数据科学R与Python实践

第08章 黎曼

顾立平

等差级数

等差级数定义

数列中任一项减前一项的差为常数，该常数为公差，这样的数列即为等差数列，其前n项之和为等差级数。

等差级数特性

数列第二项起依次减去第一项，所得新数列各元素相等，此值即为公差。

求和公式

等差级数的求和公式为$S_n=n/2*(\text{首项}+\text{末项})$，其中$S_n$是前n项和，n是项数。

科学领域的应用

匀加速运动与等差数列

物理中匀加速物体在相等时间间隔内通过的距离成等差，位移公式体现其数学规律。

药物剂量与等差关系

生物医学研究中，设定等差剂量观察效应，剂量与反应关系系统化分析。

工程设计中的等差序列

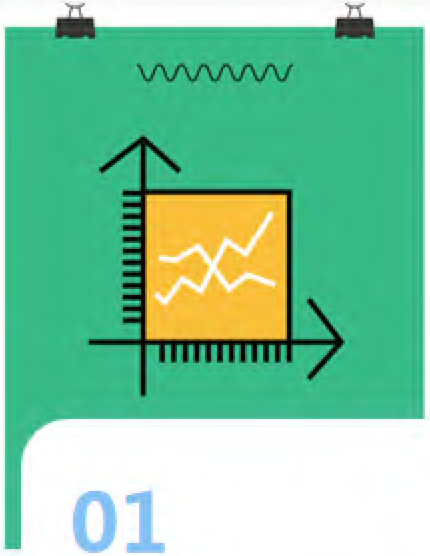
结构设计中，等差元素确保几何力学要求，等差数列用于精确计算和设计。

057 等差级数

R Console

```
> # 使用polygon函数绘制右侧拐点外部的区域，并着色为灰色85，设置边框为黑色
> polygon(c(-xlist,rev(-xlist)),c(Norm.u.s(xlist,0,2),0*rev(xlist)),
+  col="gray85",border="black")
>
>
> ## 使用矩形法对函数f(x)在区间[5, 11]上进行数值积分。
> # 定义一个函数f(x)，其计算公式为 (5 + exp(x) + (2.5)^x * sin(2*pi*x)) / 3000
> f = function(x) {
+   (5 + exp(x) + (2.5)^x * sin(2 * pi * x)) / 3000
+ }
>
> # 计算dx，即从5到11的区间被等分为19份，每份的长度
> dx = (11 - 5) / 19
>
> # 生成一个等差数列，起始值为5+dx/2，终止值为11，公差为dx
> # 这个数列表示每个小区间的中点
> mid = seq(5 + dx / 2, 11, dx)
>
> # 使用函数f计算每个中点的函数值，并与dx相乘，然后将所有结果求和
> # 这实际上是使用矩形法进行数值积分的一个近似计算
> sum(f(mid) * dx)
[1] 18.37171707954832911
>
>
> 
```

商业领域的应用



01

销售额预测方法

基于等差数列预测未来销售额，帮助企业制定生产与销售策略，适应市场需求变化。

02

等差级数贷款计算应用

计算利息或分期付款总和时，利用等差级数求和，简化财务计算过程。

03

等差数列价格策略

商家通过设计价格递减的促销活动，利用等差数列知识制定价格策略，吸引顾客。

数值积分

数值积分原理

通过黎曼积分理论，对无法直接求解的函数进行数值逼近，以获取定积分的近似值。

积分计算挑战

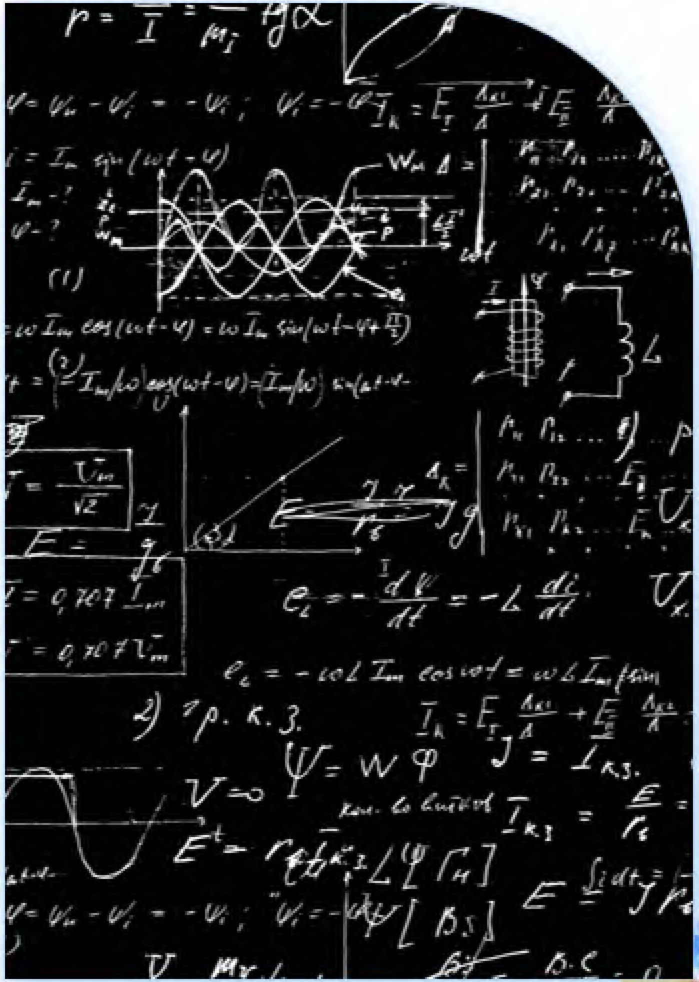
许多定积分无法用常规公式精确计算，特别是在面对复杂函数时。

数值积分方法

利用数学定义，采用如梯形法则、辛普森法则等数值技术，进行近似计算。

电子辅助应用

借助计算机和算法，能高效处理复杂积分问题，实现快速有效的数值积分计算。



058 数值积分

R Console

```
>
> # 定义一个函数g，该函数以x为自变量，函数值为e的-x次方
> g=function(x){exp(-x)}
>
> # 使用integrate函数对函数g在区间[0,1]上进行数值积分
> integrate(g,0,1)
0.632120558828557777 with absolute error < 7e-15
>
> # 使用integrate函数对函数g在区间[0，无穷大)上进行数值积分
> # 这里"Inf"代表无穷大
> integrate(g,0,Inf)
0.99999999970182584796 with absolute error < 5.7e-05
>
> # 使用integrate函数对函数g在区间(-无穷大，无穷大)上进行数值积分
> # 这里"-Inf"和"Inf"分别代表负无穷大和无穷大
> integrate(g,-Inf,Inf)
Error in integrate(g, -Inf, Inf) : non-finite function value
>
> # 重新定义函数g（尽管和前面的函数g定义一样，但这里为了代码的完整性还是重新定$
> g=function(x){exp(-x)}
>
> # 使用integrate函数对函数g在区间[0,20000]上进行数值积分
> integrate(g,0,20000)
2.17073171323309735557e-08 with absolute error < 4.3e-08
>
```

科学领域的应用

物理学中的数值积分

用于计算质心、重心，模拟物体运动路径，解决复杂力场中的运动问题。

工程学中的数值积分应用

常用于动态系统建模，热量质量传递分析，解决涉及复杂微分方程的问题。

金融分析中的数值积分

用于计算期权价格和风险价值，如在Black-Scholes模型中计算预期回报，解决金融数学问题。

商业领域的应用

1

数据分析与预测

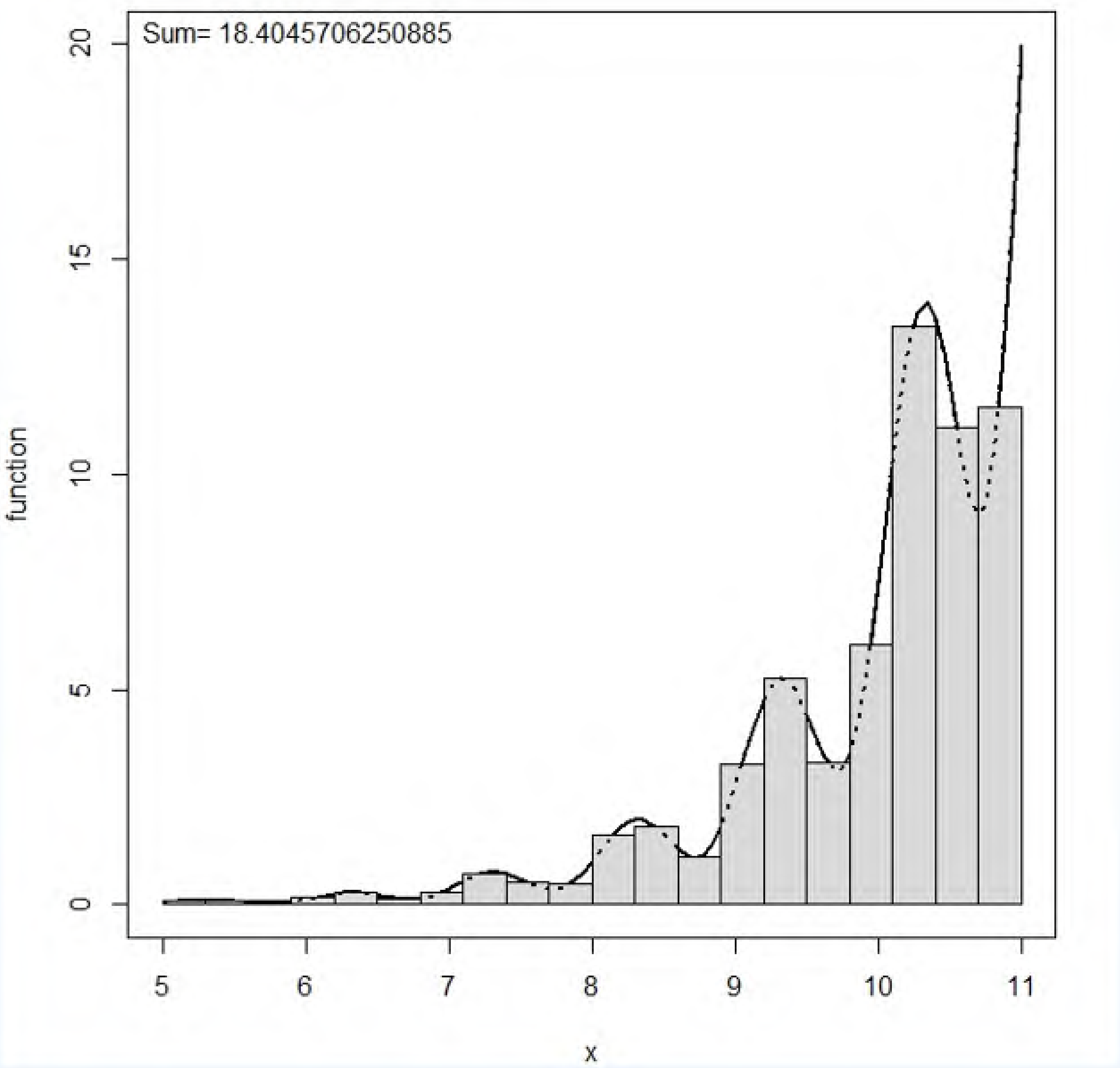
利用数值积分解析历史数据，预测未来趋势，尤其适用于时间序列销售预测和市场动态分析。

2

金融模型验证

在金融行业，数值积分辅助验证模型，通过比较结果评估模型稳健性与风险评估准确性。

059 黎曼盒



数值积分计算重积分

数值积分用于近似计算多元函数在特定区域的积分值，处理解析求解困难或不可能的情况。

重积分解析

将积分区域细分为多个子区间，简化复杂函数，便于计算。

积分区域划分

用近似函数替换被积函数，对每个小区域积分，累积得到近似积分值。

近似函数应用

针对重积分，需对多个变量进行同步划分和近似，以准确评估函数的累积效应。

多变量同时处理

科学领域的应用

01

物理学中的数值积分

用于计算物体的质心、重心、转动惯量，处理复杂形状物体的分析。

02

流体力学与热传递模拟

通过网格划分，计算流体流动、热量传递和传质过程，求解相关方程。

03

工程设计中的应用

分析结构应力分布、变形和稳定性，解决材料行为的方程问题。

04

电磁场分析与天线设计

计算电磁场分布、天线性能参数，通过求解电磁场方程进行精确分析。

060 数值积分计算重积分

R Console

```
>
> # 计算二重积分，外层积分变量为z，内层积分变量为x，被积函数为x*y，其中y被视作z$
> integrate(function(z) {
+   sapply(z, function(y) {
+     integrate(function(x) {x * y}, 0, 2)$value  # 对每个z值（这里视作y），计$
+   })
+ }, 0, 1)  # 计算上述函数在[0,1]上的定积分
0.9999999999999988898 with absolute error < 1.1e-14
>
> # 类似地，计算另一个二重积分，被积函数改为4+x-y
> integrate(function(z) {
+   sapply(z, function(y) {
+     integrate(function(x) {4 + x - y}, 1, 2)$value  # 对每个z值（视作y），计$
+   })
+ }, 1, 3)  # 计算上述函数在[1,3]上的定积分
7 with absolute error < 7.8e-14
>
> # 再次类似地，计算一个更复杂的二重积分，被积函数为x*exp(y)*sin(x)
> integrate(function(z) {
+   sapply(z, function(y) {
+     integrate(function(x) {x * exp(y) * sin(x)}, 0, pi / 2)$value  # 对每个z$
+   })
+ }, -1, 1)  # 计算上述函数在[-1,1]上的定积分
2.3504023872876027568 with absolute error < 2.6e-14
>
```

商业领域的应用

01

金融分析中的数值积分

用于计算期权定价模型中的预期回报和波动率，如Black-Scholes模型。

02

市场趋势预测分析

通过数值积分处理时间序列数据，预测市场发展趋势和潜在风险。

03

数据科学与机器学习应用

计算复杂函数的梯度和Hessian矩阵，优化算法和神经网络训练。

04

积分计算在图形分析中的应用 -> 图形分析的积分应用

确定曲线交点，计算定积分以求得两条曲线之间的面积，用于图形解析。

科学领域的应用

01

物理学：曲线积分法

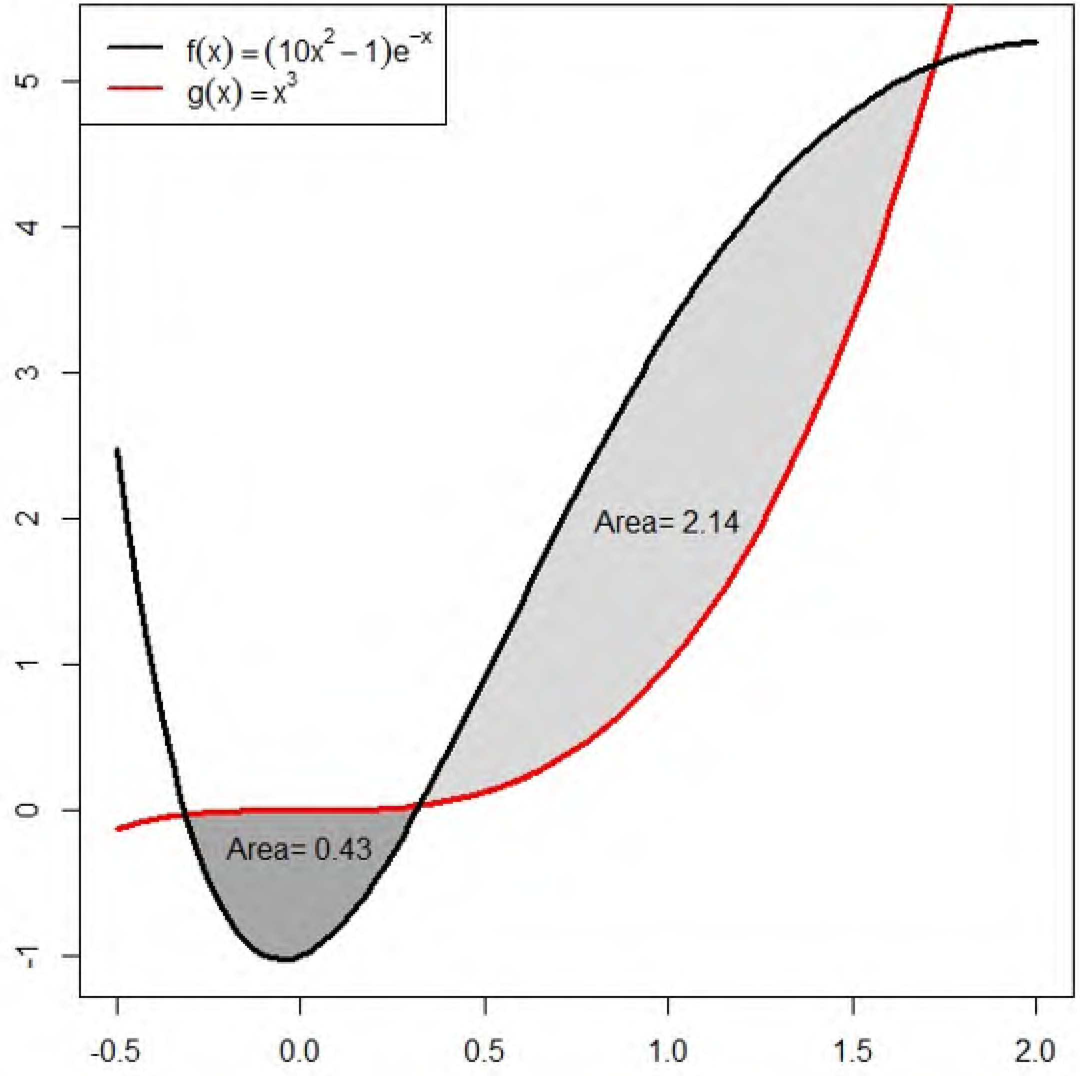
用于计算变力作用下的功，通过力与位移曲线的积分，同样适用于电磁学中电场强度与电势差的计算。

02

工程学：截面分析

在结构工程中，通过绘制结构截面轮廓线与参考线的面积来计算惯性矩和面积矩，确保复杂结构的稳定性分析。

061 两条曲线之间的面积



科学领域的应用

流体力学：流量计算

通过流速与时间的曲线积分，可得流体在特定时间内的总流量，为水力学和石油工程等领域提供数据支持。

化学：动力学分析

在化学反应中，利用反应速率与时间曲线的积分，可得反应物浓度的减少或生成物浓度的增加，便于理解反应进程。

商业领域的应用

计算股票价格与基准线间面积，评估股票相对表现，辅助投资决策。

金融分析-股票市场

绘制产品销售量曲线，比较推广策略效果，通过面积评估策略优劣。

市场营销-策略评估

展示数学函数图形，分析定义域、值域及区间变化，直观理解函数性质。

图形解析-原函数图像

投资组合管理

绘制收益率曲线，计算与无风险收益间面积，分析风险与回报特性。

成本效益分析-项目评估

绘制项目成本与收益曲线，计算面积评估净现值，判断项目经济可行性。

科学领域的应用

01

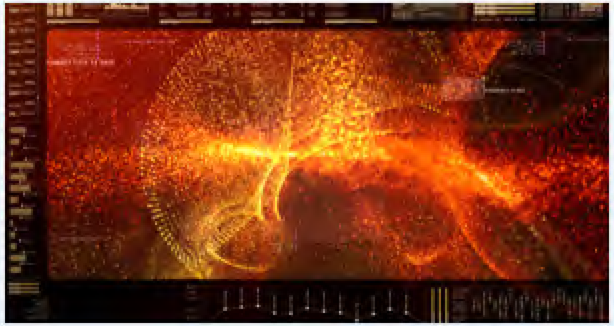
物理图像的分析价值

运动学中的位移-时间图像，电磁学中的电场强度-位置图像，直观展示物理现象。

02

工程学中的函数图像

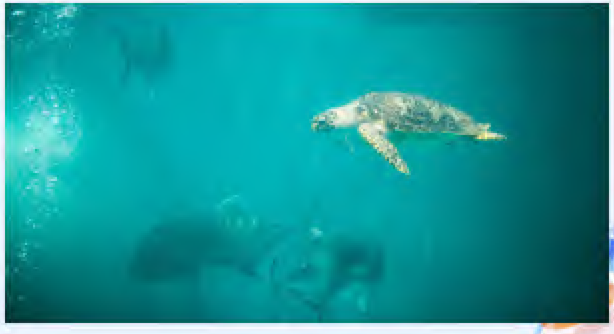
结构工程的应力-应变图像，控制工程的系统响应-时间图像，辅助解决工程问题。



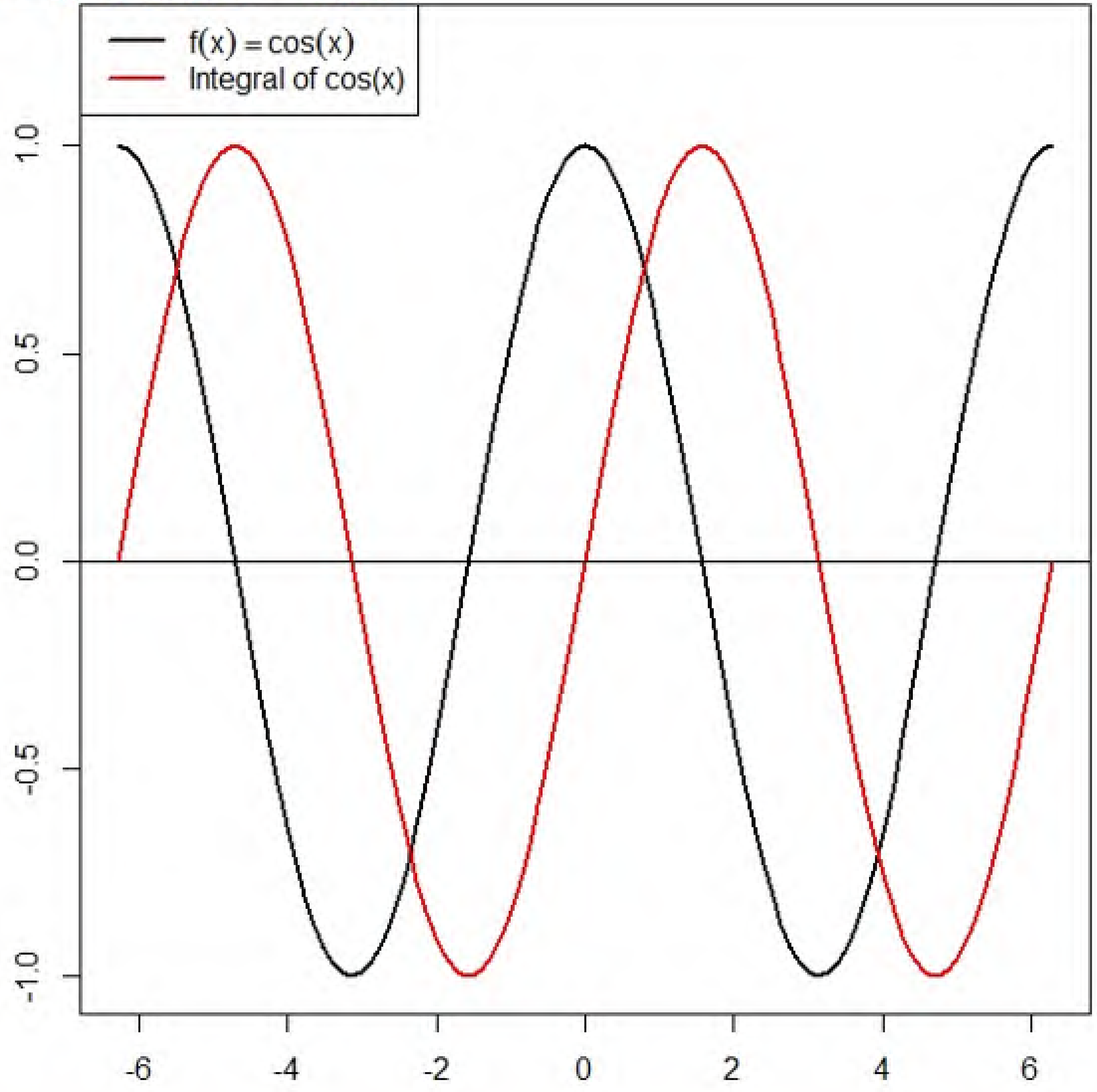
03

生物学的动态展示

生态学中种群数量-时间图像，揭示生态系统动态平衡和物种相互作用。



062 绘制一个原函数的图像



商业领域的应用

01

金融分析图表设计

绘制股票价格时间序列图，展示收益率波动，辅助投资者判断市场动态，制定投资计划。

02

投资组合风险评估

通过绘制风险-回报散点图，帮助投资者理解不同组合的风险收益特性，做出合理资产配置。

03

市场营销趋势分析

展示产品销售量与市场份额随时间的函数关系，协助营销人员洞察市场趋势，制定有效营销策略。

04

客户满意度可视化

绘制满意度与忠诚度图像，企业可识别影响因素，及时优化产品和服务，提升客户体验。

05

运营管理效率优化

分析生产成本与库存量随生产变化的图像，帮助运营管理者发现效率瓶颈，制定优化生产策略。

谢谢

gulp@mail.las.ac.cn