徐巍　　SA21004027　　粒子物理与原子核物理

Problem1

$x_1,\ldots,x_n$，n **个随机数，从小到大排列，计算：**

$$\Delta = \max(x_{i+1} - x_i)$$

证明 Δ 分布是 Trary-Widom 分布，且和 x_i 的分布无关。

解：

1、解题思路：

（1）利用 MATLAB 生成 1000 服从某种分布的的随机数

（2）对这一 1000 个随机数按升序排序

（3）找出排序后相邻两数差的最大值，并记录

（4）重数前面 3 步 1000000 次

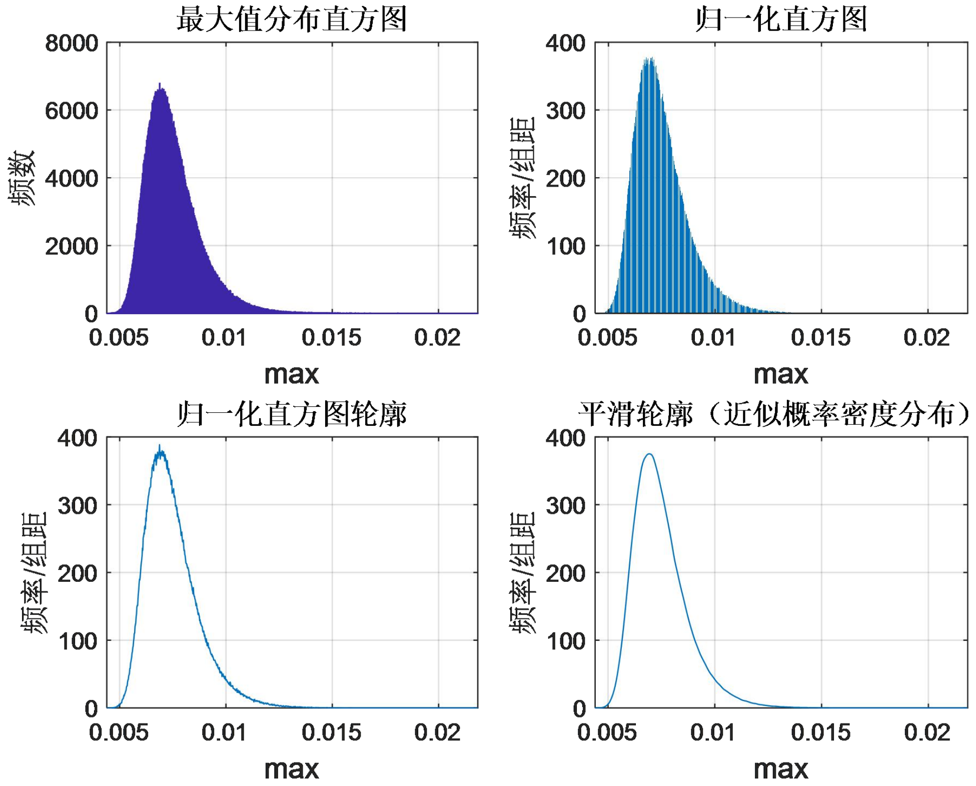
（5）将得到的所有最大值作直方图，分段数设定为 1000

（6）将直方图归一化

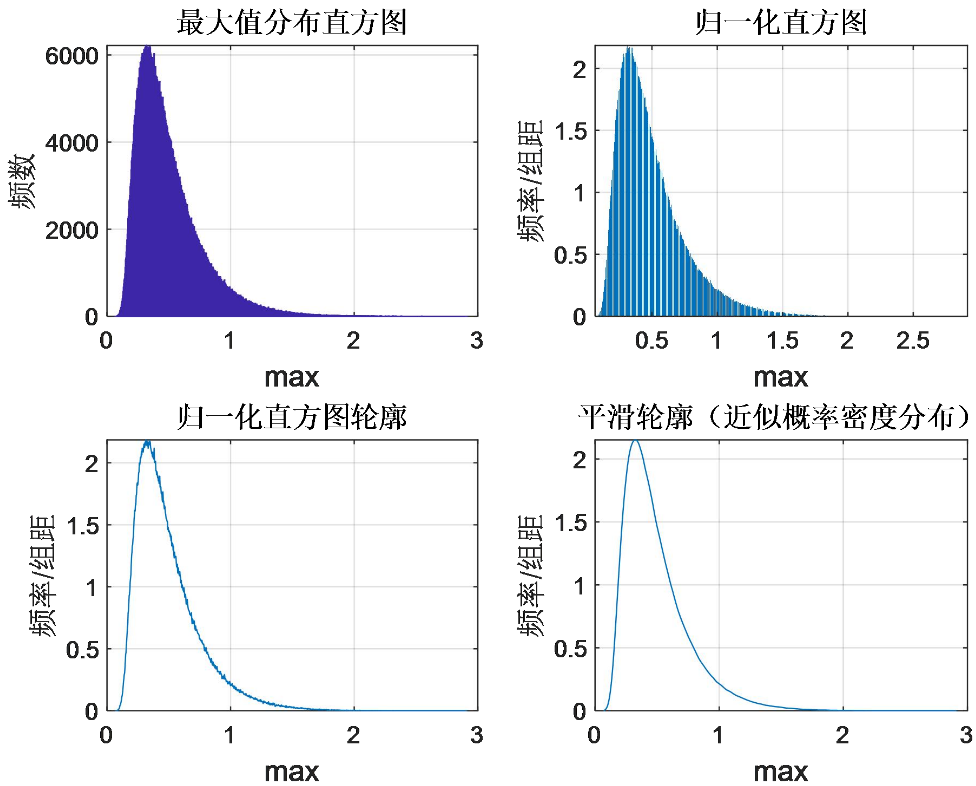
（7）分析输出图形

2、各种分布下的计算结果：（代码见附件：yanzheng_TWD111.m）

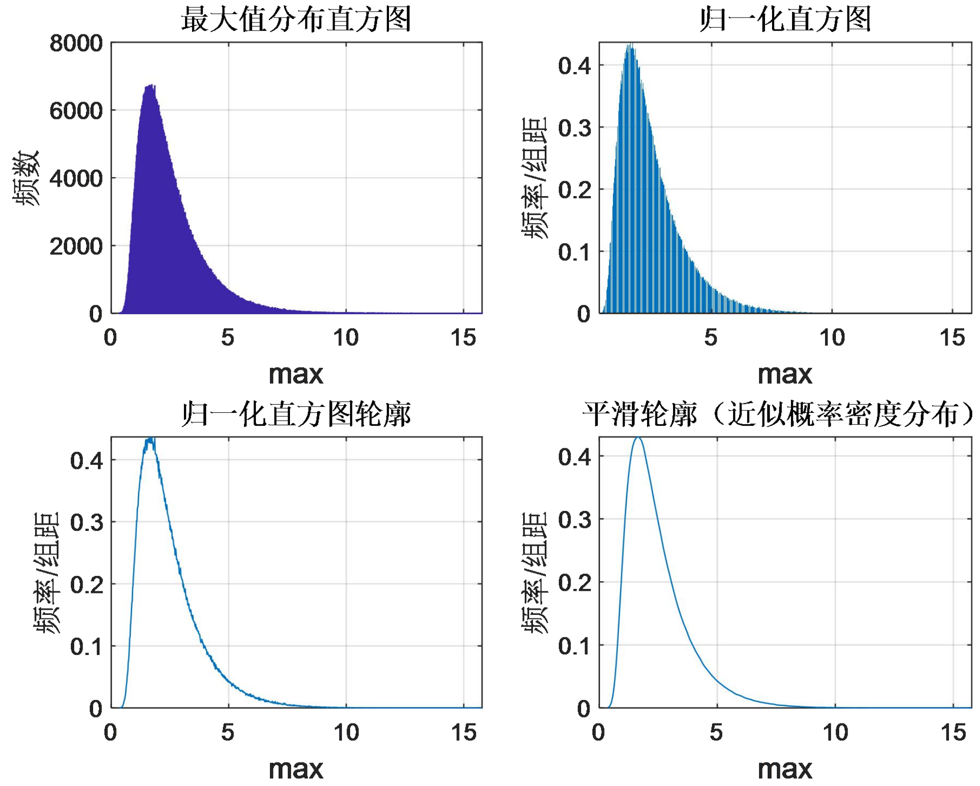
（1）取值范围为 0~1 的均匀分布



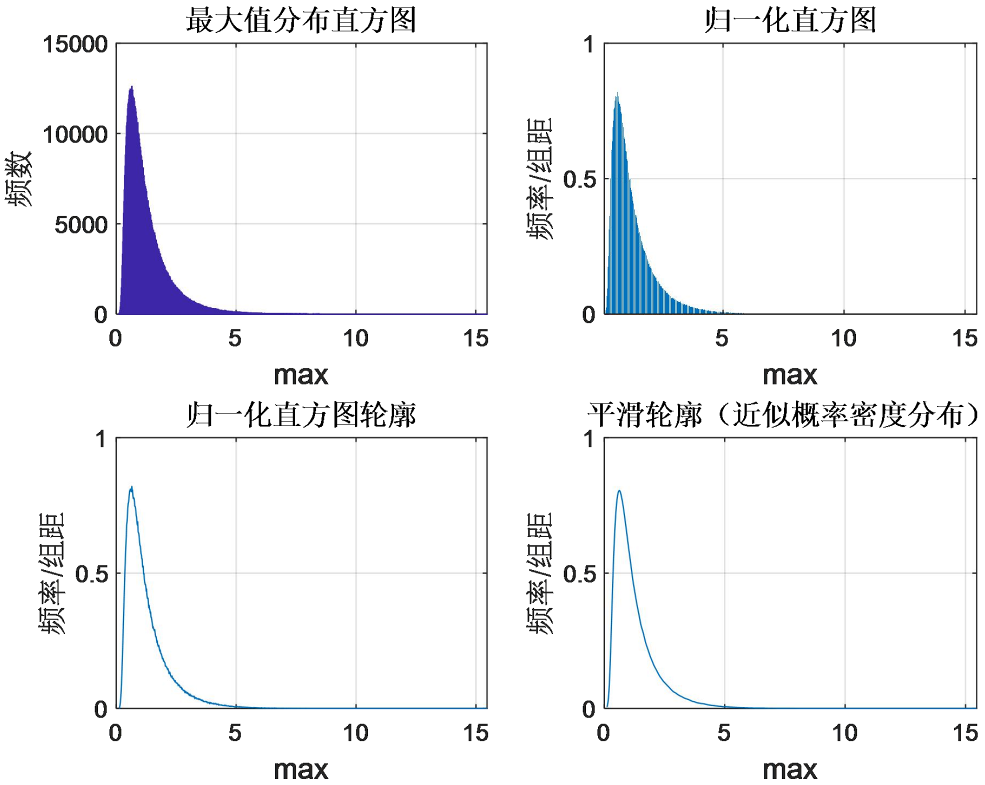
（2）正态分布 $N(0, 1)$



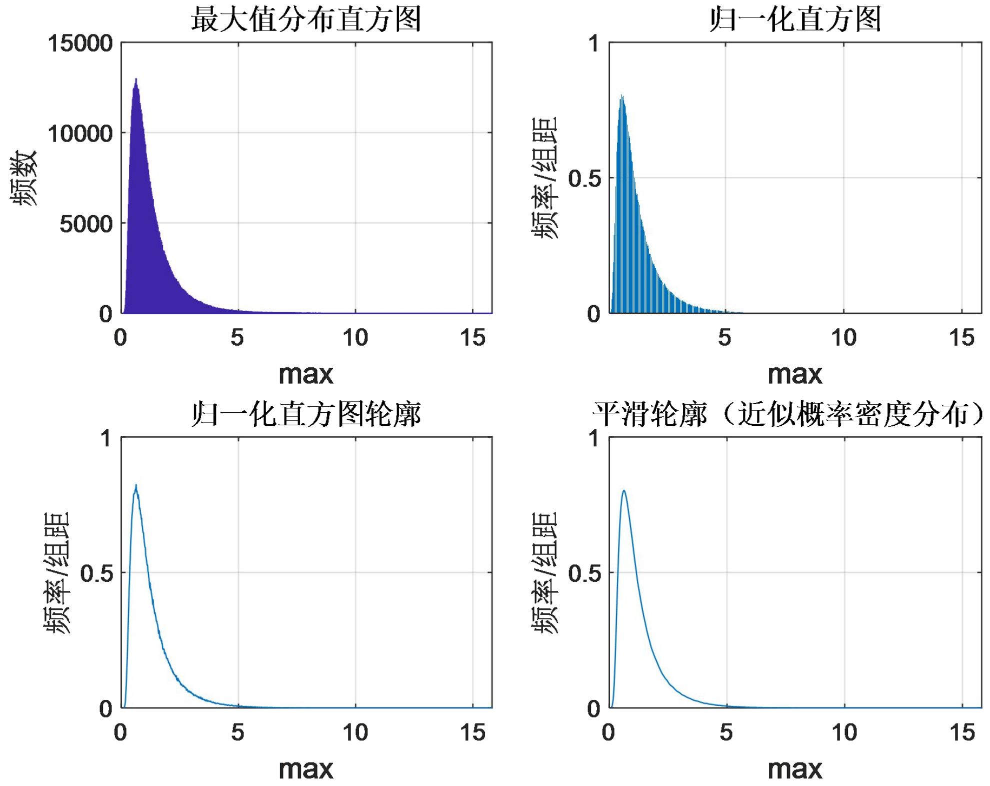
（3）正态分布 $N(2, 5)$



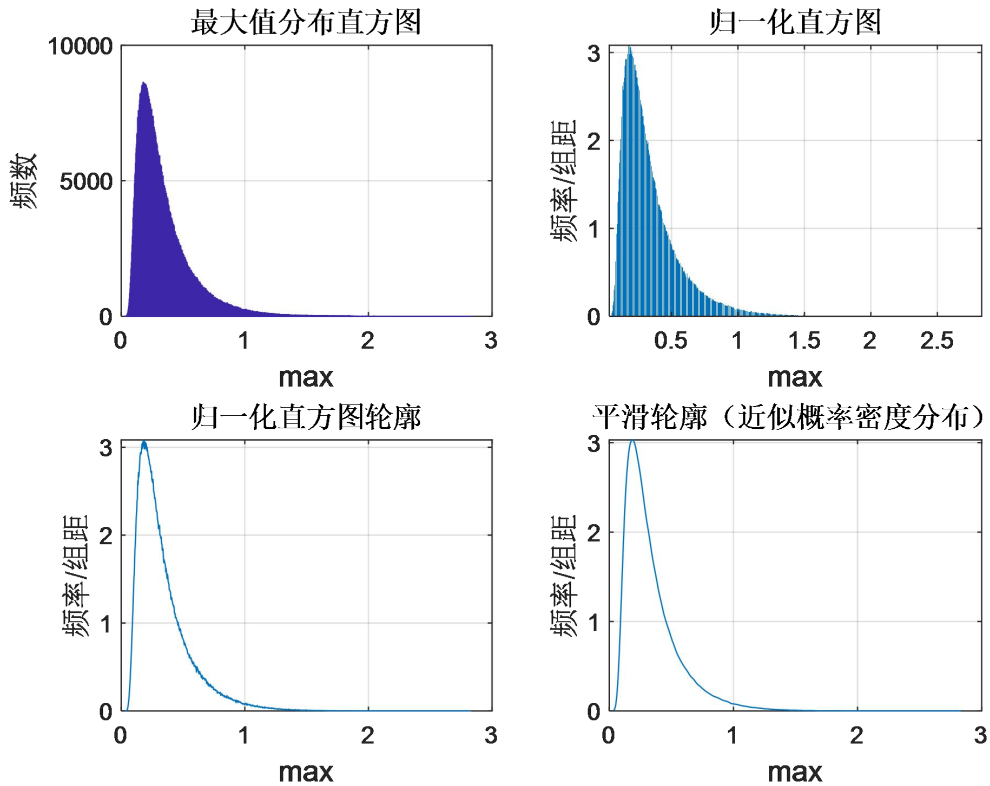
（4）指数分布，参数为 $\lambda = 1$



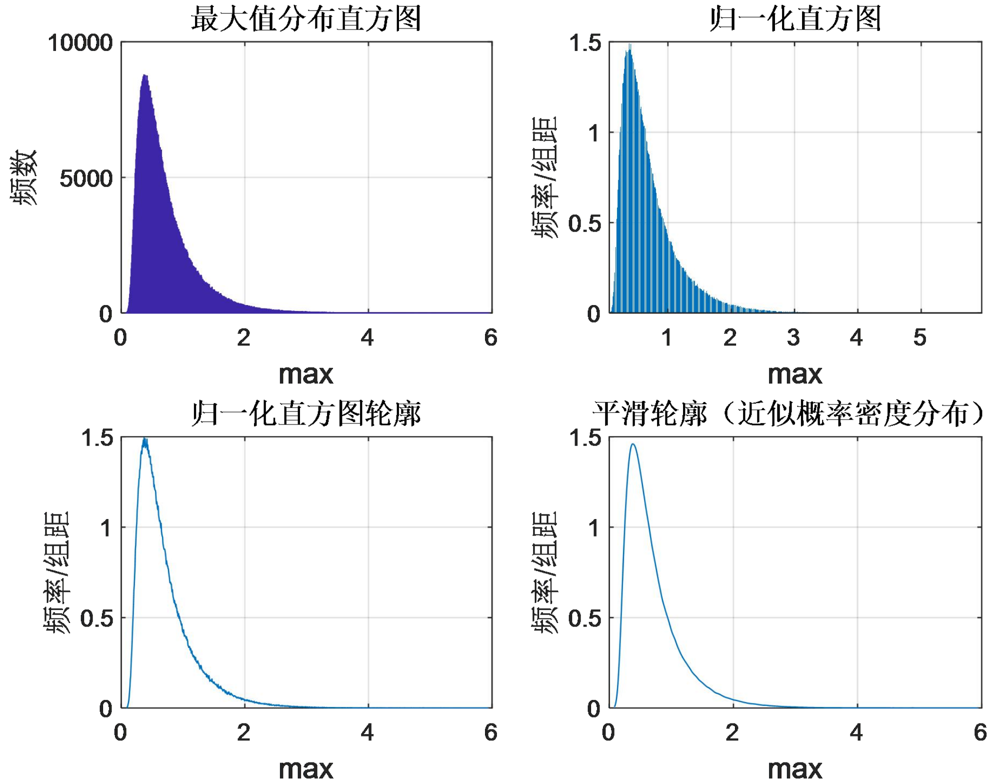
（5）伽马分布，参数为 $\beta = 1$，$\alpha = 1$



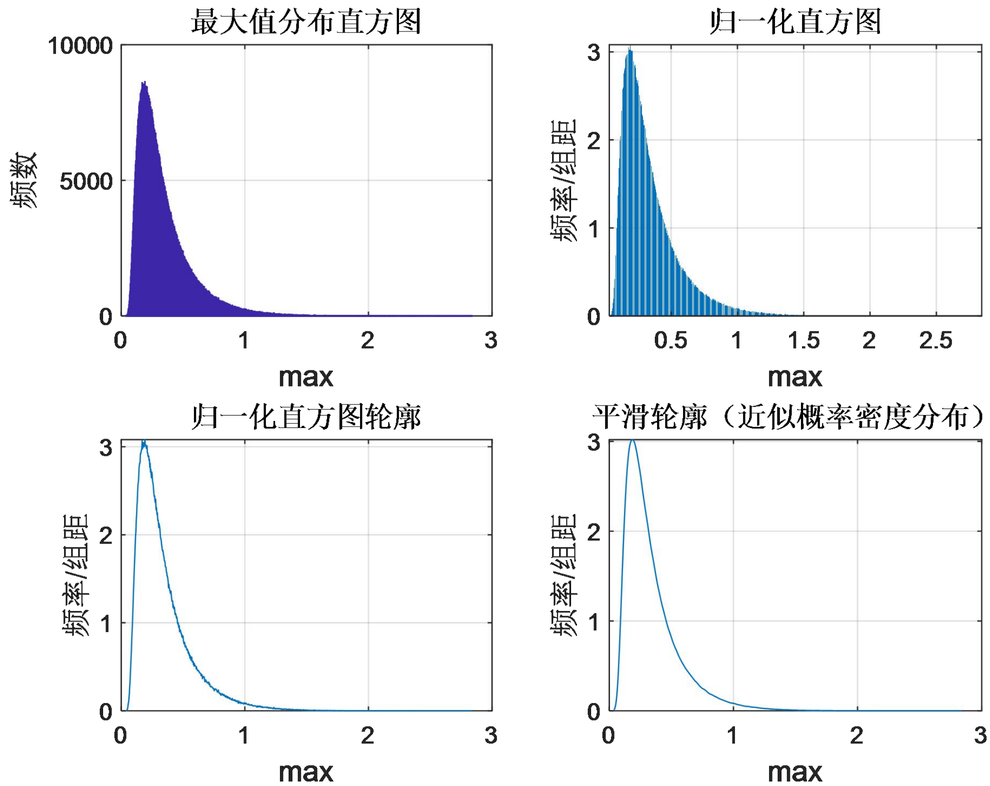
（6）瑞利分布，参数为 $\sigma = 1$



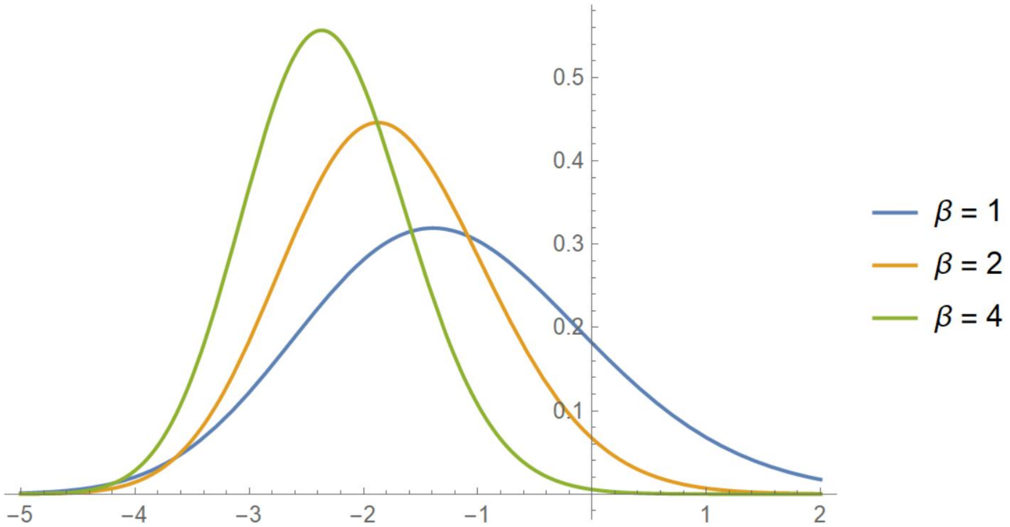
（7）莱斯分布，参数为 1，2



（8）nakagami 分布，参数为 1，2

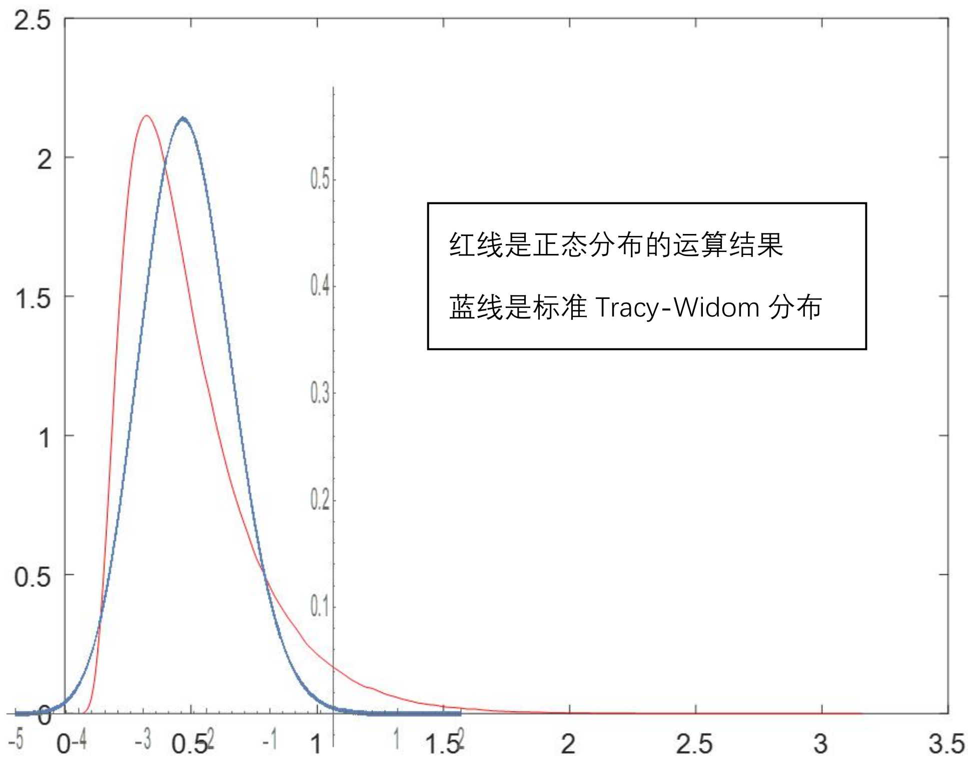


3、标准 Tracy-Widom 分布如下图所示：（代码见附件：yanzheng_TWD222.nb）



4、小结

本题中生成了均匀分布、正态分布、指数分布、伽马分布、瑞利分布、莱斯分布、nakagami分布来观察最终的结果是否服从 Tracy-Widom 分布。从各种情况的近似概率密度分布图中可以看出，所有图均以下特征：存在一个峰值，且峰值左边下降快，峰值右边下降相对缓慢。即得到的最大值的分布与 x_i 的分布无关，并且这与标准 Tracy-Widom 分布的特征相似。下面是通过手动压缩图形横纵坐标（这样做可能是不很合理，但能看出差异）得到的正态分布时输出的结果与标准 Tracy-Widom 分布的对比图：



可见通过题中描述的方法生成的最大值的分布与 Tracy-Widom 分布存在差异，只是概率密度分布图相似而异。（群里说显示各种情况下的概率分布就行，不要求与 TW 分布对应，

故未进行更深入的分析了）

Problem2

$U = ax^2 + bx^4, \ a < 0, \ m = 1$ 求解：

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - \nabla U + \xi(t)$$

讨论 double well 中的动力学过程，参数自己调节

解：

1、解题思路：

（1）$\nabla U = 2ax + 4bx^3$，则：

$$\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - 2ax - 4bx^3 + \xi(t)$$

（2）令：

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = -\alpha v - 2ax - 4bx^3 + \xi(t)$$

（3）若将该方程视为扩散方程，（2）中两方程的差分格式为（取时间步长为 dt）：

$$x_{n+1} = x_n + v_n dt$$
$$v_{n+1} = v_n - \alpha v_n dt - 2ax_n - 4bx_n{}^3 + \sqrt{\frac{D}{dt}} dt \xi_n(t)$$

其中 $\xi_n \sim N(0, \ 1)$

分析可见，步长和扩散系数 D 确定后，$\xi_n(t)$ 的系数为 $\sqrt{\frac{D}{dt}}dt$ 为一常数，可将这一常数归于随机值 $\xi_n(t)$ 的贡献，因此将速度表达式的差分格式写为：

$$v_{n+1} = v_n - \alpha v_n dt - 2ax_n - 4bx_n{}^3 + dt\xi_n(t)$$

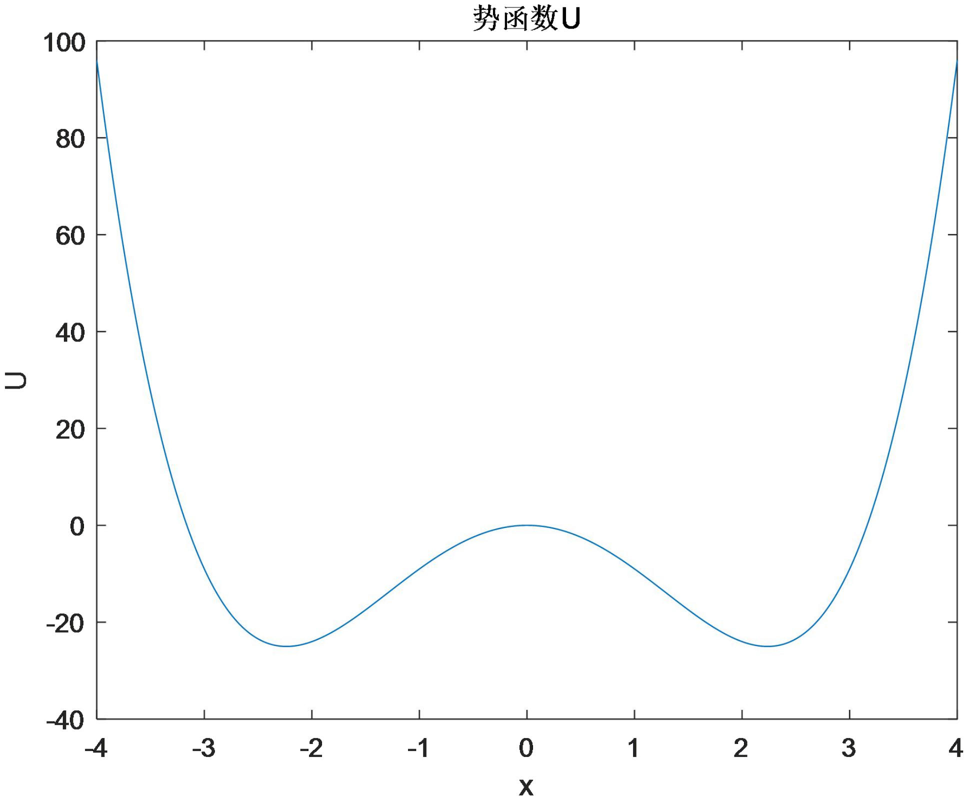
两种格式对数值求解的结果是没有影响的。数值求解时采用了前一种差分格式，主要是为了通过改变参数 D 来控制随机力的整体大小，并视 D 为调整随机力整体大小的参数。

（4）使用 MATLAB 实现数值求解，调整参数观察运动情况。

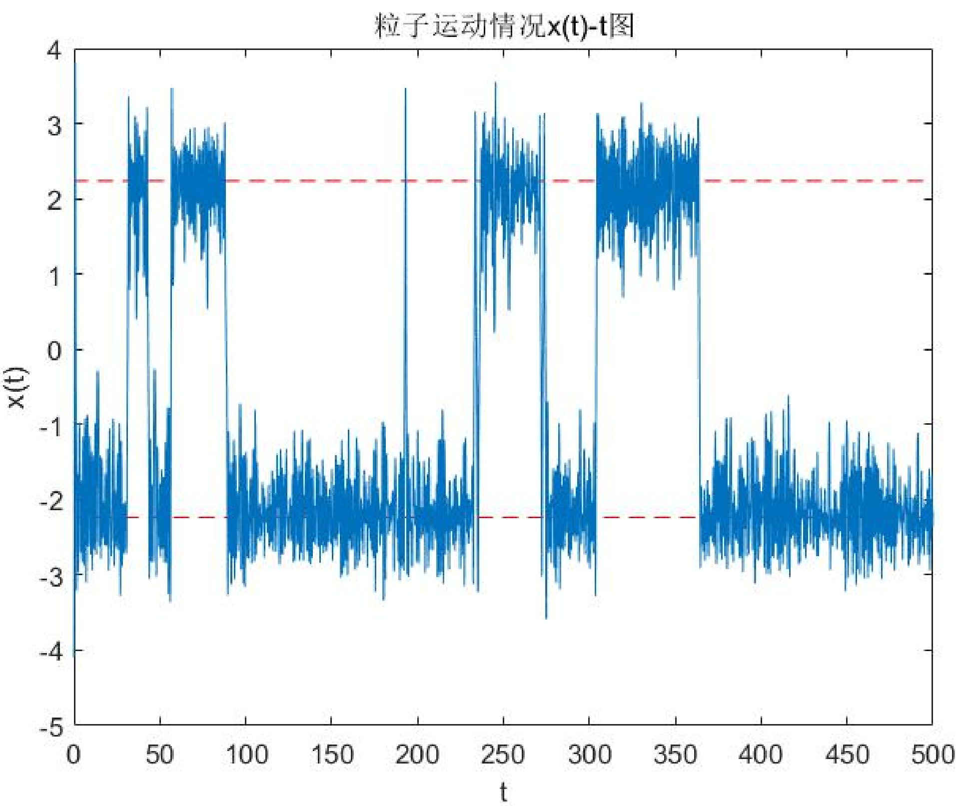
2、结果分析 （代码见附件：Double_Well.m）

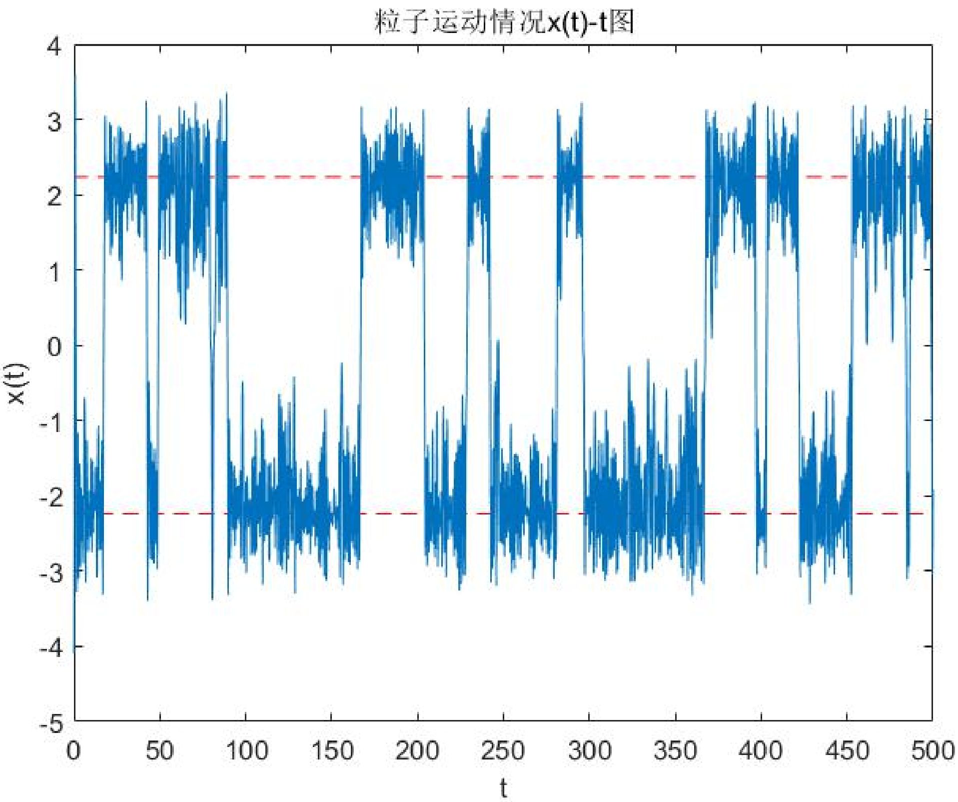
（1）取 $\alpha = 1, \ a = -10, \ b = 1, \ D = 16, \ x_1 = 2, \ v_1 = -5$

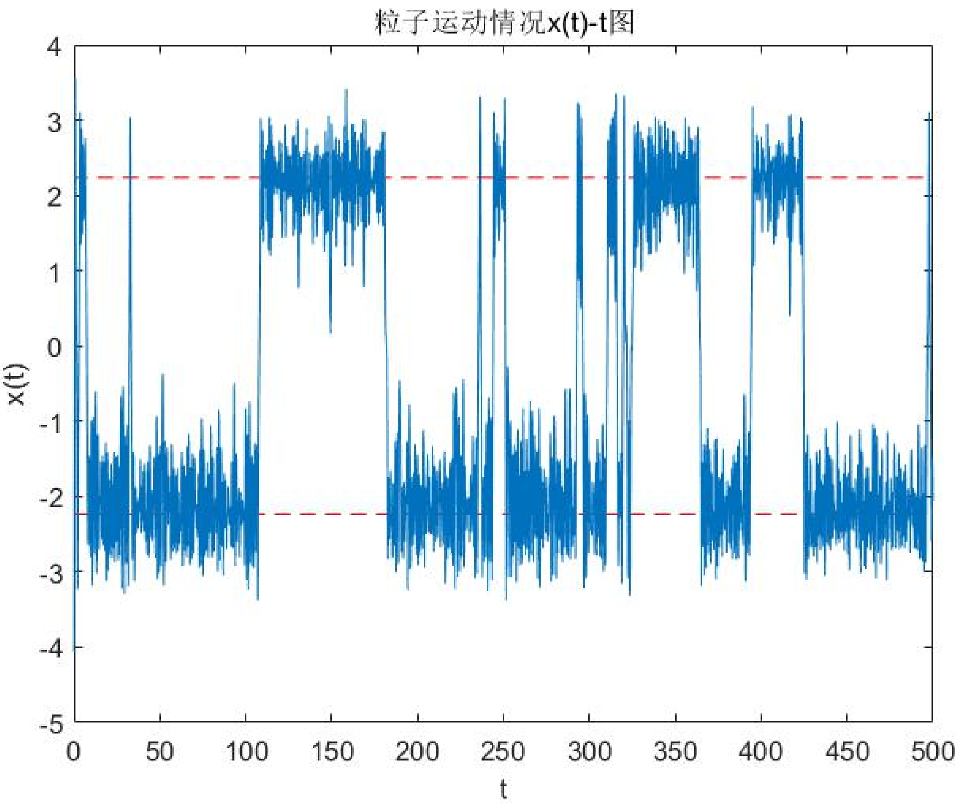
势函数图：（两个最低点的横坐标为 2.2361，-2.2361）

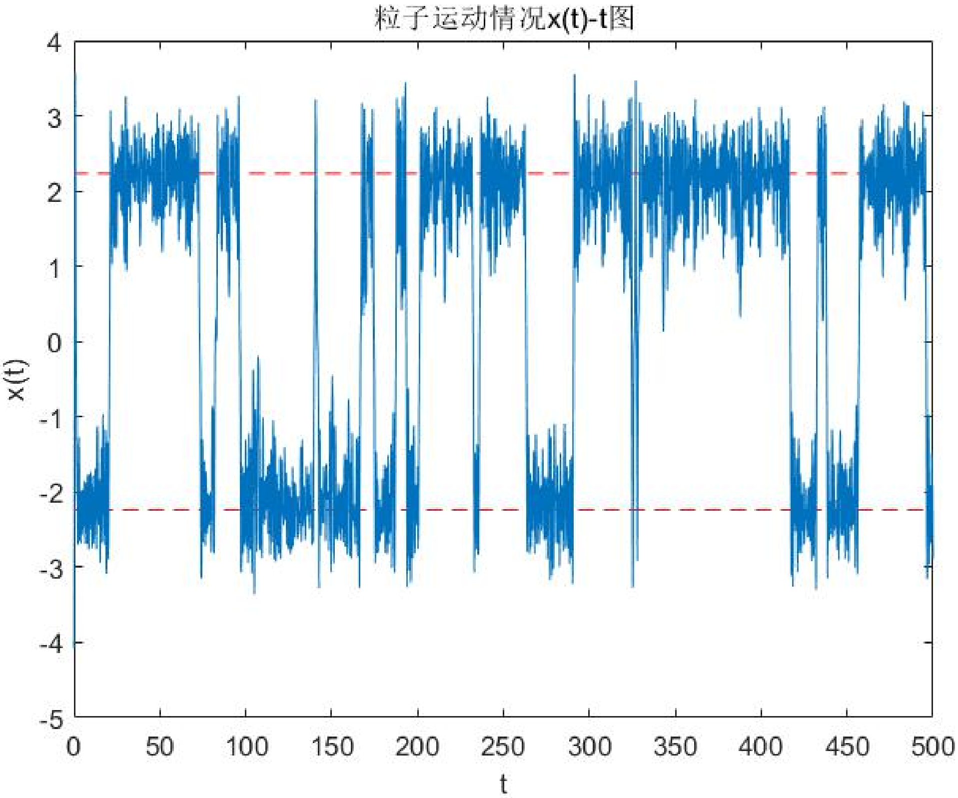


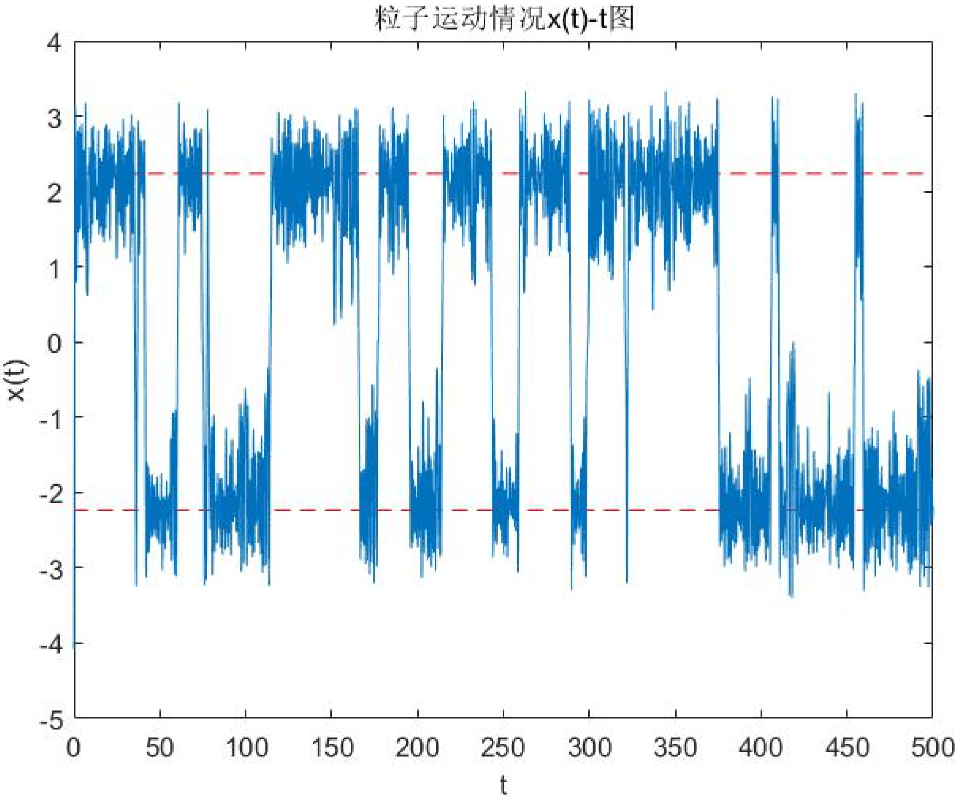
小球运动情况 x(t)-t 图（运行 5 次的结果）： $t \in (0,500)$




粒子运动情况x(t)-t图
x(t)
t
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500


粒子运动情况x(t)-t图
x(t)
t
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500



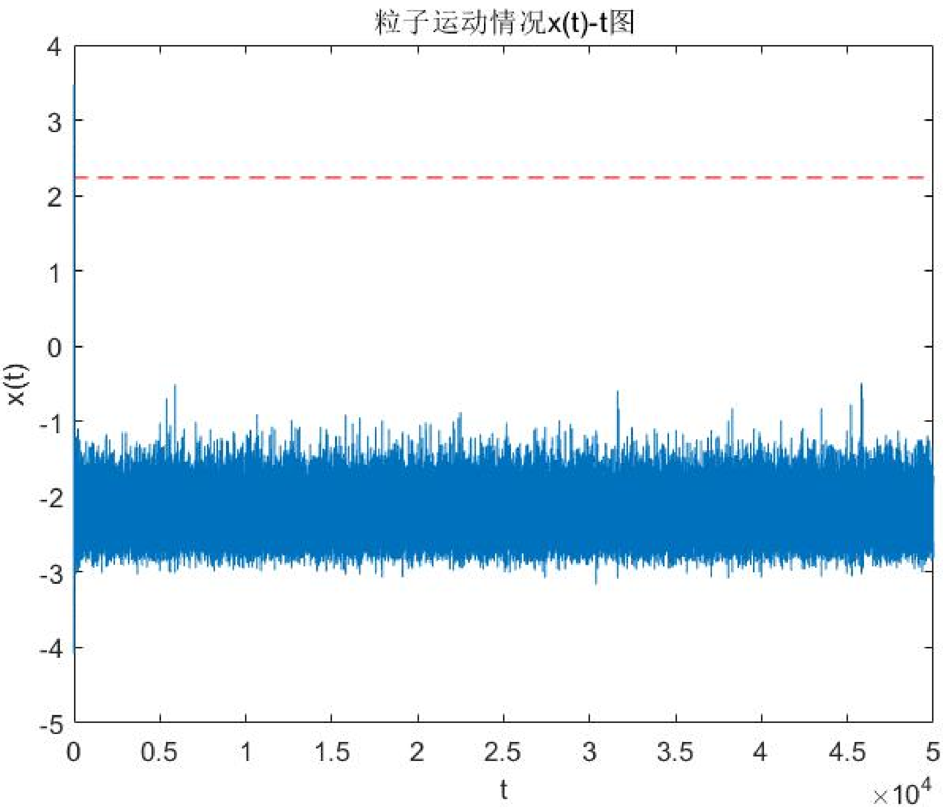


可见小球主要在势能最小的两个位置点附近运动，并不定时地从一个位置跑到另一个位置处，即在某一点附近运动的时间也是随机的。

（2）改变参数 D，即调整随机力的整体大小（D 越大，随机力整体更大），保持

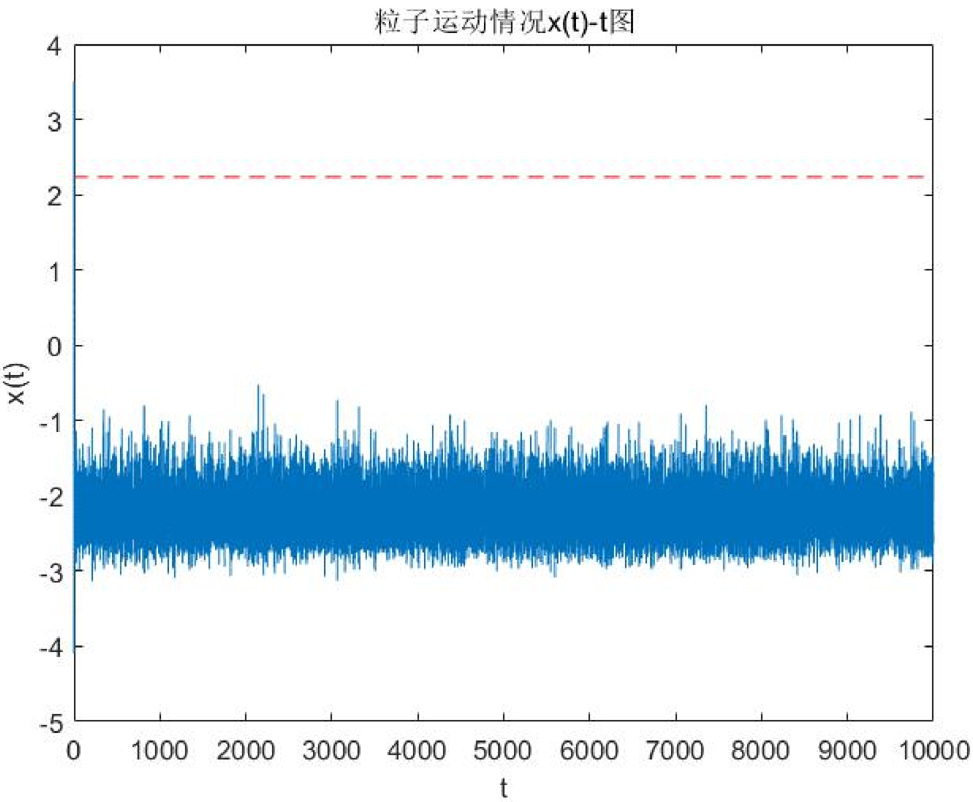
$\alpha = 1$, $a = -10$, $b = 1$, $x_1 = 2$, $v_1 = -5$ 不变。

（2.1） $D = 4$ 时，小球运动情况 x(t)-t 图（运行 1 次的结果）：$t \in (0, 50000)$



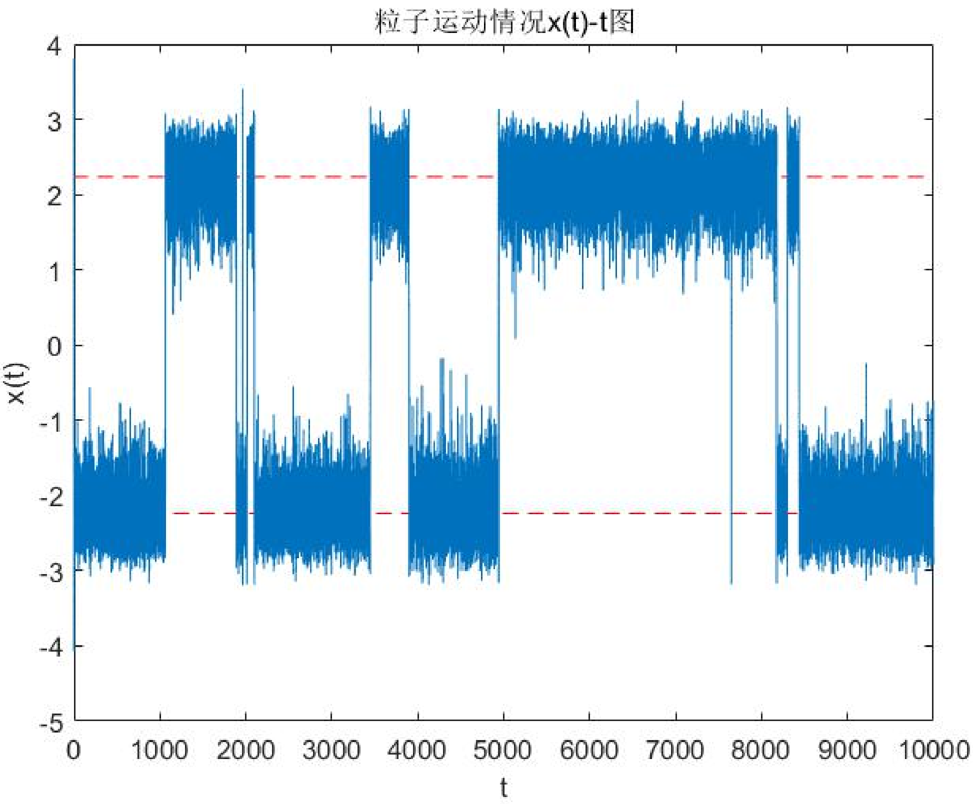
可见小球主要在 x =-2.2361 附近运动，即使时间达到了 50000，也没有再次（初始位置在 x =2.2361 附近）跑到 x =2.2361 附近运动。

（2.2） $D = 5$ 时，小球运动情况 x(t)-t 图（运行 1 次的结果）：$t \in (0, 10000)$

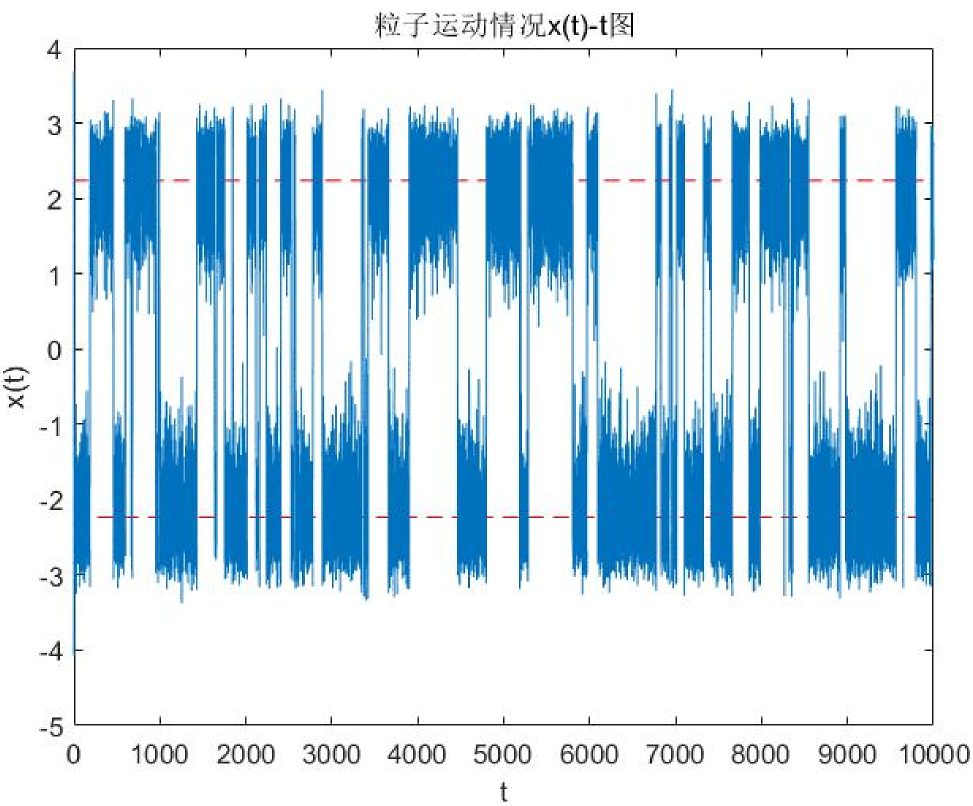


即使时间达到 10000，小球也没有再次（初始位置在 x =2.2361 附近）跑到 x =2.2361 附近运动。

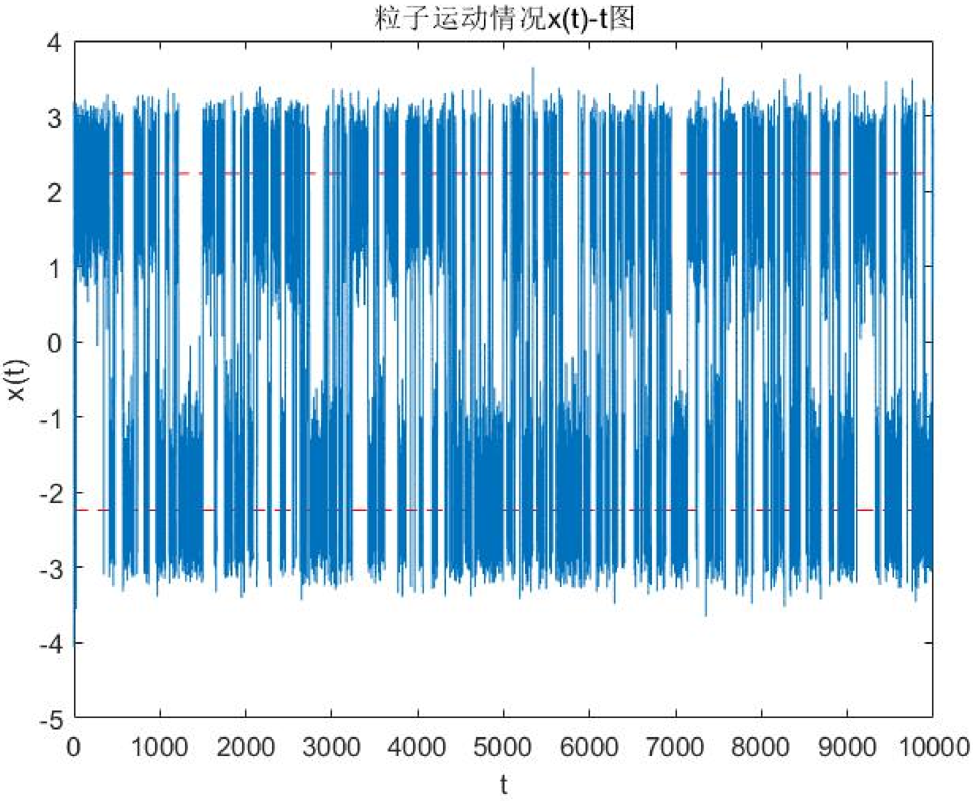
（2.3） $D = 7$ **时，小球运动情况 x(t)-t 图（运行 1 次的结果）：** $t \in (0,10000)$



（2.4） $D=10$ **时，小球运动情况 x(t)-t 图（运行 1 次的结果）：** $t\in(0,10000)$



（2.5） $D=14$ **时，小球运动情况 x(t)-t 图（运行 1 次的结果）：** $t\in(0,10000)$

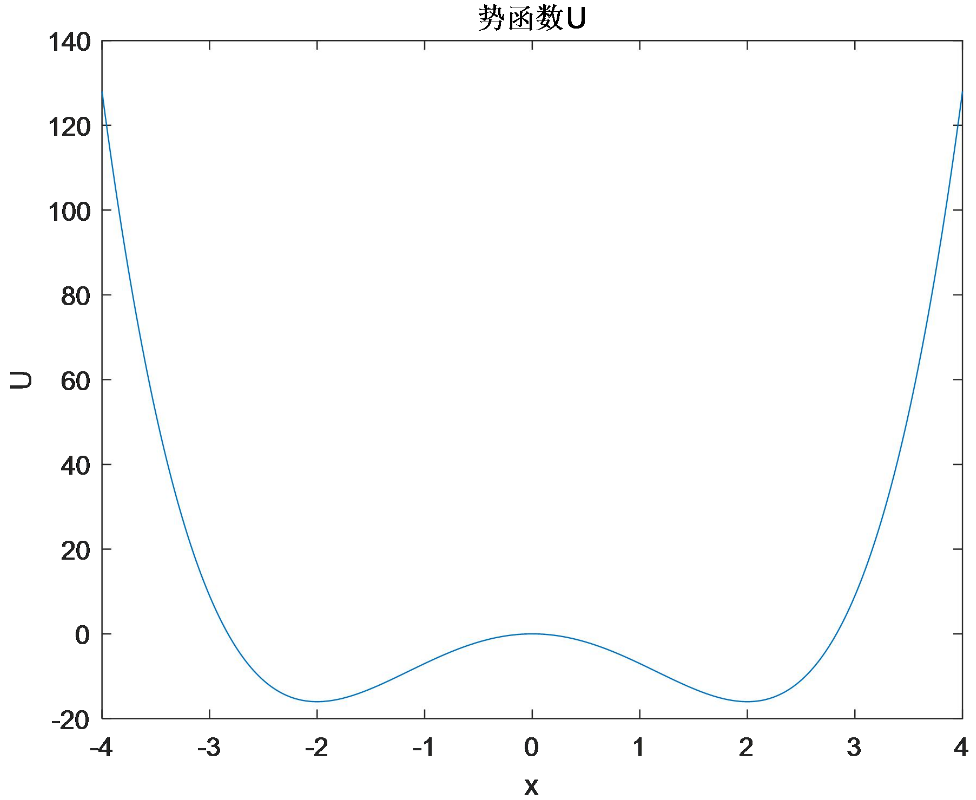


由以上 5 种情况可见，随着随机力整体增大，会使小球在两处来回跳动的频率变快，若随机力整体较小，可能需要非常长时间才会发生一次跳动，由于随机力服从正态分布，可知理论上总有一个时刻的随机力大到足以使小球从一个点跑到另一个点附近。

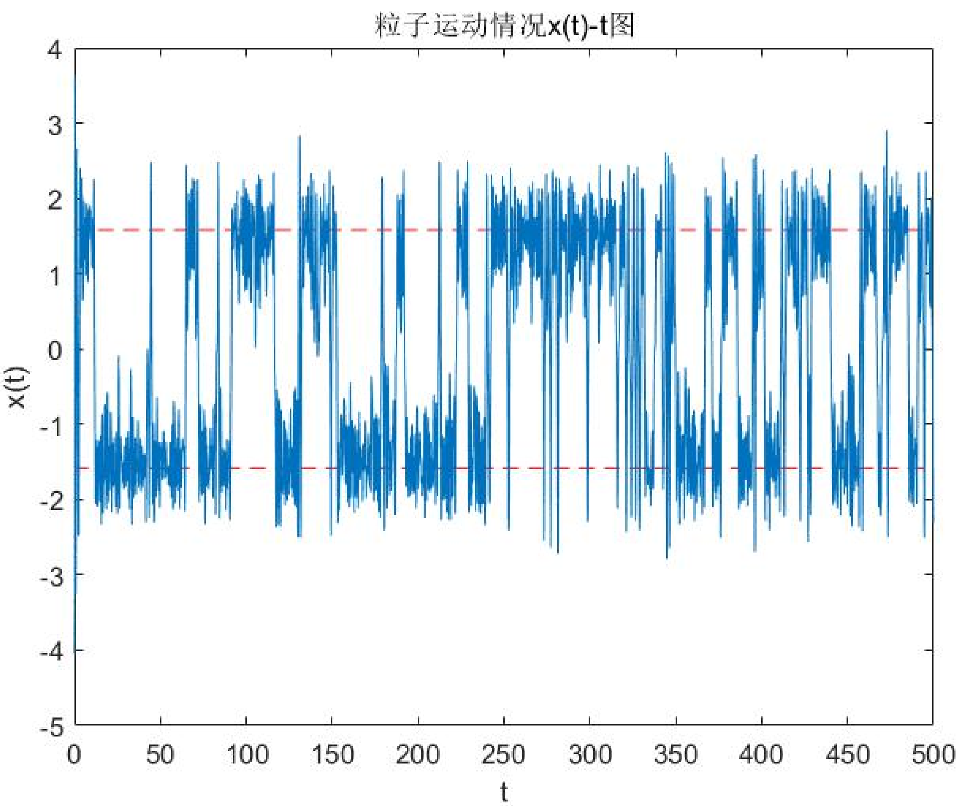
（3）改变势能函数，观察结果变化，取$\alpha=1,\ \ D=16,\ \ x_1=2,\ \ v_1=-5$

（3.1）取$a=-10,\ \ b=2$

势函数图：（两个最低点的横坐标为 2.0，-2.0）

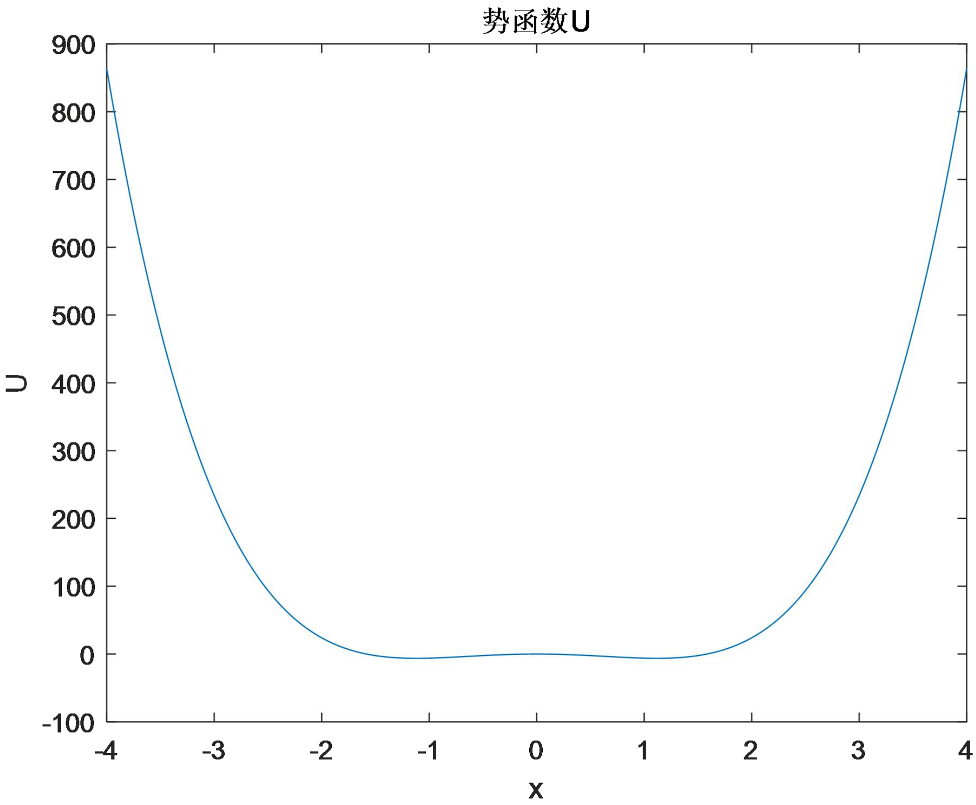


小球运动情况 x(t)-t 图（运行 5 次的结果）：$t \in (0, 500)$

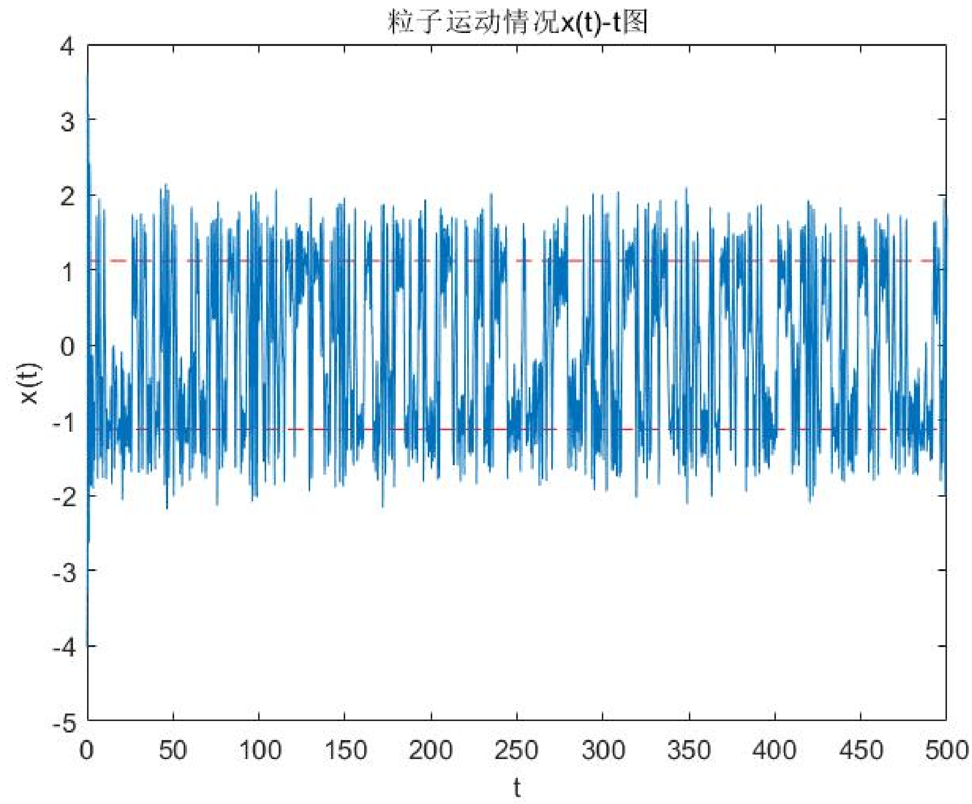


（3.2）取 $a=-10$, $b=4$

势函数图：（两个最低点的横坐标为 1.1180，-1.1180）

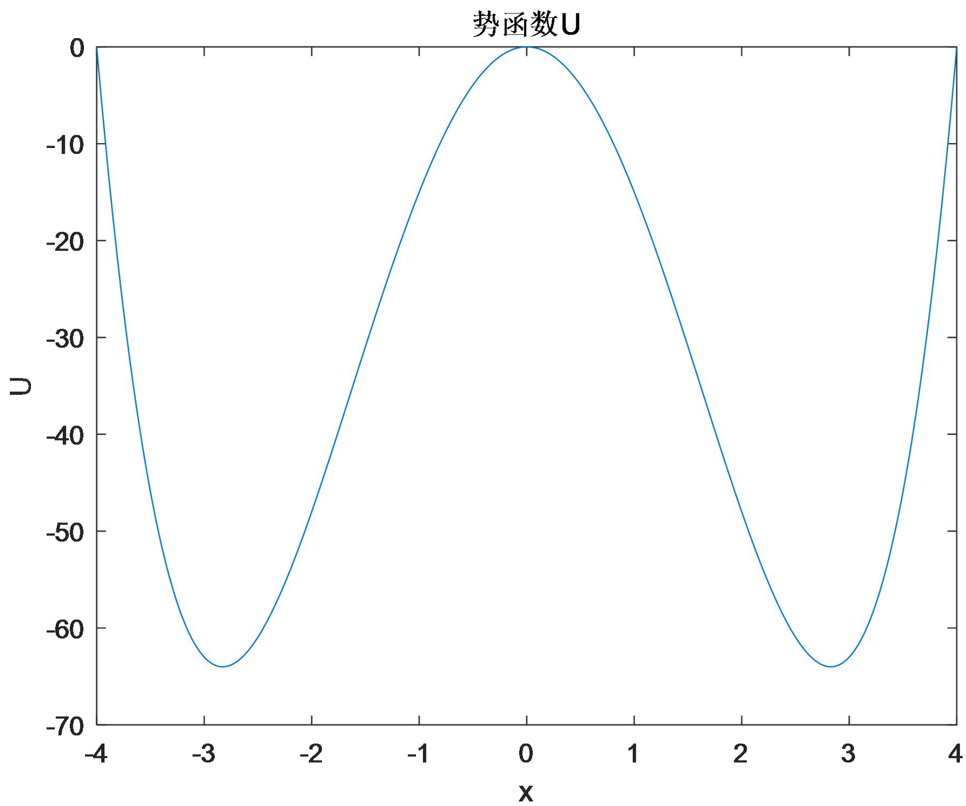


小球运动情况 x(t)-t 图（运行 5 次的结果）：$t\in(0,500)$

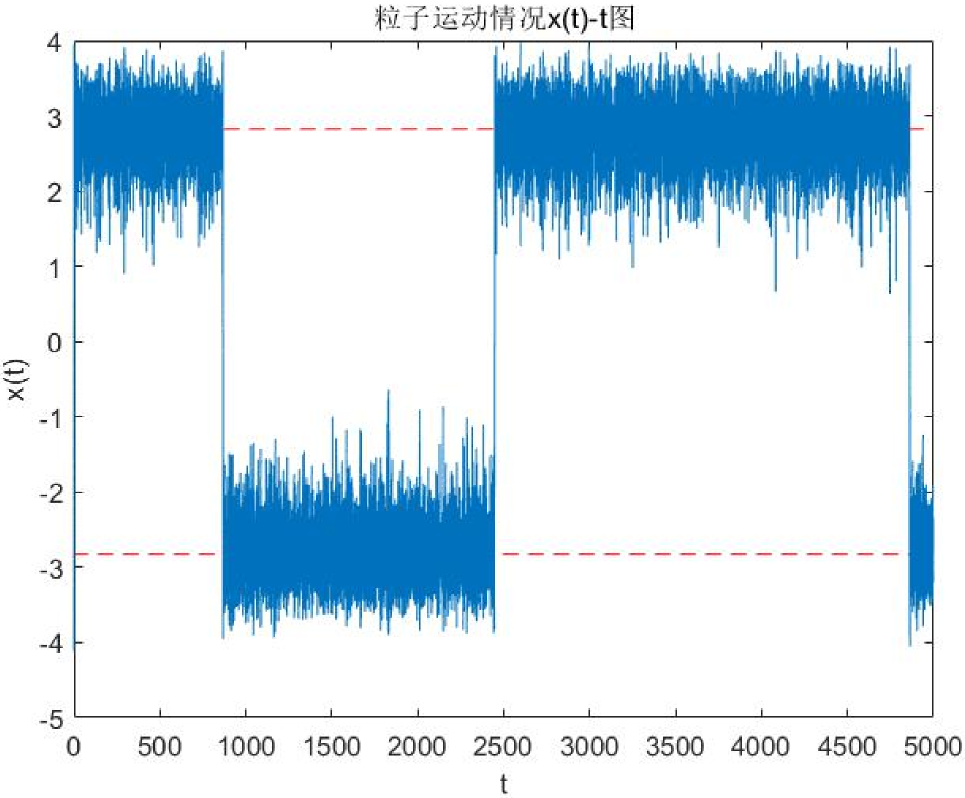


（3.3）取 $a=-16,\ \ b=1$

势函数图：（两个最低点的横坐标为 2.8284，-2.8284）



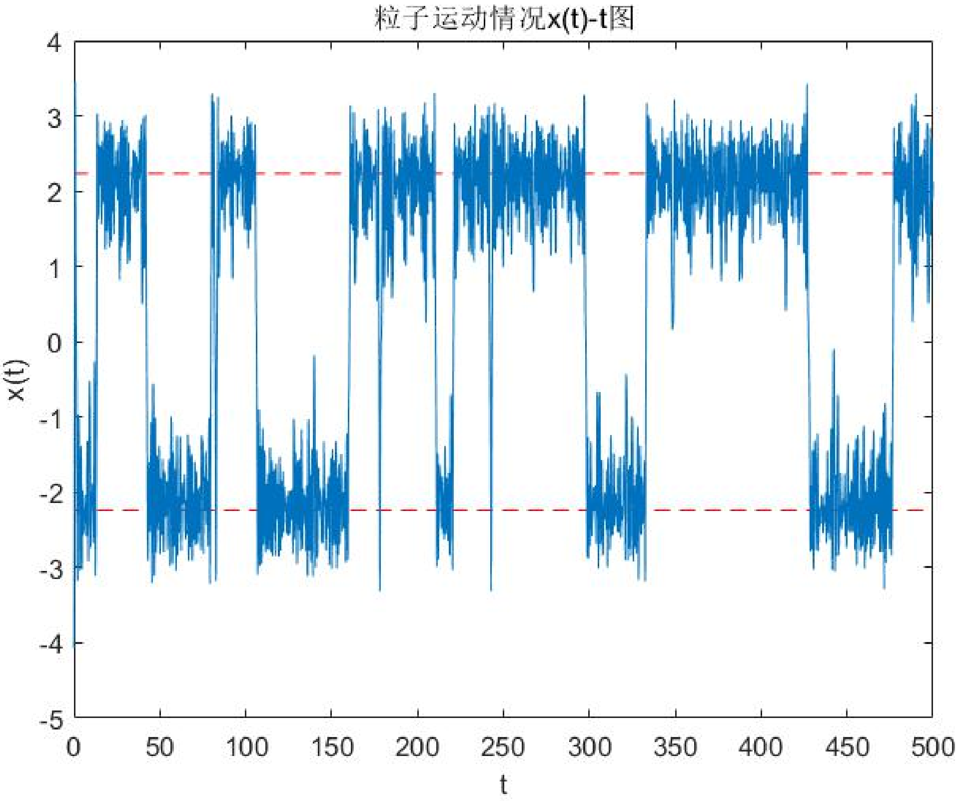
小球运动情况 x(t)-t 图（运行 5 次的结果）： $t\in(0,5000)$



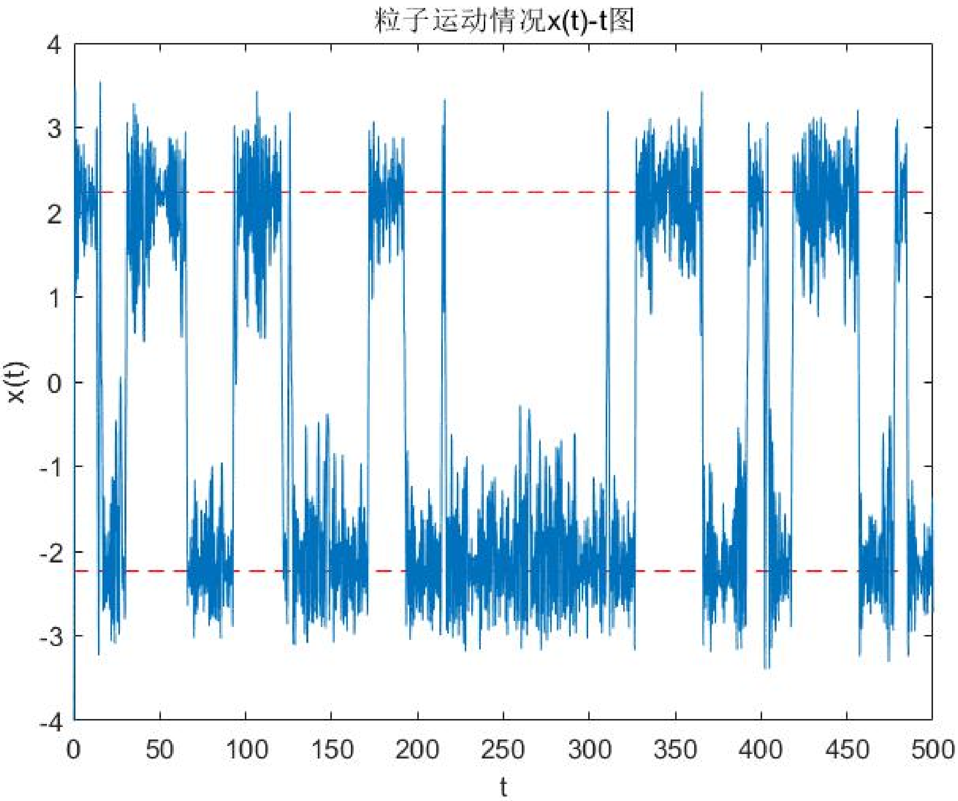
由以上 3 种情况可见，"势阱"越深，小球在两处来回跳动的频率变慢，需要更长时间才发生一次跳动。

（3）改变小球初始运动位置和速度，观察结果变化，取 $\alpha=1,\ \ D=16,\ \ a=-10,\ \ b=1$

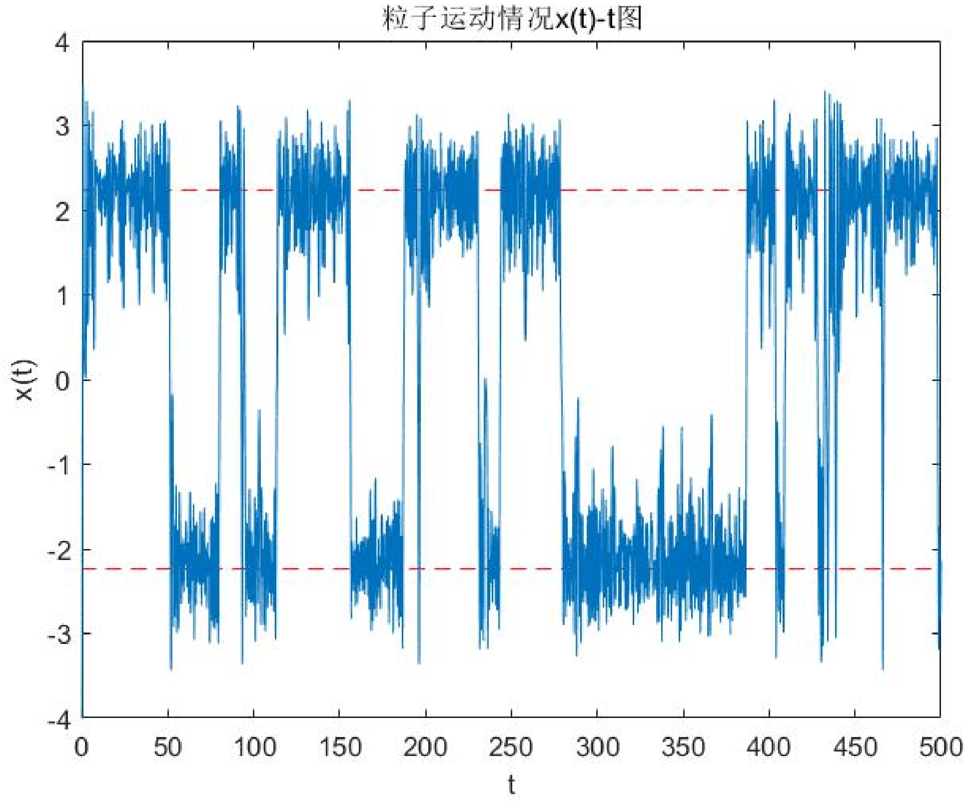
（3.1）取 $x_1=2,\ \ v_1=-5$



（3.2）取 $x_1 = -2, \quad v_1 = 6$



（3.3）取 $x_1 = 3, \quad v_1 = 4$



由以上 3 种情况可见，小球初始运动位置和速度对后续的整体运动情况影响不大。