

Superfluid Hydrodynamics

Contents

1 A Prime to Superfluid	1
1.1 Basic Nature	1
1.1.1 玻色-爱因斯坦凝聚	1
1.1.2 费米-狄拉克凝聚	3
1.1.3 超流	4
1.2 Physical Properties	4
2 Laudau Two-Fluid Model	4

1 A Prime to Superfluid

1.1 Basic Nature

1.1.1 玻色-爱因斯坦凝聚

玻色子自旋量子数为整数，满足玻色-爱因斯坦统计，费米子自旋量子数为半整数，满足费米-狄拉克统计。玻色子可以在同一量子态上叠加，而费米子则不能（泡利不相容原理）。因此，玻色-爱因斯坦凝聚和费米-狄拉克凝聚的物理机制不同。以下分别为两种统计的概率分布密度函数：

$$f_{\text{BE}}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} - 1} \quad (1)$$

$$f_{\text{FD}}(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} \quad (2)$$

由简并态数在相空间内的总体积不变，有：

$$h^3 g(E) dE = h^3 g(p) dp = \mathcal{V} 4\pi p^2 dp \quad (3)$$

故

$$g(p) = \frac{\mathcal{V}}{h^3} 4\pi p^2, \quad g(E) = \frac{\mathcal{V}}{h^3} 2\pi (2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

玻色子的激发态粒子数满足（连续分布假设）

$$\begin{aligned} N_e &\sim \int_0^\infty f_{\text{BE}}(E) g(E) dE = \frac{\mathcal{V}}{h^3} 2\pi (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{E^{\frac{1}{2}}}{e^{(E-\mu)/kT} - 1} dE \\ &= \frac{\mathcal{V}}{h^3} 2\pi (2mkT)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{n=0}^\infty \frac{\exp(n\mu/kT)}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (5)$$

当 $\mu \leq 0$ 有收敛解，且 $\mu = 0$ 存在临界值：

$$N_c = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \mathcal{V}}{h^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \sim T^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

因此当温度降低时，该临界值也会降低，当 $N > N_c$ 时，激发态粒子数不再随温度降低而增加，剩余的粒子只能进入基态，形成**玻色-爱因斯坦凝聚**。

为了方便表述，我们还可以定义一个临界温度：

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k} \left(\frac{N}{\zeta(\frac{3}{2}) \mathcal{V}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

故

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad T < T_c \quad (8)$$

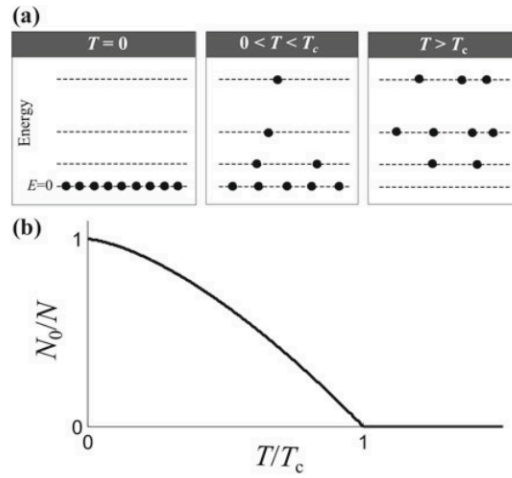


图 1: **玻色-爱因斯坦凝聚**基态粒子数随温度变化的关系图

通过以上推导得知，当温度降低至临界温度 T_c 以下时，玻色子会逐步从激发态汇聚至基态。特别的，在球对称谐振子势阱中，随着温度降低，密度分布会从满足玻尔兹曼分布的平坦分布逐步变为中心集中的分布，最终在 $T = 0$ 时，所有玻色子都处于基态。

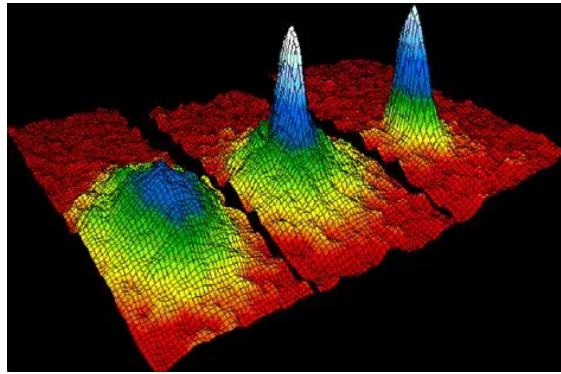


图 2: 著名的**玻色-爱因斯坦凝聚**验证实验结果示意图

显然，玻色-爱因斯坦凝聚的形成需要足够大的粒子数密度和足够低的温度，有趣的是，当满足前一个条件时，恰好满足玻色子物质波的波长大于其自身距离的尺度，即玻色子物质波会发生如下的叠加：

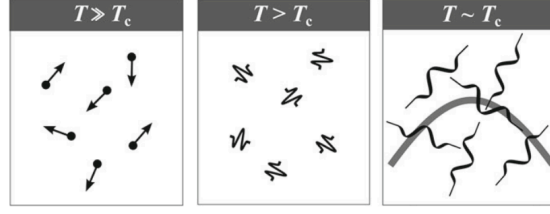


图 3: 波色-爱因斯坦凝聚的物质波叠加示意图

由于内能和压力来自于激发态粒子数目的贡献，因此波色-爱因斯坦凝聚态的内能和压力随着温度降低而降低，且在 $T = 0$ 时，内能和压力均为零。对于热容则有：

$$C_V = \begin{cases} 1.93NkT^{\frac{3}{2}}, & T < T_c \\ \frac{3}{2}NkT, & T \gg T_c \end{cases} \quad (9)$$

该曲线在 $T = T_c$ 处有一个一阶导数不连续的拐点，也可以说明**理想波色系统**中的波色-爱因斯坦凝聚可视为**三级相变**：

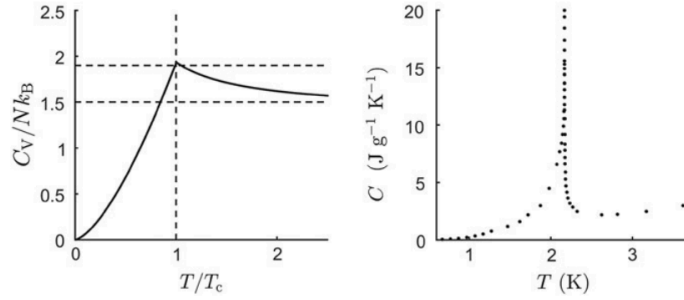


图 4: 波色-爱因斯坦凝聚热容随温度变化曲线及液氦热容实验结果对比

而对于 ^4He 的实验结果对此进行了验证，但其热容曲线在 $T = T_c$ 并不连续，说明其相变为**二级相变**，且实验得出的临界温度和计算结果略有不同，因此氦的相变并非简单的波色-爱因斯坦凝聚，由于其粒子间存在较强相互作用，需要更复杂的理论进行解释。

1.1.2 费米-狄拉克凝聚

由于受泡利不相容原理的制约，费米子不能在同一量子态上叠加，因此费米-狄拉克凝聚的形成需要满足更严格的条件。在 $T = 0$ 时，费米-狄拉克统计的概率分布密度函数满足阶跃函数分布：

$$f_{\text{FD}}(E) = \begin{cases} 1, & E \leq E_F \\ 0, & E > E_F \end{cases} \quad (10)$$

其中 E_F 为**费米能级**(Fermi Energy)。由此计算费米狄拉克凝聚的总粒子数为：

$$N = \int_0^\infty f_{\text{FD}}(E)g(E) dE = \frac{4\pi\mathcal{V}}{3h^3}(2mE_F)^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

由此可得费米能级为

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{h^2}{2m} (6\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

费米-狄拉克凝聚保证了零温下不是所有费米子都能处于基态，因此零温下具有简并的内能和压力。

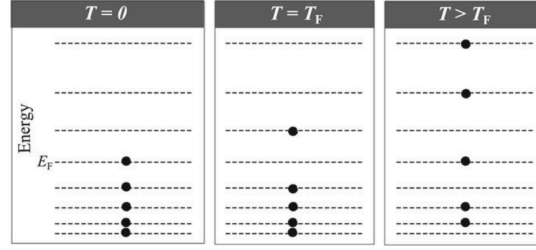


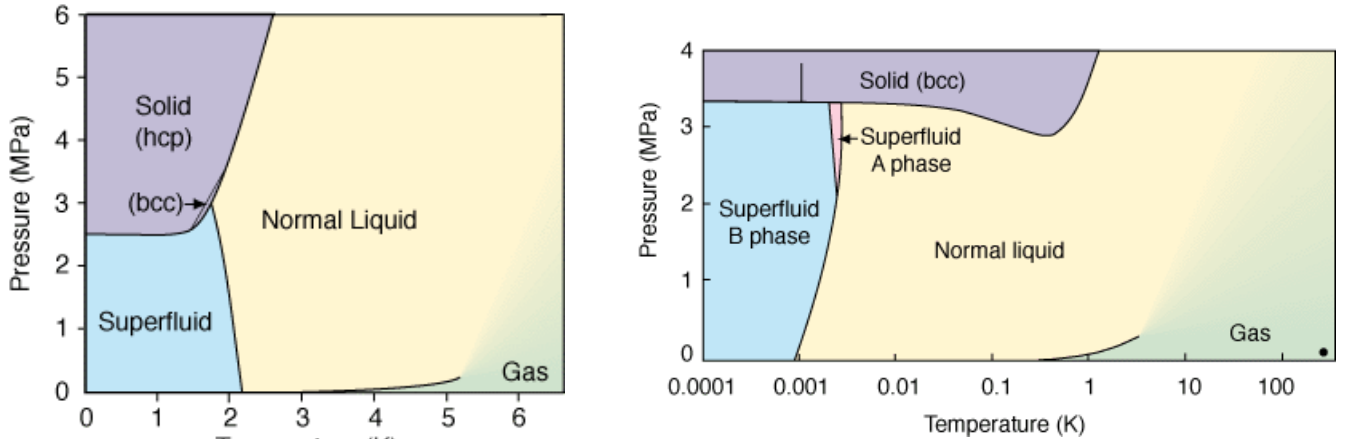
图 5: 费米-狄拉克凝聚基态粒子数随温度变化的关系图

另外我们还可以定义费米温度 $T_F = E_F/k = \hbar^2/(2mk)(6\pi^2n)^{2/3}$, 当温度逐渐从零温升高, 费米子会向上跃迁, 在 T_F 附近, 只有靠近费米能级的粒子会跃迁出费米能级, 而当 $T \gg T_F$ 时, 大部分粒子会跃迁出费米能级, 费米-狄拉克凝聚的特性逐渐消失, 粒子分布倾向变为玻尔兹曼分布。当费米系统处于球对称谐振子势阱中时, 会有类似波色-爱因斯坦凝聚的现象, 但因为简并压力的存在, 形成费米-狄拉克凝聚时其峰值域会更宽。

1.1.3 超流

超流 (Superfluidity) 可视为一种相变。由于 ^4He 是玻色子, ^3He 是费米子, 很容易联想到两种凝聚态:**波色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein Condensation)** 和**费米-狄拉克凝聚 (Fermi-Dirac Condensation)**, 不过两种凝聚主要用于表示**量子气体**的相变行为, 而对于**量子液体**组成的波色/费米系统 (即存在较强粒子间相互作用), 则分别需要独立的超流相变理论解释。

超流氦 (Superfluid Helium) 是著名的展现宏观超流性的物质。 ^4He 有两种液相: He I 和 He II, He I 为正常液相, He II 为超流相, 也被称为超流氦。超流性一词源于苏联物理学家卡皮查 (Kapitza) 的实验——超流氦能够在极小狭缝中流动 (regardless of viscosity), 故类比超导 (regardless of resistance) 命名; 同时超流氦还具有超高的导热能力, 导热系数为铜的 10^6 倍。另外 ^3He 也存在超流转变, 且存在 $^3\text{He A}$ 、 $^3\text{He B}$ 两种超流相。

图 6: ^4He 和 ^3He 相图

1.2 Physical Properties

- <https://www.mas.ncl.ac.uk/helium/>
- <https://htess.com/hepak/>

2 Landau Two-Fluid Model