计算物理第十二周作业

随机厄密实对称矩阵的特征值分布

对于 2×2 随机厄密实对称矩阵，验证特征值分布满足

$$B\left|\lambda_i-\lambda_j\right|^{\alpha}e^{-A\sum_i\lambda_i^2}$$

经过查询资料，对于任意维的随机厄密实对称矩阵的特征值分布为

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\prod_{j}^{n}\frac{\mathrm{Gamma}[1+\frac{\beta}{2}]}{\mathrm{Gamma}[1+\frac{\beta j}{2}]}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j}^{i-1}\mathrm{Abs}[\lambda_i-\lambda_j]^{\beta}\right)\mathrm{Exp}[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{\lambda_i}^2]$$

通过程序上述概率密度分布，然后拟合这个分布。尝试了不同的β值，发现当$\beta=1$时，理论结果和拟合结果的符合度为 0.7236909064901735，符合得还是很好的。当$\beta=1$时，得到 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$，$\alpha=1$。最终的特征值分布为 $P(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{|\lambda_1-\lambda_2|}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}$。

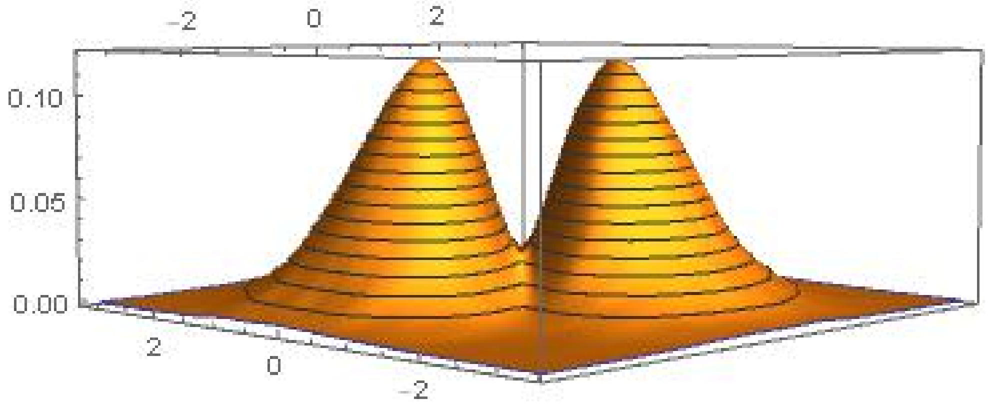

图 1 理论结果

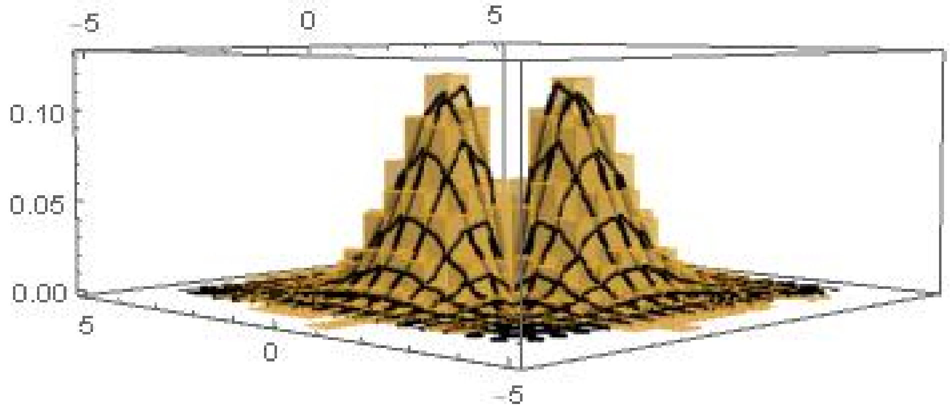

图 2 拟合结果

同样地，对于 3×3 随机厄密实对称矩阵，当$\beta=1$时，理论结果和拟合结果的符合度为 0.949565467935745，其特征值分布为

$$\frac{1}{6\sqrt{2}\pi}|\lambda_2-\lambda_1||\lambda_3-\lambda_1||\lambda_3-\lambda_2|e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)}$$

随机厄密复对称矩阵的特征值分布

对于 2×2 随机厄密复对称矩阵，验证特征值分布满足

$$B\left|\lambda_i-\lambda_j\right|^{\alpha}e^{-A\sum_i\lambda_i^2}$$

经过查询资料，对于任意维的随机厄密复对称矩阵的特征值分布为

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\prod_j^n\frac{\text{Gamma}[1+\frac{\beta}{2}]}{\text{Gamma}[1+\frac{\beta j}{2}]}\right)\left(\prod_{i=1}^n\prod_j^{i-1}\text{Abs}[\lambda_i-\lambda_j]^{\beta}\right)\text{Exp}[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n{\lambda_i}^2]$$

通过程序上述概率密度分布，然后拟合这个分布。尝试了不同的β值，发现当$\beta=2$ 时，理论结果和拟合结果的符合度为 0.7309640679421325，符合得还是很好的。当$\beta=2$ 时，得到 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{4\pi}$，$\alpha=2$。最终的特征值分布为

$$P(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{4\pi}|\lambda_1-\lambda_2|^2e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}$$

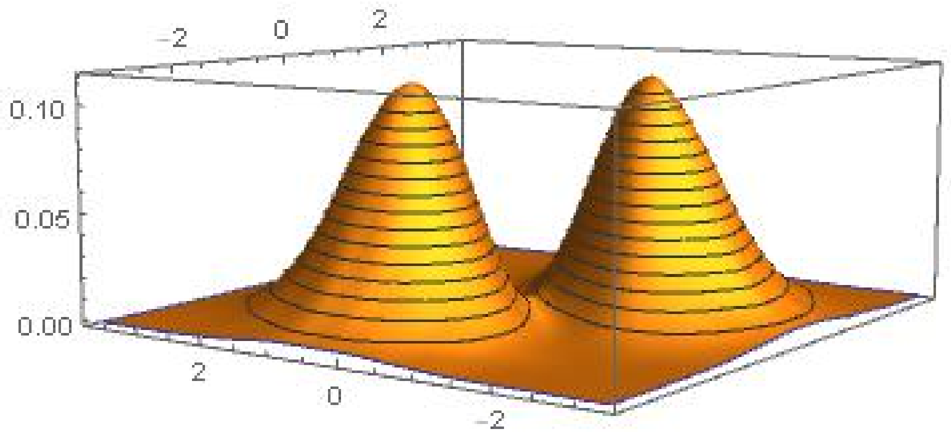

图 3 理论结果

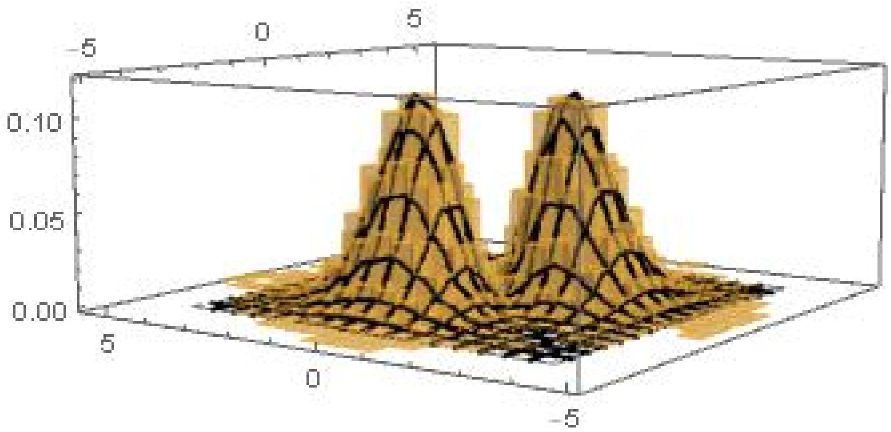

图 4 模拟结果

同样地，对于 3×3 随机厄密实对称矩阵，当$\beta=1,2$时，理论结果和拟合结果的符合度为 0，当$\beta=3$时，没能得到符合度，特征值分布为

$$P(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{630\sqrt{2}\pi}|\lambda_1-\lambda_2|^3|\lambda_3-\lambda_2|^3|\lambda_1-\lambda_3|^3e^{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)}$$

1000×1000 的随机矩阵

特征值间距的分布满足$|\Delta|^{\alpha}e^{-\beta\Delta^2}$

对于满足高斯酉矩阵分布的随机矩阵，其特征值间距 x 分布$\propto\frac{32}{\pi^2}x^2e^{-\frac{4}{\pi}x^2}$，可求得，$\alpha=2,\beta=\frac{4}{\pi}$

对于满足高斯正交矩阵分布的随机矩阵，其特征值间距 x 分布$\propto\frac{\pi}{2}xe^{-\frac{\pi}{4}x^2}$，可求得，$\alpha=1,\beta=\frac{\pi}{4}$

对于满足高斯正交矩阵分布的随机矩阵，其特征值间距 x 分布$\propto\left(\frac{64}{9\pi}\right)^3x^4e^{-\frac{64}{9\pi}x^2}$，可求得，$\alpha=4,\beta=\frac{64}{9\pi}$（未模拟出来）

发现，模拟结果与理论结果趋势一致，但有一定的差别，

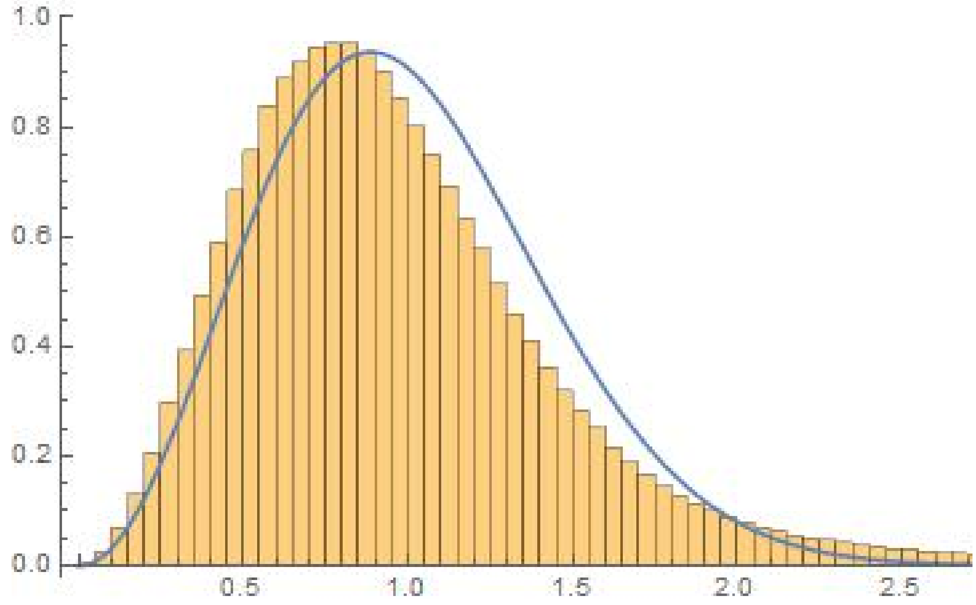

图 5 高斯酉矩阵的理论结果（曲线）和模拟结果（直方图）

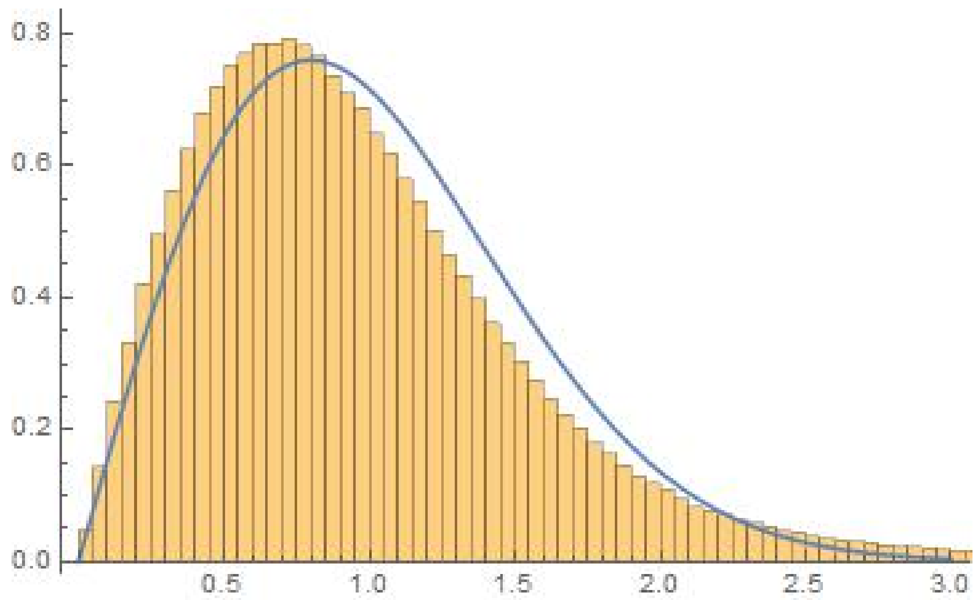

图 6 高斯正交矩阵的理论结果（曲线）和模拟结果（直方图）

用 2×2 的随机矩阵模拟发现符合得很好，

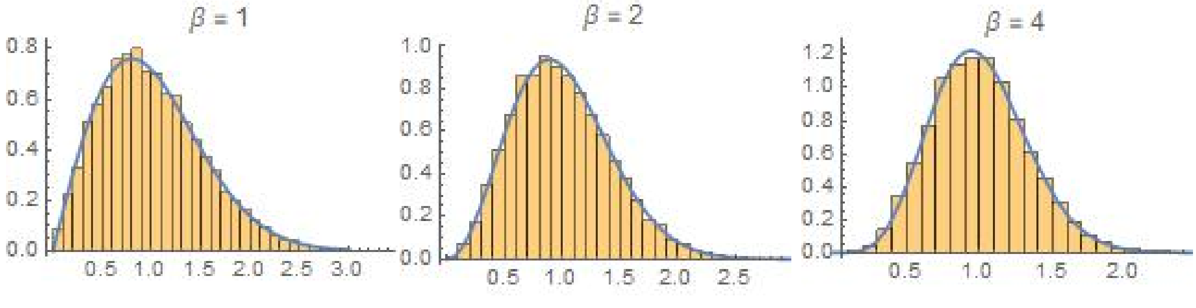

图 7 2×2 的随机矩阵的结果：高斯正交矩阵分布、高斯酉矩阵分布、高斯辛矩阵分布

特征值的最大值分布（没有做归一化处理）

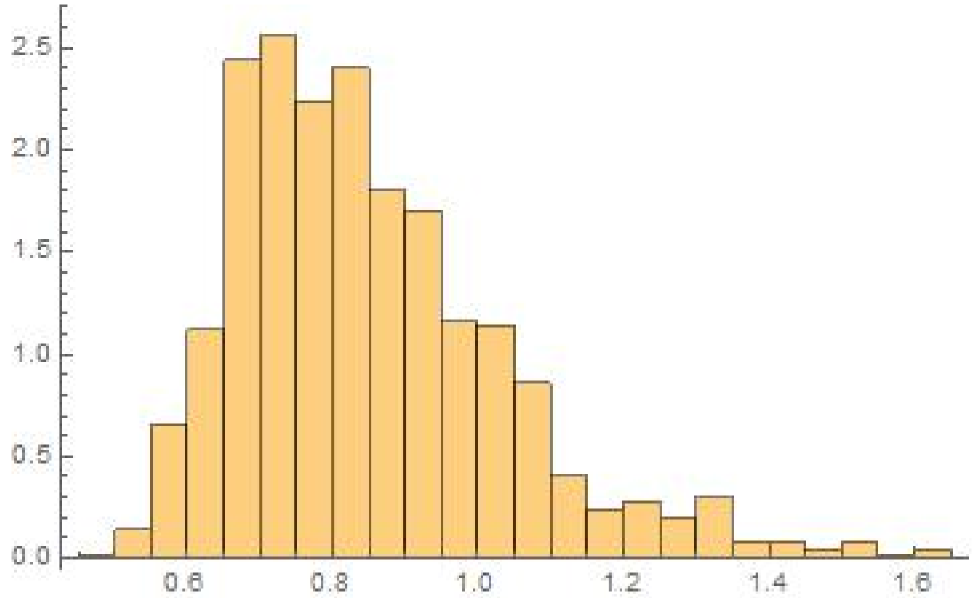

图 8 高斯西矩阵的特征值最大值的分布

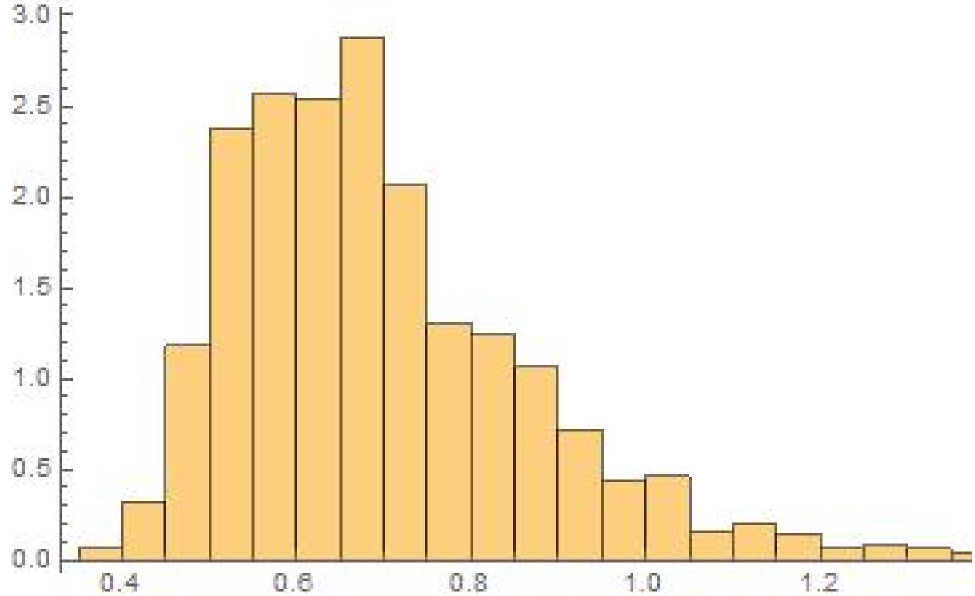

图 9 高斯正交矩阵的特征值最大值分布

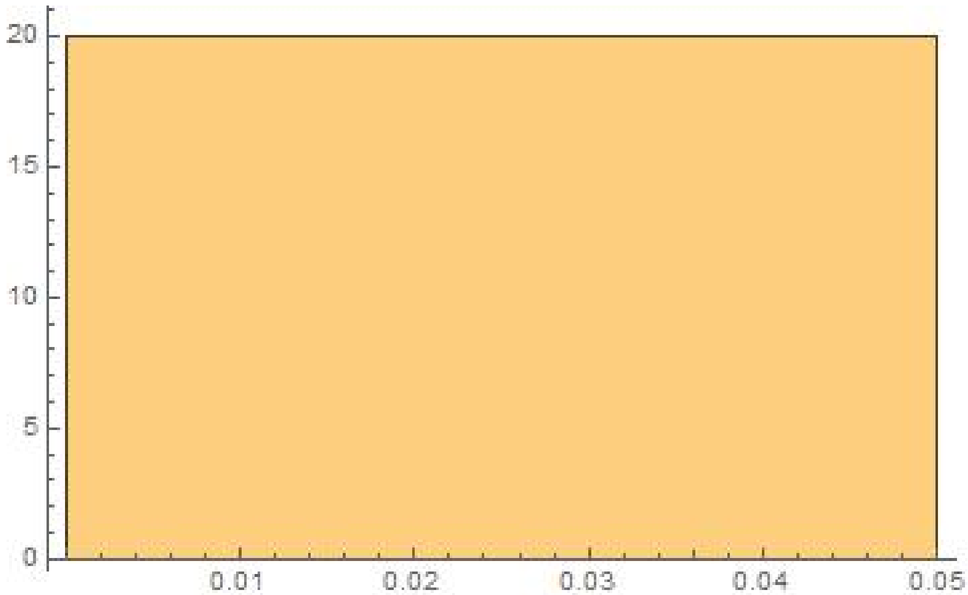

图 10 高斯辛矩阵的特征值最大值的分布：结果应该是错误的，但不知道错在哪里

对于高斯酉矩阵和高斯正交矩阵，特征值最大值所满足的分布应该$\propto x^{\alpha}e^{-\beta x^{\gamma}}$，只是我没能拟合出$\alpha,\beta,\gamma$

对最大值进行处理，可以发现满足 TW 分布

对于高斯酉矩阵，如果对特征值最大值做如下处理（x 是高斯酉矩阵），

$$(\text{Max}[\text{Eigenvalues}[x]] - \text{Sqrt}[4.n])n\text{\^{}}(\ 1./6\ )$$

可以得到其满足 TW 分布

$$\text{TracyWidomDistribution}[2]$$

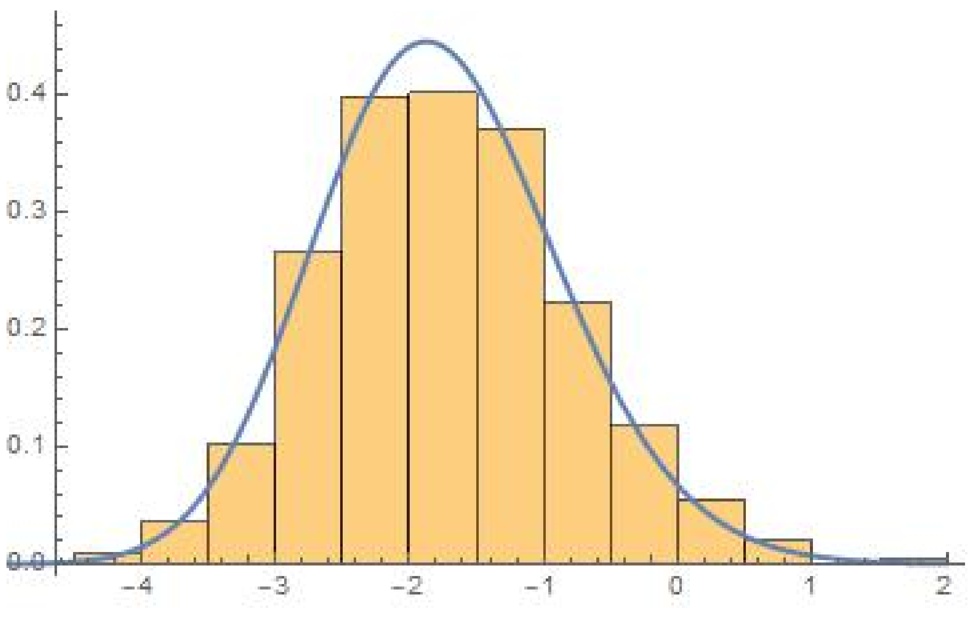

Figure 11 **高斯酉矩阵的特征值最大值处理后满足 TW 分布**

对于高斯正交矩阵，如果对特征值最大值做如下处理（x 是高斯正交矩阵），

$$(\mathrm{Max}[\mathrm{Eigenvalues}[x]]-\mathrm{Sqrt}[2n])\mathrm{Sqrt}[2]n^\wedge(1./6)$$

可以得到其满足 TW 分布

$$\mathrm{TracyWidomDistribution}[1]$$

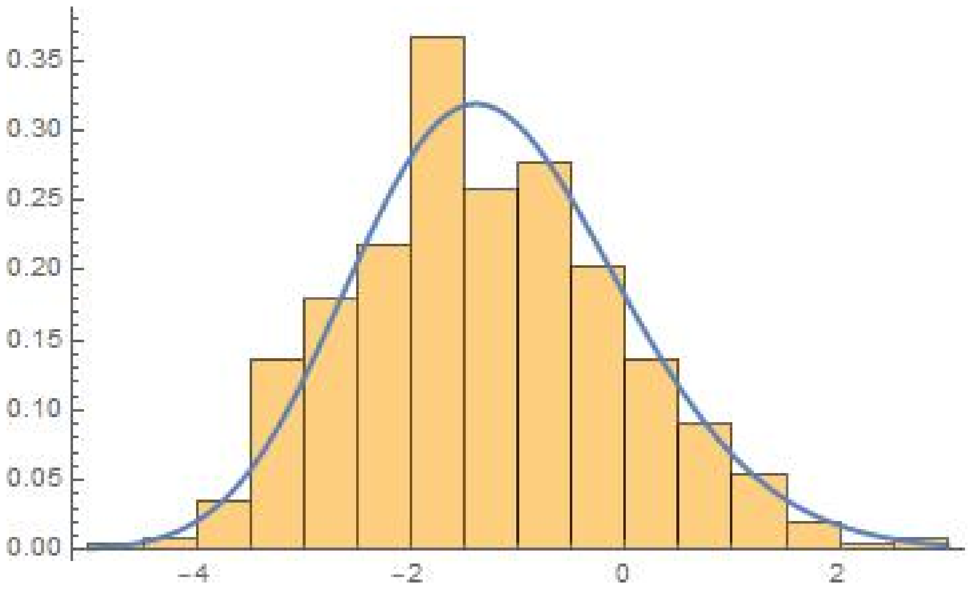

Figure 12 **高斯正交矩阵特征值最大值处理后满足** TW **分布**

对于高斯辛矩阵，如果对特征值最大值做如下处理（x 是高斯辛矩阵），

$$(\mathrm{Max}[\mathrm{Eigenvalues}[x]]-2\mathrm{Sqrt}[2n])(n/4)^\wedge(1./6)$$

可以得到其满足 TW 分布

$$\mathrm{TracyWidomDistribution}[4]$$

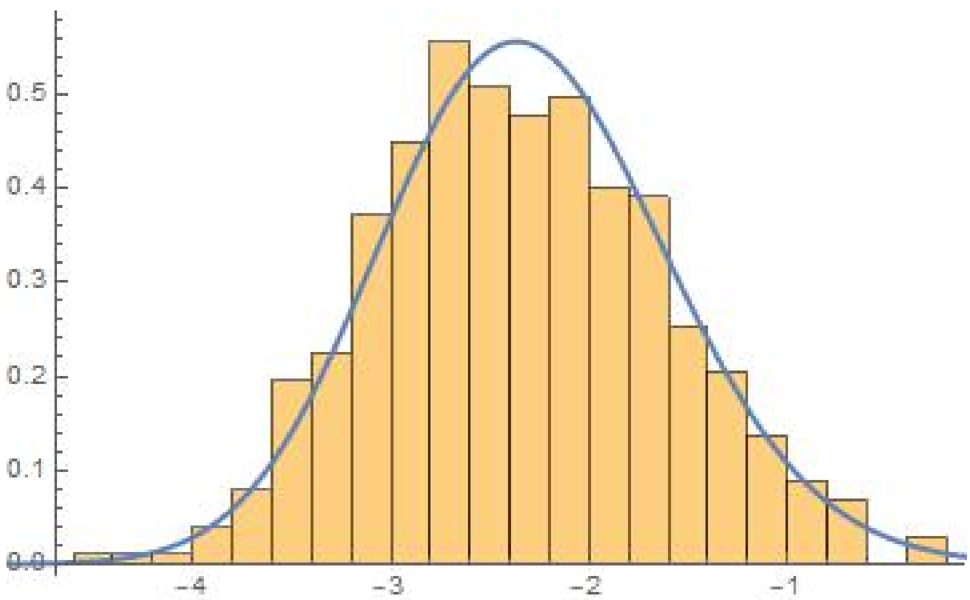

Figure 13 **高斯辛矩阵特征值最大值处理后满足** TW **分布**