

# 首届（2016）全国高校密码数学挑战赛

## 赛题三

一、赛题名称：RSA 加密体制破译

二、赛题描述

### 1.1 问题描述

RSA 密码算法是使用最为广泛的公钥密码体制。该体制简单且易于实现，只需要选择 5 个参数即可（两个素数 $p$ 和 $q$ 、模数 $N = pq$ 、加密指数 $e$ 和解密指数 $d$ ）。设 $m$ 为待加密消息，RSA 体制破译相当于已知 $m^e \bmod N$ ，能否还原 $m$ 的数论问题。目前模数规模为 1024 比特的 RSA 算法一般情况下是安全的，但是如果参数选取不当，同样存在被破译的可能。

有人制作了一个 RSA 加解密软件（采用的 RSA 体制的参数特点描述见密码背景部分）。已知该软件发送某个明文的所有参数和加密过程的全部数据（加密案例文件详见附件 3-1）。Alice 使用该软件发送了一个通关密码，且所有加密数据已经被截获，请问能否仅从加密数据恢复该通关密码及 RSA 体制参数？如能请给出原文和参数，如不能请给出已恢复部分并说明剩余部分不能恢复的理由？

### 1.2 实例破解

在本次竞赛问题中，我们选取了一个具体加密实例供大家破解，整个算法与加密过程描述如下，截获的加密数据见附件 3-2。

1. RSA 密码算法描述如下，包含体制参数选取和加解密过程。

1) RSA 体制参数选取

Step1. 每个使用者，任意选择两个大素数 $p$ 和 $q$ ，并求出其乘积 $N = pq$ 。

Step2. 令 $\varphi(N) = (p - 1)(q - 1)$ ，选择整数 $e$ ，使得 $\text{GCD}(e, \varphi(N)) = 1$ ，并求出 $e$ 模 $\varphi(N)$ 的逆元 $d$ ，即 $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(N)}$ 。

Step3. 将数对 $(e, N)$ 公布为公钥， $d$ 保存为私钥。

2) 加解密过程

Bob 欲传递明文 $m$ 给 Alice，则 Bob 首先由公开途径找出 Alice 的公钥 $(e, N)$ ，Bob 计算加密的信息 $c$ 为： $c \equiv m^e \pmod{N}$ 。

Bob 将密文 $c$ 传送给 Alice。随后 Alice 利用自己的私钥 $d$ 解密：

$$c^d \equiv (m^e)^d \equiv m^{ed} \equiv m \pmod{N}.$$

2. Alice 使用的 RSA 密码体制，有以下事项需要说明：

- 1) 模数 $N = pq$ 规模为 1024 比特，其中 $p$ ， $q$ 为素数；
- 2) 素数 $p$ 由某一随机数发生器生成；
- 3) 素数 $q$ 可以随机选择，也可以由 2) 中的随机数发生器产生；
- 4) 可以对文本加密，每次加密最多 8 个明文字符；
- 5) 明文超过 8 个字符时，对明文分片，每个分片不超过 8 个字符；
- 6) 分片明文填充为 512 比特消息后再进行加密，填充规则为高位 8 字节，16 个 hex 4 字节，8 个 hex 添加 64 比特标志位，随后加上 32 比特通信序号，再添加若干个 0，最后 64 比特为明文分片字符对应的 ASCII 码（注：填充方式参见加密案例，但注意每次通信的标志位可能变化）；

- 7) 分片加密后发送一个加密帧数据，帧数据文件名称为 FrameXX，其中 XX 表示接收序号，该序号不一定等于通信序号；
- 8) 帧数据的数据格式如下，其中数据都是 16 进制表示，结构如下  
 128byte 256hex  
 1024bit 模数  $N$  | 1024bit 加密指数  $e$  | 1024bit 密文  $m^e \bmod N$ 。
- 9) 由于 Alice 初次使用该软件，可能会重复发送某一明文分片。

### 1.3 成绩评判

通过数论方法获得的原始明文及 RSA 参数数量，数量多者获胜。

## 三、国内外研究进展与现状

RSA 的安全性是基于大整数素因子分解的困难性，而大整数因子分解问题是数学上的著名难题。数域筛法是目前 RSA 攻击的首选算法。在 1999 年，一台 Cray 超级电脑用了 5 个月时间分解了 512 比特长的密钥。在 512 比特 RSA 算法破解 10 年之后，即 2009 年 12 月 9 日，768 比特 RSA 算法即 232 数位数字的 RSA-768 被分解。分解一个 768 比特 RSA 密钥所需时间是 512 位的数千倍，而 1024 比特所需时间则是 768 比特的一千多倍，因此在短时间内 1024 比特仍然是安全的。除此之外，目前对于 RSA 算法的攻击主要有以下方式：选择密文攻击、公共模数攻击、低加密指数攻击、低解密指数攻击、定时攻击等等，详细的 RSA 安全分析参见有关文献。

## 四、参考文献与可能用到的软件

1. 陈少真, 密码学基础, 科学出版社, 2008-05-30.
2. 任伟, 现代密码学, 北京邮电大学出版社, 2011 年 4 月
3. 冯登国 等译, 密码学原理与实践 (第三版), 电子工业出版社
4. 谢建全, 阳春华, RSA 算法中几种可能泄密的参数选择, 《计算机工程》 2006 年 16 期
5. Don Coppersmith: Finding a Small Root of a Univariate Modular Equation. EUROCRYPT 1996 (LNCS 1070, Springer): 155-165.
6. GMP package, GNU Multiple Precision Arithmetic Library,  
<https://gmplib.org/>
7. Magma Computational Algebra System,  
<http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/>
8. Pari, <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>
9. NTL: A Library for doing Number Theory, <http://www.shoup.net/ntl/>