École nationale de la statistique et de l'administration économique
Université Paris-Saclay

Prévision du défaut sur le périmètre de Très Petite Entreprise

XU Kai

9 novembre 2017

Table des matières

Introduction
Contexte

TPE : un sous-ensemble dont le chiffre d'affaires est compris entre 1,5 et 5M€ ou montant total des engagements accordés supérieur à 1 M€.

Le groupe BPCE a accumulé des données volumineuses sur les TPEs à la fois comportementales et financières en effectuant une fusion des données des réseaux Banques populaires, Caisse d'épargne et Natixis.

Ainsi, les données TPE du groupe présentent les caractéristiques de quantité volumineuse et de grande dimension, ce qui nous permet d'en faire une étude du point de vue de l'apprentissage statistique.

Introduction
Sujet

- *Objectif 1 : prévoir TPEs défaillants*
  Les clients défaillants n'occupent qu'une petite proportion de la base et leurs caractéristiques communes sont difficiles à capter au sens général. Pour améliorer l'allocation des crédits, une meilleure identification des risques est nécessaire. De la part du groupe BPCE, on est intéressé de voir la prévision à la base d'une classe de réseau neuronal, soit la carte de Kohonen.
- *Objectif 2 : construire un cadre efficace pour la prévision*
  Basé sur la carte de Kohonen, nous essayons et modifions des modèles existants à notre besoin. Les modifications seront proposées à partir de nos travaux en vue d'une prévision performante et robuste.

Sujet : Construire un cadre prédictif des défauts de TPE à partir de la carte de Kohonen et proposer un nouveau modèle raffiné profitant des avantages des méthodes différentes.

Introduction
Base de données

La base totale est un échantillon occupant une partie de TPEs dans 4 cohortes de Juin 2012 à Décembre 2013 à pas semestriel. Elle compte 18902 contrats et se construit sur les travaux du pôle Modélisation :

- Variable d'intérêt : indicatrice de défaut. Au total, environ 3% de clients tombent en défaut chaque année.
- Variables explicatives : 202 variables parmi lesquelles 190 variables quantitatives et 12 variables qualitatives de 4 catégories :
  - donnée de compte
  - données externes
  - ratios financiers
  - signalétique : effectif de l'entreprise, forme juridique etc

- L'existence de valeurs manquantes est observée dans cette base.
- Les variables qualitatives seront transformées en nouvelles variables binaires, ce qui produisent environ 56 nouvelle variables.

Au final, 246 variables sont utilisées dans la prévision.

On divise en 70%*base d'apprentissage* et 30%*base de test* de la base totale. L'apprentissage aura lieu sur la première partie de la base, et l'évaluation de l'erreur se passera sur la seconde partie.

La division s'effectuera par un tirage stratifié selon la loi uniforme à l'intérieur de chaque classe des clients : clients sains et clients défaillants.

Données quantitatives :

Pour éviter les problèmes d'échelle et l'influence d'une hétérogénéité des variances, les variables quantitatives sont centrées et réduites.

On utilise la transformation du z-score :

$$\frac{V - \mu}{\sigma}$$

Avec μ l'espérance et σ l'écart-type des valeurs d'une variable explicative V.

Données qualitatives :

Une variable qualitative à *K* modalités est remplacée par *K* variables binaires, et chacune correspondant à une des modalités.

Exemple : un tableau regroupant les informations des chiens

Tableau original :

Individu	Taille	Poids
bass	Petite	Léger
beau	Grande	Moyen
boxe	Moyenne	Moyen

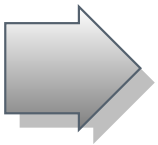


Tableau disjonctif complet :

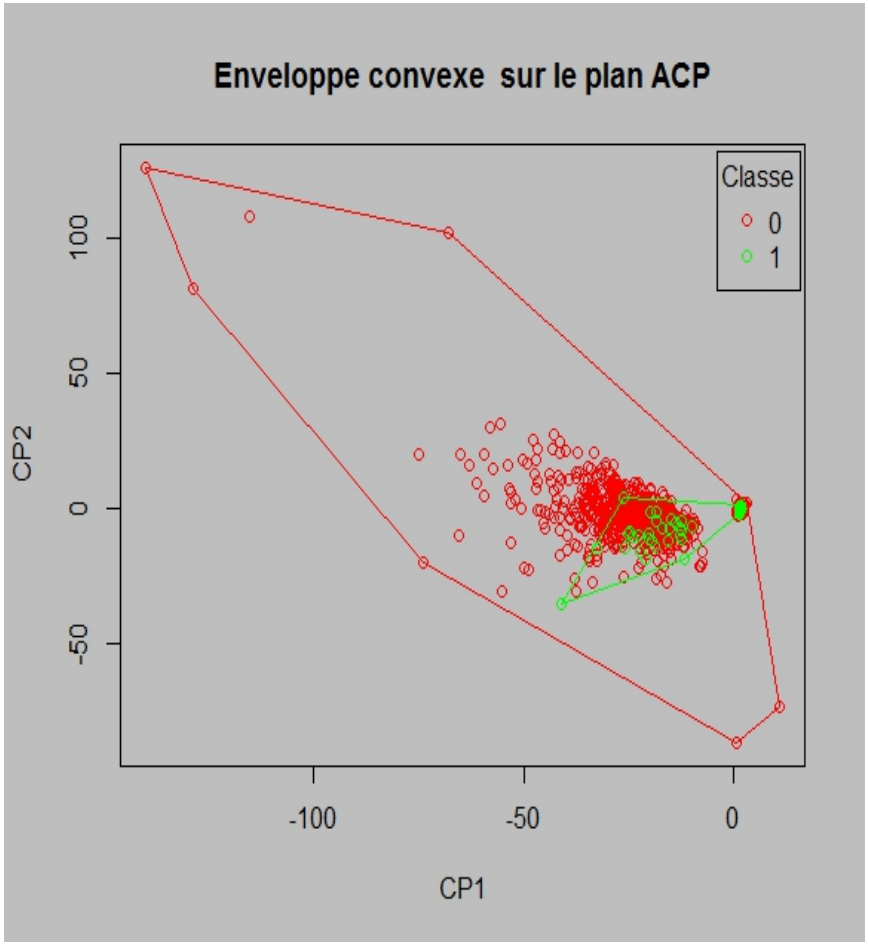
Individu	Taille P	Taille M	Taille G	Poids L	Poids M
bass	1	0	0	1	0
beau	0	0	1	0	1
boxe	0	1	0	0	1

Méthodologie

Pour mieux comprendre la structure topologique dont profite la carte de Kohonen et la difficulté potentielle de l'apprentissage. Deux techniques sont implémentées en vue de faire des examens sur la topologie des données :

- Existence d'un séparateur linéaire dans l'espace d'entrées : enveloppe convexe
- Examen de la proximité topologique des clients de même classe : t-SNE

Enveloppe convexe :



- Enveloppe convexe d'une classe est l'ensemble convexe le plus petit parmi ceux qui la contiennent
- Examiner la séparation linéaire
- Nous la visualiser sur le plan ACP (Analyse en composantes principales)
- Classe 0 : Clients sains
  Classe 1 : Clients défaillants

Méthodologie
Structure topologique

S'il existe un séparateur linéaire dans l'espace d'entrée, les enveloppes convexes des clients différents doivent être moins chevauchées que possible. Maintenant que l'enveloppe convexe des clients défaillants est totalement contenue dans celle des clients sains, l'espace d'entrée tend d'être non séparable linéaire.

En ce cas, nous serons intéressés d'examiner la proximité topologique des clients de même classe. L'algorithme t-SNE consiste à garder la proximité de l'espace de grande dimension à l'espace de faible dimension. Du coup, une inspection visuelle sera possible.

t-SNE (t-distributed stochastic neighbor embedding)

- Trouver une projection optimale des points $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ à grande dimension dans un espace de 2 dimensions
- La fonction à optimiser :

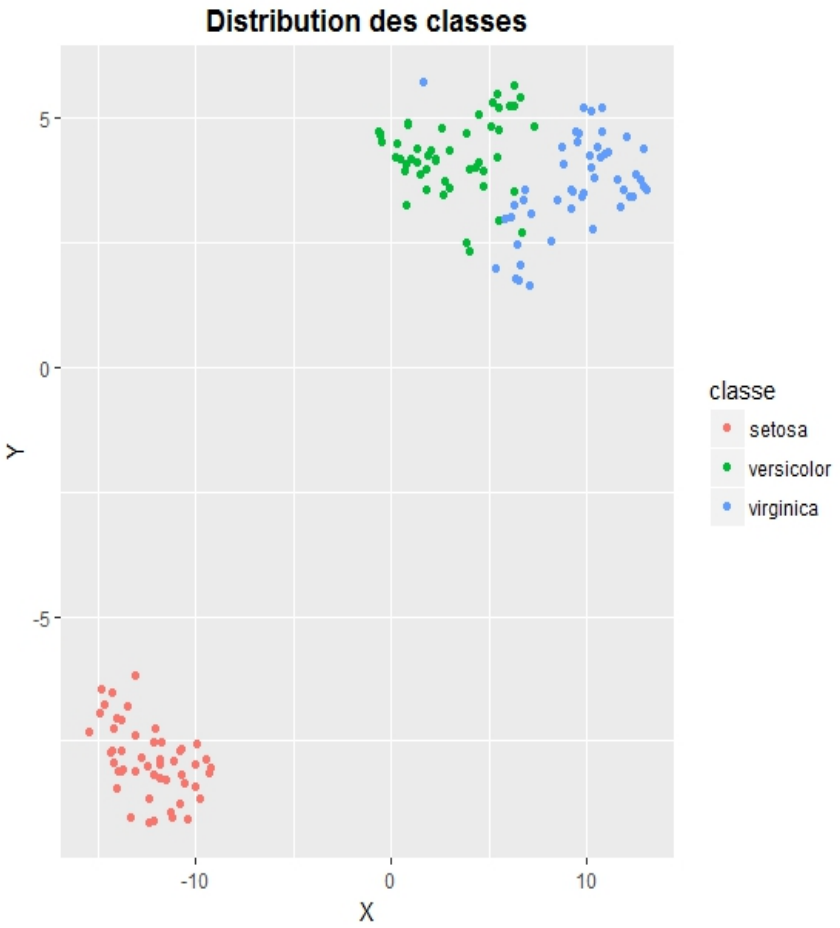
$$\inf_{y_1,\ldots,y_N} KL(P||Q) = \sum_{i \neq j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}}$$

Les points originaux $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ et leurs projections $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N$:

- $p_{j|i} = \frac{\exp(-\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 / 2\sigma_i^2)}{\sum_{k \neq i} \exp(-\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|^2 / 2\sigma_i^2)}$
- $p_{ij} = \frac{p_{j|i} + p_{i|j}}{2N}$
- $q_{j|i} = \frac{\exp(-\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|^2)}{\sum_{k \neq i} \exp(-\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_k\|^2)}$
- $q_{ij} = \frac{q_{j|i} + q_{i|j}}{2N}$

Méthodologie
Structure topologique

Base de Iris :



Base de TPE :

Méthodologie
Structure topologique

À partir des figures précédentes, l'impuissance de la proximité topologique des entrées pour la discrimination est évidente, ce qui signe l'échec de la discrimination basée sur la proximité au niveau individuel.

Les deux techniques précédentes se concentrent plutôt aux relations individuelles des observations. De plus, elles demandent toujours un remplacement des valeurs manquantes avant l'implémentation.

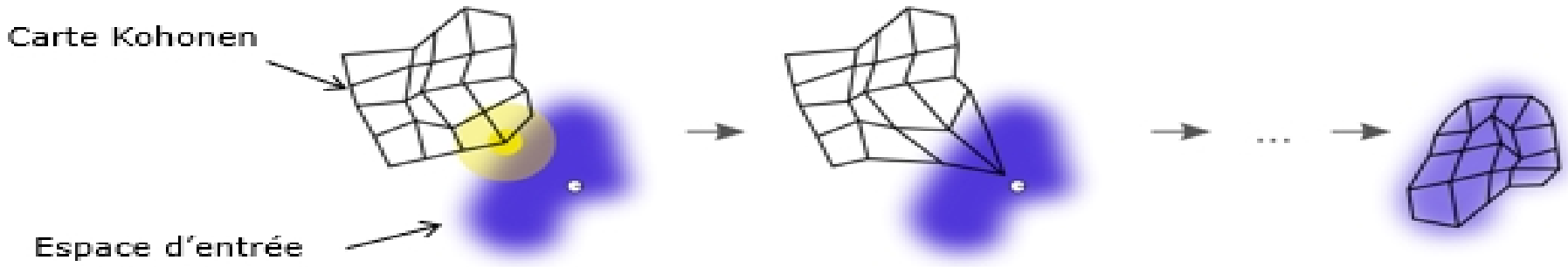
Par contre, la carte de Kohonen étude plutôt les relations des sous-groupes. Elle permet les valeurs manquantes au cours de l'apprentissage, ce qui est une caractéristique utile en pratique.

Méthodologie
Carte de Kohonen

Carte de Kohonen : une classe de réseau de neurones artificiels qui étudie la répartition de données dans un espace à grande dimension. Elle met l'accent sur la préservation des relations topologiques des sous-groupes.

Nous utilisons la carte de Kohonen pour rechercher le regroupement le plus discriminant à faire la classification.

Apprentissage de la carte de Kohonen :



L'adaptation de la carte est faite par un algorithme compétitif entre les neurones en utilisant des vecteurs poids $\vec{w}$ appartenant aux neurones.

Initialisation de la carte de Kohonen

- Pour simplicité, effectuer l'initialisation aléatoire des vecteurs poids $\vec{w}$ selon la loi uniforme sur l'intervalle [0,1] de haute dimension. Une initialisation plus concentrée sera favorable à la formation de la carte de Kohonen dans l'espace de grande dimension.

Compétiontion des neurones

- À instant t, une observation $x(t+1) \subset R^d$ est choisie aléatoirement et présentée au réseau
- Le neurone gagnant est donc déterminé par :

$$i_0 = \underset{i}{\operatorname{arginf}} \quad \|x(t+1) - w_i(t)\|^2$$

Évolution des neurones

- Les vecteurs poids du neurone gagnant $w_{i_0}^t$ et ses voisins sont mis à jour par :

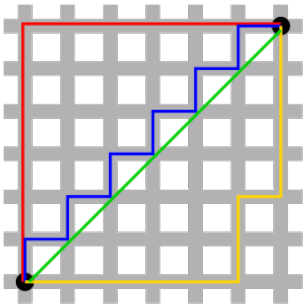
$$\begin{cases} w_i^{t+1} = w_i^t + \epsilon(t)(x(t+1) - w_i^t) & \forall i \in V_{r_t}(i_0) \\ w_i^{t+1} = w_i^t & \forall i \notin V_{r_t}(i_0) \end{cases}$$

- $V_{r_t}(i_0)$ est le voisinage de rayon $r(t)$ autour du neurone gagnant i_0 mesuré par la distance de Manhattan $d(\cdot, \cdot)$

On explique ici les notions concernant l'apprentissage de la carte de Kohonen :

- Distance de Manhattan : Entre deux points A et B, de coordonnées respectives (X_A, Y_A) et (X_B, Y_B).

$$d(A, B) = |X_B - X_A| + |Y_B - Y_A|$$



Distance de Manhattan : chemins rouge, jaune et bleu ; ils sont équivalents au sens de la distance de Manhattan
Distance euclidienne : chemin vert

- Taux d'apprentissage $\epsilon(t)$: la vitesse à laquelle les vecteurs poids $\vec{w}$ sont ajustées
- Rayon $r(t)$: la distance de Manhattan entre le neurone gagnant et ses voisins les plus éloignés.

Les *hyperparamètres* qui conditionnent la carte de Kohonen sont listées ci-dessous :

- Taille de la carte
- Taux d'apprentissage $\epsilon(t)$
- Rayon $r(t)$

Ils sont estimés par *validation croisée*. En raison du manque de puissance de calcul, une validation croisée "holdout" sera effectuée. La validation "holdout", c'est à dire, la base initiale est divisée en deux partie : la base d'apprentissage et la base de validation. Les hyperparamètres qui sont plus performants sur la base de validation seront choisis.

Évolution des hyperparamètres

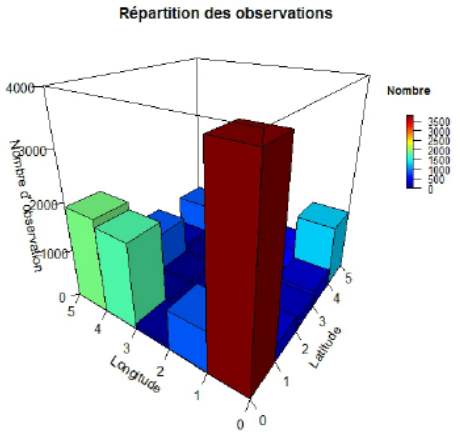
Pour obtenir une convergence raisonnable de la carte, une décroissance exponentielle en fonction du temps est imposée sur le taux d'apprentissage $\epsilon(t)$ et le rayon $r(t)$:

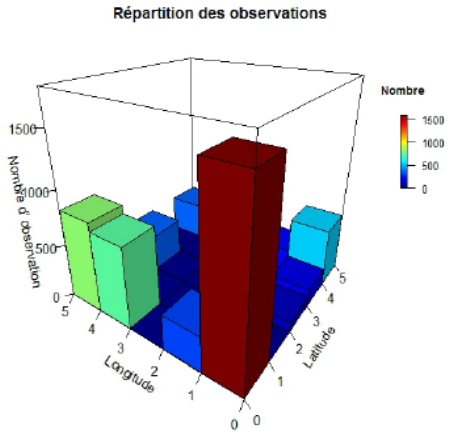
$$r(t) = r_0\left(\frac{r_T}{r_0}\right)^{\frac{t}{T}} \qquad \epsilon(t) = \epsilon_0\left(\frac{\epsilon_T}{\epsilon_0}\right)^{\frac{t}{T}}$$

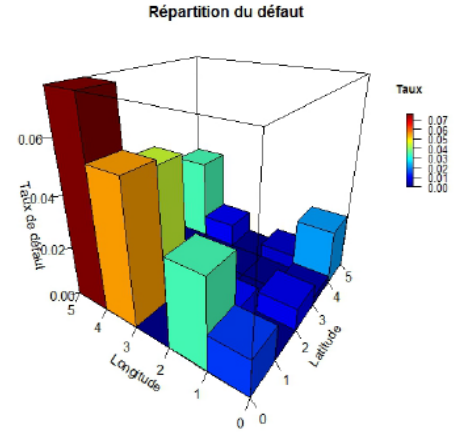
Estimation des hyperparamètres

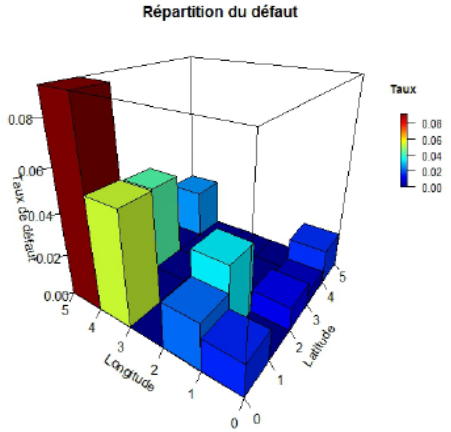
- Taille de la carte : 5×5 neurones
- Taux d'apprentissage $\epsilon(t)$: $\epsilon(0) = 0.04, \epsilon(T) = 0.01$; assez faible par rapport à sa limite supérieure 1 afin de éviter la convergence prématurée, ce qui peut conduire l'adaptation à stagner dans un optimum local.
- Rayon $r(t)$: $r(0) = 2.99, r(T) = 0.65$; de cette manière, l'interaction des neurones voisins autour du neurone vainqueur s'affaiblit au fur et à mesure de l'apprentissage. En ce cas, la différence qui distingue des neurones voisins se renforce progressivement.
- Normalement, il n'y a pas d'optimum locaux, mais des plateaux (saddle points).

Carte de Kohonen :





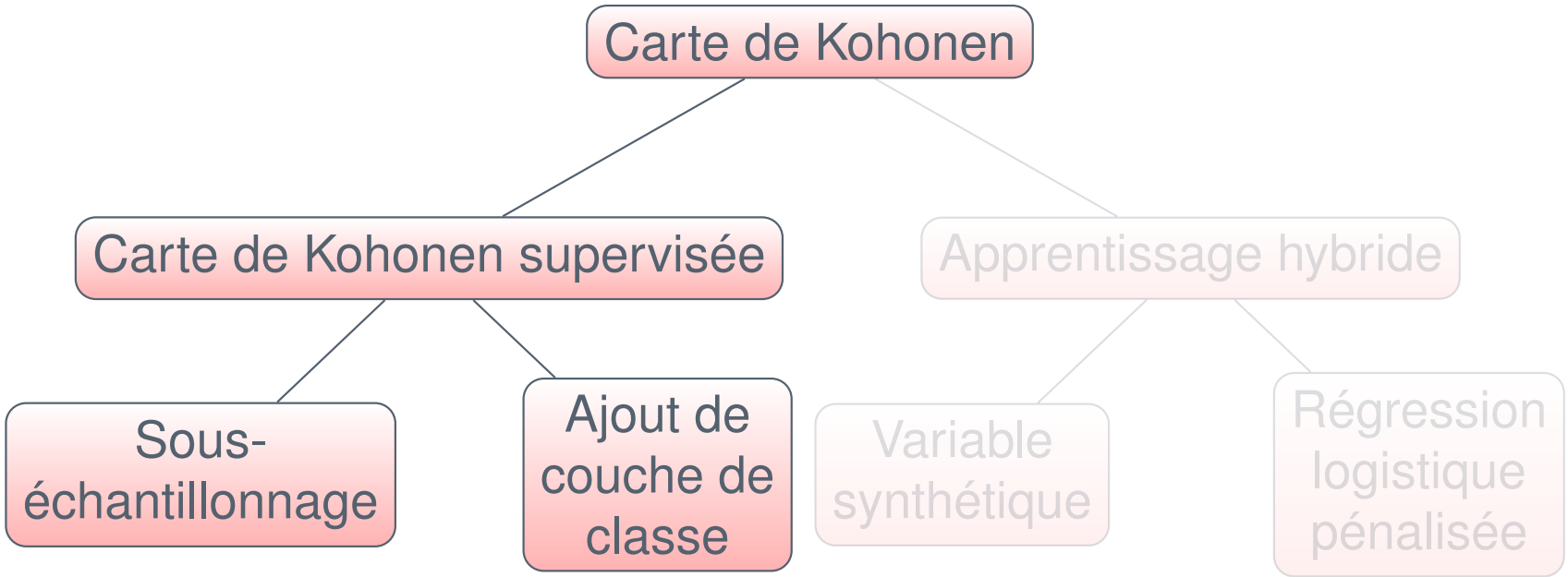




- Le neurone avec le plus d'observations et ses voisins possèdent les taux de défaut plus bas
- On ne réussit pas à identifier de neurone de défaut
- On peut remplacer les valeurs manquantes par le regroupement engendré par la carte de Kohonen

Carte de Kohonen supervisée

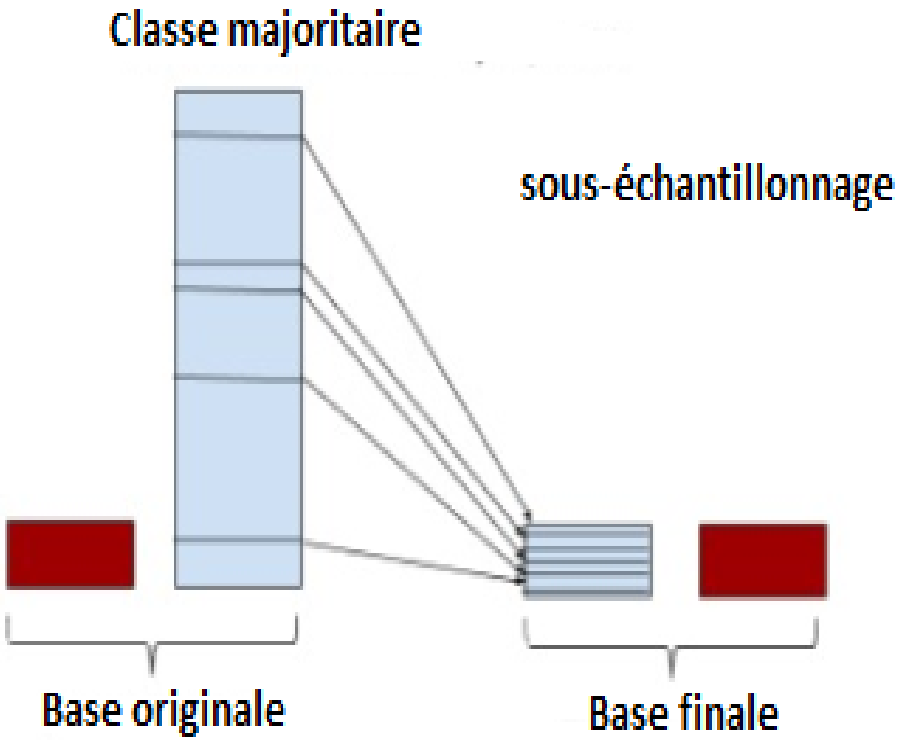
Puisque un regroupement discriminant n'est pas produit, nous essayons de faire les modification sur la carte originale.
Le premier essai consiste à changer la structure de la carte de Kohonen et la proportion des clients de classes différentes.



Carte de Kohonen supervisée

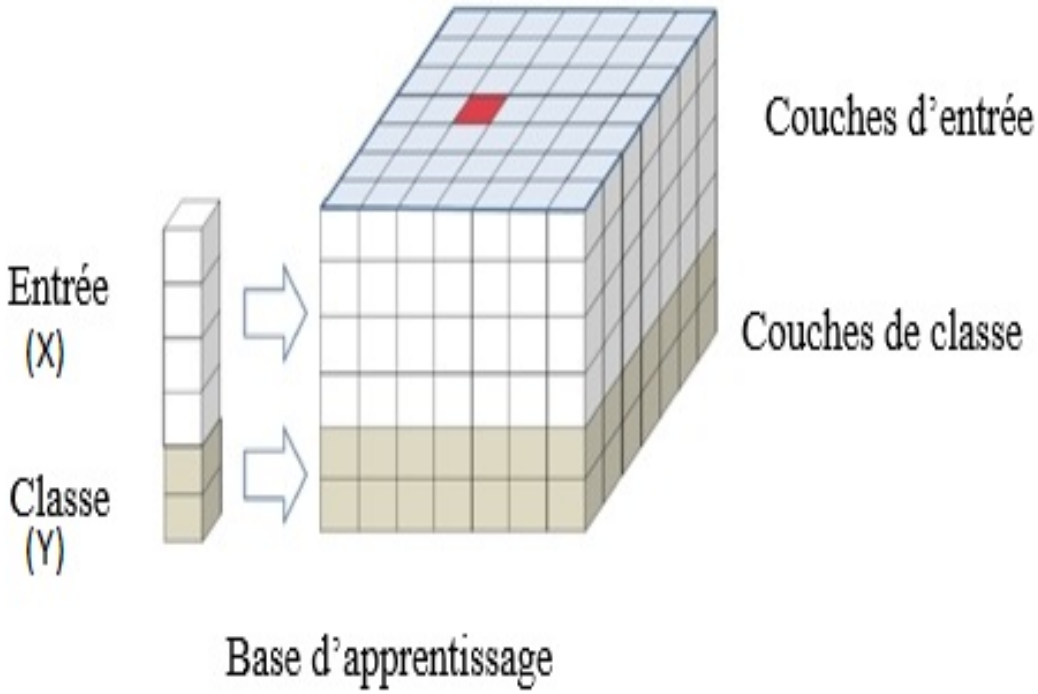
Idée : prendre en compte l'information dont nous disposons sur le défaut en la fusionnant dans la formation de la carte et ajuster la proportion des clients de classes différentes. De plus, une pondération entre les entrée et l'information de défaut est possible.

Sous-échantillonnage :



- Contre le déséquilibre des classes
- Diminuer le poids de la classe majoritaire
- Réalisé par tirage aléatoire selon une loi uniforme

Carte de Kohonen supervisée(X-Y fused) :



- Profiter à la fois des entrées et des classes à l'étape d'apprentissage
- Possibilité de pondérer les couches
- La classification ne dépend que de l'entrée à l'étape de prévision

Sauf les hyperparamètres précédents, deux nouveaux hyperparamètres sont incorporés dans le modèle :

Nouveaux hyperparamètres

- la proportion de sous-échantillonnage p : la proportion entre nombre des clients sains sélectionnés et nombre des clients défaillants.
- le poids des couches wc : (wc_1, wc_2, wc_3) pour trois sous-couches ; wc_1 couche de d'entrée quantitative, wc_2 couche d'entrée qualitative et wc_3 couche de sortie.

Estimation des hyperparamètres

- Taille de la carte : 5×5 neurones
- Taux d'apprentissage $\epsilon(t)$: $\epsilon(0) = 0.04, \epsilon(T) = 0.01$
- Rayon $r(t)$: $r(0) = 2.99, r(T) = 0.65$
- la proportion de sous-échantillonnage p : 1.1
- le poids des couches wc : (3/8,1/8,1/2)

Carte de Kohonen supervisée

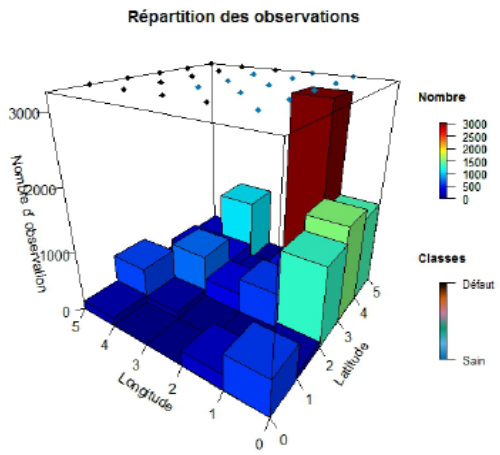
Matrice de confusion

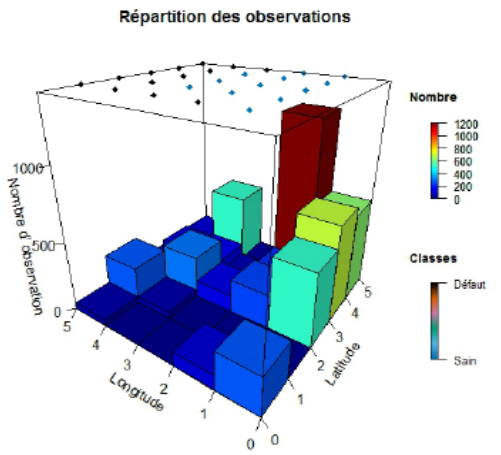
Matrice de confusion :

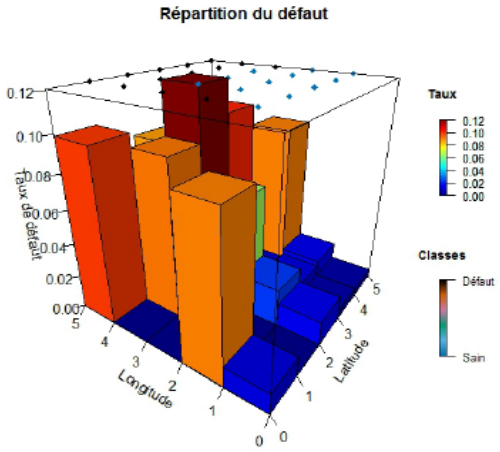
	Classe réelle 0	Classe réelle 1
Classe estimée 1	FP (faux positifs)	VP (vrais positifs)
Classe estimée 0	VN (vrais négatifs)	FN (faux négatifs)

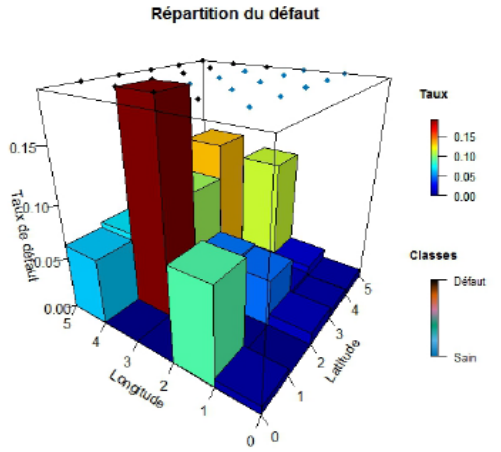
- Dans la base de test, sur les 5480 clients sains, 3887 seront estimés comme sains, soit 71% des clients sains sont correctement prédits
- Sur les 189 clients défaillants, 133 seront estimés comme défaillants, soit 70.4% des clients défaillants sont correctement prédits.

Carte de Kohonen supervisée :









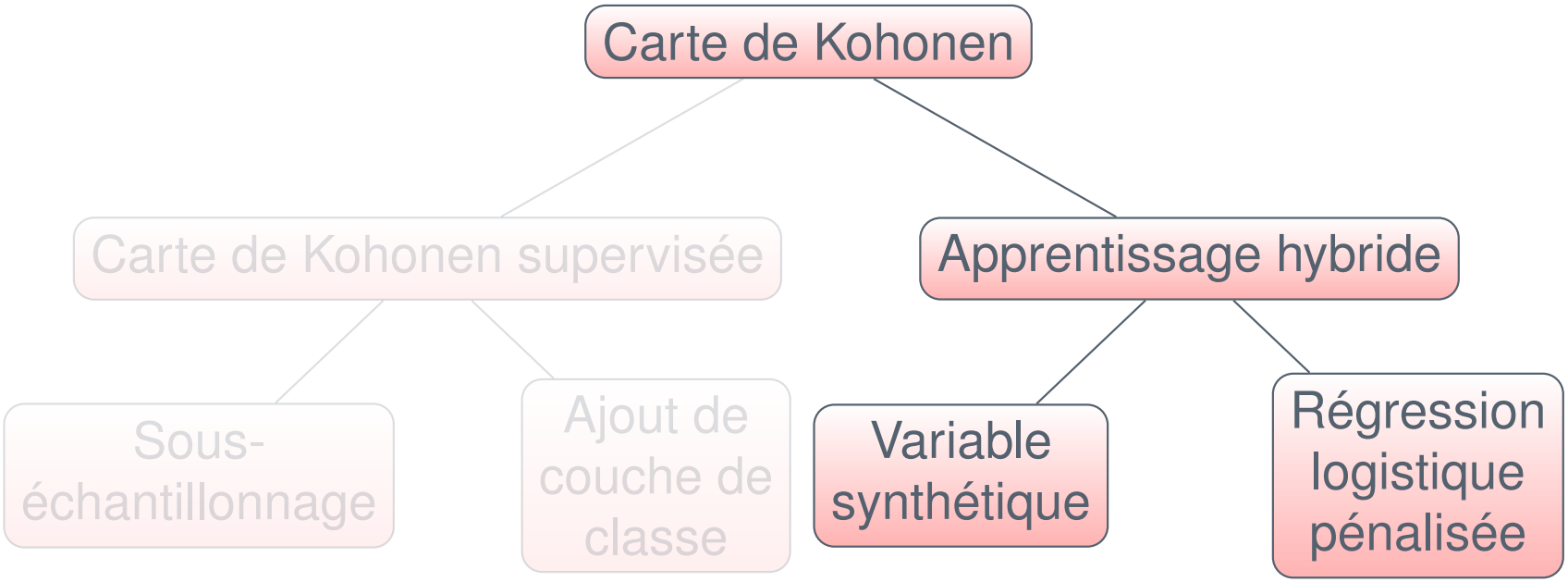
- La carte supervisée peut identifier les neurones dominés par les classes différentes dans la base sous-échantillonnée
- En remettant les observations exclues de l'échantillon, la performance reste meilleure que celle de la carte non supervisée selon le lien entre les groupes et le défaut
- Cependant, l'apprentissage perd l'information d'entrée au cours du sous-échantillonnage

Apprentissage hybride

- La carte de Kohonen supervisée améliore la performance de la discrimination. Cependant, un algorithme supervisé est susceptible d'être plus compétent de faire la prévision.

- Ce qui nous empêchent d'utiliser les algorithmes supervisés sont la dimension de l'espace d'entrée et des valeurs manquantes. Du coup, une méthode de l'apprentissage hybride est proposée pour les vaincre.

Apprentissage hybride



Apprentissage hybride

Idée : Les deux obstacles qui empêchent l'apprentissage supervisé peut être résolus en utilisant la carte de Kohonen. Grâce au regroupement engendré, on peut remplacer des valeurs manquantes avec les valeurs disponibles des individus voisins. En construisant les variables synthétiques, la dimension des prédicateurs se limitera par le nombre des neurones au lieu de celui des variables originales.

Notre but est de prédire le défaut à la manière de l'apprentissage supervisé en estimant le lien entre des variables synthétiques x et des classes y au lieu de celui entre des entrées x et des classes y. De cette façon, l'apprentissage non-supervisé et l'apprentissage supervisé sont combinés pour atteindre meilleur performance.

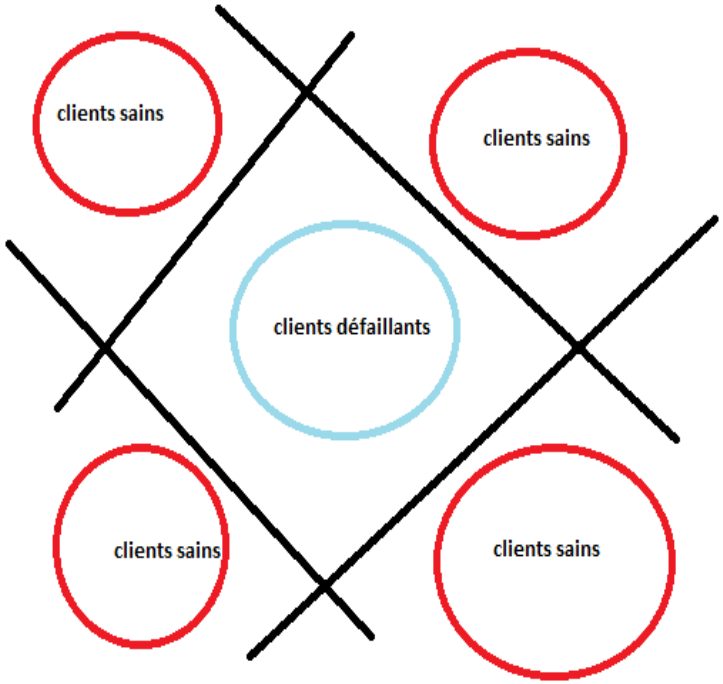
Partie d'apprentissage non-supervisé

- Regroupement des clients sains en utilisant la carte de Kohonen

Partie d'apprentissage supervisé

- Les classifieurs locaux s'interviennent dans la génération des variables synthétiques x
- Des classes y prédites sont obtenues par le biais d'estimation du lien entre des variables synthétiques x et des classes y

Hétérogénéité :



- Les propriétés d'une partie des données sont différentes que les autres.
- Fréquent dans les cas où les classes sont déséquilibrées

Regroupement des clients sains

- Entraîner une carte de Kohonen classique sur tous les clients sains de la base d'apprentissage.
- Regrouper des clients sains selon les neurones pour former des sous-populations similaires du point de vue de la structure topologique
- Remplacer des valeurs manquantes des individus selon ses voisins dans le même neurone ou les neurones proches

Classifieur local

- Remettre les clients défaillants de toutes les sous-populations générées dans la procédure précédente
- Construire des classifieurs locaux sur les sous-populations
- Le classifieur local choisi est un SVM (Machine à vecteur de support) muni de noyau de RBF (Radial Basis Function) :
  $h(x) = w^T \varphi(x) + w_0$
  où $< \varphi(x), \varphi(x') >= K(x, x') = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}{2\sigma^2}\right)$

- Pourquoi les classifieurs locaux ne servent pas directement le classifieur final ?
- Les classifieurs locaux ne sont pas tous discriminants. En utilisant les variables synthétiques et la régression logistique pénalisée, il est possible de trouver les éléments plus discriminants pour la prévision.

Distance signée

Étant donné un hyperplan de séparation S, la fonction de la distance signée $f(x)$ est définie par les ensembles A et B qui sont caractérisés selon S

- $$f(x) = \begin{cases} d(x,S) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in S \\ -d(x,S) & \text{si } x \in B \end{cases}$$
- Calculer les distances signées en utilisant des classifieurs locaux sur la base de l'apprentissage
- Les distances signées serviront de variables synthétiques propres au modèle

Prévision de défaut

Effectuer une régression logistique pénalisée sur les variables synthétiques pour modéliser la probabilité d'être défaillant.

Régression logistique

Le but est de minimiser le risque moyen

$$\inf_{\beta_0,\beta} E[l(y_i, \beta_0 + \beta^T x_i)]$$

où $l(y, \beta_0 + \beta^T x) = -y\beta^T x + ln(1 + e^{y\beta^T x})$

Pénalisation Lasso

- Selon le principe de rasoir d'Occam, un modèle parcimonieux est souvent plus aisé à interpréter.
- Par rapport à la norme L_0, la norme L_1 est plus facile à manipuler.
- Même si la norme L_1 n'est pas différentiable en 0, il existe beaucoup d'algorithmes qui peuvent la traiter.

Régression logistique pénalisée

Une terme de pénalisation de type Lasso est ajoutée dans l'espérance de la perte logistique :

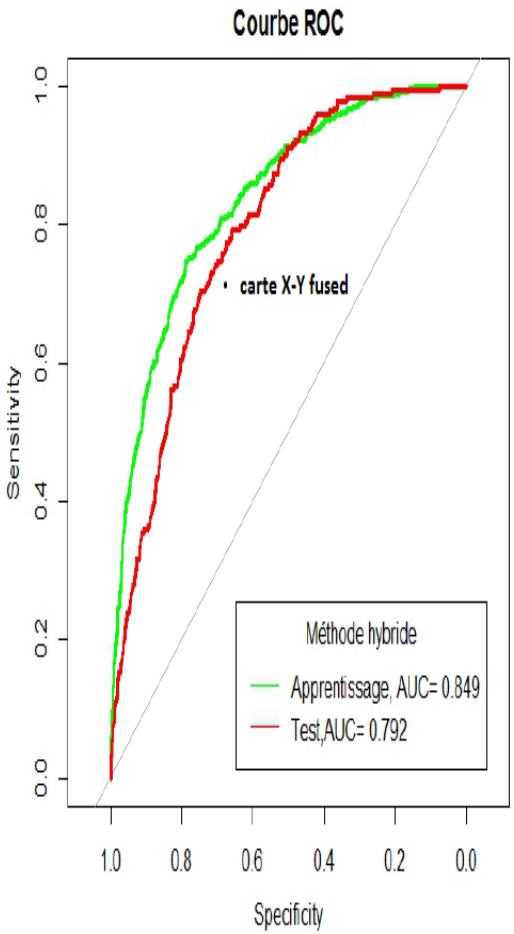
$$\inf_{\beta_0,\beta} \quad E[l(y_i, \beta_0 + \beta^T x_i)] + \lambda||\beta||_1$$

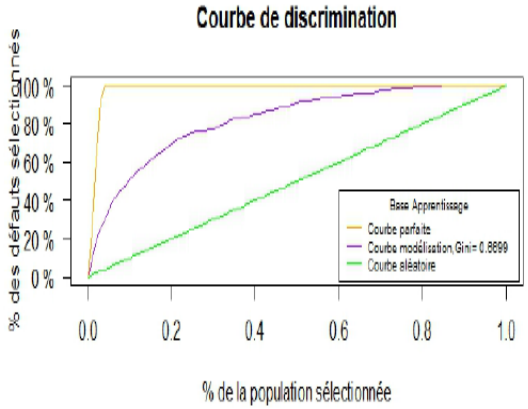
Pour décider le λ qui conditionne la régression, le critère d'information d'Akaike AIC sera utilisé. On choisira le modèle muni du minimum de AIC_{min} comme le modèle de prévision.

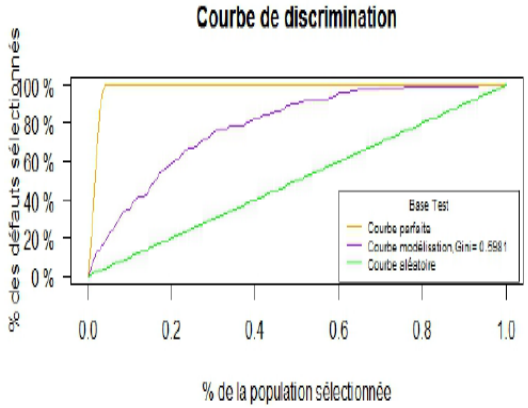
Estimation des hyperparamètres

- Taille de la carte : 9×9 neurones
- Taux d'apprentissage $\epsilon(t)$: $\epsilon(0) = 0.04, \epsilon(T) = 0.01$
- Rayon $r(t)$: $r(0) = 2.99, r(T) = 0.65$

Apprentissage hybride
Résultat



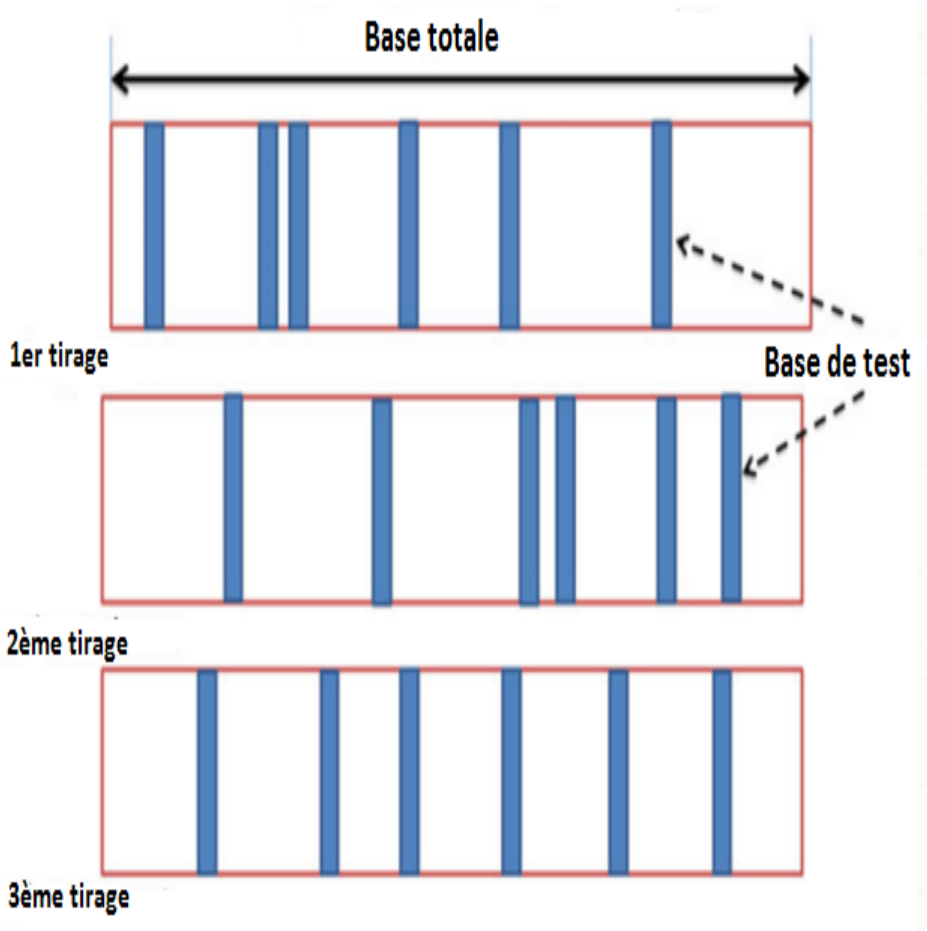




- Carte X-Y fused : sa performance est strictement inférieur que celle de l'apprentissage hybride
- Erreur de généralisation est bien contrôlée selon la différence de la performance sur la base d'apprentissage et la base de test.
- Les variables synthétiques en tant que prédicateurs sont propre au modèle au lieu de l'espace d'entrée

Validation croisée
Évaluation de la robustesse

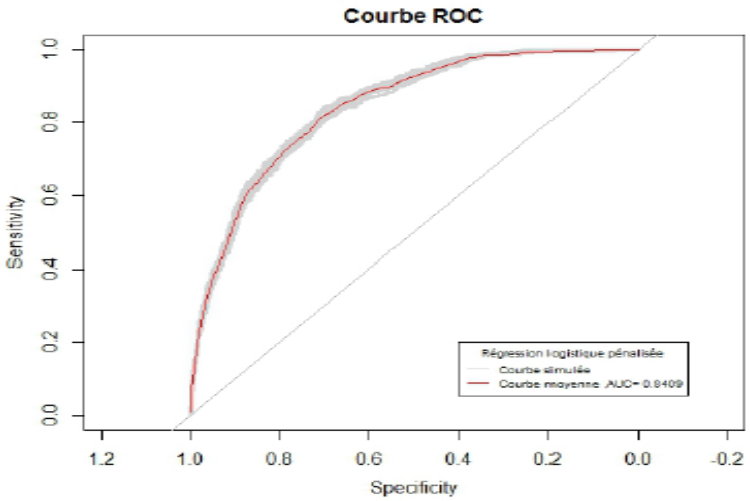
Validation croisée Monte Carlo stratifiée :

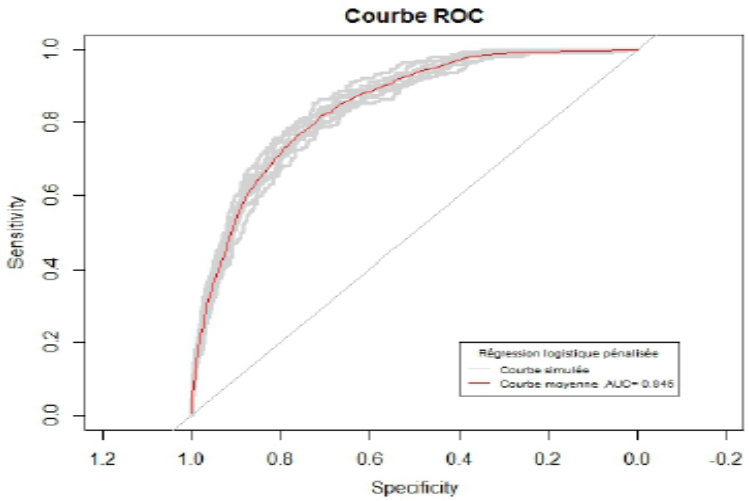


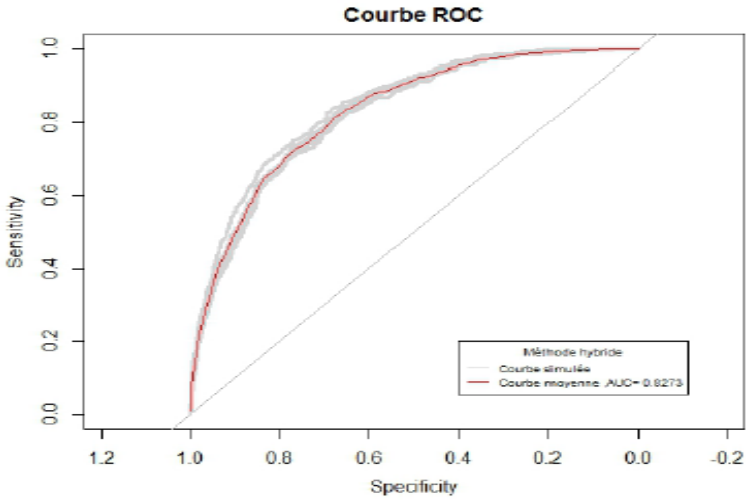
- Tirage aléatoire sans remise pour la construction de la base de test
- Sélectionner un échantillon au sein de chaque classe pour éviter le déséquilibre
- Pas de souci de choisir une partition raisonnable comme validation croisée k-fold. La validation k-fold est obligée de choisir un k qui permet à la fois le représentatif de la base de validation et le biais d'erreur de généralisation

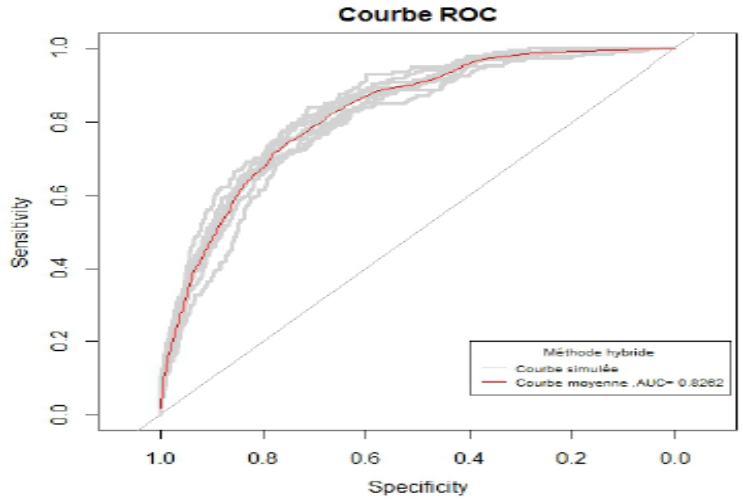
Validation croisée
Résultat

Performance des modèles :









Validation croisée
Résultat

- La comparaison est entre la régression pénalisée et la méthode hybride sur les variables sélectionnées
- La méthode hybride dont les variables explicatives propres au modèle est aussi performant que le modèle d'apprentissage supervisé dépendant des entrées originales
- Le problème de dimension peut être à éviter en utilisant les variables synthétiques
- On garde la structure topologique des données

Avantage de l'apprentissage hybride

- On conserver la structure topologique des données
- Réduction de dimension
- Simple à utiliser : on peut projeter facilement les nouvelles observations sur la carte de Kohonen et puis en déduire une probabilité de défaut
- L'apprentissage peut se renouveler avec l'ajout d'observations
- Plus robuste avec valeurs manquantes

Perspective

- Selon Vapnik, la limite supérieure de l'erreur de test sera diminuée sous la taille de la base d'apprentissage N plus grande :

$$\Pr\left(\text{Erreur de test} \leqslant \text{Erreur d'apprentissage} + \sqrt{\frac{1}{N}\left[D\left(\log\left(\frac{2N}{D}\right)+1\right)-\log\left(\frac{\eta}{4}\right)\right]}\right) = 1-\eta$$

- La performance des classifieurs qui ont l'air de surapprentissage peut être améliorée avec une base de donnée plus grande
- Une pondération des entrées peut être implémentée en ajustant la fonction de perte selon les cohortes. En ce cas, nous prendrons compte de l'effet du temps

Merci pour votre attention !