Projet LU3MA101 : Théorie spéctrale des graphes

Milan Delmas, Xiao Junwen,
Alexandre de Jaeger, Corentin Gratien

Sorbonne Université

December 3, 2025

Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Représentation matricielle
3. Conductance
   - Définition et exemple
   - Algorithme brute force
4. Théorie spéctrale
   - Vecteur de Fiedler
   - Méthode de partitionnement
5. Conclusion

Introduction

De nos jours, les systèmes informatiques recueillent des quantités astronomiques de données à chaque instant. Par exemple le réseau social X (anciennement Twitter) compte environ 250 millions d'utilisateurs actifs quotidiens.
Afin d'analyser informatiquement des quantités de données aussi importantes, on utilise souvent la théorie des graphes. On modélise ainsi les objets à étudier par des sommets et les relations entre ces objets par des arêtes. Ces informations peuvent alors être stockées dans une matrice. Y appliquer des méthodes d'algèbre linéaire donne lieu à ce qu'on appelle la théorie spectrale des graphes. En particulier, l'étude du spectre des matrices va être un point clef du problème de partitionnement d'un graphe, que nous allons étudier.

Définition : Graphe

Intuitivement un graphe comme étant la donnée d'un ensemble de sommets et d'un ensemble de couples de ces sommets, appelés arêtes. Les sommets sont aussi parfois appelés points du graphe. Formellement, on définit un graphe comme suit : un couple (V,E) où V est un ensemble quelconque, l'ensemble des sommets (ou Vertices en anglais). Et où E est un sous-ensemble de V^2. Cet ensemble, appelé ensemble des arêtes (ou Edges en anglais).

Définition : Graphe connexe

En théorie des graphes, un graphe non orienté est dit connexe s'il est d'un seul tenant. Une matrice symétrique est dite réductible s'il existe une matrice de permutation P tel que PAP^T est une matrice par blocs. S'il n'existe pas une telle matrice de permutation alors cette matrice est dite irréductible

Matrice d'adjacence

Définition

Soit un graphe G à n sommets. En numérotant ses sommets de 1 à n, la matrice d'adjacence M de G est la matrice n $\times$ n dont le coefficient (i,j) vaut 1 lorsque les sommets i et j sont reliés et 0 sinon.

Propriété

Il est à noter que pour un graphe non orienté la matrice est symétrique. De plus la diagonale principale est toujours constituée de 0 On appelle degré d'un sommet du graphe le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet.Degré de sommet est une mesure de connexion de graphe.

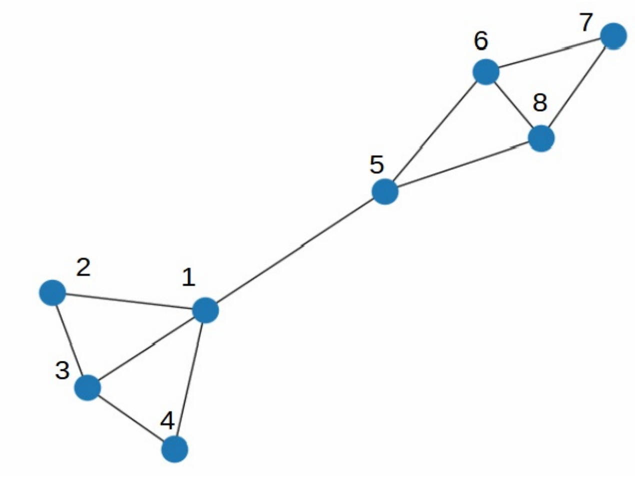


Figure: Example graphe1

Matrice d'adjacence du graphe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition

un graphe non orienté est connexe ssi sa matrice d'adjacence est irréductible

Intérêts de la représentation matricielle

On peut représenter graphes informatiquement par deux listes, une liste de ses sommets et une liste de ses arêtes. Cependant la représentation matricielle permet de manipuler le graphe et certaines de ses propriétés à travers des opérations simples d'algèbre linéaire De plus, et c'est un des objectifs de notre projet, que l'étude du spectre de matrices liées au graphe nous permettra de le partitionner.

Propriété élémentaires

Proposition 2.1. Si M est une matrice d'adjacence et $e = (1, ..., 1)^T$,alors Me est le vecteur des degrés des sommets de G. Dans notre exemple, on vérifie que $Me = (4, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3)^T$

Informatiquement, on dispose des données présentées dans des fichiers MTX . Dans ces fichiers, il y a une première ligne donnant la taille de la matrice et le nombre d'arêtes puis autant de lignes que d'arêtes, chaque ligne étant composée de deux sommets connectés puis de la valeur attribuée à cette connexion. C'est le poids d'une connexion. Dans le cas du blog politique, ce poids vaut toujours 1. Par exemple, les lignes suivantes représentent le graphe complet à cinq sommets. La lecture du fichier MTX dans python donne

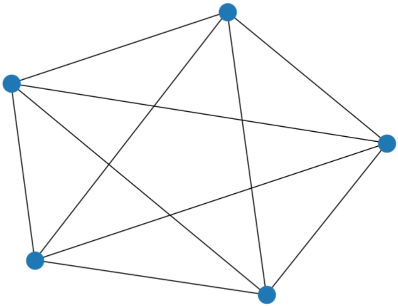


Figure: Example graphe

```
5 5 20
1 2 1
1 3 1
1 4 1
1 5 1
2 1 1
2 3 1
2 4 1
2 5 1
3 1 1
3 2 1
```

Proposition

Si m est un entier naturel non nul, le coefficient (i,j) de M^m représente le nombre de chemins de longueur exactement m allant de i à j dans le graphe.

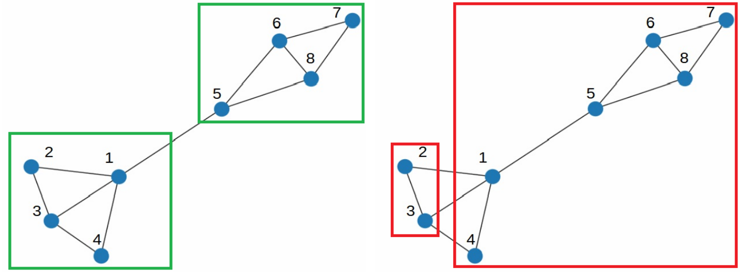
Si $B = A^2, alors \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = b_{ij}$
exemple :M^2=

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Zao wou-Ki, la peinture

Figure: Zao Wou-ki, musée d'Orléans

Conductance



Pour un graphe donné, deux partitionnements, intuitivement le premier est meilleur, mais comment le quantifier ?

Conductance d'une partition

Définition

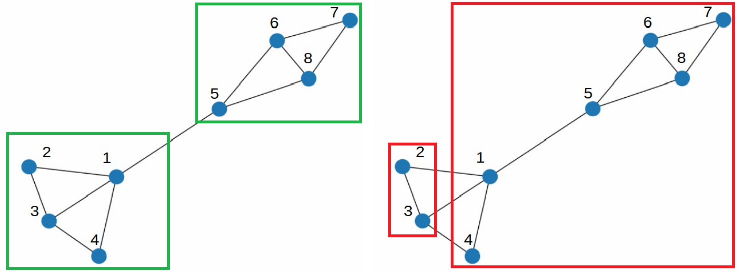
Pour S une partie de noeuds de G, on définit la conductance $\varphi(S)$ de la partition associée à S par:

$$\varphi(S) = \frac{|\partial S|}{\min(\mathrm{vol}(S), \mathrm{vol}(S^c))}$$

Où:

- S est une partie des sommets de G, S^c désigne son complémentaire.
- $\mathrm{vol}(S)$ vaut la somme des degrés des noeuds de S, en tant que sous graphe de G.
- Et ∂S représente l'ensemble des arrêtes reliant S à S^c.

Exemple sur le graphe à 8 sommets



Calculons la conductance des deux partitions ci-dessus:

- Pour la partition verte (les sommets 1,2,3,4 et 5,6,7,8), on a: vol(1,2,3,4) $= 10$, vol(5,6,7,8) $= 10$, $|\partial S| = 1$.
  d'où: $\varphi(\mathbf{Partition}_{\text{verte}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$
- Pour la partition rouge (les sommets 2,3 et 1,4,5,6,7,8), on a: vol(2,3) $= 2$, vol(1,4,5,6,7,8) $= 14$, $|\partial S| = 3$.
  d'où: $\varphi(\mathbf{Partition}_{\text{rouge}}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

Conductance d'un graphe

Définition

Pour un graphe G, on définit la conductance $\psi(G)$ du graphe comme étant le minimum des conductances sur chaque partition S de G:

$$\psi(G) = \min_{S} \varphi(S) \tag{1}$$

Algorithme Brute Force

Pour calculer la conductance d'un graphe avec l'algorithme "brute force", on trouve toute ses bi-partitions, puis on calcule chacune des conductances associées, avant de considérer le minimum.
Cette méthode a donc une **complexité en** $O(2^n)$.

Sur l'exemple du "graphe à 8 sommets", on trouve: $\boldsymbol{\psi(\mathbf{G}) = \frac{1}{10}}$ **(** $\boldsymbol{=}$ $\boldsymbol{\varphi(\mathbf{Partition}_{\text{verte}})}$ **)**, c'est le résultat qu'on espérait intuitivement obtenir.

Limite

Quelques ordres de grandeur:

n	2^n
10	$\approx 10^3$
100	$\approx 10^{30}$
1000	$\approx 10^{301}$
1500	$\approx 10^{451}$

$n \approx 1500$ correspond au cas du blog politique.

Notre algorithme n'est pas du tout adapté à des gros graphes. Pour travailler sur ceux-là, nous devrons troquer un peu de précision, pour avoir la possibilité d'arriver (dans un temps raisonnable) à un résultat.

Définition : Laplacienne d'un graphe

Soit M la matrice d'adjacence du graphe G. On définit la matrice Laplacienne de M : $L = D - M$ où $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ est la diagonale des degrés des sommets de G.
Et la laplacienne normalisée $L_N = D^{-1/2} L D^{1/2}$.

La laplacienne du graphe de la partie précédente est

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe connexe. La matrice L vérifie les propriétés suivantes :

Propriété

Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe connexe. La matrice L vérifie les propriétés suivantes :

- Soit $v \in \mathbb{R}^n$,

$$vLv^T = \sum_{i<j, i \leftrightarrow j} (v_i - v_j)^2 \tag{2}$$

Propriété

Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe connexe. La matrice L vérifie les propriétés suivantes :

- Soit $v \in \mathbb{R}^n$,
$$vLv^T = \sum_{i<j, i \leftrightarrow j} (v_i - v_j)^2 \tag{2}$$
- L est semi-définie positive

Propriété

Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe connexe. La matrice L vérifie les propriétés suivantes :

- Soit $v \in \mathbb{R}^n$,
$$vLv^T = \sum_{i<j, i \leftrightarrow j} (v_i - v_j)^2 \tag{2}$$
- L est semi-définie positive
- la plus petite valeur propre de L est 0, l'espace propre associé est engendré par $e = (1, \ldots, 1)^T$

Propriété

Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe connexe. La matrice L vérifie les propriétés suivantes :

- Soit $v \in \mathbb{R}^n$,
$$vLv^T = \sum_{i<j, i\leftrightarrow j} (v_i - v_j)^2 \tag{2}$$
- L est semi-définie positive
- la plus petite valeur propre de L est 0, l'espace propre associé est engendré par $e = (1, \ldots, 1)^T$
- On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de L_N dans l'ordre croissant. Alors on a
$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$
idem pour L et ses valeurs propres $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$

Proof.

$$
\begin{aligned}
vLv^T &= vDv^T - vMv^T \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i v_i^2 - \sum_{i,j=1, i \leftrightarrow j}^{n} v_i v_j \\
&= \sum_{i<j, i \leftrightarrow j} v_i^2 - 2v_i v_j + v_j^2 \\
&= \sum_{i<j, i \leftrightarrow j} (v_i - v_j)^2
\end{aligned}
$$

□

Vecteur de Fielder

Pour trouver une bonne partition, notre approche consiste à minimiser

$$|\partial S| = \frac{1}{2} \sum_{i \in S, j \in S^c} M_{ij}$$

lorsque S parcours les sous ensembles de points du graphe.

Vecteur de Fielder

Pour trouver une bonne partition, notre approche consiste à minimiser

$$|\partial S| = \frac{1}{2} \sum_{i \in S, j \in S^c} M_{ij}$$

lorsque S parcours les sous ensembles de points du graphe.

Propriété

$$|\partial S| = \frac{1}{4} s^T L s$$

Où $s = (s_1, \ldots, s_n)^T$ avec $s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ -1 & \text{si } i \in S^c \end{cases}$

Problème

Minimiser $|\partial S| = \frac{1}{4}s^T L s$ où $s \in \{-1, 1\}^n$

Problème

Minimiser $|\partial S| = \frac{1}{4} s^T L s$ où $s \in \{-1, 1\}^n$

Stratégie

Problème

Minimiser $|\partial S| = \frac{1}{4}s^T Ls$ où $s \in \{-1, 1\}^n$

Stratégie

- $||s|| = \sqrt{n}$, $s \neq \pm e$
  et $se^T = n_1 - n_2$ où $n_1 = |S|$ et $n_2 = |S^c|$

Problème

Minimiser $|\partial S| = \frac{1}{4}s^T Ls$ où $s \in \{-1,1\}^n$

Stratégie

- $||s|| = \sqrt{n}$, $s \neq \pm e$
  et $se^T = n_1 - n_2$ où $n_1 = |S|$ et $n_2 = |S^c|$
- On minimise $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{4}x^T Lx$, on note $m \in \mathbb{R}^n$ ce minimum.

Problème

Minimiser $|\partial S| = \frac{1}{4}s^T Ls$ où $s \in \{-1,1\}^n$

Stratégie

- $||s|| = \sqrt{n}$, $s \neq \pm e$
  et $se^T = n_1 - n_2$ où $n_1 = |S|$ et $n_2 = |S^c|$
- On minimise $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{4}x^T Lx$, on note $m \in \mathbb{R}^n$ ce minimum.
- On choisit $s \in \{-1,1\}^n$ qui maximise sm^T.

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i > 0 \\ -1 & \text{si } m_i < 0 \end{cases}$$

Problème

Minimiser $|\partial S| = \frac{1}{4}s^T L s$ où $s \in \{-1,1\}^n$

Stratégie

- $||s|| = \sqrt{n}$, $s \neq \pm e$
  et $se^T = n_1 - n_2$ où $n_1 = |S|$ et $n_2 = |S^c|$
- On minimise $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{4}x^T L x$, on note $m \in \mathbb{R}^n$ ce minimum.
- On choisit $s \in \{-1,1\}^n$ qui maximise sm^T.

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } m_i > 0 \\ -1 & \text{si } m_i < 0 \end{cases}$$

ATTENTION à garder $|S_1| = n_1$ et $|S_2| = n_2$! Voilà pourquoi la partition obtenue n'est pas celle qui minimise la conductance !

Problème

Minimiser $x^T Lx$ où $x \in \mathbb{R}^n$ vérifie

- $||x|| = \sqrt{n}$
- $x \neq \pm e$
- $xe^T = n_1 - n_2$ où $n_1 = |S|$ et $n_2 = |S^c|$

Problème

Minimiser $x^T L x$ où $x \in \mathbb{R}^n$ vérifie

- $||x|| = \sqrt{n}$
- $x \neq \pm e$
- $xe^T = n_1 - n_2$ où $n_1 = |S|$ et $n_2 = |S^c|$

L est diagonalisable. On note $(e, v_2, \ldots, v_n)$ sa base de vecteurs propre.

Propriété

Si $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, on a

$$x^T L x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2$$

Propriété

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, on a

$$x^T L x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2$$

Propriété

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, on a

$$x^T L x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2$$

Le minimum est de la forme $x = a v_2 + b e$, où $a, b \in \mathbb{R}$

Propriété

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, on a

$$x^T L x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2$$

Le minimum est de la forme $x = av_2 + be$, où $a, b \in \mathbb{R}$

Or $x^T e = n_1 - n_2$ et $e^T v_2 = 0$, donc $b = \frac{n_1 - n_2}{n}$

Propriété

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, on a

$$x^T L x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2$$

Le minimum est de la forme $x = av_2 + be$, où $a, b \in \mathbb{R}$
Or $x^T e = n_1 - n_2$ et $e^T v_2 = 0$, donc $b = \frac{n_1 - n_2}{n}$
De plus, $||x|| = \sqrt{n}$, donc $a = \frac{\sqrt{2 n_1 n_2}}{n}$.

Propriété

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, on a

$$x^T L x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2$$

Le minimum est de la forme $x = a v_2 + b e$, où $a, b \in \mathbb{R}$
Or $x^T e = n_1 - n_2$ et $e^T v_2 = 0$, donc $b = \frac{n_1 - n_2}{n}$
De plus, $||x|| = \sqrt{n}$, donc $a = \frac{\sqrt{2 n_1 n_2}}{n}$.

Proposition

le minimum recherché est

$$m = \frac{\sqrt{2 n_1 n_2}}{n} v_2 + \frac{n_1 - n_2}{n} e$$

De plus $m^T L m = \frac{n_1 n_2}{n}$

On rappel que

$$\varphi(S) = \frac{|\partial S|}{\min(\mathrm{vol}(S), \mathrm{vol}(S^c))}$$

Pour garder une petite conductance, il faut que $n_1 \approx n_2$
Pour simplifier la recherche de la partition, on cherche à maximiser sv_2^T plutôt que sm^T.

On rappel que

$$\varphi(S) = \frac{|\partial S|}{\min(\mathrm{vol}(S), \mathrm{vol}(S^c))}$$

Pour garder une petite conductance, il faut que $n_1 \approx n_2$
Pour simplifier la recherche de la partition, on cherche à maximiser sv_2^T plutôt que sm^T.
Pour notre graphe exemple :

$$\lambda_2 \approx 0.12 \qquad \text{et} \qquad v_2 \approx \begin{pmatrix} -3.01e-01 \\ -3.23e-01 \\ -3.81e-01 \\ 5.55e-16 \\ 3.74e-01 \\ -1.34e-01 \\ 7.07e-01 \\ -1.15e-16 \end{pmatrix}$$

Comment trouver le vecteur de Fiedler ?

Méthode de puissance inverse

Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable et λ une valeur propre de A. On se donne un nombre complexe $\bar{\lambda}$ vérifiant

$$|\bar{\lambda} - \lambda| < |\bar{\lambda} - \mu| \ \forall \mu \in \mathsf{Sp}(A) \backslash \{\lambda\}$$

Alors

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(\lambda - \bar{\lambda})^k u_k}{|\lambda - \bar{\lambda}|^k ||u_k||}$$

est un vecteur propre lié à λ.

Compléxité en $O(a^n)$ où $a = \max_{j \neq i} \frac{(\lambda - \bar{\lambda})}{(\lambda_i - \bar{\lambda})}$

Problème

Comment trouver $\bar{\lambda}$?

Problème

Comment trouver $\bar{\lambda}$?

Disques de Gerschgörin

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sont spectre est inclus dans dans la réunion des disques.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

Problème

Comment trouver $\bar{\lambda}$?

Disques de Gerschgörin

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sont spectre est inclus dans dans la réunion des disques.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

Dans notre exemple, ces disques correspondent à

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \deg(s)\}$$

où s parcours les sommets du graphe

Méthode de Jaccobi

Méthode de Jaccobi

Pour une matrice symétrique réelle A, on cherche à trouver une suite de matrice $(O_k)_{k\geq 0} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$O_k A O_k^T$$

Converge vers une matrice diagonale. Méthode en $O(n^3)$

Méthode de partitionnement

Voilà l'algorithme décrivant la méthode de partitionnement :

Algorithme

On considère la permutation σ qui ordonne les composantes du vecteur de Fiedler dans l'ordre croissant.
On calcule n conductances avec les ensembles $S = \{\sigma(1)\}, \{\sigma(1), \sigma(2)\}, \ldots$ et on garde le partitionnement qui réalise la plus petite conductance.
On remarque que le meilleur partitionnement pour cette méthode est atteint au voisinage du changement de signe dans le vecteur de Fiedler.

Méthode de partitionnement

Voilà l'algorithme décrivant la méthode de partitionnement :

Algorithme

Dans les faits, il y a plusieurs manières de faire les calculs. On peut considérer la matrice d'adjacence réordonnée $A' = PAP^t$ où P est la matrice de permutation associée à sigma :

$$P_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$$

Méthode de partitionnement

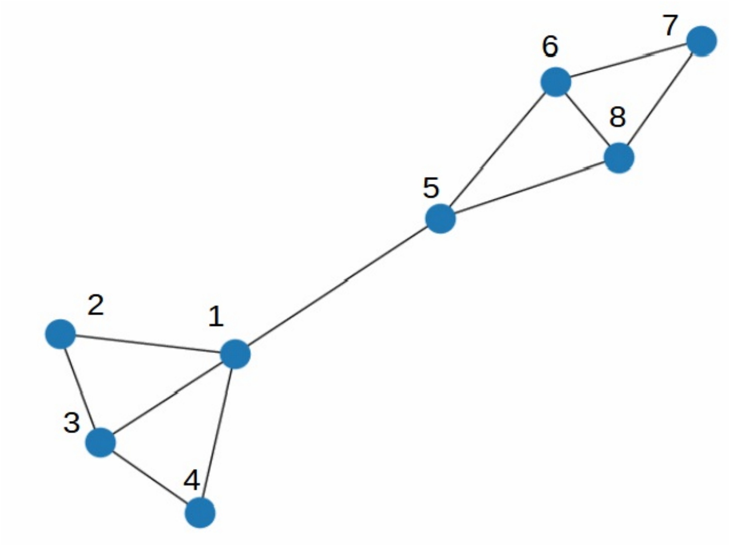
Voilà l'algorithme décrivant la méthode de partitionnement :

Algorithme

On peut alors regarder la conductance. Celle calculée selon la n-ième coordonnée s'évalue ainsi :

- $E(S, S^c) = |E| - vol(S) - vol(S^c)$
- $vol(S) = \eta_n^t A \eta_n$
- où $\eta_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, le vecteur valant 1 sur les n premières coordonnées.

Méthode de partitionnement



Partitionnement du graphe exemple

Vecteur de Fiedler :

$$v_2 \approx \begin{pmatrix} -3.01e-01 \\ -3.23e-01 \\ -3.81e-01 \\ 5.55e-16 \\ 3.74e-01 \\ -1.34e-01 \\ 7.07e-01 \\ -1.15e-16 \end{pmatrix}$$

Vecteur réordonné :

$$\begin{pmatrix} -3.81e-01 \\ -3.23e-01 \\ -3.01e-01 \\ -1.34e-01 \\ -1.15e-16 \\ 5.55e-16 \\ 3.74e-01 \\ 7.07e-01 \end{pmatrix}$$

Partitionnement du graphe exemple

Vecteur de Fiedler :

$$v_2 \approx \begin{pmatrix} -3.01e-01 \\ -3.23e-01 \\ -3.81e-01 \\ 5.55e-16 \\ 3.74e-01 \\ -1.34e-01 \\ 7.07e-01 \\ -1.15e-16 \end{pmatrix}$$

Vecteur réordonné :

$$\begin{pmatrix} -3.81e-01 \\ -3.23e-01 \\ -3.01e-01 \\ -1.34e-01 \\ -1.15e-16 \\ 5.55e-16 \\ 3.74e-01 \\ 7.07e-01 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma = (13)(46)(578)}$$

Exemple de partitionnment

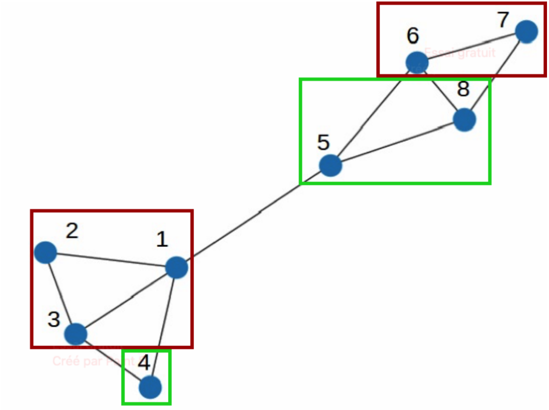


Figure: Partitionnement de l'algorithme

Qualité de l'algorithme

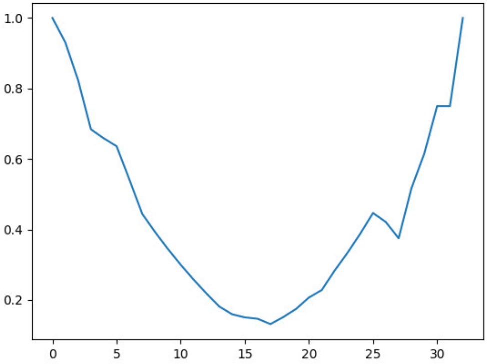


Figure: conductance en fonction de la coordonnée pour Karaté

Qualité de l'algorithme

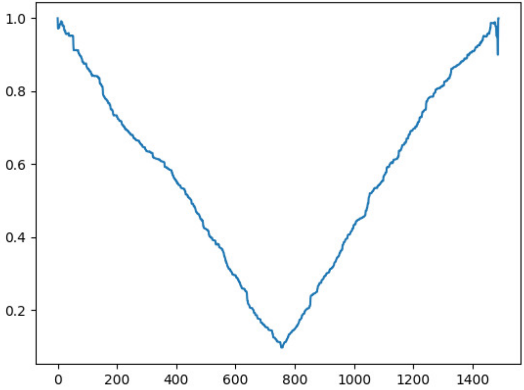


Figure: conductance en fonction de la coordonnée pour polblogs

Un partitionnement satisfaisant

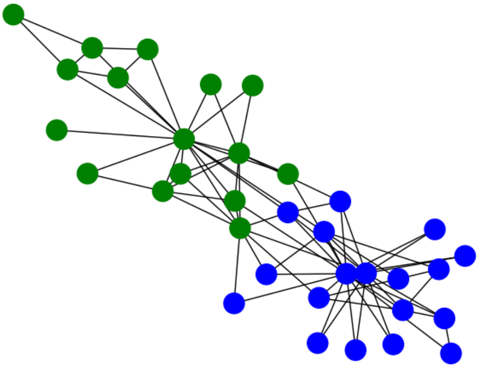


Figure: Partitionnement du club de karate

Un partitionnement satisfaisant

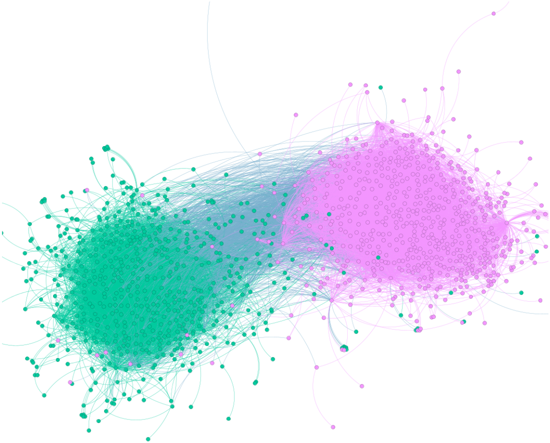


Figure: Partitionnement des blogs politiques

Conclusion

Figure: Zao Wou-ki, encore