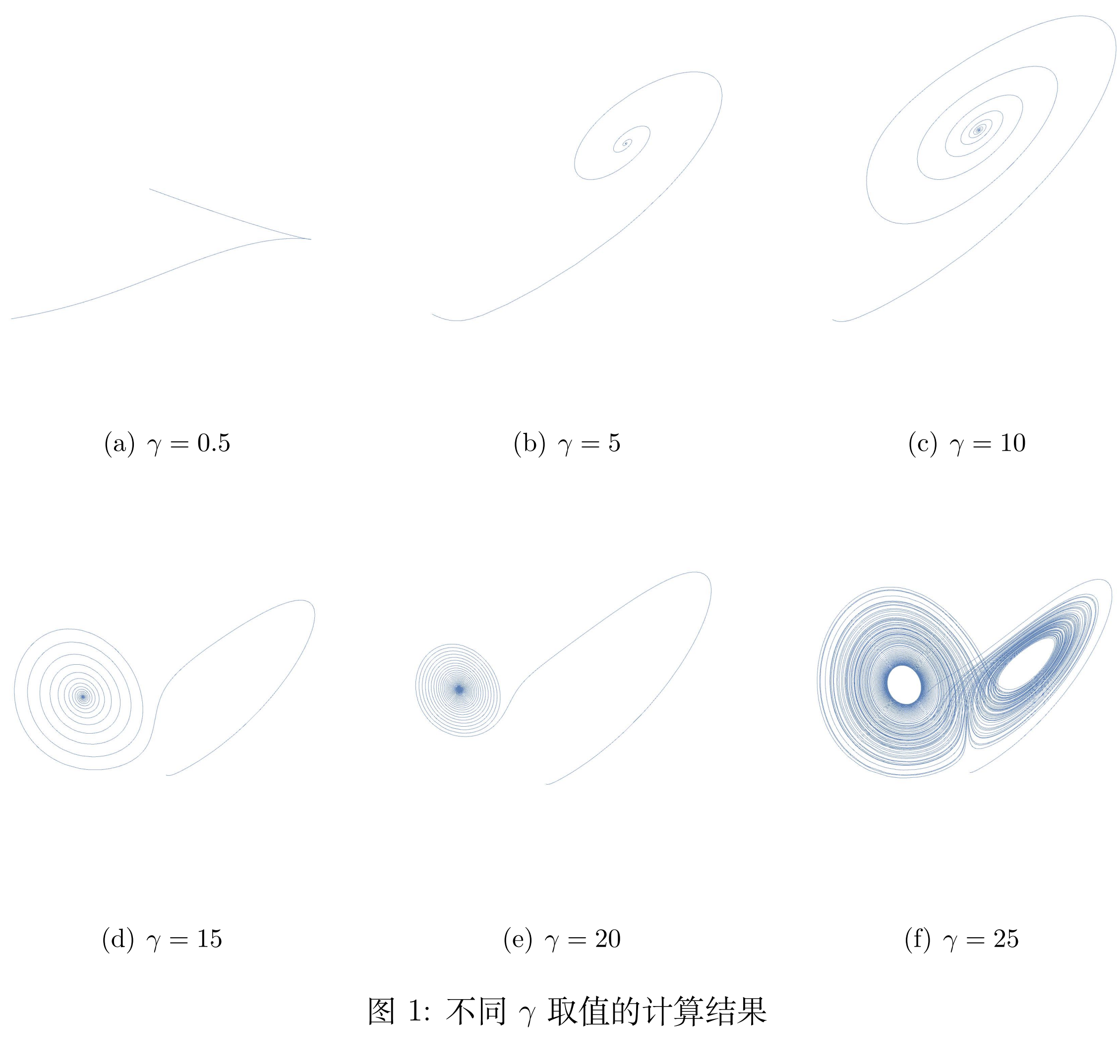
Homework 5

1. 画出 Lorenz 方程的轨迹。

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \gamma x - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

取 $\sigma = 10$，$b = 8/3$，首先讨论 γ 的各种取值情形下的方程解，见图 1



(a) $\gamma = 0.5$ (b) $\gamma = 5$ (c) $\gamma = 10$

(d) $\gamma = 15$ (e) $\gamma = 20$ (f) $\gamma = 25$

图 1: 不同 γ 取值的计算结果

可以看出，当 $\gamma < 1$ 时，体系不存在吸引子；γ 增大后，吸引子出现，并持续收缩；$\gamma > 24.74$ 时，体系在两个吸引子间不断运动。

下面观察初值对体系运动的影响。取 $\sigma = 10$，$\gamma = 28$，$b = 8/3$，结果如图 2 所示，

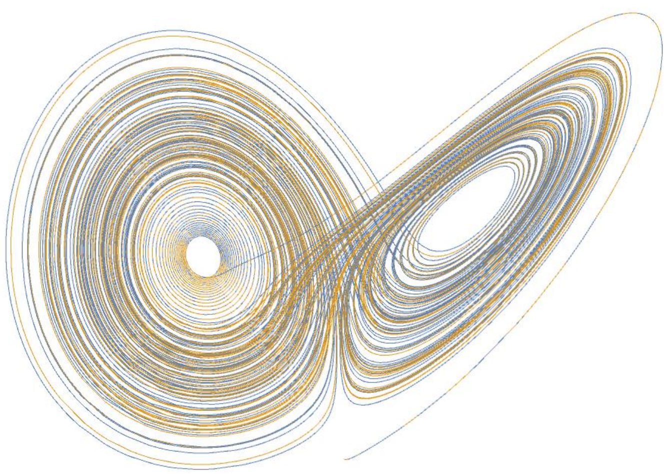


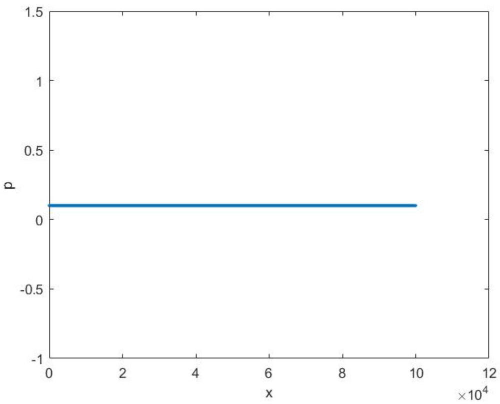
图 2: 不同初值条件对运动的影响

显然，两种情况下的轨迹在一开始十分接近，但越到后面，轨迹差距越来越明显，这体现了 Lorenz 体系的混沌性。

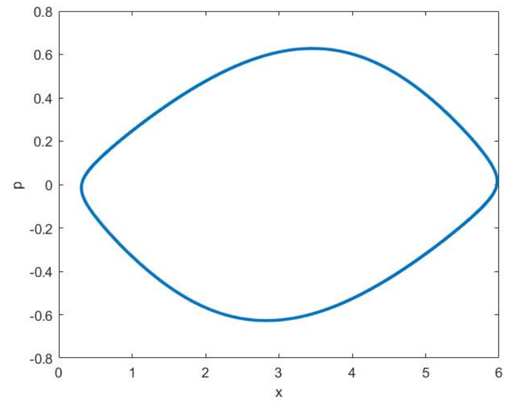
2. Kicked rotor model 讨论。

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \sin(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \end{cases}$$

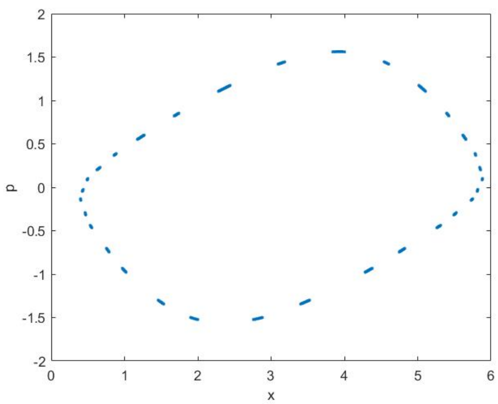
取 $x_0 = 0.5$，$p_0 = 0.1$，计算结果如图 3 所示，



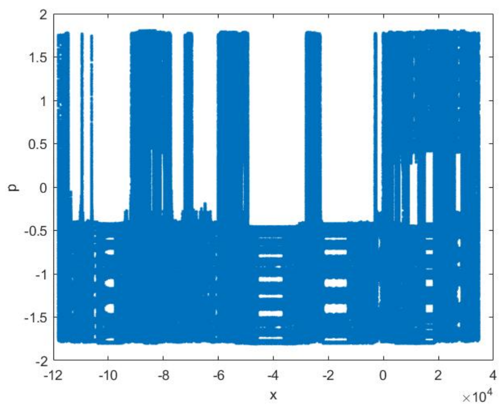
(a) $k=0$



(b) $k=0.1$



(c) $k=0.6$



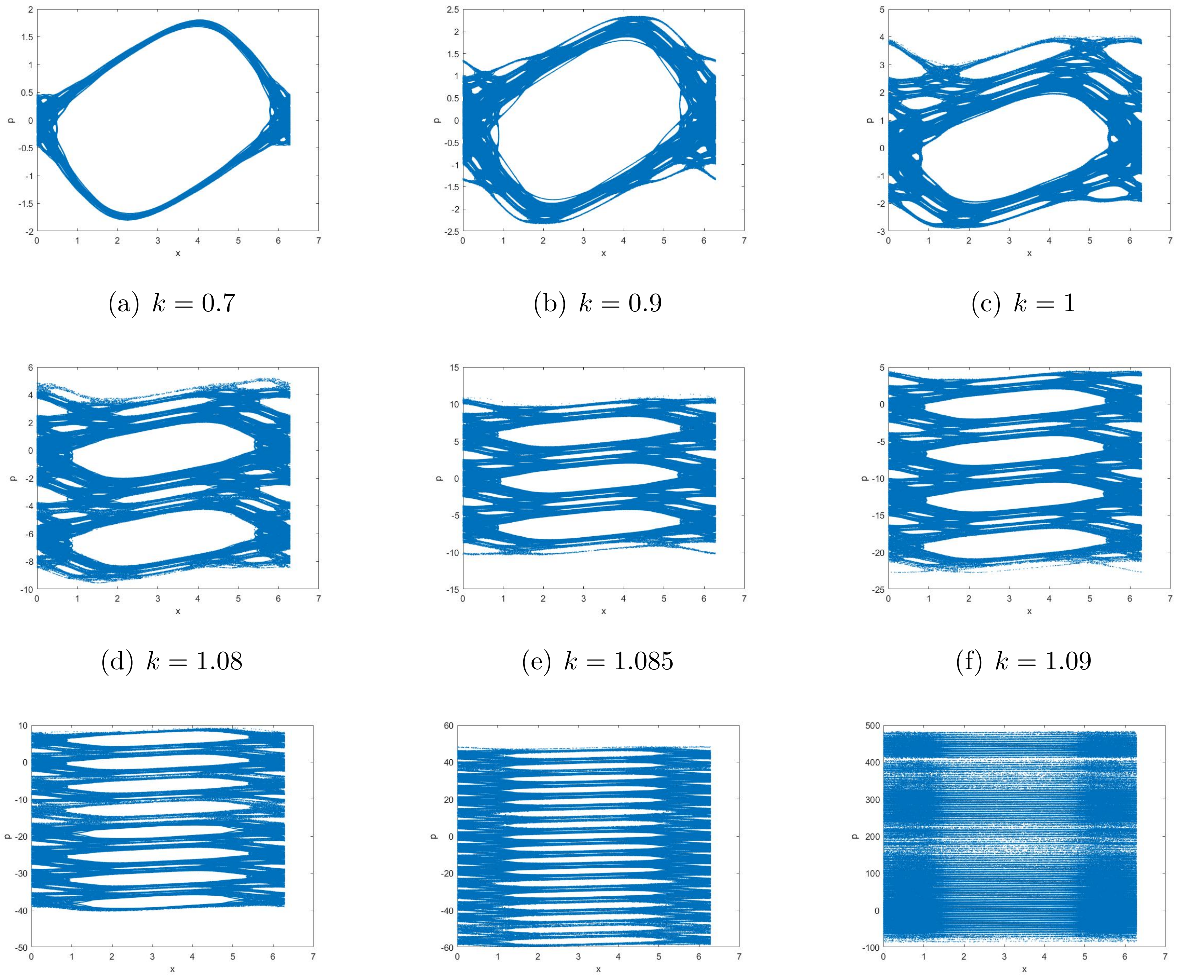
(d) $k=0.7$

图 3: 不同 k 取值的计算结果

感觉最后一张图比较奇怪，于是我在 wiki 上搜索了一些相关内容，将所有的 x_n 对 2π 取模，即

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \sin(x_n) \\ x_{n+1} = (x_n + p_{n+1}) \mod 2\pi \end{cases}$$

继续进行计算，结果见图 4



(a) $k = 0.7$ (b) $k = 0.9$ (c) $k = 1$

(d) $k = 1.08$ (e) $k = 1.085$ (f) $k = 1.09$

(g) $k = 1.1$ (h) $k = 1.2$ (i) $k = 1.5$

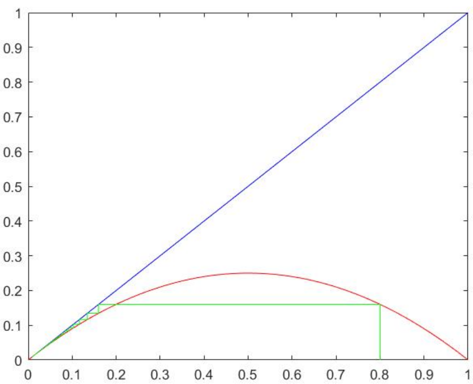
图 4: 不同 k 取值的计算结果

$k = 0$ 时，体系不受外力，保持自由转动；当 k 值较小时，每一次外界的扰动，都会使得 p_n 增加 $k\sin(x_n)$，x_n 增加 p_{n+1}，但体系运动的轨道仍然保持旋转不变性；当 k 增大到 0.6 时，相轨道发生变化，表明混沌现象即将开始发生；$k = 0.7$，轨道不再稳定；k 继续增大，相空间的混沌区域也随之扩张，代表周期性运动的空白区域越来越少；直到 $k = 1.5$，相空间几乎完全变得混沌了。

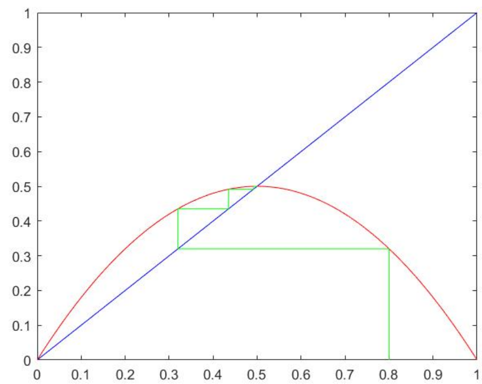
3. logistic map 分叉现象，计算。

$$x_{n+1} = \gamma x_n(1 - x_n)$$

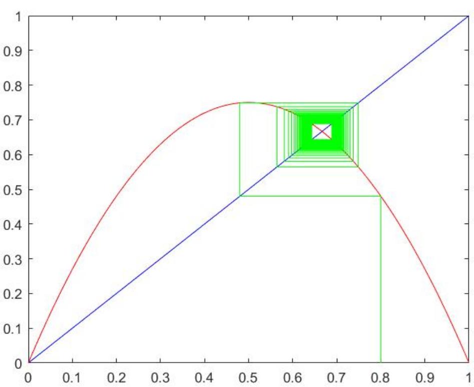
首先观察一下迭代寻找不动点的过程。不妨选取初值 $x_0 = 0.8$，迭代 100 次，结果见图 5。



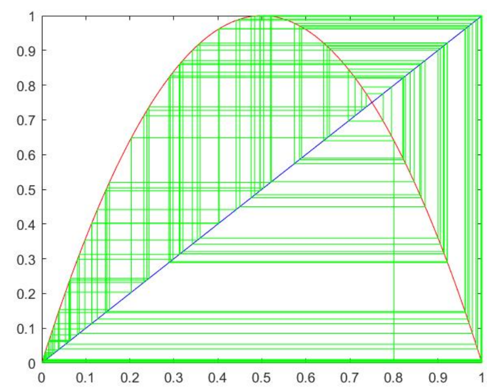
(a) $\gamma = 1$



(b) $\gamma = 2$



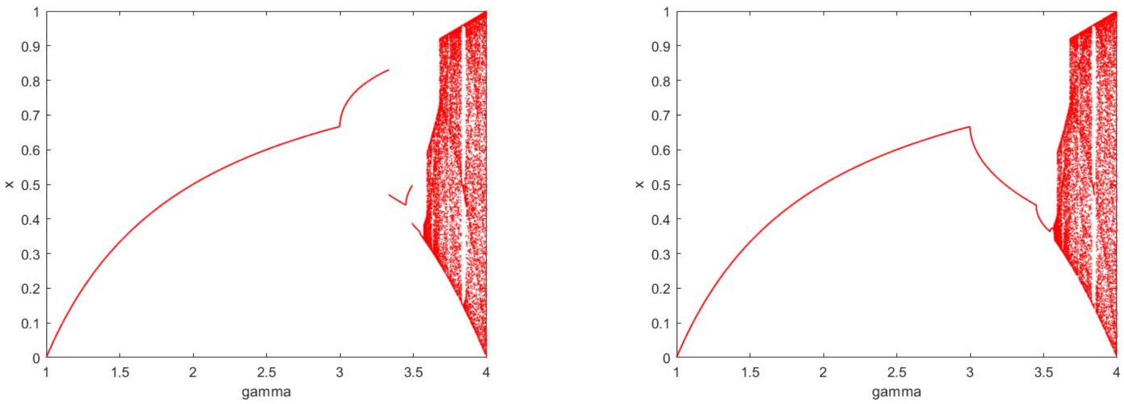
(c) $\gamma = 3$



(d) $\gamma = 4$

图 5: 不同 γ 取值的迭代过程

可以看出前三幅图对应的 γ 取值，最终可以迭代得到不动点，而 $\gamma = 4$ 时却不能。接下来考察不动点 x_n 与 γ 间的关系，γ 在 $[1, 4]$ 范围内取值，绘图如图 6(a) 所示。



(a) $x_0 = 0.1$

(b) $x_0 = 0.8$

图 6: 不同 x_0 选择下的 Logistic Map

如图 6(b) 所示，同样可以画出初值 $x_0 = 0.8$ 时的计算结果。由此可见，为画出完整的 Logistic Map，需令 x_0 取遍 $(0, 1)$ 内的所有值，结果见图 7。

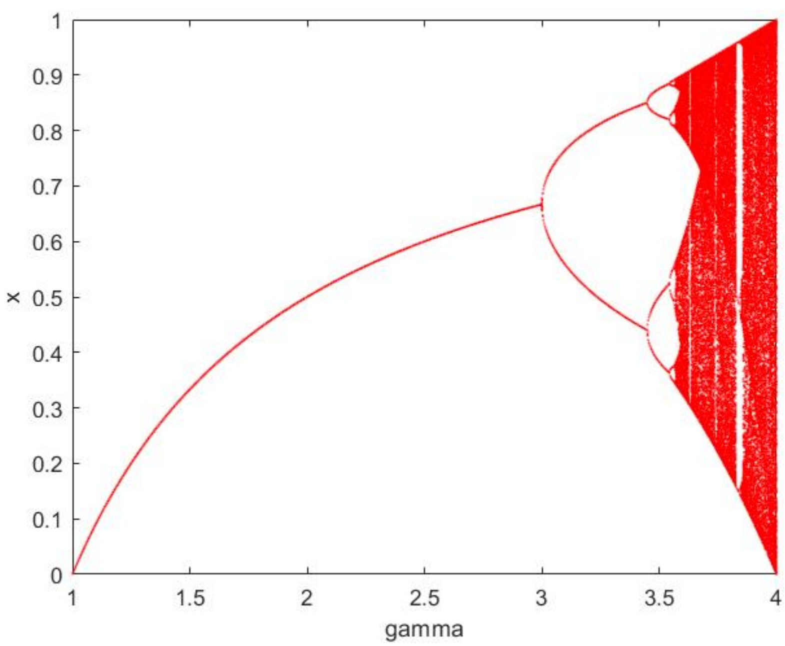


图 7: Logistic Map

将上图的后半部分放大观察，如图 8 所示，

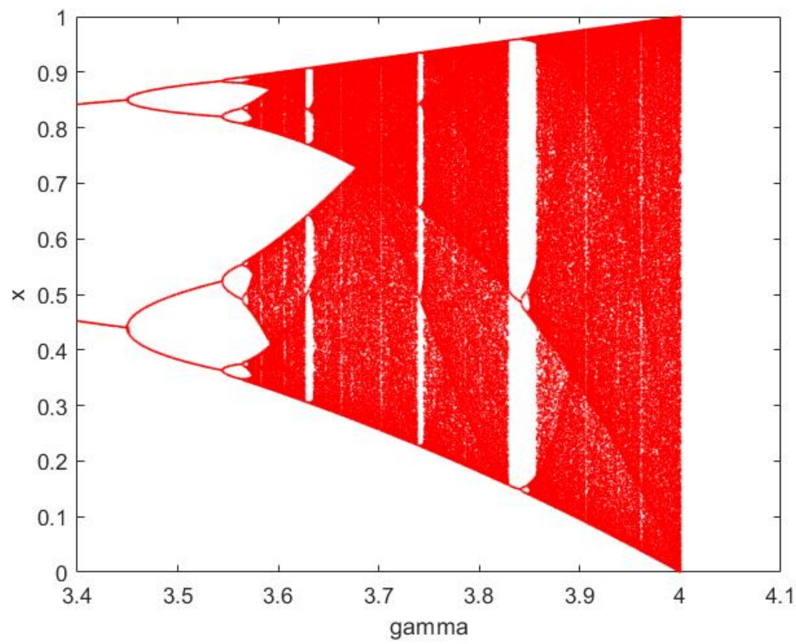


图 8: Logistic Map, $\gamma \in (3.4, 4)$

可以看出，在 γ 取值超过某个临界值 $\gamma_C \approx 3.55$ 时，不动点不再存在，体系进入混沌状态，与图 3 得到的结果相一致。