\beta\in V$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标(列向量)分别为 x 与 y,则 $T\alpha$ 和 $T\beta$ 在该基下的坐标分别为 Ax 和 Ay.因为 $A^{\mathrm{T}}G=GA$,所以

$$\begin{aligned}(T\alpha,\beta)&=(Ax)^{\mathrm{T}}Gy=x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}G)y=\\&x^{\mathrm{T}}(GA)y=x^{\mathrm{T}}G(Ay)=(\alpha,T\beta)\end{aligned}$$

即 T 是对称变换.

十、设 T 在基(Ⅰ)下的矩阵为 A,即 $T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$.由 T 是可逆变换知 A 是可逆矩阵,由 $T\alpha_1\neq\alpha_1$ 知 $A\neq I$.再设

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C,\quad T(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)B$$

则有 $B=C^{-1}AC$.取 $C=A\neq I$ 时,基(Ⅱ)与基(Ⅰ)不同,而 $B=A^{-1}AA=A$,此时

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A=(T\alpha_1,\cdots,T\alpha_n)$$

即 $\beta_i=T\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$.

试 题 十 四

(博士生入学考试试题)

一、(8 分)已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&2\\0&0&2&3\\0&0&0&2\end{bmatrix}$,求 A 的 Jordan 标准形.

二、(7 分)已知 $x=(-1,\mathrm{i},0,1)$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,求 $\|x\|_1$,

$\| x \|_2$，$\| x \|_\infty$，$\| x^T x \|_{m_1}$，$\| x^T x \|_F$，$\| x^T x \|_{m_\infty}$，$\| x^T x \|_\infty$.

三、(10 **分**) **设** $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T \in \mathbf{C}^n$，**验证**:

1 .**方阵的** m_∞ - **范数与向量的** 1 - **范数相容** .

2 .**方阵的** m_∞ - **范数与方阵的** F - **范数等价** .

四、(15 **分**) **已知** $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$，$b(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$.

1 .**求** e^{At} .

2 .**用矩阵函数方法求微分方程** $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b(t)$ **满足初始条件** $x(0) = (0, -1, 2)^T$ **的解** .

五、(10 **分**) **用** Householder **变换求**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

的 QR **分解** .

六、(10 **分**) **用** Gerschgorin **定理隔离**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 10 & 1 \\ 1 & 0.1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的特征值(**要求画图表示**)，**并根据实矩阵特征值的性质改进所得结果** .

七、(15 **分**) **已知** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$.

1 .求 A 的满秩分解 .

2 .求 A^{+} .

3 .用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax = b$ 是否有解 .

4 .求方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (要求指出所求的是哪种解) .

八、(15 分) 设矩阵空间 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 的线性变换为:

$$TX = B^{\mathrm{T}}X - X^{\mathrm{T}}B,\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ X \in \mathrm{R}^{2\times2}$$

$\mathrm{R}^{2\times2}$ 的子空间 $V = \{X \mid X = (x_{ij})_{2\times2}, x_{12} + x_{21} = 0\}$.

1 .求 V 的一个基 .

2 .验证 V 是 T 的不变子空间 .

3 .求 V 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵 .

九、(10 分) 设欧氏空间 V^n 的正交变换 T 的特征值都是实数,证明:该正交变换 T 也是对称变换 .

试题十四解答

一、$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ (类似试题九第一题之 1)

二、3, $\sqrt{3}$, 1, 9, 3, 4, 3

三、1 .见试题十一第二题之 1 .

2 .见试题一第二题 .

四、见试题九第三题 .

五、见试题七第四题 .

六、见试题七第五题 .

七、见试题十第六题 .

八、1 .当 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \in V$ 时,由 $x_{12} + x_{21} = 0$ 可得

$$X = x_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

容易验证 $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 线性无关,故 X_1, X_2, X_3 是 V 的一个基 .

2 .设 $X \in V$,则 $TX = (B^{\mathrm{T}} X) - (B^{\mathrm{T}} X)^{\mathrm{T}}$.记 $Y = B^{\mathrm{T}} X = (y_{ij})_{2\times 2}$,则有

$$TX = Y - Y^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & y_{12} - y_{21} \\ y_{21} - y_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

因为$(y_{12} - y_{21}) + (y_{21} - y_{12}) = 0$,所以 $TX \in V$,故 V 是 T 的不变子空间 .

3 .计算

$$TX_1 = B^{\mathrm{T}} X_1 - X_1^{\mathrm{T}} B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0X_1 + 0X_2 + (-1)X_3$$

$$TX_2 = B^{\mathrm{T}} X_2 - X_2^{\mathrm{T}} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0X_1 + 0X_2 + 0X_3$$

$$TX_3 = B^{\mathrm{T}} X_3 - X_3^{\mathrm{T}} B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 0X_1 + 0X_2 + 2X_3$$

于是,T 在基 X_1, X_2, X_3 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

可求得 $P^{-1}AP = \Lambda$,其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由$(Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2, X_3)P$ 可得

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad Y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

T 在基 Y_1, Y_2, Y_3 下的矩阵为 Λ.

九、设 V^n 的一个标准正交基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,正交变换 T 在该基下的矩阵为 A,即 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A$,则 A 是正交矩阵,且 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都是实数.于是 $A^{\mathrm{T}}A = I = AA^{\mathrm{T}}$,即 A 是实的正规矩阵.因此,存在正交矩阵 Q,使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

故 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ 是实对称矩阵,从而 T 是对称变换.

试题十五

(博士生入学考试试题)

一、(6 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,求 A 的 Jordan 标准形.

二、(6 分) 已知 $x = (1, \mathrm{i}, 2, 2\mathrm{i})$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $A = x^{\mathrm{T}}x$,求

$$\|x\|_1, \qquad \|x\|_\infty, \qquad \|A\|_1$$

$$\|A\|_{m_1}, \qquad \|A\|_F, \qquad \|A\|_{m_\infty}$$

三、(13 分) 设 α 是给定的 n 维非零列向量, $\|A\|_F$ 是 $\mathrm{C}^{n\times n}$ 中矩阵的 F - 范数,定义实值函数 $\|x\| = \|\alpha x^{\mathrm{T}}\|_F$ (任意 $x \in \mathrm{C}^n$).

1. 证明 $\|x\|$ 是 C^n 上的向量范数,且矩阵的 F - 范数与它相容.

2. 取 $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{C}^n$,试写出上述向量范数与向量 2 - 范数之间的关系.

四、(15 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&6\\1&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}$, $b(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\\0\end{bmatrix}$.

1. 求 e^{At}.

2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)=(1,-1,0)^T$ 的解.

五、(10 分) 用 Householder 变换求 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\2&1&6\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

六、(10 分) 用 Gerschgorin 定理隔离

$$A=\begin{bmatrix}9&1&-2&1\\0&15&1&1\\-1&0&4&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

的特征值(要求画图表示), 并根据实矩阵特征值的性质改进所得结果.

七、(15 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&i&-i&0\\i&-1&1&1\\1&i&-i&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\2i\\1\end{bmatrix}$, $i=\sqrt{-1}$.

1. 求 A 的满秩分解.

2. 求 A^+.

3. 用广义逆矩阵方法判断方程组 $Ax=b$ 是否有解.

4. 求方程组 $Ax=b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解 x_0 (要求指出所求的是哪种解).

八、(15 分) 设矩阵空间 $R^{2\times2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times2} \mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0\}$$

V 中的线性变换为

$$TX=X+X^T \quad (\text{任意 } X\in V)$$

1. 求 V 的一个基 .

2. 求 V 的一个基,使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵 .

九、(10 分) 设线性空间 V^3 中的线性变换 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 证明:子空间 $W = L(\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1)$ 是 T 的不变子空间 .

2. 将 T 看作子空间 W 中的线性变换时,求 T 的全体特征值 .

试题十五解答

一、$\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 3)^2$.因为 $\operatorname{rank}((-1)I - A) = 2$,所以$(\lambda + 1)^2$ 是 $4 - 2 = 2$ 个初等因子的乘积;又 $\operatorname{rank}(3I - A) = 3$,所以$(\lambda - 3)^2$ 是 $4 - 3 = 1$ 个初等因子 .因此,A 的初等因子为$\lambda + 1, \lambda + 1, (\lambda - 3)^2$,从而 A 的 Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

二、6, 2, 12, 36, 10, 16

三、1. 当 $x = 0$ 时, $\| x \| = \| \alpha 0^T \|_F = \| O \|_F = 0$;当 $x \neq 0$ 时, $\alpha x^T \neq O$,从而 $\| x \| = \| \alpha x^T \|_F > 0$.

对任意的 $k \in \mathbf{C}$,有

$$\| kx \| = \| \alpha (kx)^T \|_F = \| k(\alpha x^T) \|_F = \\ |k| \| \alpha x^T \|_F = |k| \| x \|$$

对任意的 $y \in \mathbf{C}^n$,有

$$\| x + y \| = \| \alpha (x + y)^T \|_F = \| \alpha x^T + \alpha y^T \|_F \leq \\ \| \alpha x^T \|_F + \| \alpha y^T \|_F = \| x \| + \| y \|$$

因此，$\| x \|$ 是向量范数.

因为

$$\| Ax \| = \| \alpha (Ax)^{\mathrm{T}} \|_{\mathrm{F}} = \| (\alpha x^{\mathrm{T}}) A^{\mathrm{T}} \|_{\mathrm{F}} \leq \| \alpha x^{\mathrm{T}} \|_{\mathrm{F}} \| A^{\mathrm{T}} \|_{\mathrm{F}} = \| A \|_{\mathrm{F}} \| x \|$$

所以矩阵范数 $\| A \|_{\mathrm{F}}$ 与向量范数 $\| x \|$ 相容.

2. 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\alpha x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}$$

$$\| x \| = \| \alpha x^{\mathrm{T}} \|_{\mathrm{F}} = \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} | \xi_i |^2} = \sqrt{n} \| x \|_2$$

四、1. 方法一(待定法) $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 5)$，由 $(A + I)(A - 5I) = O$ 知，A 的最小多项式 $m(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$. 设 $f(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda t} = m(\lambda) g(\lambda) + (a + b\lambda)$，则

$$\begin{cases} f(-1) = \mathrm{e}^{-t} = a - b \\ f(5) = \mathrm{e}^{5t} = a + 5b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{6}(\mathrm{e}^{5t} + 5\mathrm{e}^{-t}) \\ b = \dfrac{1}{6}(\mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{-t}) \end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{At} = aI + bA = \frac{\mathrm{e}^{5t}}{6}(I + A) + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{6}(5I - A) =$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{5t} + 4\mathrm{e}^{-t} & 2\mathrm{e}^{5t} - 2\mathrm{e}^{-t} & 6\mathrm{e}^{5t} - 6\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{5t} + 5\mathrm{e}^{-t} & 3\mathrm{e}^{5t} - 3\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{5t} - \mathrm{e}^{-t} & 3\mathrm{e}^{5t} + 3\mathrm{e}^{-t} \end{bmatrix}$$

方法二(对角化法) 对于矩阵 A，可求得 $P^{-1}AP = \Lambda$，其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-5&3\\1&1&-3\\1&1&3\end{bmatrix}$$

于是

$$e^{At}=P\begin{bmatrix}e^{-t}&&\\&e^{-t}&\\&&e^{5t}\end{bmatrix}P^{-1}=$$

$$\frac{e^{5t}}{6}\begin{bmatrix}2&2&6\\1&1&3\\1&1&3\end{bmatrix}+\frac{e^{-t}}{6}\begin{bmatrix}4&-2&-6\\-1&5&-3\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

2\. $x(t)=e^{At}\left\{x(0)+\int_0^t e^{-As}b(s)\,ds\right\}=$

$$e^{At}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\\-t\\0\end{bmatrix}\right\}=(t+1)e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

五、见试题四第四题.

六、见试题十二第五题.

七、1\. $A\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&i&-i&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\i&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&i&-i&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=FG$$

2\. $F^{+}=(F^{H}F)^{-1}F^{H}=\begin{bmatrix}3&-i\\i&1\end{bmatrix}^{-1}F^{H}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-i&2&-i\end{bmatrix}$

$$G^{+}=G^{H}(GG^{H})^{-1}=G^{H}\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&0\\-i&0\\i&0\\0&3\end{bmatrix}$$

$$A^{+}=G^{+}F^{+}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0&1\\-\mathrm{i}&0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0&\mathrm{i}\\-3\mathrm{i}&6&-3\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

3. $AA^{+}b=A\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\\\mathrm{i}\\3\mathrm{i}\end{bmatrix}=b$,故 $Ax=b$ 有解.

4. 极小范数解 $x_0=A^{+}b=\frac{1}{3}(1,-\mathrm{i},\mathrm{i},3\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$.

八、1. 当 $X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\in V$ 时,由 $x_{11}+x_{12}+x_{21}=0$ 可得

$$X=x_{12}\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}+x_{21}\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}+x_{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

容易验证 $X_1=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}$, $X_2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}$, $X_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ 线性无关,故 X_1,X_2,X_3 是 V 的一个基.

2. 计算

$$TX_1=X_1+X_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}=1X_1+1X_2+0X_3$$

$$TX_2=X_2+X_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}=1X_1+1X_2+0X_3$$

$$TX_3=X_3+X_3^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}=0X_1+0X_2+2X_3$$

于是,T 在基 X_1,X_2,X_3 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 可求得 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由$(Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2, X_3)P$可得

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T在基 Y_1, Y_2, Y_3 下的矩阵为 Λ.

九、1. 见试题十二第八题 .

2. 容易证明 $\dim W = 2$.设 W 的一个基为β_1, β_2,由第一小题的证明过程可得

$$T\beta_1 = (-1)\beta_1, \quad T\beta_2 = (-1)\beta_2$$

于是, T在 W 的基β_1, β_2 下的矩阵为$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.故将 T看做W中的线性变换时,它的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

参 考 文 献

1. 程云鹏,张凯院,徐仲. 矩阵论(第 2 版). 西安:西北工业大学出版社,1999
2. 徐仲,张凯院,陆全,冷国伟. 矩阵论简明教程. 北京:科学出版社,2001
3. 戴华. 矩阵论. 北京:科学出版社,2001
4. 张凯院,徐仲,陆全. 矩阵论典型题解析及自测试题(第 2 版). 西安:西北工业大学出版社,2003