Condition for Free Convection

1 流体对流稳定的充要条件

以大气环境对流为研究背景，考虑一个无限大充满理想气体的空间，其中压力、温度、密度形成线性梯度，且所有气体分子均匀受到重力梯度作用。

1.1 力学平衡

若要维持上文所述的大气环境的稳定，整个环境需要满足力学平衡。重力梯度提供气体向下运动的力，压力梯度提供气体向上运动的力，而温度梯度和密度梯度则是压力梯度的来源。

（环境状态量下标用a表示，如p_a，气体团簇状态量下标用 0 表示，如p_0，为避免混淆，下文均省略环境状态量的下标）

$$-\frac{dp}{dz} = \rho g \tag{1}$$

$$p = \rho R_g T \tag{2}$$

$$-\frac{dp}{dz} = -R_g T\frac{d\rho}{dz} - \rho R_g\frac{dT}{dz} \tag{3}$$

对于底层的某一干燥气体团簇，若其受到微小扰动而导致其上浮，则其不产生对流的**充分必要条件**即为上浮后能够下降回到原处。上浮过程中，气体团簇达到力学平衡（$p_0 = p$）的速度应为声速，所需时间为τ_s，团簇达到热学平衡（$T_0 = T$）的时间应为弛豫时间τ_t，其中$\tau_s \ll \tau_t$，因此整个上浮过程可认为是准静态（$p_0 = p$）绝热（$s_0 = const, T_0 \neq T$）过程。

综合上述假设，气体团簇不产生对流的条件即为上浮后，导致其向上运动的力小于导致其向下运动的力，即：

$$-\frac{dp}{dz} = \rho g < \rho_0 g \tag{4}$$

其中导致向上运动的力为：

$$-\frac{dp}{dz} = -R_g T\frac{d\rho}{dz} - \rho R_g\frac{dT}{dz} \tag{5}$$

上浮为绝热过程，因此有：

$$\begin{gathered}\frac{p}{\rho_0^\gamma} = const \\ \frac{dp}{p} - \gamma\frac{d\rho_0}{\rho_0} = 0\end{gathered} \tag{6}$$

导致向下运动的力为：

$$\rho_0 g = \gamma\frac{d\rho_0}{dp}pg \tag{7}$$

故对流稳定的**充分必要条件**可以写为：

$$-R_g T\frac{d\rho}{dz} - \rho R_g\frac{dT}{dz} < \gamma\frac{d\rho_0}{dp}pg \tag{8}$$

根据 (8) 可以推导出几类变式。

- **密度梯度**

由

$$-\frac{dp}{dz} < \gamma \frac{d\rho_0}{dp} pg \tag{9}$$

而$dp = -\rho g dz$，因此

$$-\frac{dp}{dz} < -\gamma \frac{d\rho_0}{dz} \frac{p}{\rho} \tag{10}$$

在发生微小扰动前有$\rho_0 = \rho$，在发生微小扰动后$\rho_0 = \rho + \frac{d\rho}{dz}\delta z$，即有$d\rho_0 \approx d\rho$，故上式变为：

$$\boxed{\frac{d\rho}{dz} < \frac{\rho}{\gamma p} \frac{dp}{dz}} \tag{11}$$

(13) 也被称为 **Schwarzschild Criteria**

- **比体积梯度**

同密度梯度，由$v = \rho/1$得：

$$-\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dz} < \frac{1}{\gamma p v} \frac{dp}{dz} \tag{12}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dz} > -\frac{v}{\gamma p} \frac{dp}{dz} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dz}} \tag{13}$$

$$\frac{dv}{dz} - \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dz} > 0 \tag{14}$$

对dv/dz关于p和s展开得：

$$\frac{dv}{dz} = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dz} \tag{15}$$

故有

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \tag{16}$$

- **比熵梯度**

由 (18) 有

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{T v \beta}{c_p} > 0 \tag{17}$$

其中β为热膨胀系数，故 (18) 又可以写为关于比熵的不等式：

$$\boxed{\frac{ds}{dz} > 0} \tag{18}$$

- **温度梯度**

由 (20) 关于T和p展开得：

$$\frac{ds}{dz}=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dz}+\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\frac{dp}{dz}>0 \tag{19}$$

即：

$$\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz}-\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{dp}{dz}>0 \tag{20}$$

$$\boxed{-\frac{dT}{dz}<\frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{dp}{dz}=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p}\frac{dp}{dz}=\frac{g\beta T}{c_p}=\frac{g}{c_p}} \tag{21}$$

总结上式，即 **Schwarzschild Criteria** 可以表示为四个等价的梯度不等式，为**在同一高度下，理想气体环境中不会发生准静态绝热对流的充分必要条件。**

$$\boxed{\begin{aligned}-\frac{d\rho}{dz}&>-\frac{\rho}{\gamma p}\frac{dp}{dz}\\ \frac{dv}{dz}&>-\frac{v}{\gamma p}\frac{dp}{dz}\\ \frac{ds}{dz}&>0\\ -\frac{dT}{dz}&<\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{p}\frac{dp}{dz}\end{aligned}} \tag{22}$$

其中密度梯度式

事实上，对于可压缩流体，其产生对流的充分必要条件依然是

$$-\frac{dT}{dz}<\frac{g\beta T}{c_p} \tag{23}$$

证明可见[1]

2 旋度与环量

定常流动中（即至少为等熵条件下）当无穷远处来流为均匀流动，无旋⇔有势，正常情况下有唯一解，但在绕流情况下可能存在分离解，即速度在靠近环绕物体表面切平面存在间断，故会出现无穷解——导致湍流产生。 事实上，如果流动过程中发生了激波，流线穿过激波面之后，熵发生变化，原本无旋场在激波处会变为有旋 位于流体中发生微小振动（振幅尺度远小于物体尺寸）所产生的流动一定为势流（一阶近似成立）
非多连通空间内的势流不会存在封闭流线，但有旋流不一定存在封闭流线。

参考文献

[1] M. Ramazanov, "On the criteria of the absolute convective stability for compressible fluids," *Fluid Dynamics*, vol. 49, pp. 585–595, 2014.