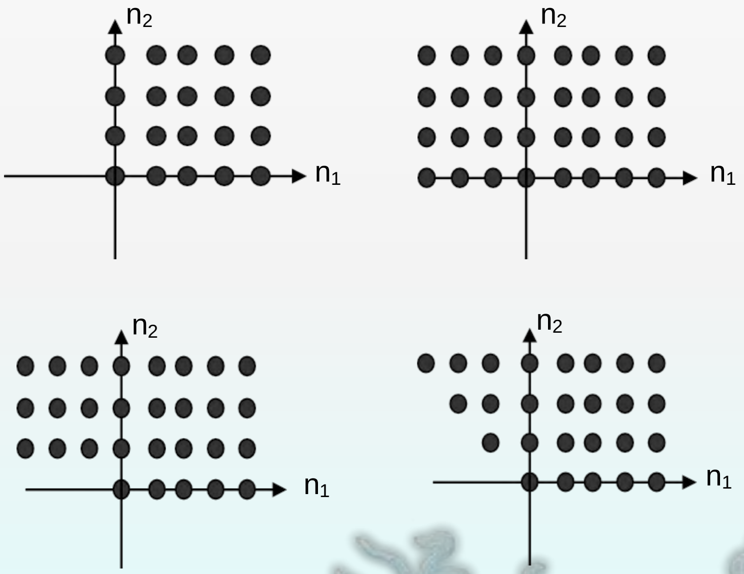
第2讲：多维信号与变换

- **多维信号**
  - 有限域信号与周期信号
  - 对称信号
  - 特殊信号
- **多维变换**
  - 连续信号的多维傅里叶变换
  - 离散信号的多维傅里叶变换
  - 多维离散傅里叶变换（MD-DFT）
  - 多维离散余弦变换（MD-DCT）
  - 多维小波变换 （MD-Wavelet）

有限域信号

有限域信号：定义在有限支撑区域

- 四分之一平面 (QP) 支撑
- 半平面 (HP) 支撑
- 非对称半平面 (NSHP) 支撑
- 楔形支撑

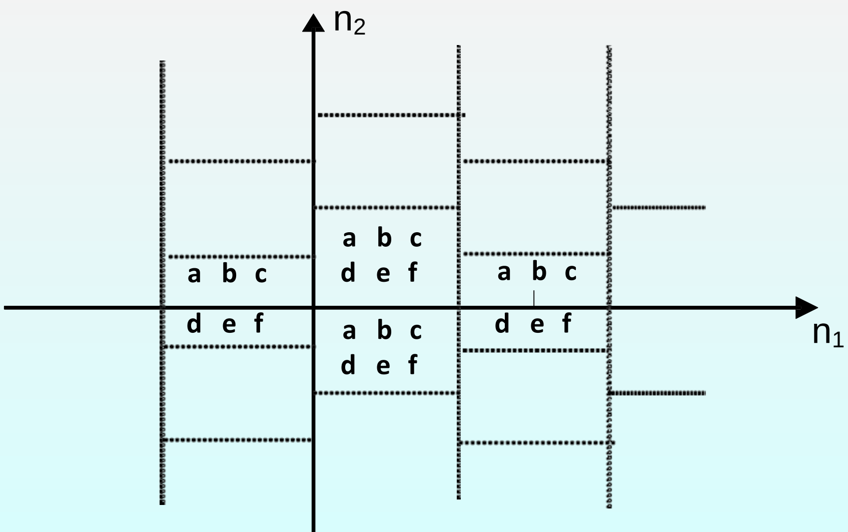


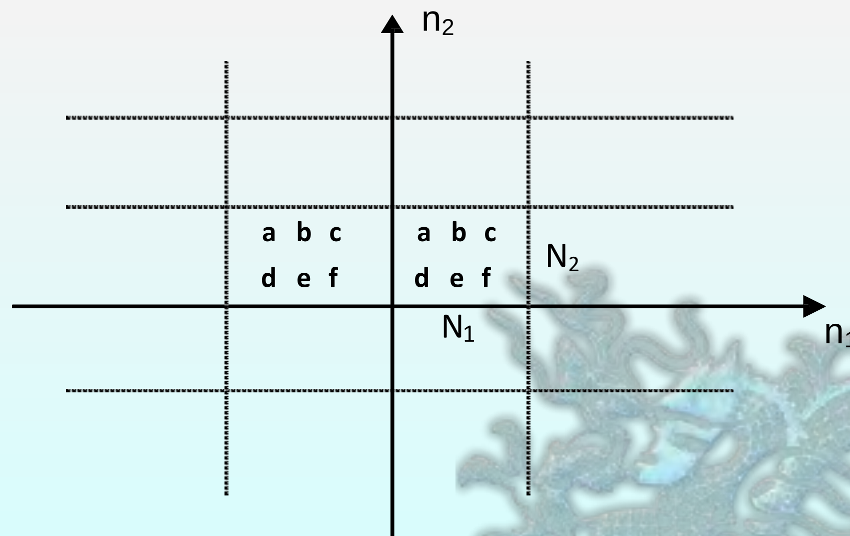
周期信号

- **定义:** $$\tilde{s}(\mathbf{n}) = \tilde{s}(\mathbf{n} + \mathbf{N}\mathbf{r})$$

周期矩阵 $\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1 \mid \mathbf{n}_2] = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$

- **任意周期性**
- **矩形周期性：N 为对角矩阵**





有限域信号的周期延拓

- 有限域信号与周期信号是同构的
  - 给定一个周期信号，主周期是有限域信号
  - 给定一个有限域信号，可以定义它的周期延拓

$$\tilde{s}(n_1,n_2)=\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty} s\ (n_1-i_1N_1,n_2\ -i_2N_2)$$

对称信号

- **双重 (NSHP) 对称**

$$s(n_1, n_2) = s(-n_1, -n_2)$$

- **四重 (QP) 对称**

$$s(n_1, n_2) = s(-n_1, n_2) = s(n_1, -n_2)$$

- **圆周对称**
  - 如果一个信号$s(n_1, n_2)$仅仅是与原点之间距离$n_1^2 + n_2^2$的函数，则被称为圆周对称信号。圆周对称一定是四重对称，反之则不然。

可分离信号

- 一个多维信号(函数)为**可分离的条件**是:

$$s(n_1, n_2, \cdots, n_M) = s_1(n_1)\ s_2(n_2) \cdots s_M(n_M)$$

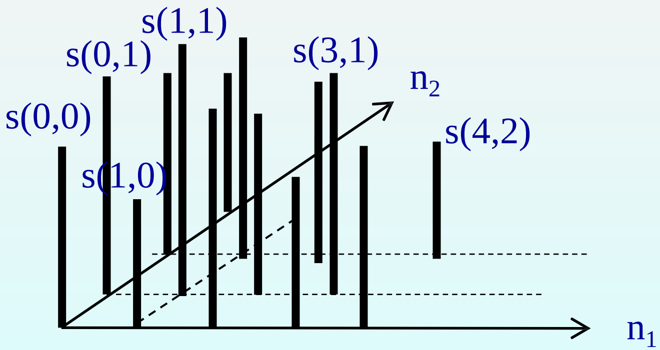
- 一个有限支撑二维信号 $s(n_1, n_2)$ 可以**表示成一个矩阵 S.** 如果信号是**可分离**的, 则矩阵 $\mathbf{S}$ 可以写成**矢量积**的形式: $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2^T$，其中矢量 $\mathbf{s}_1$和$\mathbf{s}_2$ 分别表示一维信号 $s_1(n_1)$ 和 $s_2(n_2)$。
- 一个 **$N_1 \times N_2$ 的矩阵**具有 N_1N_2 个自由度，而**矢量积**形式则具有 $N_1 + N_2$个自由度。

特殊信号：二维克罗内克函数

- **多维脉冲**（克罗内克函数或冲激函数）

$$\delta(n_1, n_2, \cdots, n_M) = \begin{cases} 1 & n_1 = n_2 = \cdots = n_M = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 二维离散时间信号可以表示成**加权平移脉冲之和。**



特殊信号：二维空间频率模式

- **水平模式**

$$s(n_1,n_2) = \cos(\omega_1 n_1)$$

- **垂直模式**

$$s(n_1,n_2) = \cos(\omega_2 n_2)$$

- **45度方向**

$$s(n_1,n_2) = \cos(\omega(n_1 - n_2))$$

- **复指数**
  - 二维离散复指数信号

$$s(n_1, n_2) = e^{j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}$$

为矩形周期信号，如果 $\frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{k_1}{N_1}$， $\frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{k_2}{N_2}$，则其周期为（$N_1$，$N_2$），其中$N_1$，$N_2$，$k_1$ 与 k_2 为无单位整数，ω_1 和 ω_2 的单位为弧度。

连续信号的二维傅里叶变换（2D FT）

- 正变换

$$S(u_1, u_2) = \iint_{(x_1,x_2)} s(x_1, x_2) e^{-j(u_1x_1+u_2x_2)} dx_1 dx_2$$

- 反变换

$$s(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{(u_1,u_2)} S(u_1, u_2) e^{j(u_1x_1+u_2x_2)} du_1 du_2$$

- 二维傅里叶变换后为复数

$$S(u_1, u_2) = |S(u_1, u_2)| e^{j\theta(u_1, u_2)} = S_R(u_1, u_2) + jS_I(u_1, u_2)$$

- 角频率变量

$u_i = 2\pi F_i$, F_i 周期数/距离, u_i 弧度/距离

傅里叶变换的收敛性

二维信号 $s(x_1, x_2)$ 可能是无限的

- **一致收敛:** 二重积分一致收敛且为u_1 和 u_2 的连续函数，其条件是:

  $\iint_{x_1 x_2} |s(x_1,x_2)|\,dx_1 dx_2 < \infty$; 即: $s(x_1,x_2)$ 为绝对可积.

- **均方收敛:** 如果$S(u_1, u_2)$存在，但具有间断点，则可以使用一种较弱形式的收敛。例如$s(x_1,x_2)=(\sin x_1/ x_1)(\sin x_2/ x_2)$不是绝对可积的，但它的傅里叶变换可以以均方形式收敛。在间断点附近将出现吉布斯现象。

傅里叶变换的收敛性 (Cont'd)

- <u>广义收敛</u>： 在有些情况下，既不满足一致收敛也不满足均方收敛，但 $S(u_1, u_2)$ 仍然可以被定义，即使用狄拉克冲激函数 $\delta(u_1, u_2)$。

  - 例如： $s(x_1, x_2) = 1$ 对于所有的 (x_1, x_2) 不是绝对可积的，但它的傅里叶变换可以从广义上被定义为:

$$S(u_1, u_2) = \delta(u_1, u_2).$$

二维傅里叶变换：坐标变换

- $g(x_1, x_2) = s(ax_1 + bx_2 + c, dx_1 + ex_2 + f)$

  表示坐标的**仿射变换**。

  如果$S(u_1, u_2)$为$s(x_1, x_2)$的二维傅里叶变换，则$g(x_1, x_2)$的二维傅里叶变换为：

$$G(u_1, u_2) = \frac{1}{ae - bd} e^{j\frac{[(ec-bf)u_1 + (af-cd)u_2]}{ae-bd}} S\left(\frac{eu_1 - du_2}{ae - bd}, \frac{-bu_1 + au_2}{ae - bd}\right)$$

- **平移:** $a = e = 1, b = d = 0.$

$$G(u_1, u_2) = e^{j(cu_1 + fu_2)} S(u_1, u_2)$$

- **旋转:** $c = f = 0,\ a = e = \cos\theta, d = -b = \sin\theta;$

  其中： $ae - bd = 1.$

$$G(u_1, u_2) = S(u_1 \cos\theta - u_2 \sin\theta, u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta)$$

投影切片定理

- 设$s(x_1, x_2)$的傅里叶变换为$S(u_1, u_2)$，且$p_\theta(x_1)$表示$s(x_1, x_2)$的Radon变换，定义为：

$$p_\theta(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)dx_2$$

即：将$s(x_1, x_2)$投影到通过原点具有角度θ的一条直线上。
则有：

$$P_\theta(\Omega) = S(\Omega\cos\theta, \Omega\sin\theta)$$

其中$P_\theta(\Omega)$表示对于每个角度θ，$p_\theta(x_1)$的一维傅里叶变换。

- **投影切片定理**是一些医学成像方式的基础，例如计算机断层扫描成像的工作原理

投影切片定理 (cont'd)

- $\theta = 0$的情形

$s(x_1, x_2)$投影到水平轴，定义为：

$$p_0(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x_1, x_2) dx_2$$

对投影$p_0(x_1)$进行**一维傅里叶变换**，则有：

$$P_0(\mathrm{u}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(x_1, x_2) dx_2 \right\} e^{-j\,\mathrm{u}_1 x_1} dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_1, x_2)\, e^{-j\,\mathrm{u}_1 x_1}\, dx_1 dx_2 = S(\mathrm{u}_1, 0)$$

离散信号的二维傅里叶变换

- 离散信号的二维傅里叶变换具有**周期性**，其周期为**$2\pi \times 2\pi$**

$$S\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} s(n_1, n_2)\, e^{-j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}$$

- **反变换**

$$s(n_1, n_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) e^{j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 d\omega_2$$

- **特性:**
  - $s(n_1, n_2)$ 为实数意味着 $S(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 具有共轭对称性
  - $s(n_1, n_2)$ 为二重对称，则意味着 $S(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ 为实数

$$s(n_1, n_2) = s^*(-n_1, -n_2) \rightarrow S\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = S^*\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$$

二维离散傅里叶变换（2D DFT）

- 2D DFT 可通过对一个**有限长信号$s(n_1, n_2)$的离散时间傅里叶变换$S(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$**进行采样获得，或通过计算其**周期延拓$\tilde{s}(n_1, n_2)$的傅里叶级数**来获得。

$$S(k_1,k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} s(n_1,n_2)e^{-j\left(\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1+\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2\right)}$$

- **归一化频率变量**

$$u_1 = \frac{\omega_1}{\Delta x_1} = \frac{2\pi k_1}{N_1\,\Delta x_1} \quad \text{and} \quad u_2 = \frac{\omega_2}{\Delta x_2} = \frac{2\pi k_2}{N_2\,\Delta x_2}$$

$$u_{\mathrm{i}} = 2\pi F_{\mathrm{i}} \quad \text{and} \quad \omega_{\mathrm{i}} = 2\pi f_{\mathrm{i}}$$

2D DFT的计算

- 由于二维复指数是**可分离**的，2D DFT可通过**串联两个1D DFT**来实现，首先对$s(n_1,n_2)$进行行变换，然后对$S(n_1,k_2)$进行列变换，即：

$$S(k_1,\, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\left[\sum_{n_2=0}^{N_2-1} s(n_1,n_2)e^{-j\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2}\right]e^{-j\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1}$$

其中：

$$S(n_1,\, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} s(n_1,n_2)e^{-j\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2}$$

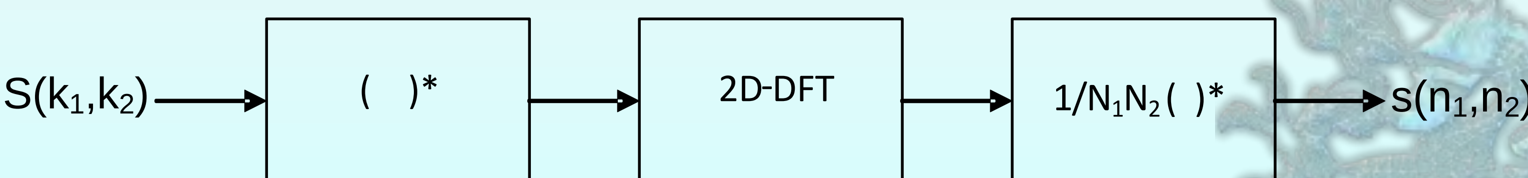
为图像第n_2行的1D DFT。

二维离散傅里叶反变换的计算

- **2D IDFT**可以通过**FFT正变换**进行计算，首先求出$S(k_1, k_2)$的复数共轭，然后计算其2D DFT正变换，最后求出变换后的复数共轭，即：

$$s(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}S(k_1,k_2)\,e^{j\left(\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1+\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2\right)}$$

$$=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left(S^*(k_1,k_2)\,e^{-j\left(\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1+\frac{2\pi k}{2N_2}n_2\right)}\right)^*$$



2D DFT的性质

- 2D DFT 为**矩形周期**的

$$S(k_1,k_2)=S(k_1+N_1,k_2)=S(k_1,k_2+N_2)\ \text{for all}\ (k_1,k_2)$$

- **$s(n_1,n_2)$为实数，** 意味着 $S(k_1,k_2)$为**厄密特对称**的。

$\|S(0,0)\|$	$\|S(1,0)\|$	$\|S(2,0)\|$	$\|S(3,0)\|$	$\|S(2,0)\|$	$\|S(1,0)\|$
$\|S(0,1)\|$	$\|S(1,1)\|$	$\|S(2,1)\|$	$\|S(3,1)\|$	$\|S(4,1)\|$	$\|S(5,1)\|$
$\|S(0,2)\|$	$\|S(1,2)\|$	$\|S(2,2)\|$	$\|S(3,2)\|$	$\|S(4,2)\|$	$\|S(5,2)\|$
$\|S(0,3)\|$	$\|S(1,3)\|$	$\|S(2,3)\|$	$\|S(3,3)\|$	$\|S(2,3)\|$	$\|S(1,3)\|$
$\|S(0,2)\|$	$\|S(5,2)\|$	$\|S(4,2)\|$	$\|S(3,2)\|$	$\|S(2,2)\|$	$\|S(1,2)\|$
$\|S(0,1)\|$	$\|S(5,1)\|$	$\|S(4,1)\|$	$\|S(3,1)\|$	$\|S(2,1)\|$	$\|S(1,1)\|$

0	$\Phi(1,0)$	$\Phi(2,0)$	**0**	$-\Phi(2,0)$	$-\Phi(1,0)$
$\Phi(0,1)$	$\Phi(1,1)$	$\Phi(2,1)$	$\Phi(3,1)$	$\Phi(4,1)$	$\Phi(5,1)$
$\Phi(0,2)$	$\Phi(1,2)$	$\Phi(2,2)$	$\Phi(3,2)$	$\Phi(4,2)$	$\Phi(5,2)$
0	$\Phi(1,3)$	$\Phi(2,3)$	0	$-\Phi(2,3)$	$-\Phi(1,3)$
$-\Phi(0,2)$	$-\Phi(5,2)$	$-\Phi(4,2)$	$-\Phi(3,2)$	$-\Phi(2,2)$	$-\Phi(1,2)$
$-\Phi(0,1)$	$-\Phi(5,1)$	$-\Phi(4,1)$	$-\Phi(3,1)$	$-\Phi(2,1)$	$-\Phi(1,1)$

2D DFT的性质 (cont'd)

- 循环位移

$$s\left(\langle n_1 - M_1\rangle_{N_1}, \langle n_2 - M_2\rangle_{N_2}\right) \leftrightarrow S(k_1, k_2)\, e^{-j2\pi\left(\frac{M_1k_1}{N_1}+\frac{M_2k_2}{N_2}\right)}$$

- 循环卷积

$$h(n_1, n_2) \circledast\circledast s(n_1, n_2) \leftrightarrow H(k_1, k_2)\, S(k_1, k_2)$$

- 帕斯瓦尔定理:

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}|s(n_1, n_2)|^2 = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}|S(k_1, k_2)|^2$$

二维离散余弦变换（2D DCT)

- 广泛应用于**图像与视频压缩标准**中
  1) 不同于DFT的复数域运算，DCT是实数域运算
  2) 可将信号进行对称延拓后使用FFT进行计算
  3) 基函数可分离：二维DCT可转换成两个一维DCT的串联
- DCT共有**8种类型**，其中最常用的方式为**类型II**:
- **正变换** $C(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}4s(n_1,n_2)cos(\frac{\pi k_1}{2N_1}(2n_1+1))cos(\frac{\pi k_2}{2N_2}(2n_2+1))$

$$0\le k_1\le N_1-1,\ 0\le k_2\le N_2-1$$

- **反变换**

$$s(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}w(k_1)w(k_2)C(k_1,k_2)cos(\frac{\pi k_1}{2N_1}(2n_1+1))cos(\frac{\pi k_2}{2N_2}(2n_2+1))$$

其中： $w(k)=\begin{cases}\frac{1}{2} & k=0\\ 1 & k\neq 0\end{cases}$

DCT

- 类型II DCT的**对称延拓**可表示为：

$$g(n)=s(n)+\ s(2N-1-n),\qquad 0\le n\le\ 2N-\ 1$$

- 使用**2N点FFT**计算N点信号 $g(n)$ 的N点DCT $C(k)$ 的步骤如下：

1) 构造 $2N$ 点对称延拓信号 $g(n)$。

2) 计算 $g(n)$ 的 $2N$ 点DFT $G(k)$， $k=0,\dots,2N-1$。

3) $C(k)=W_{2N}^{k/2}G(k),k=0,\dots,N-1,$ 其中： $W_{2N}^{k}=e^{-j\frac{2\pi k}{2N}}$

- **DCT的高频系数**具有比DFT更低的能量，这是由于**对称延拓**的缘故。

DCT (cont'd)

设 $h(n)=g(n-½)=s(n-½)+s(2N-½-n)$,

$½ \le n \le 2N-½$ 为关于n=N对称的偶函数

则：

$$H(k)=\sum_{n=1/2}^{2N-1/2} h(n)e^{-j\frac{\pi kn}{N}}$$

$$=\sum_{n=1/2}^{2N-1/2} h(n)cos\frac{\pi kn}{N}-j\sum_{n=1/2}^{2N-1/2} h(n)sin\frac{\pi kn}{N}$$

$$=2\sum_{n=1/2}^{N-1/2} h(n)cos\frac{\pi kn}{N}$$

$$=2\sum_{n=1/2}^{N-1/2} g(n-1/2)cos\frac{\pi kn}{N}$$

$$=2\sum_{n=1/2}^{N-1/2} s(n-1/2)cos\frac{\pi kn}{N}$$

DCT (cont'd)

令$n' = n - \frac{1}{2}$, 则$H(k) = 2\sum_{n'=0}^{N-1} s(n')cos\frac{\pi k\left(n' + \frac{1}{2}\right)}{N}$

$$= 2\sum_{n'=0}^{N-1} s(n')cos\frac{\pi k(2n' + 1)}{2N}$$

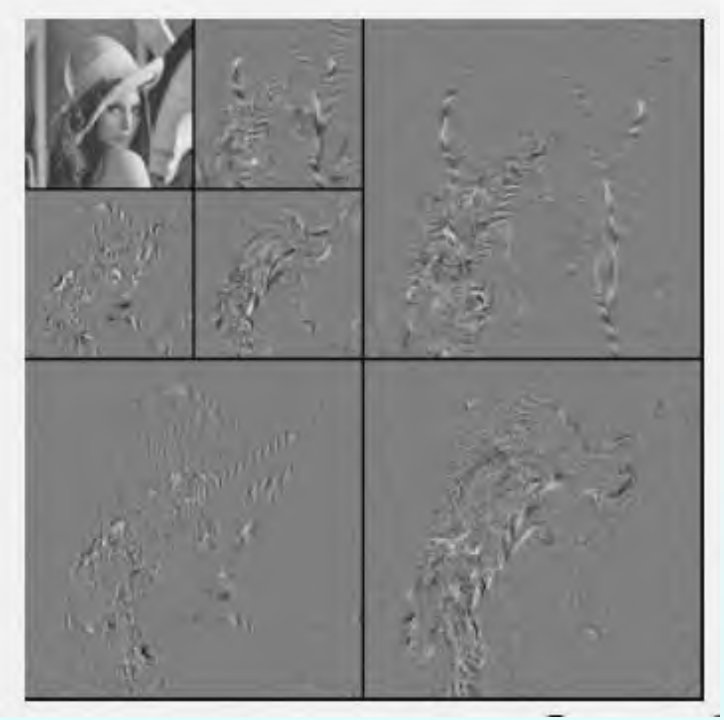
=DCT[s(n)]

又$H(k) = \mathrm{DFT}\left[g\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] = e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\mathrm{DFT[g(n)]}$,

因 此: DCT[s(n)]= $e^{-j\frac{\pi k}{2N}}$DFT[g(n)]

二维离散小波变换（2D DWT)

- 二维离散小波变换（2D DWT）为多尺度图像表示。



- 关于2D DWT的讨论将放在第3章中FIR滤波与多尺度图像表示

二维信号与变换的显示

- 二维函数可以被显示为**灰度图、等距（曲面）图、等高线图，**可由MATLAB绘制。
- 适当的**比例缩放**对于灰度图的显示是非常重要的，例如显示图像的2D DFT或对多幅图像进行比较时。常见的比例缩放方法为**线性最小/最大缩放和非线性缩放**

例如：对傅里叶变换幅值的对数缩放：

$$D(u_1, u_2) = \log\left(1 + |F(u_1, u_2)|\right)$$

其中D() 表示显示图像，F()表示实际的傅里叶变换

二维信号与变换的显示

- **曲面图：** 可给出3D绘图的外观. 线框图或阴影图可表示曲面。注意曲面的某些部分可能会被遮挡。对于**点扩散函数**以及系统的频率响应的显示非常有用。
- **等高线图：** 所有具有某个特定值的点将被连接在一起形成一条连续的曲线。这种类型的图对于二维函数的最小/最大值定位非常有用。