

## • 工程力学

### ◦ 一 理论力学：静力学

- 1 受力分析
- 2 平面任意力系简化及平衡

▪ 3 桁架

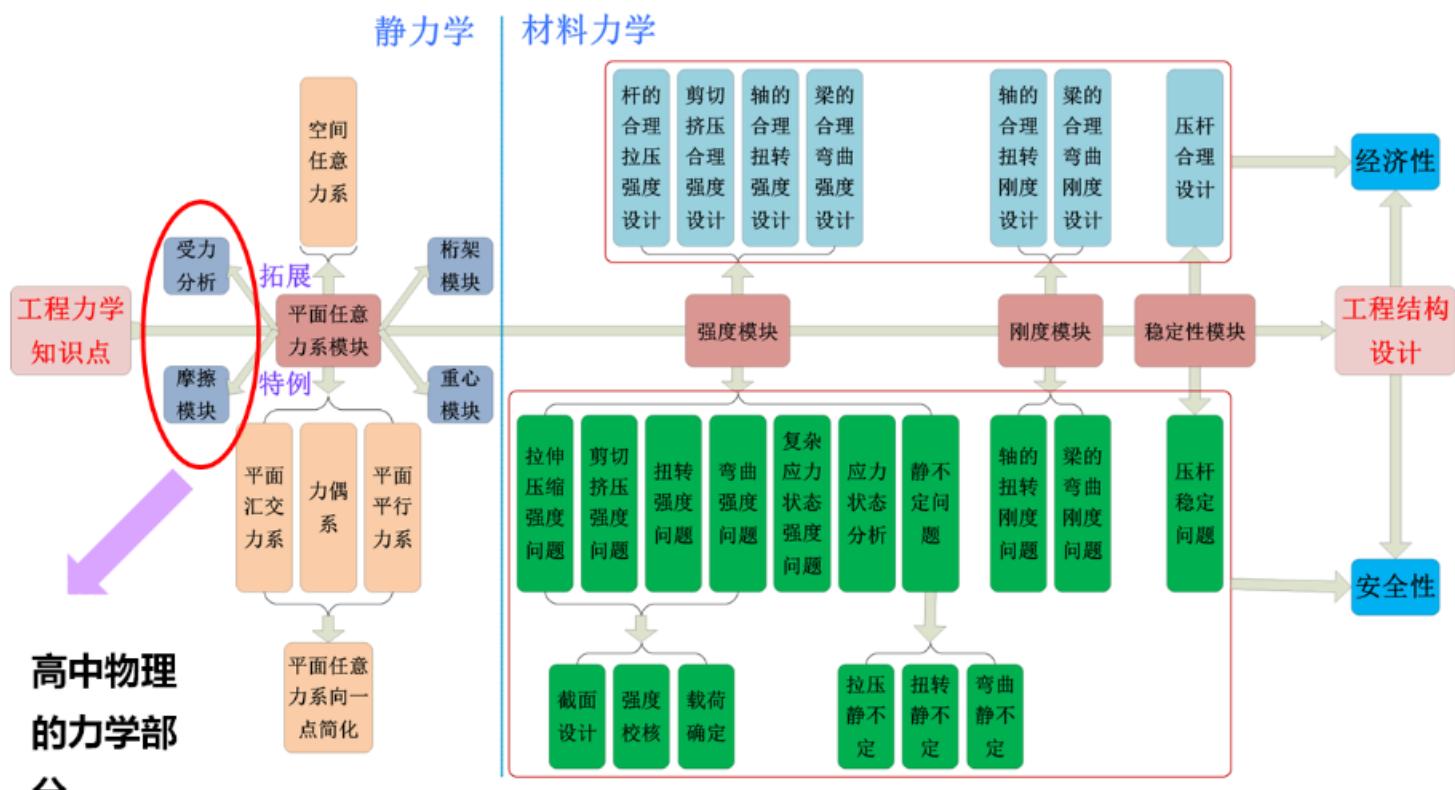
▪ 4 摩擦

▪ 5 重心

### ◦ 二 材料力学

- 1 材料力学基础
- 2 轴向拉伸压缩
- 3 圆轴扭转
- 4 梁的弯曲
- 5 应力状态分析
- 6 复杂应力状态强度问题
- 7 压杆稳定

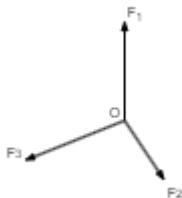
# 工程力学



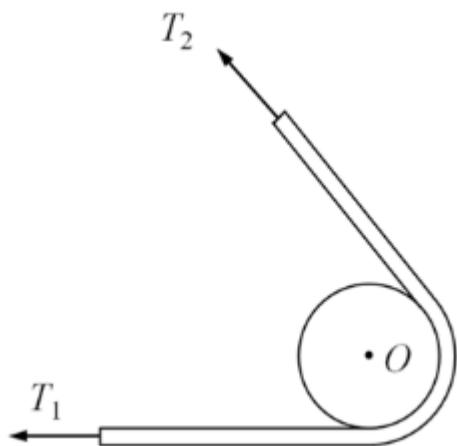
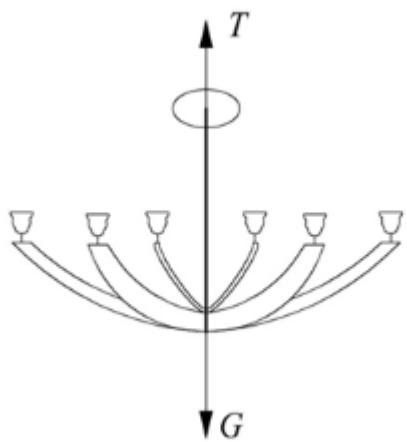
# 一 理论力学：静力学

## 1 受力分析

- 刚体
  - 理论力学：静力学——刚体
  - 材料力学——柔性体
- 平衡（静力学公理）
  - 公理1：二力平衡：二力构件、二力杆
  - 公理2：加减平衡力系：等效力系
    - 推论1：力的可传性
  - 公理3：力的平行四边形法则
    - 推论2：三力平衡汇交定理
  - 公理4：作用和反作用公理
- 力系
  - **平面汇交力系**：各力的作用线或延长线都在一个平面内且汇交于一点



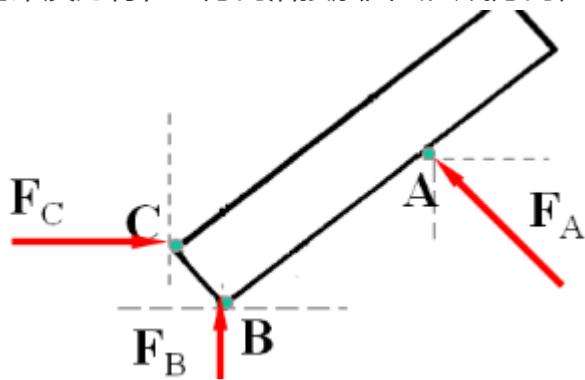
- **平面平行力系**：各力的作用线或延长线都在一个平面内且相互平行
- **力偶与力偶系**：作用在刚体上大小相等、方向相反且不共线的两个力构成功力偶，作用在刚体上的一群力偶构成功力偶系，二力作用线称为力偶臂，用d表示
- **平面任意力系**：各力作用线在同一平面内，既不完全汇交于一点又不完全平行的力系
- **空间任意力系**：各力作用线在同一空间内，既不完全汇交于一点又不完全平行的力系
- 约束
  - **柔性体约束**：皮带、链条、绳索等
    - 约束特征：限制物体沿柔索方向运动
    - 约束反力特征：作用在接触点，方向沿着柔索背离物体



- **光滑面约束:** 齿轮传动等

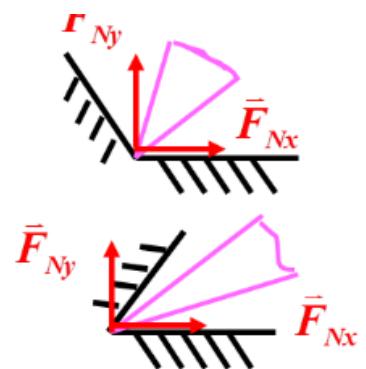
约束特征: 只限制物体沿公法线方向趋于支承面方向的运动

约束反力特征: 方向沿接触面公法线方向, 指向受压物体



◆ 物体的尖端与约束的尖槽接触:

约束反力的方向不定, 用两个垂直分量表示

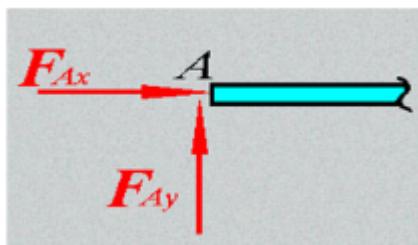


- 光滑铰链约束：圆柱销等

(1) 固定铰链约束/固定铰链支座/固定铰支：

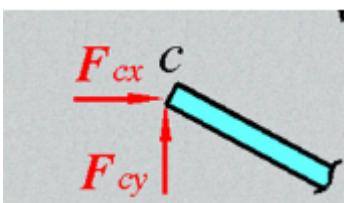
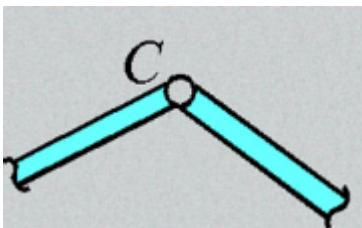
约束特征：只限制物体沿圆柱形径向的运动，不限制其轴向运动和绕轴线转动

约束反力特征：方向沿销钉径向，指向不确定（两个垂直分量 $F_x, F_y$ 替代）



(2) 中间铰链约束/中间铰：

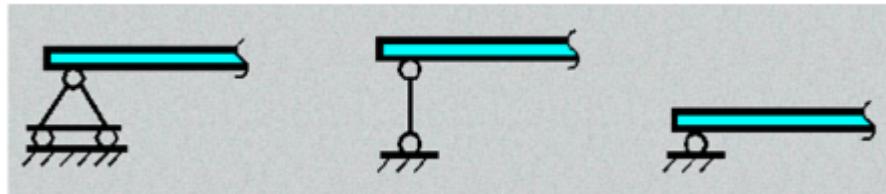
特征同固定铰支

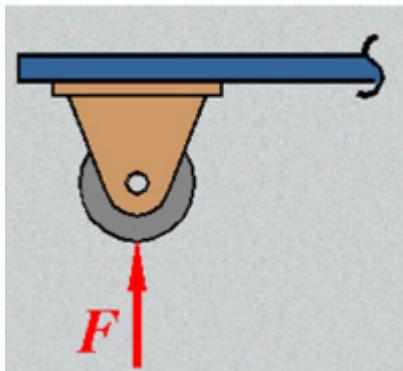


(3) 活动铰链约束/活动铰链支座/辊轴支座：

约束特征：只限制物体沿垂直于支承面方向的运动

约束反力特征：通过铰链中心并指向物体 ( $F_y$ )





- 固定端约束

约束特征：限制构件移动和转动

约束反力： $F_x, F_y, M$

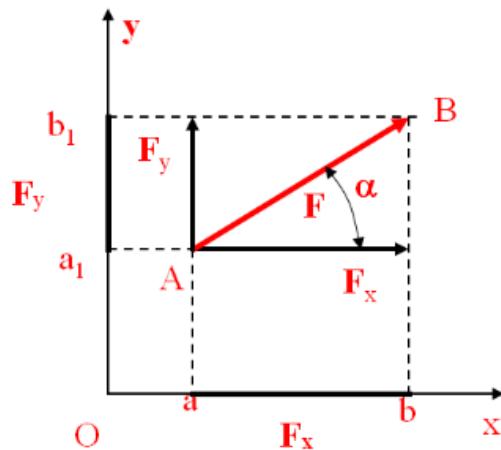
## 2 平面任意力系简化及平衡

- 汇交力系合成：

- 几何法：平行四边形法则、三角形法则

- 解析法/投影法：

### 1. 概念：线段；代数量



### 2. 表示： $F_x = F \cos \alpha$    $F_y = F \sin \alpha$

说明：

(1)  $F_x$  的指向与 x 轴一致，为正，否则为负；

(2) 力在坐标轴上的投影为标量。

投影和分力的区别：

(1) 分力是矢量，投影是标量

(2) 分力与合力之间遵循平行四边形法则，投影与合力之间是合力的垂足间线段的关系

(3) 在直角坐标轴上投影与分力的大小相同 (斜坐标系下可能不同)

- 汇交力系平衡：

- 三力平衡汇交定理：

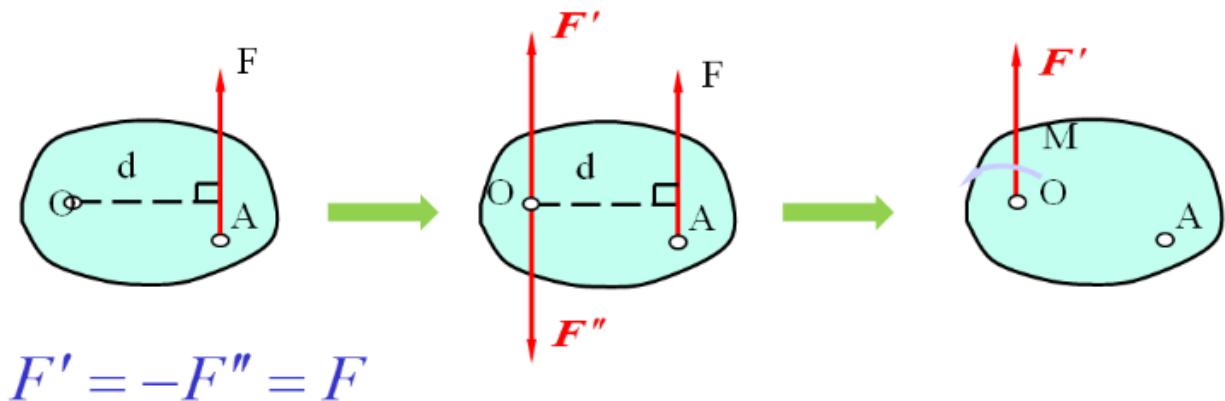
$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

- 力偶系合成
  - 力对点的矩
  - 力对轴的矩
- 力偶系平衡：

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

### • 平面任意力系向一点简化

- 力的平移定理：作用于刚体上任一点的力可平移到刚体上任一点而不改变对刚体的作用效应，但需增加一附加力偶，附加力偶的力偶矩矢等于原力对新的作用点之矩矢



$$M = Fd = M_O(F) \quad \text{—附加力偶}$$

- 结果：分解为平面共点力系和平面力偶系，获一主矢  $\sum F$  和主矩  $\sum M_O(F)$

主矢	主矩	合成结果	说明
$F_R' \neq 0$	$M_O = 0$	合力	此力为原力系的合力，合力的作用线通过简化中心
	$M_O \neq 0$	合力	合力作用线离简化中心的距离 $d = \frac{M_O}{F'_R}$
$F_R' = 0$	$M_O \neq 0$	力偶	此力偶为原力系的合力偶，在这种情况下主矩与简化中心的位置无关
	$M_O = 0$	平衡	

- 平面任意力系的平衡：

## 1、一矩式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum m_O(\bar{F}_i) = 0 \end{cases}$$

上式有三个独立方程，  
只能求出三个未知数。

## 2、二矩式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_i) = 0 \\ \sum m_B(\bar{F}_i) = 0 \end{cases}$$

条件：x轴不垂直于AB连线  
(A和B则是列矩方程对应的  
两点)

## 3、三矩式

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_i) = 0 \\ \sum m_B(\bar{F}_i) = 0 \\ \sum m_C(\bar{F}_i) = 0 \end{cases}$$

条件：A, B, C不在同  
一直线上 (A, B和C则  
是列矩方程对应的三点)

### • 静不定问题

力系名称	独立平衡方程的数目
共线力系	1
平面力偶系	1
平面汇交力系	2
平面平行力系	2
平面任意力系	3

静定问题：未知量少于或等于独立平衡方程数目

静不定体系：未知量多于独立平衡方程数目

解决方法：(材料力学) 使用位移协调

刚体系统的独立平衡方程数目的计算：如果刚体系由  $n_1$  个受平面任意力系作用的刚体， $n_2$  个受平面汇交力系或平行力系作用的刚体以及  $n_3$  个受平面力偶系作用的刚体组成，那么系统可能有的独立平衡方程数目  $m$  在一般情况下为：

$$m = 3n_1 + 2n_2 + n_3$$

假设系统中未知量的总数  $k$ ，则：

$$k \leq m \quad \text{静定}$$

$$k > m \quad \text{静不定}$$

### 3 桁架

桁架：由一些细长直杆按适当方式分别在两端连接而成的几何形状不变的结构

桁架模型：平面桁架、空间桁架

理想桁架：各杆内力只有轴力（拉力或压力），无弯矩和剪力（二力杆）

计算内力：

- (1) 节点法：研究对象为汇交力系节点，从已知节点逐一求解，直至待求杆内力得解
- (2) 截面法：将待求杆附近桁架截面截开，用外载荷来代替

零力杆：轴力为零的杆，作用：原杆破坏后可以起到保护的作用

## 4 摩擦

## 5 重心

# 二 材料力学

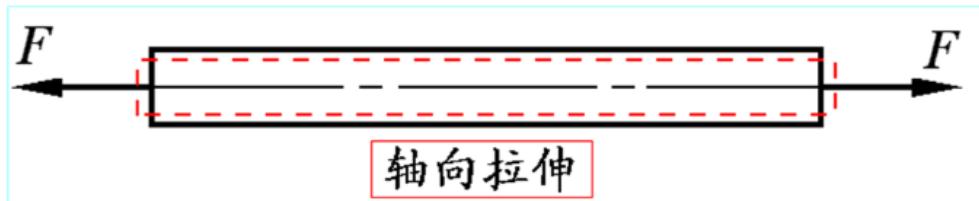
## 1 材料力学基础

- 外力：作用在构件上的力（外加载荷、约束力）
  - 作用位置：
    - 体体积力：连续分布在各点中的力
    - 表面力：分布力（面分布力、线分布力）、集中力
  - 作用时间：
    - 静载荷：载荷缓慢增至某一定值后保持不变或变化很不显著
    - 动载荷：交变载荷、冲击载荷
- 内力：构件在外力作用下发生变形，其内部因相对位置改变引起的相互作用
  - 轴力：拉伸压缩变形 ( $F_x$  or  $F_N$ )
  - 剪力：剪切变形 ( $F_y, F_z$  or  $F_{sy}, F_{sz}$ )
  - 扭矩：扭转变形 ( $M_x$  or  $T$ )
  - 弯矩：弯曲变形 ( $M_y, M_z$ )
- 承载能力：
  - 变形：
    - 弹性变形：随外力解除后消失
    - 塑性变形：随外力解除后不会消失
  - 失效：由于各种原因，使构件丧失正常工作能力的现象
    - i. 强度：构件有足够抵抗破坏的能力  
**强度失效**：构件在外力作用下发生不可恢复的塑性变形或断裂
    - ii. 刚度：构件有足够抵抗弹性变形的能力  
**刚度失效**：构件在外力作用下产生过量的弹性变形
    - iii. 稳定性：构件有足够保持原有平衡状态的能力  
**稳定性失效**：构件在外力作用下平衡形式发生改变
- 材料力学指标：**安全性、经济性**
- 基本假设：
  - **连续性假设**：假设无隙并置，可用连续函数来表示构件的各力学量（内力，应力，应变，位移等）
  - **均匀性假设**：假设材料力学性能与其在构件中的位置无关
  - **各向同性假设**：假设材料在各个方向具有相同的力学性能

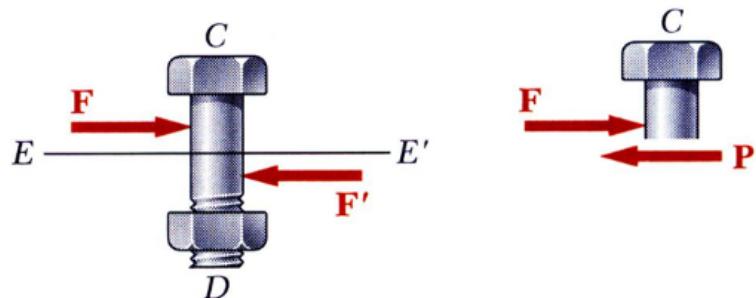
- 小变形假设：假设构件变形远小于构件本身的几何尺寸
- 应力与应变：
  - 变形：
  - 轴向拉伸压缩：

**(1) 受力特点：**杆件受一对大小相等、方向相反、沿杆件轴线方向的力的作用。

**(2) 变形特点：**杆件长度方向发生伸长或缩短，同时横向尺寸减小或增大。



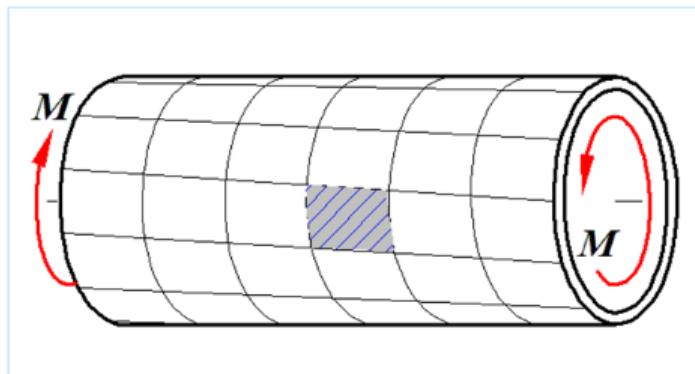
- 剪切：
- (1) 受力特点：**杆件受到一对大小相等、方向相反、作用线互相平行、相距很近的横向力的作用。
- (2) 变形特点：**受剪杆件的两部分沿外力作用方向发生相对错动。



- 扭转：

**(1) 受力特点：**杆件受到一对大小相等、方向相反作用面垂直于杆轴的力偶作用。

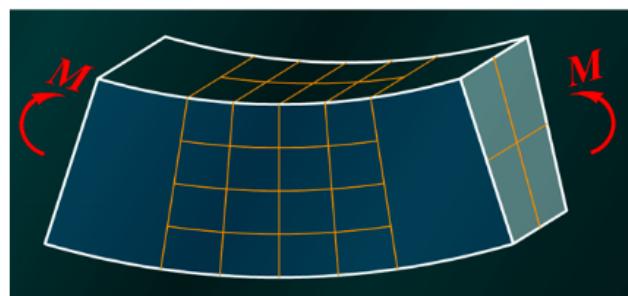
**(2) 变形特点：**杆件的任意两个横截面发生绕轴线的相对转动。



▪ **弯曲：**

**(1) 受力特点：**杆件受到垂直于杆轴线的横向力的作用或受到一对大小相等、方向相反、作用在杆的纵向对称面内的力偶作用。

**(2) 变形特点：**杆件的轴线由直线变成曲线。



◦ **应力：**截面上一点处内力的聚集程度

- 机械应力：外力作用时物体各部分发生相互作用产生的内力
  - 热应力：温度改变时，不能完全自由胀缩导致相互作用产生的内力
- 正应力与切应力：

$$\Delta \vec{F}_R = \Delta \vec{F}_N + \Delta \vec{F}_{sy} + \Delta \vec{F}_{sz}$$

$$\text{平均应力: } \bar{\sigma} = \frac{\Delta F_R}{\Delta A}$$

$$\text{集度: } \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \bar{\sigma} = \frac{\Delta F_R}{\Delta A}$$

$$\text{正应力: } \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$

$$\text{切应力: } \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_s}{\Delta A}$$

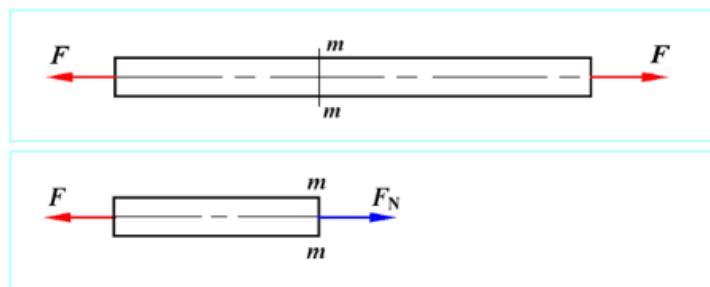
◦ **应变:** 应力作用下的形变

- 线应变/正应变:  $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$
- 切应变:  $\gamma$  (rad)

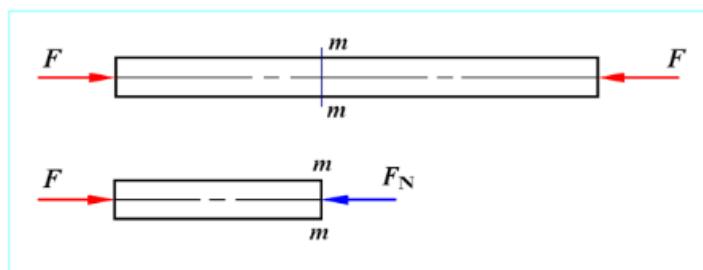
## 2 轴向拉伸压缩

• 轴力及轴力图:

### 轴力

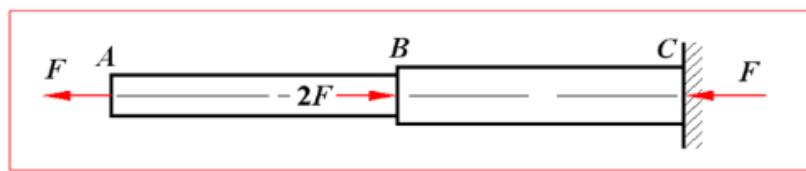


**轴力定义:** 通过横截面形心并沿杆件轴线的内力

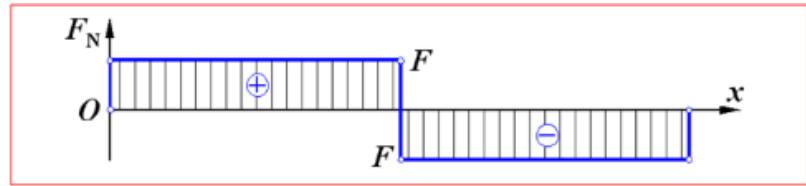


**符号规定:** 拉力为正, 压力为负

# 轴力图



$$F_{N1} = F$$
$$F_{N2} = -F$$



以横坐标  $x$  表示横截面位置，以纵坐标  $F_N$  表示轴力，绘制轴力沿杆轴的变化曲线。

表示轴力沿杆轴变化情况的图线  
(即  $F_N-x$  图)，称为轴力图

- 拉压杆应力：

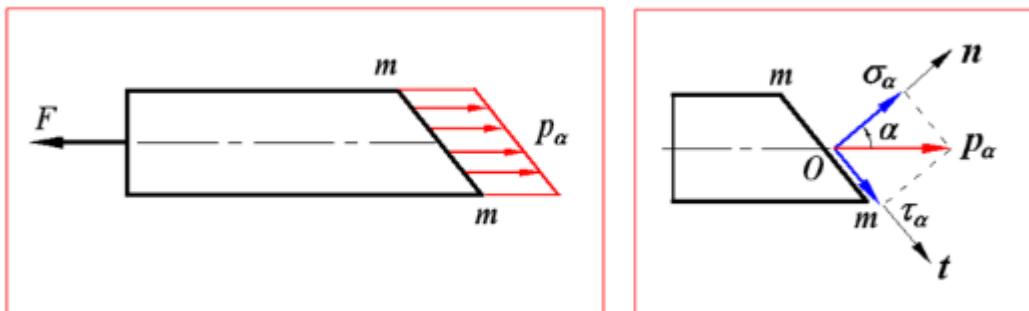
**横截面：**

- 平面假设：变形前为平面的横截面，变形后仍保持为平面且垂直于轴线
- 均匀性假设：正应力均匀分布

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

拉应力为正，压应力为负

**斜截面：**



$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

**圣维南原理：**非均匀分布只影响距离载荷作用区约构件横向尺寸以内的应力分布

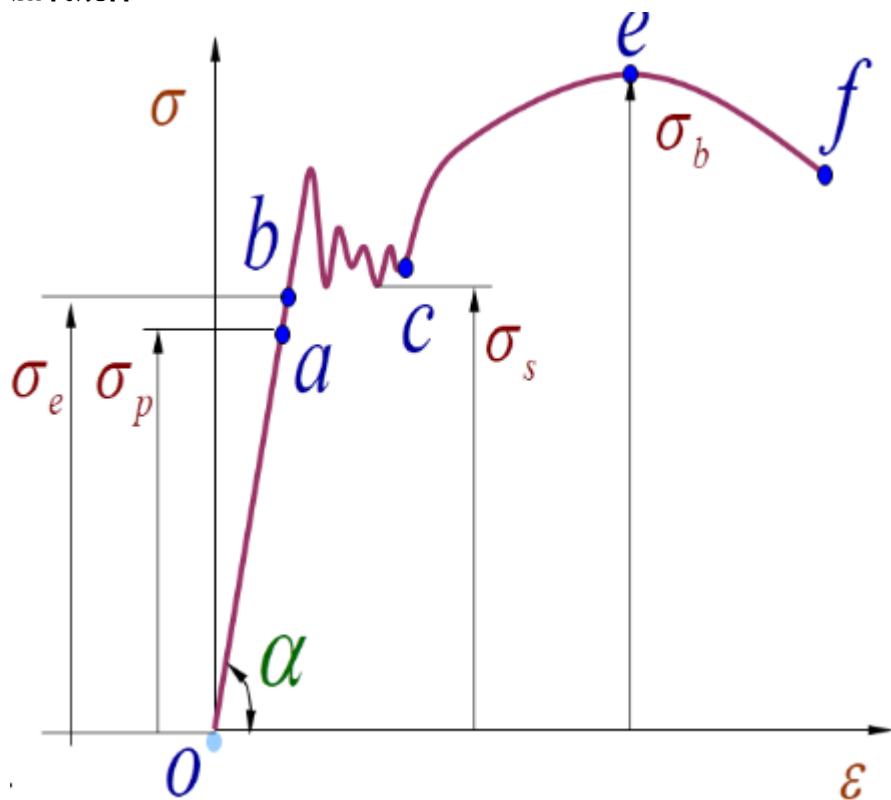
应力非均布区      应力均布区      应力非均布区



- **拉伸力学性能：**

- **低碳钢：**

**加载规律：**



(1) **弹性阶段o-a-b:**

- 比例极限： $\sigma_p$
- 弹性模量： $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  (a-b段非正比关系)
- 弹性极限： $\sigma_e$

(2) **屈服阶段b-c:**

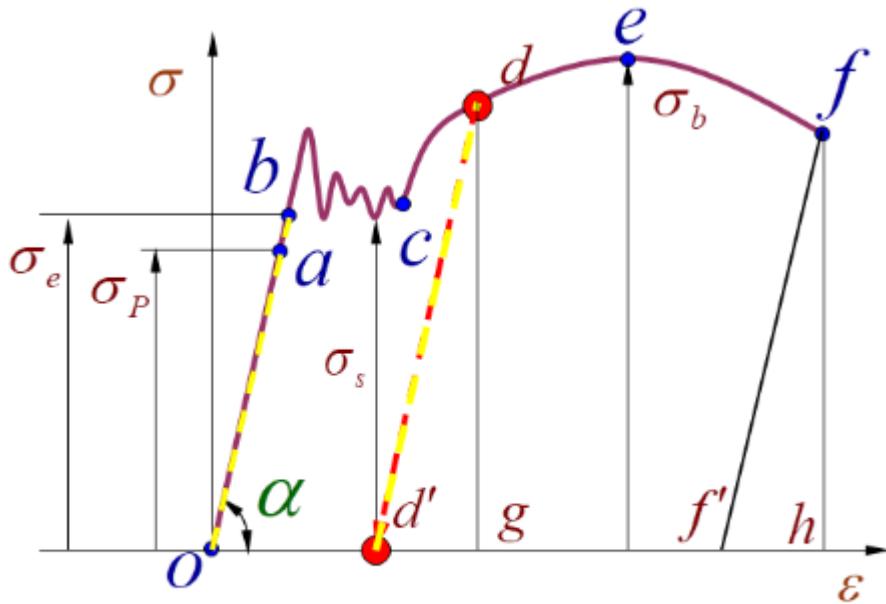
- 屈服极限/屈服应力： $\sigma_s$

(3) **硬化阶段c-e:**

- 强度极限： $\sigma_b$

#### (4) 颈缩阶段e-f

卸载规律：



**冷作硬化或加工硬化：**材料的比例极限增高，伸长率降低。

**1、ob段：** 卸载过程中应力与应变关系与加载一致；

**2、bd段：** 卸载时恢复曲线和加载时平行，但有了塑性应变（残余应变）**od'**；

**3、**卸载至**d'**点后立即重新加载，应力应变关系沿**d'd**变化，过**d**点后仍沿**def**变化。

**塑性：**材料能经受较大变形而不被破坏的能力

**塑性指标：**

- **伸长率：**

$$\delta = \frac{l - l_0}{l_0} \times 100\%$$

- **收缩率：**

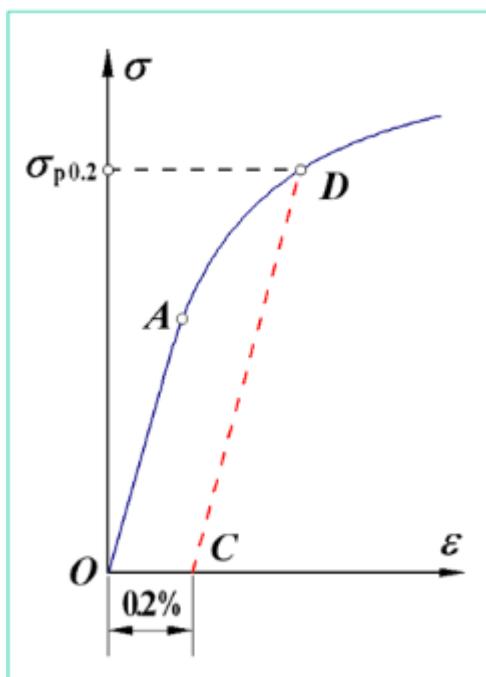
$$\psi = \frac{A_0 - A_{min}}{A_0} \times 100\%$$

$\delta > 5\%$  为塑性材料，如结构钢与硬铝等

$\delta < 5\%$  为脆性材料，如灰口铸铁与陶瓷等

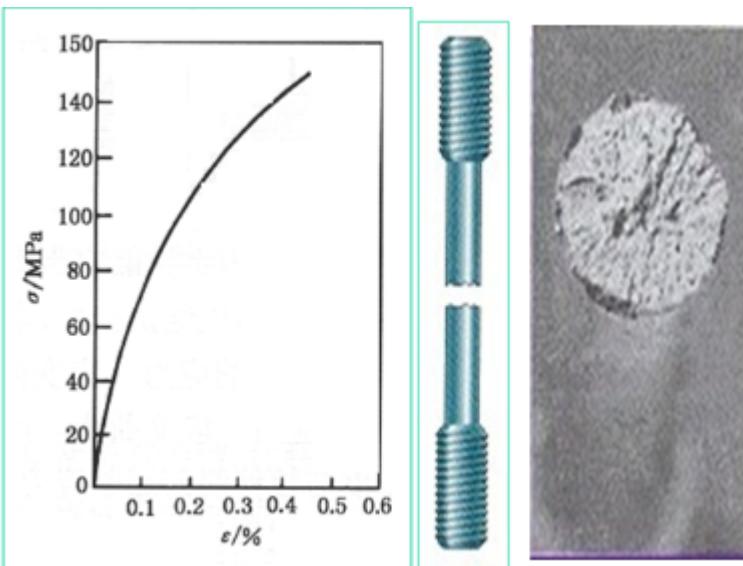
低碳钢的  $\delta \approx 20\text{-}30\%$ ,  $\psi \approx 60\%$

- 其他塑性材料：



对于没有明显屈服阶段的塑性材料，如硬铝、50钢、30铬猛钢等，工程上通常以卸载后产生0.2%的残余应变的应力作为屈服应力，即  $\sigma_s = \sigma_{0.2}$

- 脆性材料（如灰口铸铁）：

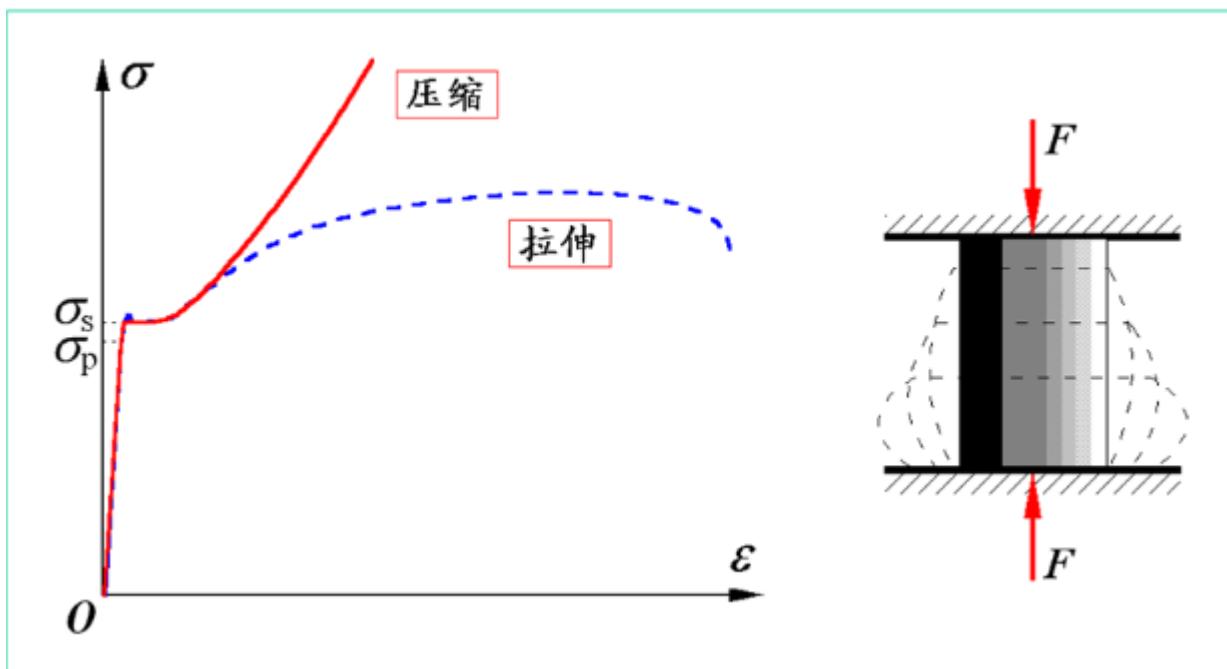


无明显塑性变形、屈服阶段、颈缩现象

强度极限  $\sigma_b$  为其拉断时最大应力

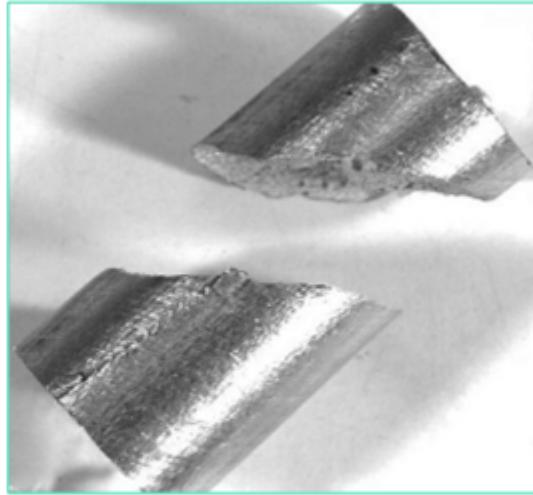
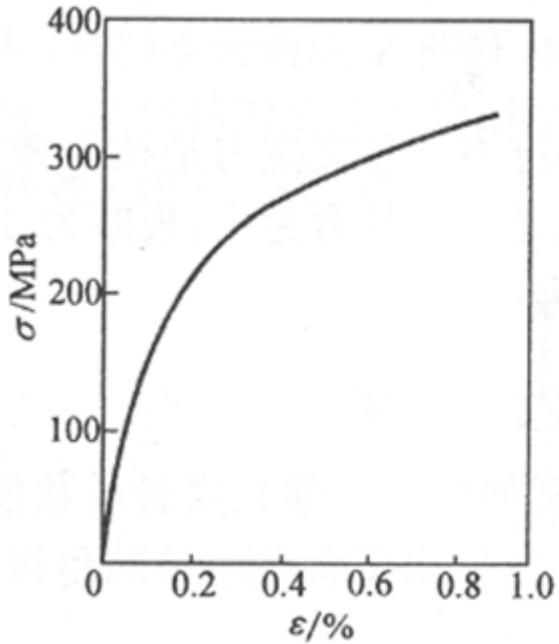
- **压缩力学性能：**

- **低碳钢：**



$\sigma_e$ 、 $\sigma_p$ 、 $\sigma_s$ 、 $E$ 同拉伸， $\sigma_b$ 测不出

- **灰口铸铁：**



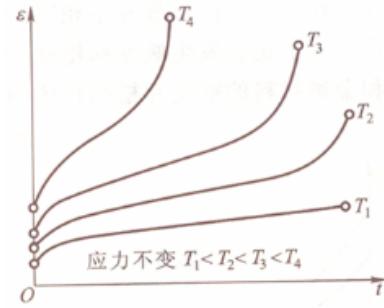
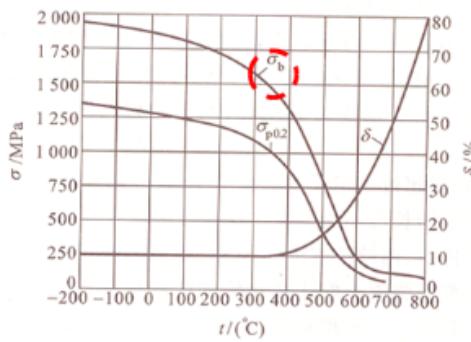
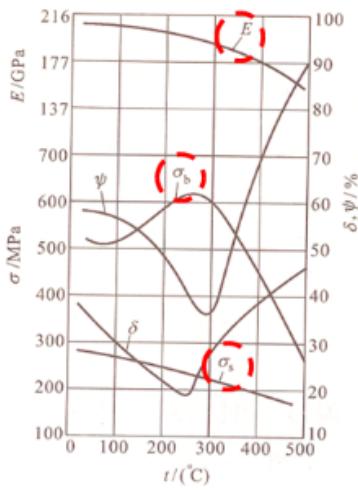
$$(\sigma_b)_c = 3 \sim 4 (\sigma_b)_t$$

断口与轴线约成45°

故灰口铸铁适用于作承压材料

# 热对材料力学性能的影响

**蠕变：**固体材料在保持应力不变的条件下，应变随时间延长而增加的现象。它与塑性变形不同，塑性变形通常在应力超过弹性极限之后才出现，而蠕变只要应力的作用时间相当长，它在应力小于弹性极限施加的力时也能出现。

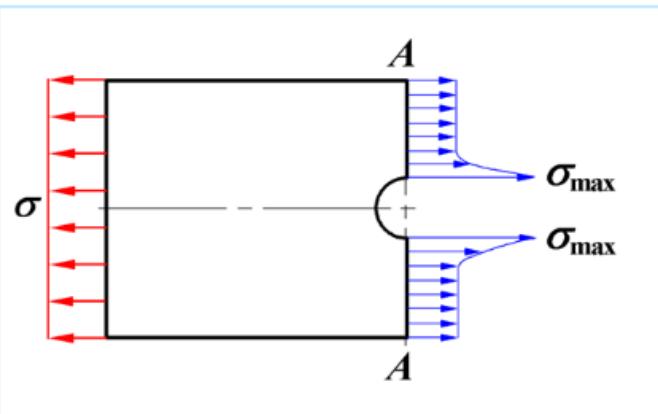


总的的趋势，随着温度升高，材料的弹性模量、屈服强度和拉伸强度均降低。

应力维持不变：温度越高，蠕变速率就越大；温度降低，蠕变速率也随之减小。

- 应力集中：由于截面急剧变化引起应力局部增大的现象

## 应力集中因数：最大局部应力和名义应力的比值



$$\sigma_n = \frac{F}{(b-d)\delta}$$

(**b**为板宽, **δ**为板厚, **d**为圆孔直径)

$\sigma_{max}$  — 最大局部应力

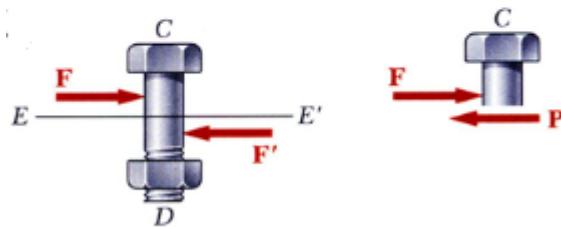
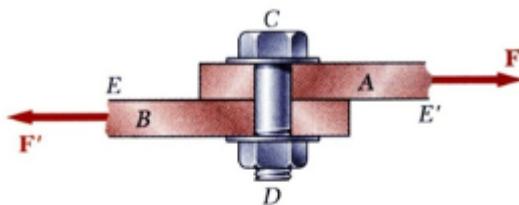
$\sigma_n$  — 名义应力 (不考虑应力集中条件下求得的应力)

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

- 脆性材料  $\sigma_{max} = \sigma_b$  发生断裂, 需考虑应力集中
- 塑性材料  $\sigma_{max} = \sigma_s$  后不再增大且趋于均匀分布, 故可不用考虑应力集中
- 减小应力集中: 改变形状 (圆角)、合理选择位置 (远离边缘)、合理选择方向 (截面变化梯度小)、增加卸载槽等

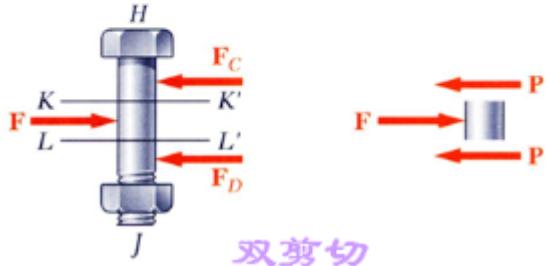
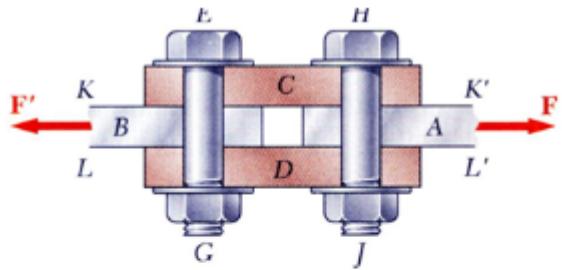
### • 剪切:

- 受力特点: 构件受等值、反向、作用线距离很近的二平行力作用
- 变形特征: 杆件沿两力之间的截面发生错动, 甚至破坏
- 剪切面: 发生错动的面。剪切面与外力方向平行
- 单剪切: 有一个剪切面的杆件, 如铆钉



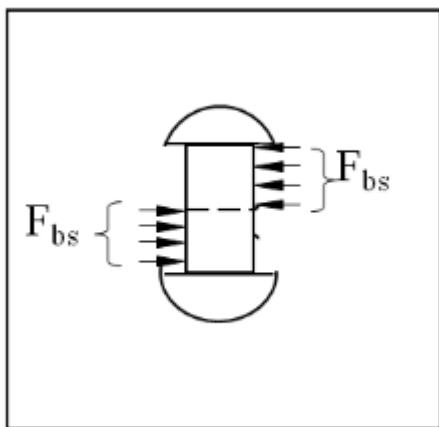
单剪切

- 双剪切: 有两个剪切面



### • 挤压:

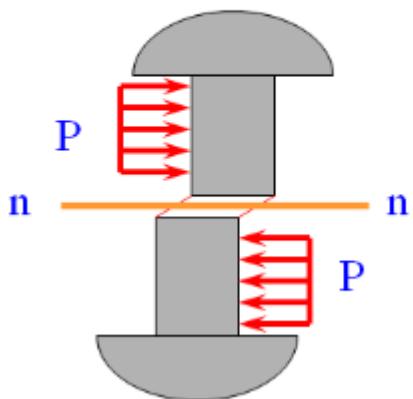
- 挤压破坏: 在**挤压面**产生过大的塑性变形(导致连接松动)、压溃或连接件(如铆钉)被压扁
- 挤压面: 连接件和被连接件相互压紧的**接触面**挤压面与挤压力垂直
- 挤压力 $F_{bs}$ : 挤压面上的压力
- 挤压应力 $\sigma_{bs}$ : 挤压面上的正应力



### • 连接强度失效:

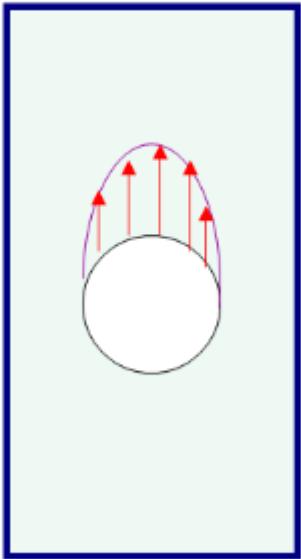
- 剪切破坏

## 剪断



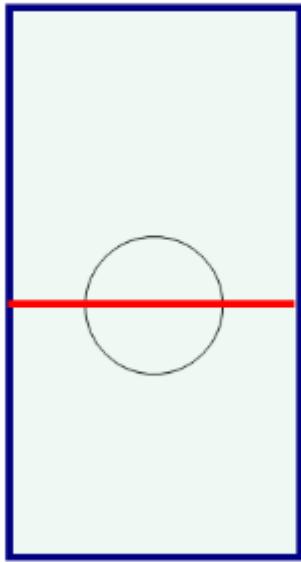
- 挤压破坏

## 挤压破坏



- 拉断

## 拉断



- 强度条件:

- 失效极限应力:

$$\sigma_u = \begin{cases} \sigma_s & \text{塑性材料} \\ \sigma_b & \text{脆性材料} \end{cases}$$

- 许用应力:

$$[\sigma] = \begin{cases} \frac{[\sigma_s]}{n} & \text{塑性材料} \\ \frac{[\sigma_b]}{n} & \text{脆性材料} \end{cases}$$

塑性材料:  $[\sigma_t] = [\sigma_c] = [\sigma]$

脆性材料:  $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$

- **剪切强度条件:**

$$\tau = \frac{F_s}{A_s} \leq [\tau]$$

提高强度措施: 增大剪切面、增加剪切面数量

- **挤压强度条件:**

$$\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

提高强度措施: 增大挤压面、增加挤压面数量 (连接件数量)

- **拉压强度条件:**

$$\sigma_{max} = \left( \frac{F_N}{A} \right)_{max} \leq [\sigma]$$

- **常见问题:**

- 强度校核
- 截面设计
- 确定承载能力

- **拉压杆变形与拉压静不定:**

- **胡克定律:**

比例极限内, 正应力与正应变成正比

轴向变形:

$$\sigma \leq \sigma_p, \sigma = E\varepsilon$$

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

$EA$ 为拉压刚度

横向变形：

$$\Delta b = b' - b$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} = -\mu\varepsilon = -\frac{\mu\sigma}{E}$$

$\mu$ 为材料的泊松比， $0 < \mu < 0.5$

- **拉压静不定问题：**

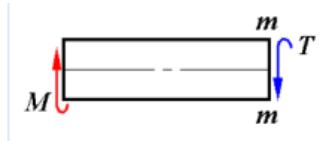
静不定度：未知力的数量减去平衡方程的数量

解决办法：补充变形协调方程（**虚功原理**）

### 3 圆轴扭转

- **扭转：**

- 外力特征：作用面垂直于杆轴的力偶
- 变形特征：各横截面间绕轴线作相对旋转，轴线仍为直线
- 扭转与轴：杆件横截面绕轴线作相对旋转为主要特征的变形形式—扭转以扭转为主要变形的杆件—轴
- **扭力偶：**作用面垂直于杆轴的力偶
- **扭力偶矩：**扭力偶之矩(或**扭矩**)  $M$
- **扭矩：**内力偶矩  $T$
- **扭转角：**横截面间绕轴线的相对角位移  $\varphi$
- **扭转切应变：**  $\gamma$

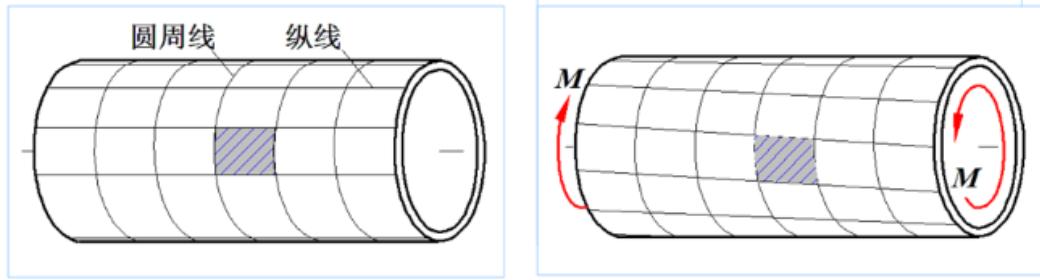


**符号规定**—按右手螺旋法则将扭矩用矢量表示，矢量方向与横截面外法线方向一致的扭矩为正，反之为负

- **扭矩图**

- 基本假设：

**扭转平面假设**



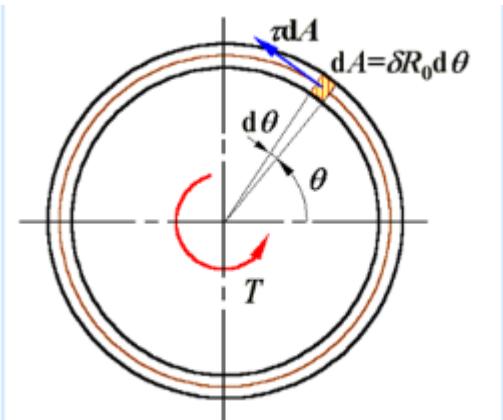
- ① 各圆周线的形状不变，仅绕轴线作相对转动
- ② 当变形很小时，各圆周线的大小与间距均不改变

### 应力公式

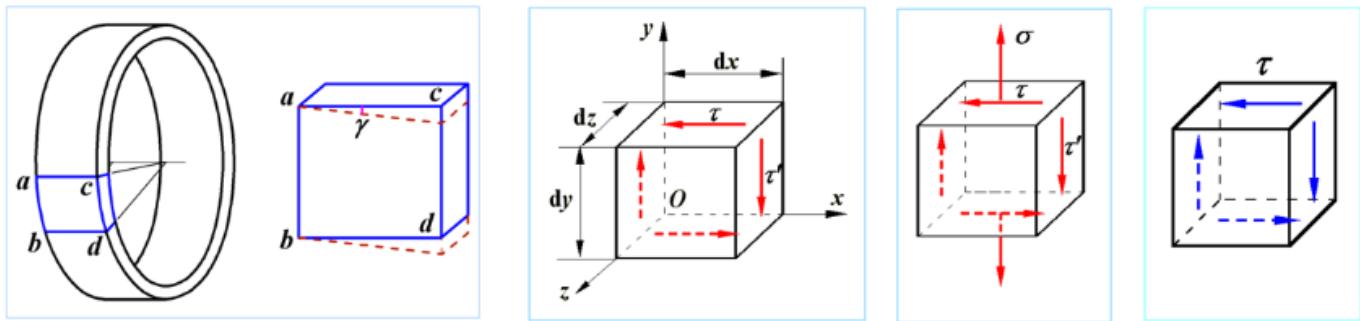
假设：切应力沿壁厚均匀分布

$$T = \int_0^{2\pi} R_0 \cdot \tau \delta R_0 d\theta = 2\pi R_0^2 \tau \delta$$

$$\tau = \frac{T}{2\pi R_0^2 \delta}$$



- 切应力互等定律：



$$\tau' = \tau$$

方向均指向或离开该交线

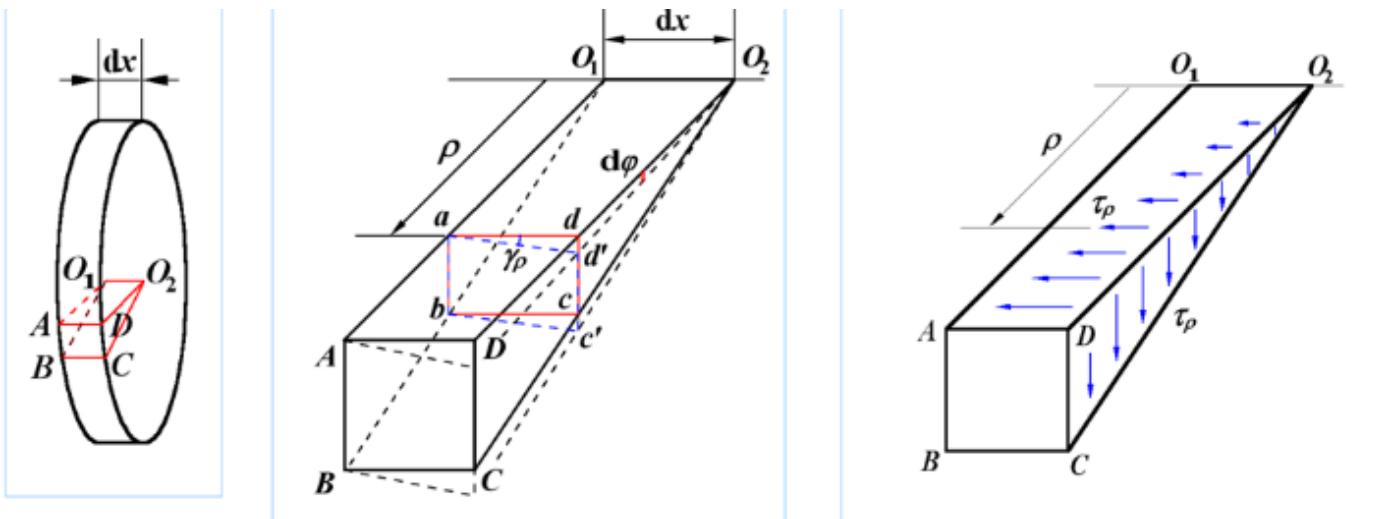
- **剪切胡克定律**: 在剪切比例极限  $\tau_p$  内, 切应力和切应变成正比

$$\tau = G\gamma$$

$G$  为切边模量

$$\text{对于各向同性材料: } G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

- **圆柱扭转切应力**:



$$\gamma_\rho = \frac{\rho d\varphi}{dx}$$

$\frac{d\varphi}{dx}$  为单位长度相对扭转角

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \text{ 称为极惯性矩}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$$

- **最大扭转切应力：**

$$\tau_{max} = \frac{TR}{I_p} = \frac{T}{W_p}$$

$$W_p = \frac{I_p}{R}, \text{ 称为抗扭截面系数}$$

实心圆截面:  $I_p = \frac{\pi D^4}{32}, W_p = \frac{\pi D^3}{16}$

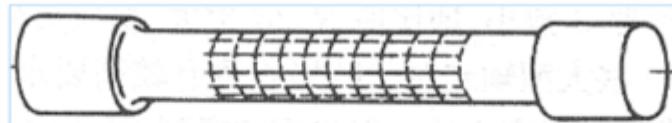
空心圆截面:  $I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4), W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$

$$\alpha = \frac{d}{D}, \text{ 称为空心度}$$

- **圆柱扭转强度与刚度：**

- **扭转失效形式：**

塑性材料



屈服

断裂

脆性材料



断裂

- **失效极限切应力：**

$$\tau_u = \begin{cases} \tau_s & \text{塑性材料屈服} \\ \tau_b & \text{塑性材料断裂 (脆性材料一般被拉断)} \end{cases}$$

- 许用切应力：

$$[\tau] = \begin{cases} \frac{[\tau_s]}{n} & \text{塑性材料} \\ \frac{[\tau_b]}{n} & \text{脆性材料} \end{cases}$$

- 强度条件：

$$\tau_{max} = \left( \frac{T}{W_p} \right)_{max} \leq [\tau]$$

- 合理强度设计：

- 截面设计（空心优于实心，同时提高经济性）
- 变截面轴与阶梯轴（提高经济性）

- 圆柱扭转变形：

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$$

$GI_p$ 为圆截面的扭转刚度

- 刚度条件：

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \leq [\theta]$$

$[\theta]$ 为单位长度许用扭转角

## 4 梁的弯曲

- 弯曲及其特征：

- 外力特征：外力或外力偶的矢量垂直于杆轴
- 变形特征：杆轴由直线变为曲线
- 弯曲与梁：以轴线变弯为主要特征的变形形式——弯曲，以弯曲为主要变形的杆件——梁
- 计算简图：画计算简图时，通常以轴线代表梁

- 梁的类型：

## 常见静定梁



**简支梁：**一端固定铰支、另一端可动铰支的梁

**悬臂梁：**一端固定、另一端自由的梁

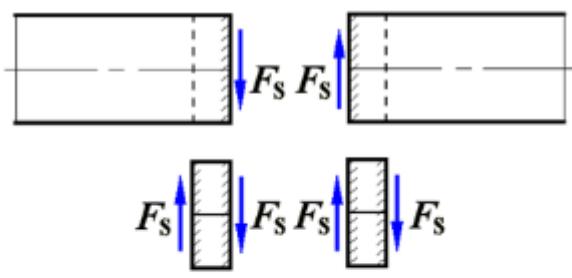
**外伸梁：**具有一个或两个外伸部分的简支梁

## 静不定梁

约束反力数超过有效平衡方程数的梁

**剪力：**作用线位于所切横截面的内力

**弯矩：**矢量位于所切横截面的内力偶矩



使微段沿顺时针方向转动的剪力为正



使微段弯曲呈凹形的弯矩为正

- 剪力图与弯矩图：

$$\frac{dF_s}{dx} = q$$

$$\frac{dM}{dx} = F_s$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q$$

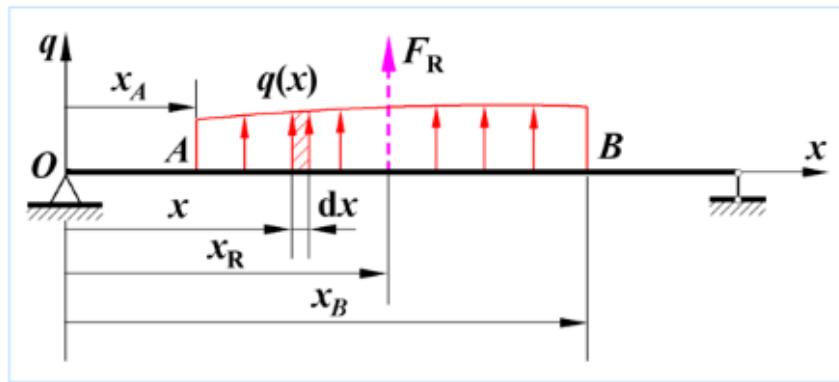
$q$	$q(x)=0$	$q(x)=c < 0$	$q(x)=c > 0$
$F_s$ 图			
$M$ 图	直线	2次凸曲线	2次凹曲线

步骤：

- 1.问题分析
- 2.计算支反力、剪力和弯矩
- 3.画剪力图、弯矩图

- 非均布载荷和线性分布载荷：

# 非均布载荷的合力



合力大小：

$$F_R = \int_{x_A}^{x_B} q(x) dx$$

载荷集度图  
的面积

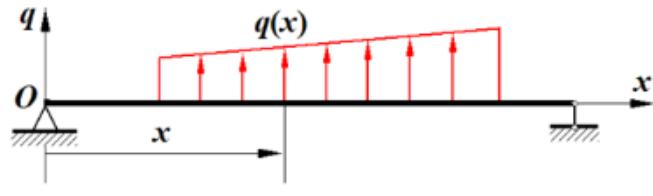
合力作用线位置：

$$x_R = \frac{\int_{x_A}^{x_B} x q(x) dx}{F_R}$$

载荷集度图形心  
横坐标

# 线性分布载荷梁的内力

线性分布载荷



线性分布载荷集度的一般表达式为

$$q(x) = ax + b \quad (\text{a, b 为常数})$$

线性分布载荷梁内力

$$\frac{dF_s}{dx} = q \quad F_s \text{ 为 } x \text{ 的二次函数, } F_s \text{ 图为抛物线}$$

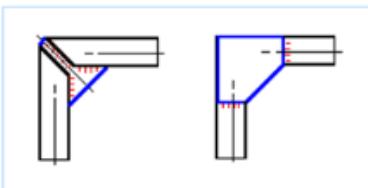
$$\frac{dM}{dx} = F_s \quad M \text{ 为 } x \text{ 的三次函数, } M \text{ 图为三次曲线}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \quad M \text{ 图的凹凸, 由 } q \text{ 的正负确定}$$

- 刚架内力:

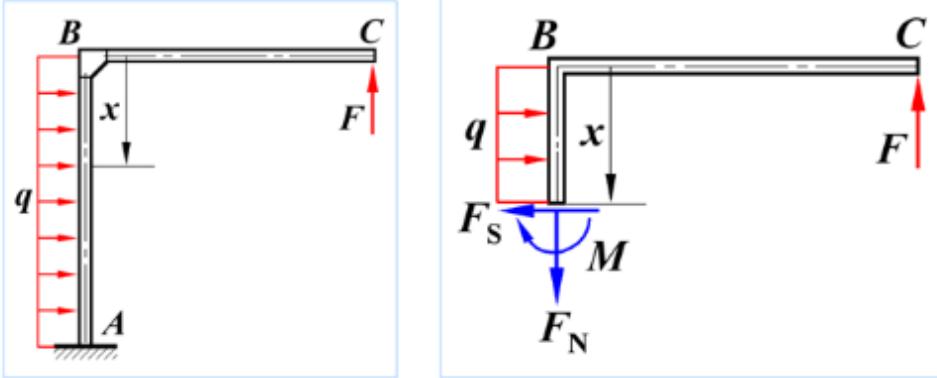
刚架

用刚性接头连接的杆系结构

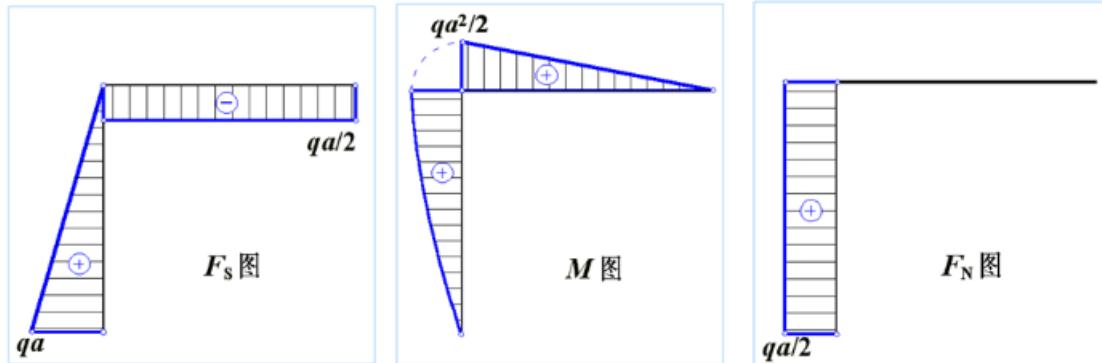


- 限制相连杆端截面间的相对线位移与角位移
- 可传力, 也可传递力偶矩

## 刚架内力



一般存在三内力分量—轴力 $F_N$ ; 剪力 $F_S$ ; 弯矩 $M$



弯矩图画法：与弯矩对应的点，画在所在横截面弯曲时受压一侧

弯矩图特点：如刚性接头处无外力偶，则弯矩连续

- 梁的弯曲应力：

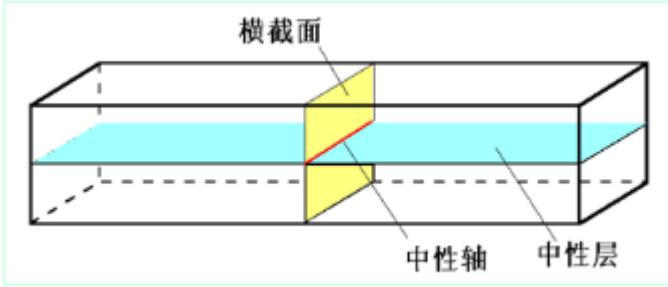
- 弯曲切应力 $\tau$
- 弯曲正应力 $\sigma$
- 对称弯曲：梁的变形对称于纵向对称面（外力作用在对称截面梁的对称面内）
- 纯弯曲：仅有弯矩一种内力

- 对称弯曲正应力：

- 基本假设：

- 弯曲平面假设：横截面变形后仍为平面，与纵线正交
- 单向受力假设：纵向线仅承受轴向拉应力或压应力

- 中性轴与中性层：（中性层：长度不变的层，其与横截面的交线为中性轴）



$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \quad \rho \text{为曲率半径}$$

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$

中性轴过截面形心

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA, \text{ 为截面对 } z \text{ 轴 (中性轴) 的惯性矩}$$

$$S_z(A) = \int_A y dA, \text{ 为截面面积对 } z \text{ 轴的静矩}$$

$EI_z$  为梁截面的弯曲刚度

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y}, \text{ 称为抗弯截面系数}$$

$$\text{矩形截面: } I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$\text{实心圆截面: } I_z = \frac{\pi D^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$\text{空心圆截面: } I_z = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4), \quad W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4)$$

对于圆形截面：

$$I_p = I_z + I_y$$

组合截面：

$$I_z = \sum I_i$$

平行轴定理：

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z0} + Aa^2 \\ I_y &= I_{y0} + Ab^2 \end{aligned}$$

• 对称弯曲切应力：

$$\tau(y) = \frac{F_s S_z(\omega)}{I_z b}$$

矩形截面： $\tau(y) = \frac{3F_s}{2bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$

$$\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{4l}{h}$$

• 梁的弯曲变形：

- 挠曲轴：外力作用下发生变形后的梁
- 挠曲轴是一条连续、光滑曲线
- 对于细长梁，剪力对弯曲变形影响一般可忽略不计，因而横截面仍保持平面，并与挠曲轴正交
- 研究弯曲变形的目的：进行梁的刚度计算，分析静不定梁，为研究压杆稳定问题提供有关基础
- **挠度  $w$** ：横截面形心在垂直于梁轴方向的位移，向上为正
- **转角  $\theta$** ：横截面的角位移，逆时针为正

$$\theta = \frac{dw}{dx}$$

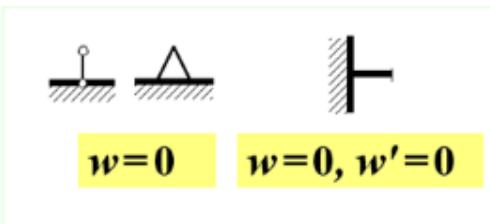
◦ **挠曲轴近似微分方程：**

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

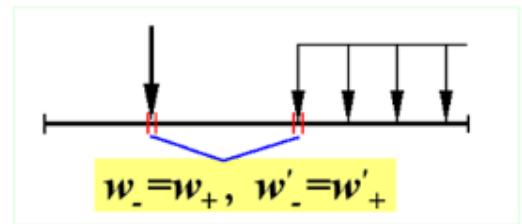
$$\frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

◦ 求解弯曲变形：

- 积分法：边界条件



约束处位移应满足的条件  
—位移边界条件



梁段交接处位移应满足的条件  
—位移连续条件

- 叠加法：

分解载荷 → 分别计算位移 → 求位移之和

◦ 静不定梁：

- ① 判断梁的静不定度
- ② 用多余力代替多余约束的作用，得受力与原静不定梁相同的静定梁—相当系统
- ③ 计算相当系统在多余约束处的位移，并根据变形协调条件建立补充方程
- ④ 由补充方程确定多余力，由平衡方程求其余支反力
- ⑤ 通过相当系统计算内力、位移与应力等

• 梁的强度条件及合理强度设计：

- 梁的强度条件：

$$\sigma_{max} = \left( \frac{M}{W_z} \right)_{max} \leq [\sigma]$$

$$\tau_{max} = \left( \frac{F_s S_z}{I_z b} \right)_{max} \leq [\tau]$$

- 变截面梁
  - 等强度梁 (一般为变截面梁)
- 满足

$$\frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma]$$

- **梁的合理强度设计:**
  - 合理截面形状设计: 空心结构、较小截面面积获得较大  $W_z$
  - 合理安排约束加载方式
  - 制成静不定梁
- **梁的刚度条件及合理刚度设计:**
  - **梁的刚度条件:**

$$|w| \leq [\delta]$$

$$|\theta| \leq [\theta]$$

- **梁的合理刚度设计:**
  - 缩短梁长
  - 改进约束形式
  - 改进加载方式
  - 增大截面惯性矩
  - 提高材料弹性模量

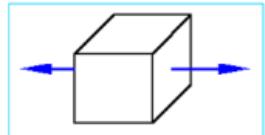
## 5 应力状态分析

- 基本概念:
  - **主平面:** 切应力为零的平面
  - **主应力:** 主平面上的正应力

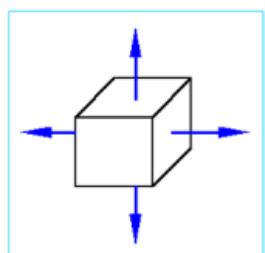
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

- **应力状态分类:**

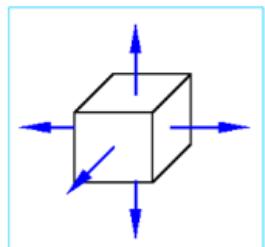
a、**单向应力状态**：只有一个主应力不等于零，另两个主应力都等于零的应力状态。



b、**二向应力状态**：有两个主应力不等于零，另一个主应力等于零的应力状态。

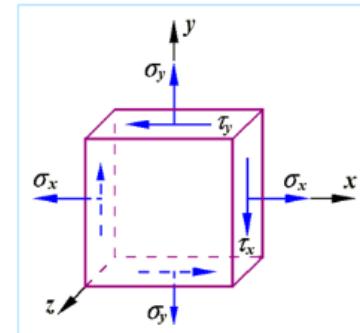
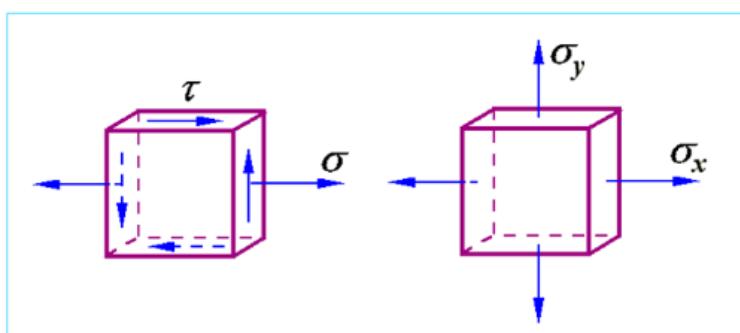


c、**三向应力状态**：三向主应力都不等于零的应力状态。

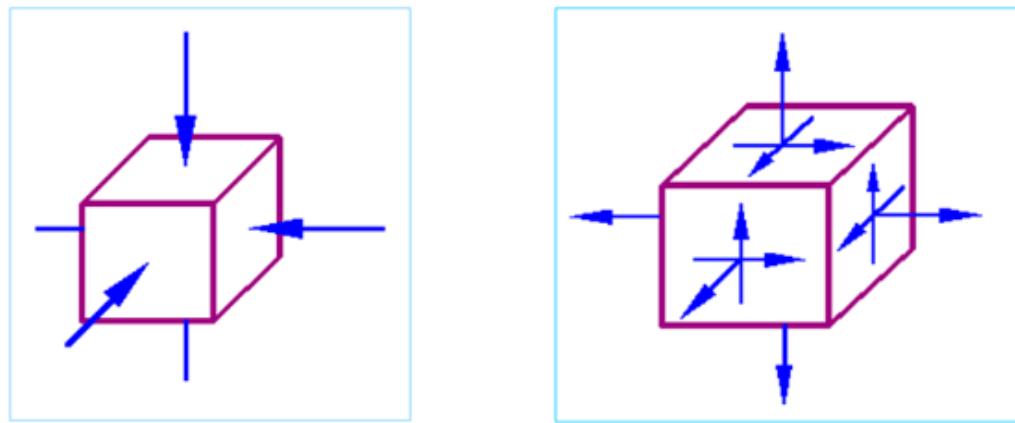


二向与三向应力状态，统称**复杂应力状态**

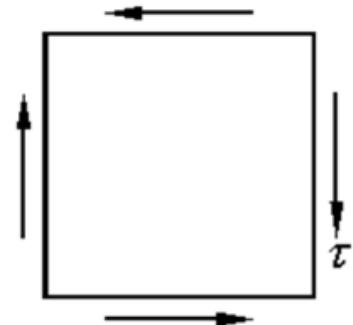
**平面应力状态**：仅在微体四侧面作用应力，且应力作用线均平行于微体的不受力表面



## 空间应力状态：微体各侧面均作用有应力



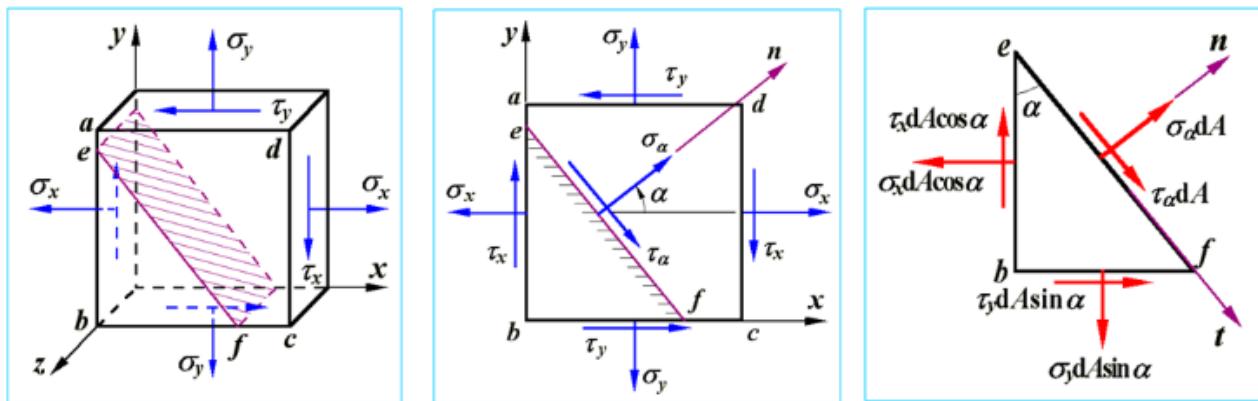
纯剪切应力状态：单元体  
上只存在剪应力无正应力。



- 斜截面应力状态分析：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

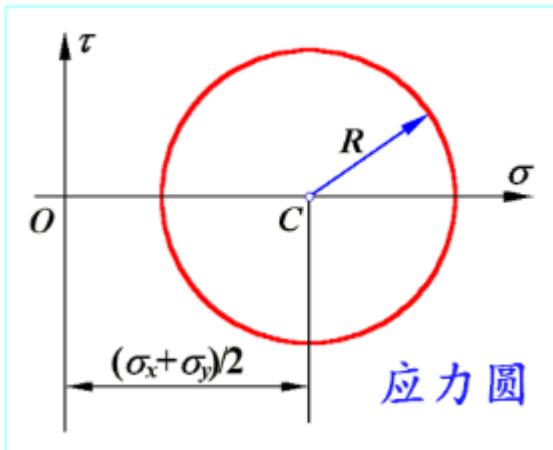
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$



## 符号规定：

- 正应力以拉伸为正；
- 切应力以企图使微体沿顺时针方向旋转者为正（与剪力符号规定相同）
- 方位角则规定以坐标轴x始边、沿逆时针方向旋转和外法线方向一致的为正

### • 应力圆：



圆心C的坐标为：

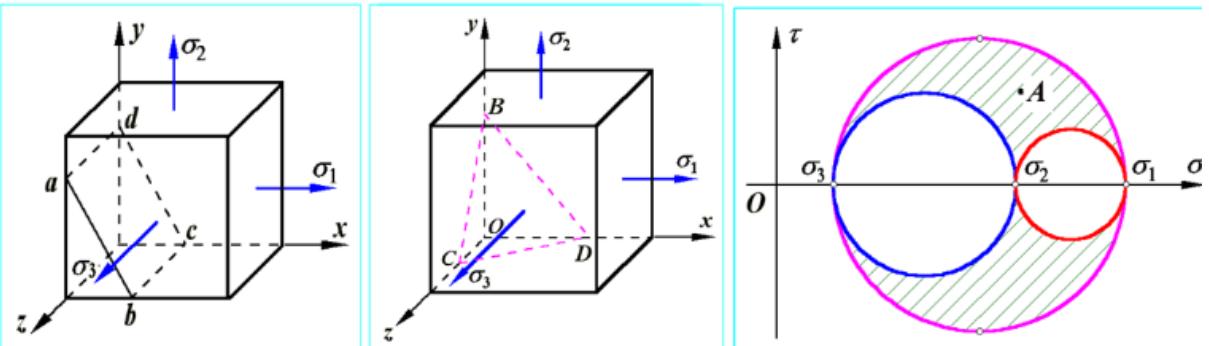
$$\left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

半径为：  $R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$

### • 复杂应力圆：

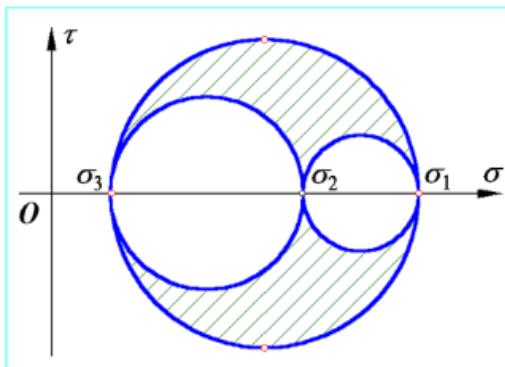
# 复杂应力状态的最大应力

## 三向应 力圆



与任一截面相对应的点，或位于应力圆上，或位于由应力圆所构成的阴影区域内

## 最大切 应力



$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \quad \sigma_{\min} = \sigma_3$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

最大切应力位于与 $\sigma_1$ 及 $\sigma_3$ 均成 $45^\circ$ 的  
截面

- 广义胡克定律 (适用于各向同性材料, 线弹性范围内) :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_x}{G}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

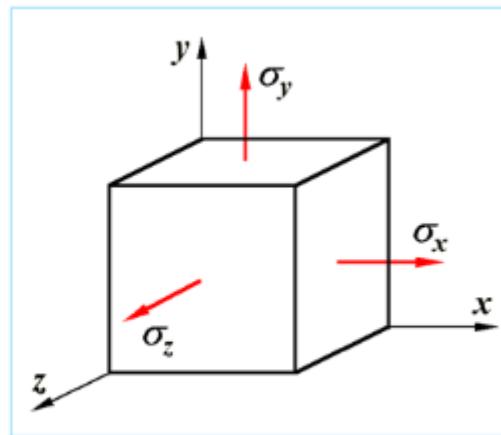
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_1 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]$$

结论：

$$\therefore \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

## 6 复杂应力状态强度问题

- 基本强度条件：

$$\left. \begin{array}{l} (\text{拉压}) \quad \sigma_{\max} = \frac{F_{N,\max}}{A} \leq [\sigma] \\ (\text{弯曲}) \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma] \end{array} \right\} \text{(正应力强度条件)} \quad \sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

$$\left. \begin{array}{l} (\text{弯曲}) \quad \tau_{\max} = \frac{F_s S_z^*}{b I_z} \leq [\tau] \\ (\text{扭转}) \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau] \end{array} \right\} \text{(切应力强度条件)} \quad \tau_{\max} \leq [\tau]$$

- 基本失效：

- 脆性断裂：

(1) **脆性断裂**: 材料无明显的塑性变形即发生断裂, 断面较粗糙, 且多发生在垂直于最大正应力的截面上, 如铸铁受拉、扭, 低温脆断等。

### 关于断裂的强度理论:

- 最大拉应力理论 (第一强度理论)
- 最大拉应变理论 (第二强度理论)

### ○ 塑性屈服:

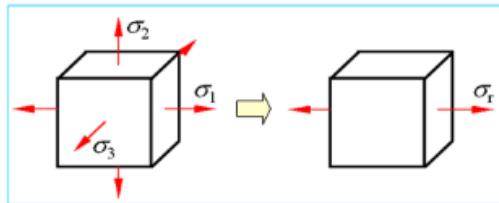
(2) **塑性屈服**: 材料破坏前发生显著的塑性变形, 破坏断面粒子较光滑, 且多发生在最大剪应力面上, 例如低碳钢拉、扭, 铸铁压。

### 关于屈服的强度理论:

- 最大切应力理论 (第三强度理论)
- 畸变能理论 (第四强度理论)

### • 相当应力:

$\sigma_r$  — 相当应力或折算应力



在促使材料破坏或失效方面, 与复杂应力状态  
应力等效的单向应力

### • 强度理论:

#### ○ 第一强度理论/最大拉应力准则:

- 断裂失效条件:

$$\sigma_1 = \sigma_b$$

- 强度条件:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_1 \leq \frac{\sigma_b}{n} = [\sigma]$$

- 局限性: 没有考虑其他两个应力的影响, 且对没有拉应力的状态(如压缩等)也无法适用

#### ○ 第二强度理论/最大拉应变准则:

- 断裂失效条件:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1u} = \frac{\sigma_b}{E}$$

or

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$$

- 强度条件:

$$\sigma_{r,2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

- 第三强度理论/最大切应力准则:

- 屈服失效条件:

$$\begin{aligned}\tau_{max} &= \tau_s \\ or \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= \frac{\sigma_s}{2}\end{aligned}$$

- 强度条件:

$$\sigma_{r,3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

- 安全性较高，机械动力行业常采用第三强度理论

- 第四强度理论/畸变能密度准则:

- 畸变能密度:

$$\nu_d = \frac{1}{6E}(1 + \mu)[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

- 屈服失效条件:

$$\begin{aligned}\nu_d &= \nu_{ds} \\ or \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} &= \sigma_s\end{aligned}$$

- 强度条件:

$$\sigma_{r,4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]$$

- 土建行业常采用第四强度理论

脆性材料	第一强度理论	用于脆性材料的拉伸、扭转。
	第二强度理论	仅用于石料、混凝土等少数材料。
塑性材料	第三强度理论	可进行偏保守（安全）设计。
	第四强度理论	可用于更精确设计，要求对材料强度指标、载荷计算较有把握。

注：无论是塑性材料还是脆性材料，当在三向拉应力相近的情况下，都将以断裂的形式失效，宜采用最大拉应力理论。在三向压应力相近的情况下，都可引起塑性变形，宜采用第三或第四强度理论。

- 单向纯剪切组合：

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

## 7 压杆稳定

- **压杆稳定**：细长的受压杆当压力达到一定值时，受压杆可能突然弯曲而破坏，即产生失稳现象
- **临界载荷**：使压杆直线形式的平衡，开始由稳定转变为不稳定的轴向压力值
- **临界应力**：压杆处于临界状态时横截面上的平均应力

$F < F_{cr}$  压杆在微弯位置不能平衡，要恢复直线

$F > F_{cr}$  压杆微弯位置不能平衡，要继续弯曲

$F = F_{cr}$  压杆在任意微弯位置均可保持平衡

- **欧拉公式**：

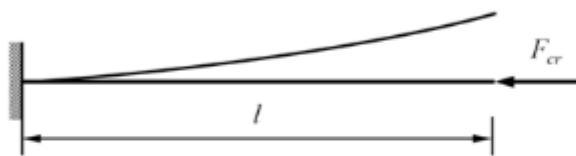
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

$\mu l$  为相当长度,  $\mu$  为长度因数

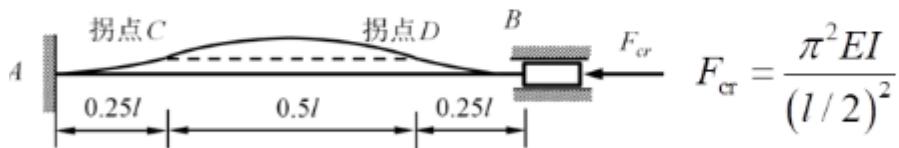
### 矩形截面需要考虑失稳方向性



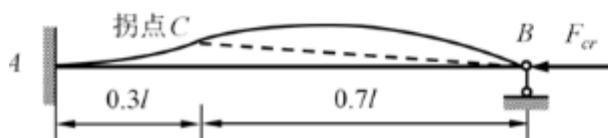
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{两端铰支 } \mu = 1$$



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad \begin{array}{l} \text{一端自由} \\ \text{一端固定} \end{array} \quad \mu = 2$$



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} \quad \text{两端固定 } \mu = \frac{1}{2}$$



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} \quad \begin{array}{l} \text{一端铰支} \\ \text{一端固定} \end{array} \quad \mu = 0.7$$

### • 压杆临界应力:

- 惯性半径:  $i = \sqrt{I/A}$  (圆形截面  $i = \frac{D}{4}$ )

- 柔度/细长比:  $\lambda = \frac{\mu l}{i}$

- 临界柔度:  $\lambda_d = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$

- 临界应力:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\lambda \geq \lambda_p)$$

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \quad (\lambda_s \leq \lambda < \lambda_p)$$

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda^2 \quad (0 < \lambda < \lambda_p)$$

- 杆的分类:

- 第一类杆 (细长杆/**大柔度杆**) 失稳时应力未超过比例极限, 可用欧拉公式计算
- 第二类杆 (**中柔度杆**) 失稳应力超过比例极限, 可用经验公式拟合
- 第三类杆 (粗短杆/**小柔度杆**) 仅需考虑压缩强度, 塑性材料临界应力为屈服极限

- 压杆稳定条件:

- 安全系数法:

$$F \leq \frac{F_{cr}}{n_{st}} = [F_{st}]$$

or

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}} = [\sigma_{st}]$$

- 折减系数法:

$$[\sigma_{st}] = \varphi[\sigma]$$

or

$$\sigma \leq \varphi[\sigma]$$

- 压杆合理设计:

- 合理选用材料: 大柔度杆选高弹性模量, 中柔度杆选择屈服极限和比例极限高的材料, 小柔度杆按强度要求选择材料
- 合理选择截面: 空心结构、材料放在离截面形心较远处等
- 合理安排压杆杆长与约束: 缩短杆长, 减小长度因数