rapport

November 21, 2025

Exercice 1.4.1

On considère le problème d'étagement (PE) consistant à maximiser le rapport de charge utile

$$J = \frac{m_u}{M_0} = \frac{M_{i,4}}{M_{i,1}},$$

ce qui revient à minimiser la fonction

$$f = -J.$$

posons

$$x_j = \frac{M_{i,j}}{M_{f,j}}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

$$V_p = v_{e1} \ln\left(\frac{M_{i,1}}{M_{f,1}}\right) + v_{e2} \ln\left(\frac{M_{i,2}}{M_{f,2}}\right) + v_{e3} \ln\left(\frac{M_{i,3}}{M_{f,3}}\right) = v_{e1} \ln x_1 + v_{e2} \ln x_2 + v_{e3} \ln x_3.$$

On définit la contrainte

$$c(x_1, x_2, x_3) = v_{e1} \ln x_1 + v_{e2} \ln x_2 + v_{e3} \ln x_3 - V_p = 0.$$

$$m_{s,j} = k_j \, m_{e,j}, \qquad m_{e,j} = M_{i,j} - M_{f,j},$$

Comme

$$x_j = \frac{M_{i,j}}{M_{f,j}} \quad \Longrightarrow \quad M_{f,j} = \frac{M_{i,j}}{x_j},$$

on obtient

$$m_{e,j} = M_{i,j} - M_{f,j} = M_{i,j} - \frac{M_{i,j}}{x_j} = M_{i,j} \, \frac{x_j - 1}{x_j},$$

et donc

$$m_{s,j} = k_j m_{e,j} = k_j M_{i,j} \, \frac{x_j - 1}{x_j}.$$

$$M_{i,j+1} = M_{f,j} - m_{s,j} = \frac{M_{i,j}}{x_j} - k_j M_{i,j} \, \frac{x_j - 1}{x_j} = \frac{M_{i,j}}{x_j} \big[1 - k_j (x_j - 1)\big] = \frac{M_{i,j}}{x_j} \big[(1 + k_j) - k_j x_j\big].$$

donc

$$\frac{M_{i,j+1}}{M_{i,j}} = \frac{(1+k_j) - k_j x_j}{x_j} = \frac{1+k_j}{x_j} - k_j.$$

Le critère

$$J = \frac{M_{i,4}}{M_{i,1}} = \prod_{j=1}^{3} \frac{M_{i,j+1}}{M_{i,j}} = \prod_{j=1}^{3} \left(\frac{1+k_j}{x_j} - k_j \right),$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = -\prod_{j=1}^{3} \left(\frac{1+k_j}{x_j} - k_j \right).$$

Exercice 1.4.2

On définit les variables auxiliaires

$$y_j = \frac{1+k_j}{x_j} - k_j, \qquad j = 1, 2, 3,$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = -y_1 y_2 y_3.$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_j} = -\frac{1+k_j}{x_j^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\partial y_j}{\partial x_j} \prod_{i \neq j} y_i = \frac{1+k_j}{x_j^2} \prod_{i \neq j} y_i.$$

Or

$$f = -y_1 y_2 y_3 \quad \Longrightarrow \quad \prod_{i \neq j} y_i = -\frac{f}{y_j},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{f(1+k_j)}{x_j^2 y_j}.$$

On introduit la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda c(x).$$

Les conditions KKT d'ordre 1 s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) + \lambda^* \frac{\partial c}{\partial x_j}(x^*) = 0, \qquad j = 1, 2, 3.$$

$$-\frac{f(1+k_j)}{x_j^2 y_j} + \lambda \frac{v_{ej}}{x_j} = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{f(1+k_j)}{x_j y_j} + \lambda v_{ej} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda v_{ej} = \frac{f(1+k_j)}{x_j y_j}.$$

d'où

$$1-\Omega_j x_j = \frac{y_j x_j}{1+k_j}.$$

$$\lambda v_{ej}(1-\Omega_j x_j) = \frac{f(1+k_j)}{x_j y_j}\cdot\frac{y_j x_j}{1+k_j} = f.$$

donc

$$v_{e1}(1-\Omega_1 x_1) = v_{e2}(1-\Omega_2 x_2) = v_{e3}(1-\Omega_3 x_3) = \text{cte},$$

Exercice 1.4.3

$$\begin{aligned} v_{e2}(1-\Omega_2 x_2) &= v_{e3}(1-\Omega_3 x_3)\\ 1-\Omega_2 x_2 &= \frac{v_{e3}}{v_{e2}}(1-\Omega_3 x_3)\\ \implies\ x_2(x_3) &= \frac{1-\frac{v_{e3}}{v_{e2}}(1-\Omega_3 x_3)}{\Omega_2} \end{aligned}$$

De même, pour $j=1$,

$$x_1(x_3) = \frac{1-\dfrac{v_{e3}}{v_{e1}}(1-\Omega_3 x_3)}{\Omega_1}.$$

$$c(x) = v_{e1}\ln x_1 + v_{e2}\ln x_2 + v_{e3}\ln x_3 - V_p,$$

donc il revient à minimiser $h(x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$

sous la contrainte de $\varphi(x_3) = v_{e1}\ln x_1(x_3) + v_{e2}\ln x_2(x_3) + v_{e3}\ln x_3 - V_p$

Exercice 1.4.4

L'itération de Newton s'écrit

$$x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} - \frac{\varphi(x_3^{(n)})}{\varphi'(x_3^{(n)})},$$

où

$$\varphi(x_3) = v_{e1}\ln x_1(x_3) + v_{e2}\ln x_2(x_3) + v_{e3}\ln x_3 - V_p.$$

On a

$$\varphi'(x_3) = v_{e1}\frac{x_1'(x_3)}{x_1(x_3)} + v_{e2}\frac{x_2'(x_3)}{x_2(x_3)} + v_{e3}\frac{1}{x_3}.$$

$$x_j(x_3) = \frac{1-\frac{v_{e3}}{v_{ej}}(1-\Omega_3 x_3)}{\Omega_j}, = \frac{1-\frac{v_{e3}}{v_{ej}}+\frac{v_{e3}}{v_{ej}}\Omega_3 x_3}{\Omega_j}, \qquad j=1,2,$$

$$x_j'(x_3) = \frac{v_{e3}}{v_{ej}}\frac{\Omega_3}{\Omega_j}, \qquad j=1,2.$$

On suppose connus le rapport optimal (x_1^*, x_2^*, x_3^*) et la masse de charge utile $M_{i,4} = m_u$. On connaît la masse finale $M_{i,4} = m_u$. En utilisant la relation

$$\frac{M_{i,j+1}}{M_{i,j}} = \frac{1 + k_j}{x_j^*} - k_j,$$

donc

$$M_{i,j} = \frac{M_{i,j+1}}{\frac{1+k_j}{x_j^*} - k_j}, \qquad j = 3, 2, 1.$$

$$M_{f,j} = \frac{M_{i,j}}{x_j^*},$$

la masse d'ergols sont alors

$$m_{e,j} = M_{i,j} - M_{f,j},$$

La masse totale initiale du lanceur est

$$M_0 = M_{i,1}.$$

Enfin, le multiplicateur de Lagrange λ peut être obtenu à partir de la relation

$$\lambda v_{ej}(1 - \Omega_j x_j^*) = f(x^*),$$

où

$$f(x^*) = -\prod_{j=1}^{3} \left(\frac{1 + k_j}{x_j^*} - k_j \right).$$

Par exemple, en prenant $j = 3$,

$$\lambda = \frac{f(x^*)}{v_{e3}(1 - \Omega_3 x_3^*)}.$$