课程名称：信号安全与目标识别

signal security and recognition

授课教师：黄伟庆、王思叶

助　　教：

课程名称：信号安全与目标识别

signal security and recognition

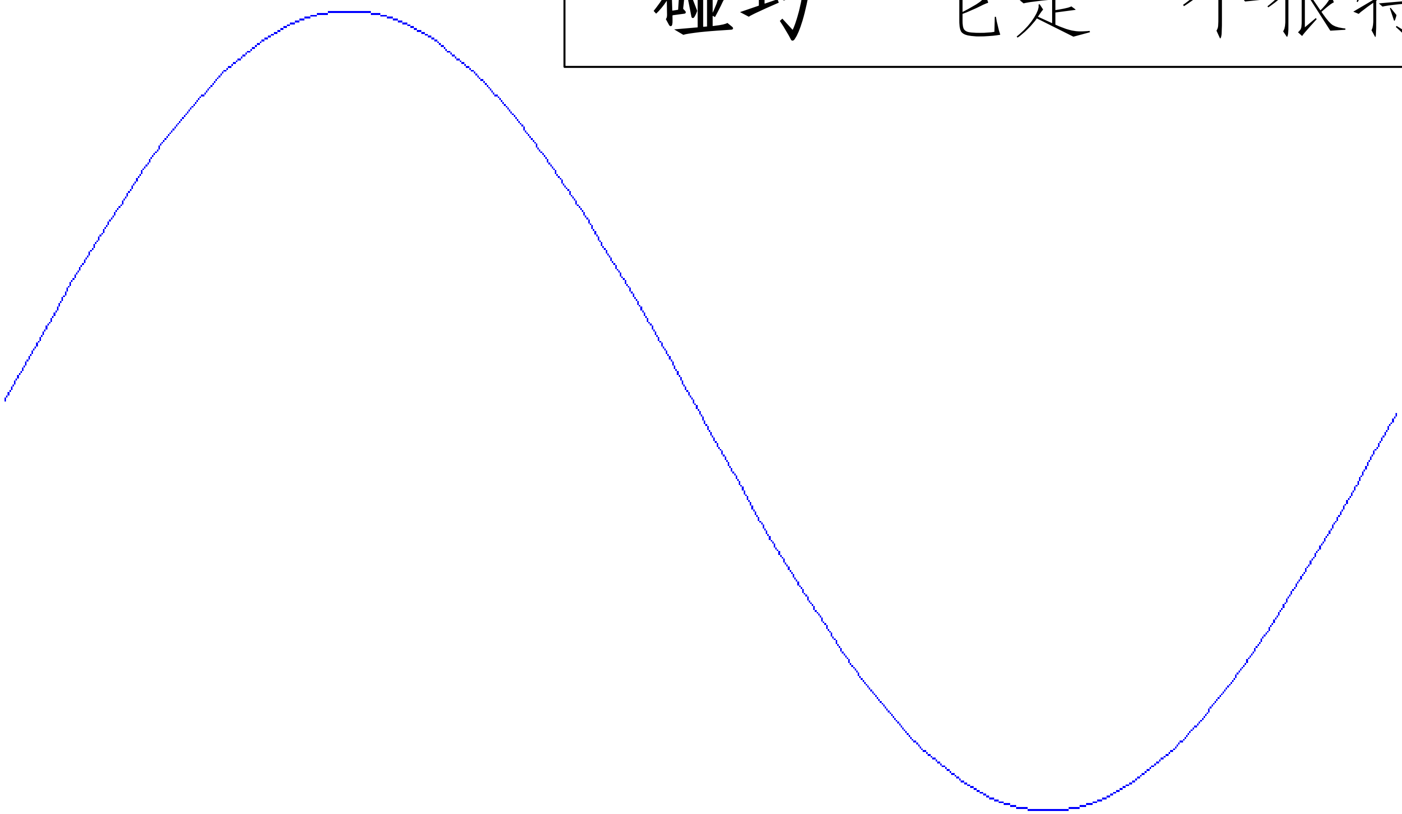
[第2次课]

信号表征与时频分析

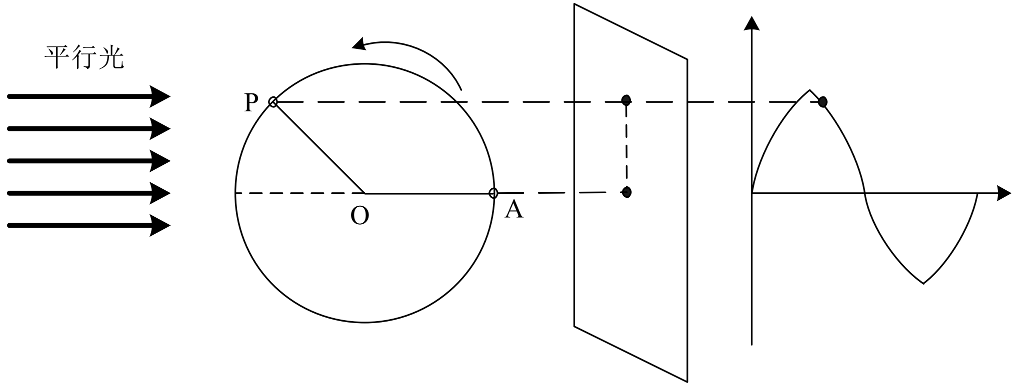
授课教师：黄伟庆

- 让我们从“**波**”作为开始

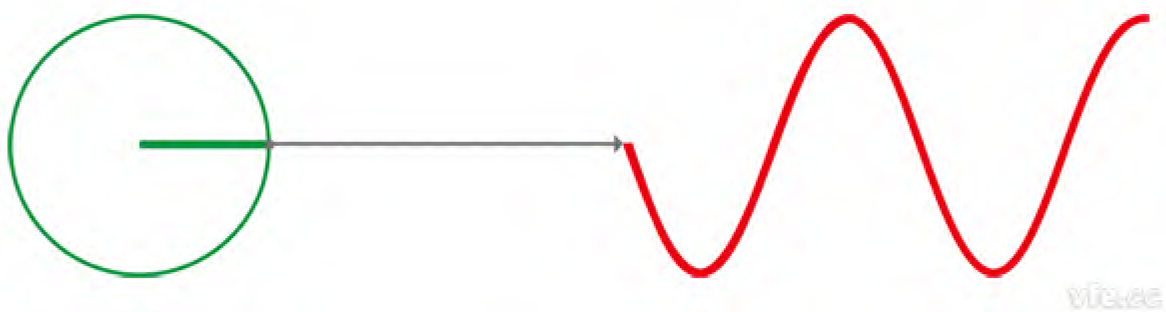
我们遇到的第一个“波”：**正弦波**，“**碰巧**”它是一个很特别的“波”



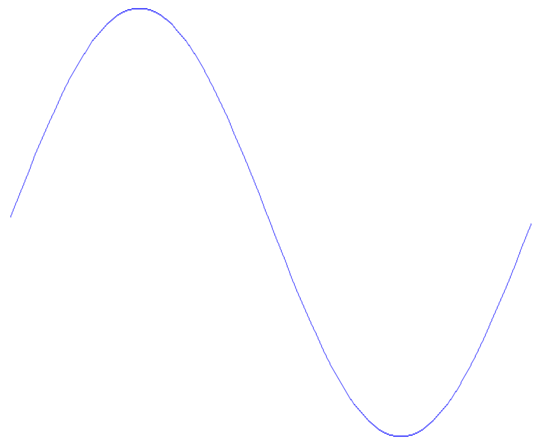
- 让我们扒一扒正弦波的由来



➢正弦波实质上是一个圆周运动在一条直线上的投影；



- 波的特征
  - 幅值A：圆周运动的半径；
  - 角频率ω_C：圆周运动的快慢；
  - 初始相位φ：圆周运动的起始位置；
  - 数学描述：



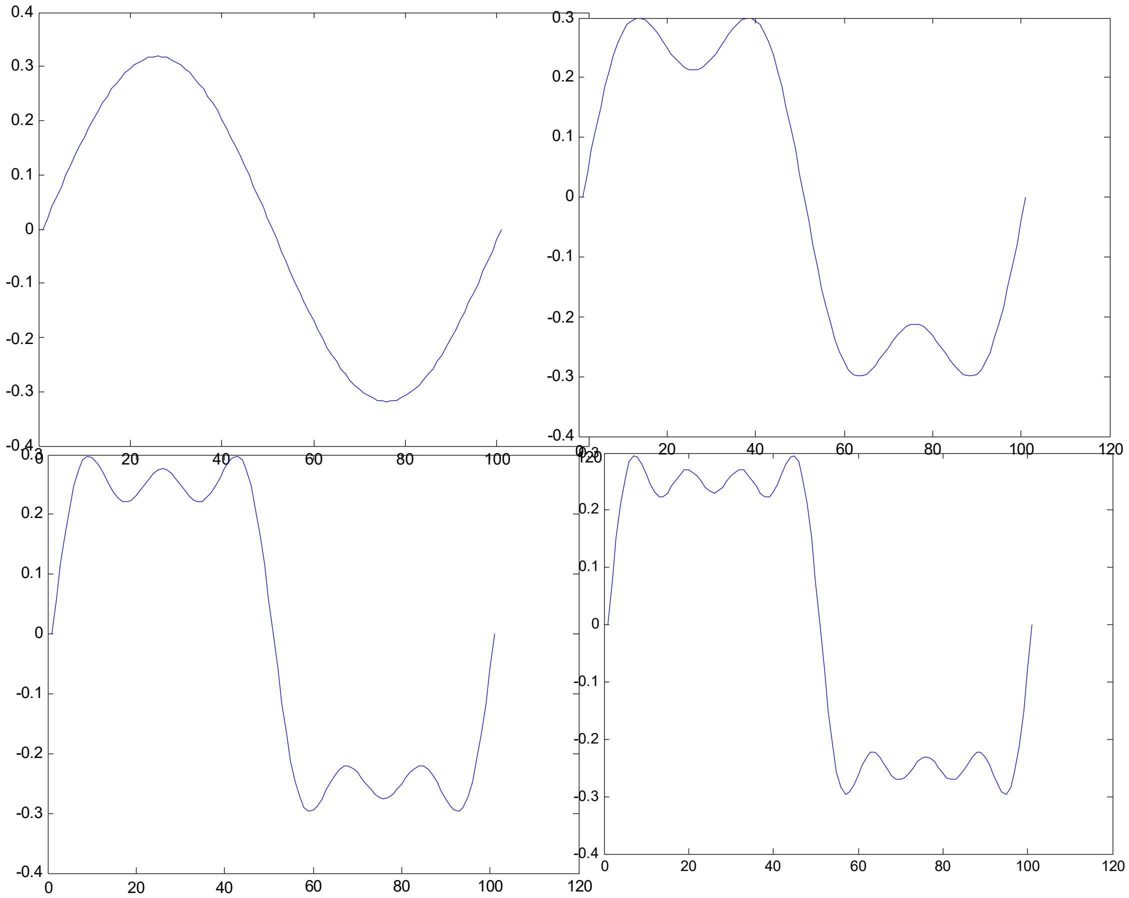
$$S = A\sin(\omega\ t + \varphi_C)$$

其中，$\omega_C = 2\pi f_C$，f_C被称为频率；

傅里叶级数与傅里叶变换

- 其他形状的波怎么产生的呢?

$$\frac{\sin(\omega_C t)}{\pi}$$



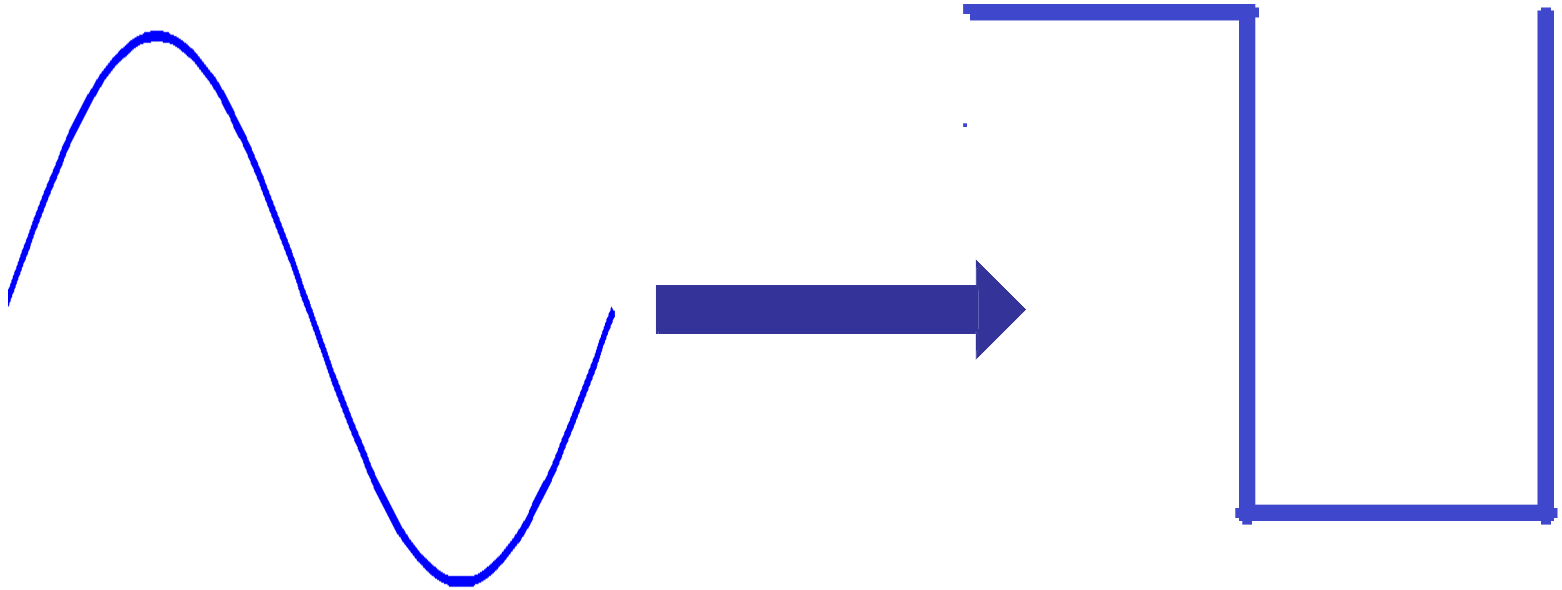
$$\frac{\sin(\omega_C t)}{\pi}+\frac{\sin(3\omega_C t)}{3\pi}$$

$$\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi}+\frac{\sin(3\omega_c t)}{3\pi}+\frac{\sin(5\omega_c t)}{5\pi}$$

$$\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi}+\frac{\sin(3\omega_c t)}{3\pi}+\frac{\sin(5\omega_c t)}{5\pi}+\frac{\sin(7\omega_c t)}{7\pi}$$

傅里叶级数与傅里叶变换

- 我们可以利用不同频率的正弦波叠加出各种形状的波形；



傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数展开
  - 任一波形都可由特定频率的正弦波进行叠加而成；
  - 具体可由傅里叶级数展开描述：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

  - 其中：

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \qquad a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 tdt$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 tdt \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}\ \text{(频率成分间隔)}$$

  - 令： $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$
  - 则*f(t)*可表示为：

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

傅里叶级数与傅里叶变换

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

- 由展开的傅里叶级数可以发现:
  - c_0为直流分量;
  - c_n为每个频率成分的幅值;
  - $c_1\cos(\omega_0 t + \emptyset_1)$ 是展开的频率成分中最小的频率成分,被称为*f(t)*的基波或一次谐波;
  - $\cos(n\omega_0 t + \emptyset_n)$ 被称为*f(t)*的*n*次谐波;
  - c_n为第*n*次谐波的幅值;
  - f(t) 并非包含所有的频率成分,是由特定的频率成分构成的;
  - 每个频率成分的幅值也并非相同。

傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数的定义

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$$

➢ 根据欧拉公式：

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{jx}+e^{-jx})$$

注意欧拉公式引入了负频率，负频率怎么理解呢？

➢ *f(t)*可表示为：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_n}{2}e^{j\phi_n}e^{jn\omega_0 t}+\frac{c_n}{2}e^{-j\phi_n}e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

➢ 令：

$$F_n=\frac{c_n}{2}e^{j\phi_n},\ F_{-n}=\frac{c_n}{2}e^{-j\phi_n},\ \phi_{-n}=-\phi_n$$

➢ 则：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}\qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

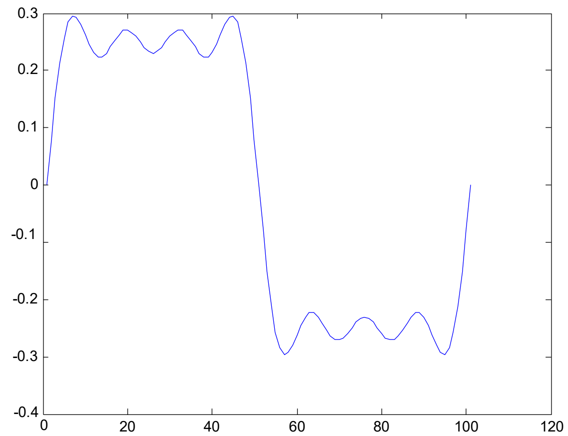
傅里叶级数与傅里叶变换

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

- 当$f(t)$为周期信号时，T为有限值，ω_0也为有限值，则$f(t)$的频谱为离散的谱线组成，每个谱线的幅值为F_n，也称为傅里叶级数，如16~19页的图形所示;

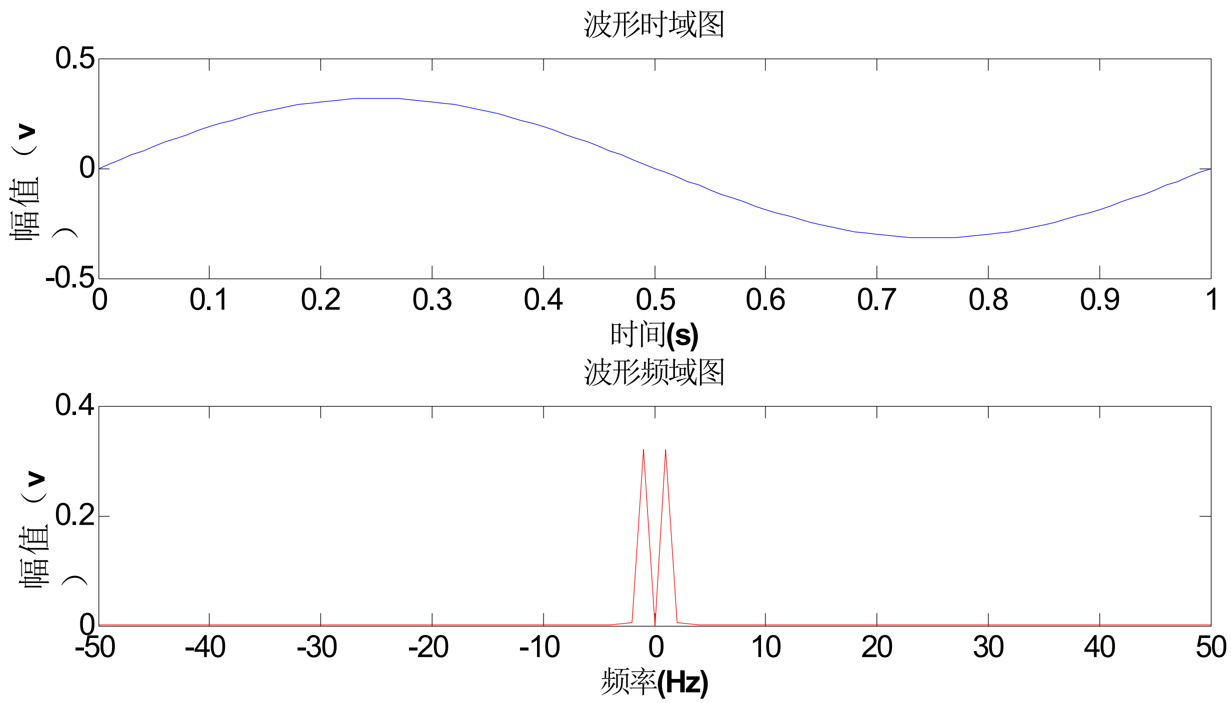
傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶级数的作用：
  - 图中的信号包括哪些频率成分？
  - 哪些频率成分比较强，哪些比较弱？
  - 如何祛除其中的某些频率成分？
  - 如何产生另一个波形，使它们具有不同的频率成分？
  - 上述问题在时域内进行操作是极其痛苦的！



傅里叶级数与傅里叶变换

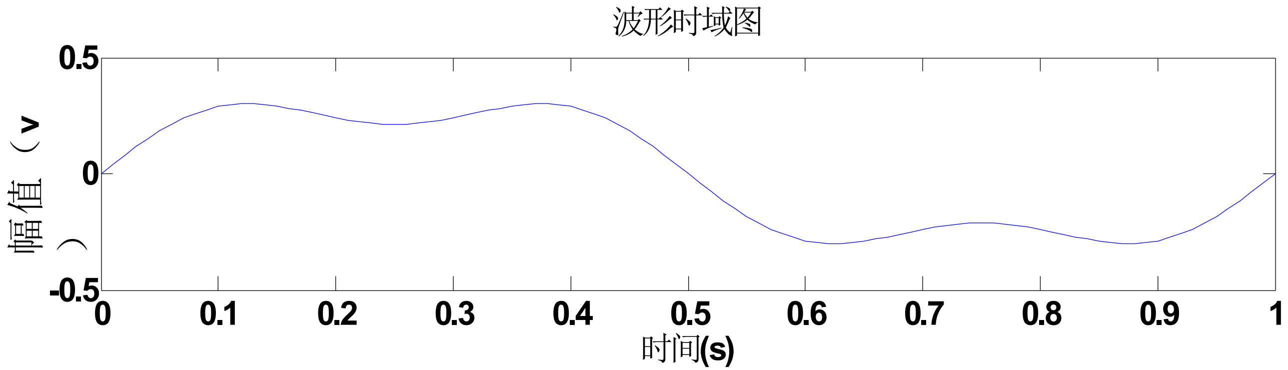
- 傅里叶变换的效果
  - 展示“在特定时间内段变化的一段信号”所包含的频 率成分以及每个频率成分的幅值。
  - 举几个例子：



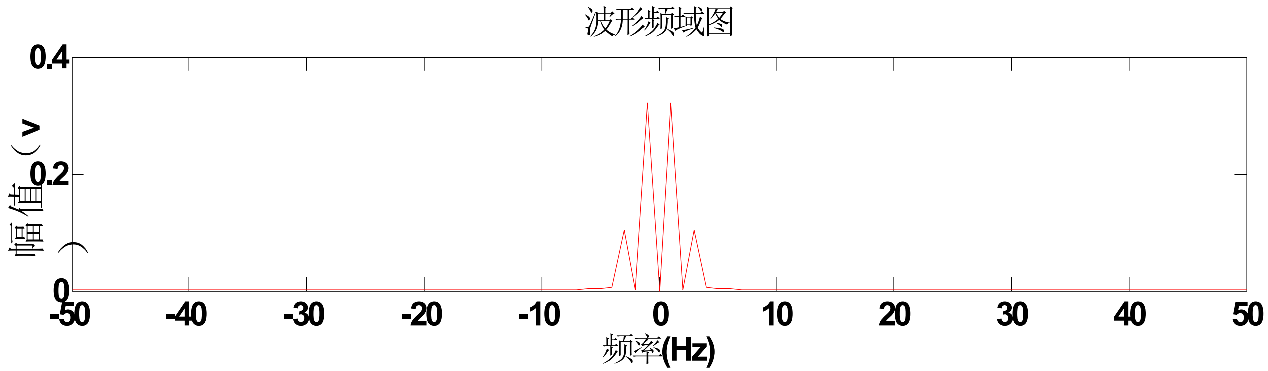
$\frac{\sin(\omega_C t)}{\pi}$, $\omega_C = 2\pi$, $f_C = 1\text{Hz}$;

在频域里，上述波形为两个“谱线”：+1Hz、-1Hz；（实际中频率不会为负，这里可以理解为角频率的逆时针旋转）

傅里叶级数与傅里叶变换

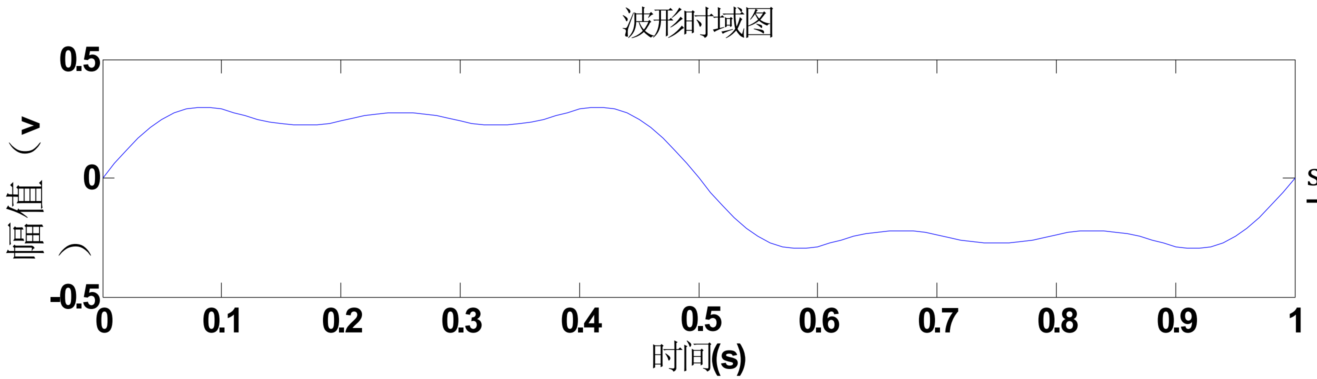


$$\frac{\sin(\omega_C t)}{\pi} + \frac{\sin(3\omega_C t)}{3\pi}$$

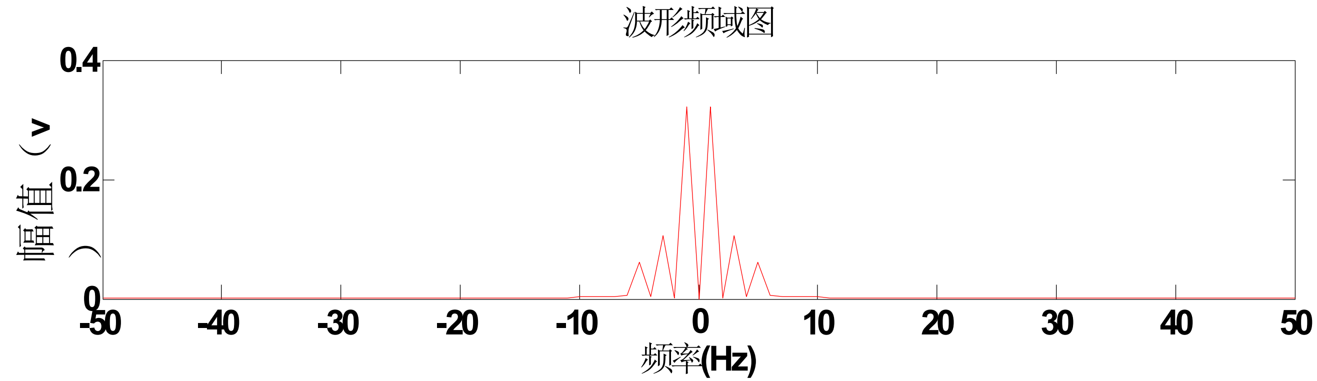


在频域里，上述波形为四个“谱线”：
+1Hz、-1Hz；
+3Hz、-3Hz。

傅里叶级数与傅里叶变换



$$\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi}+\frac{\sin(3\omega_c t)}{3\pi}+\frac{\sin(5\omega_c t)}{5\pi}$$



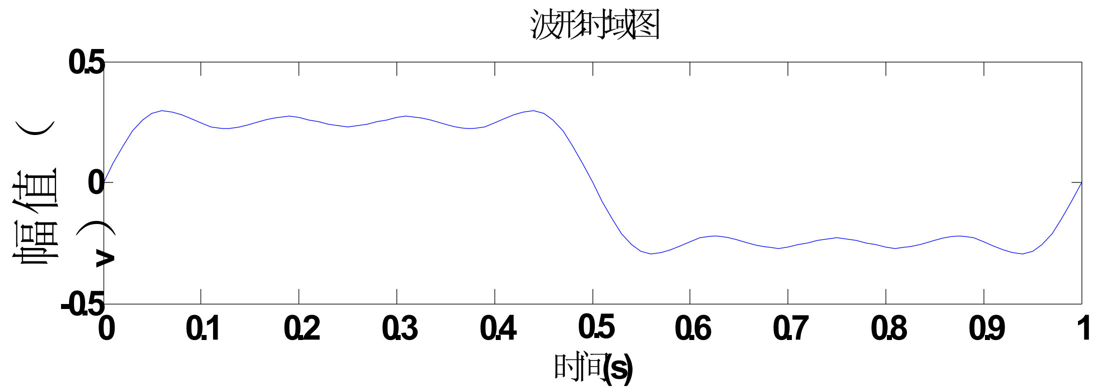
在频域里，上述波形为六个“谱线”：

+1Hz、-1Hz；

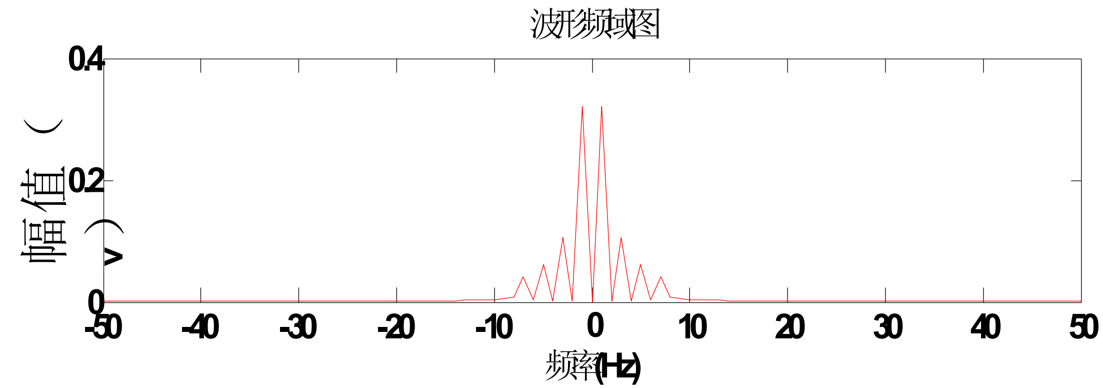
+3Hz、-3Hz；

+5Hz、-5Hz。

傅里叶级数与傅里叶变换



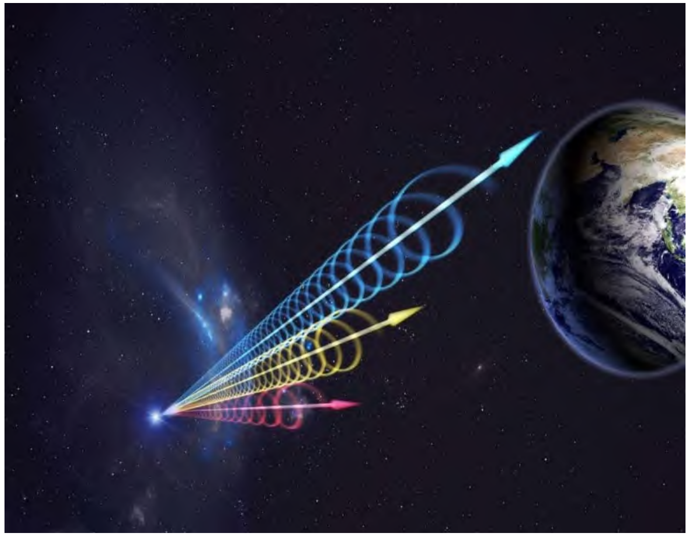
$$\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi} + \frac{\sin(3\omega_c t)}{3\pi} + \frac{\sin(5\omega_c t)}{5\pi} + \frac{\sin(7\omega_c t)}{7\pi}$$



在频域里，上述波形为八个“谱线”：
+1Hz、-1Hz；
+3Hz、-3Hz；
+5Hz、-5Hz；
+7Hz、-7Hz。

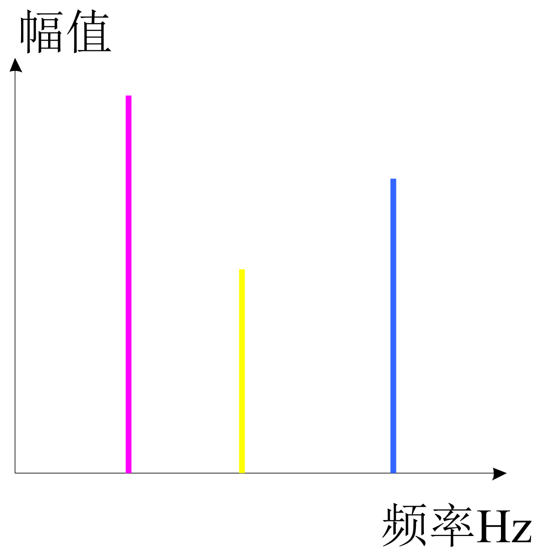
傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅立叶的作用
  - 换一个角度看世界！



我们习惯的世界：万事万物随着时间流逝，当然也包括电磁波

傅里叶变换



透过时间，去观察一个时间静止的世界：频谱世界。

傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶变换的作用
  - 呈现特定时间段内时域信号所包含的频率成分，以及每个频率成分的幅值和相位;
  - 将复杂的时域特征（各式各样的波形）变换为简单的频域特征（谱线）；
  - 但傅里叶变换也存在缺陷：由于其剥离了时间，无法反应频域特征与时域特征的关系，即当波形的频谱特征随着时间变化时，其无法呈现频域特征在时间上的变化过程。

傅里叶级数与傅里叶变换

- 通过 F_n 与 ω_0 的关系即可描述周期信号的频率特征；这是针对周期信号的描述方法，但通常我们所面对的信号波形不是完全的周期信号，因此，无法直接利用傅里叶级数的分析方法。
- 我们可以将非周期信号等效为周期为无限大的周期信号，然后对其进行傅里叶级数的展开。

傅里叶级数与傅里叶变换

- 当$f(t)$为非周期信号时，T为无穷大，ω_0趋近于0，谱线的间隔非常小，成为连续的频谱图；
- 我们将 F_n代入到傅里叶级数展开式中，则：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt\right] e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt\right] e^{jn\omega_0 t} \omega_0$$

- 由于：$T \rightarrow \infty$，

则，$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega, n\omega_0 \rightarrow \omega$，$\sum \rightarrow f$ 则$f(t)$可表示为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt\right] e^{j\omega t} d\omega$$

- 将 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ 定义为$f(t)$的傅里叶变换。

傅里叶级数与傅里叶变换

- 傅里叶变换可以用于分析周期信号以及非周期信号的频域特征

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \qquad F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- 傅里叶变换逆变换
  - ➢ 由于：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

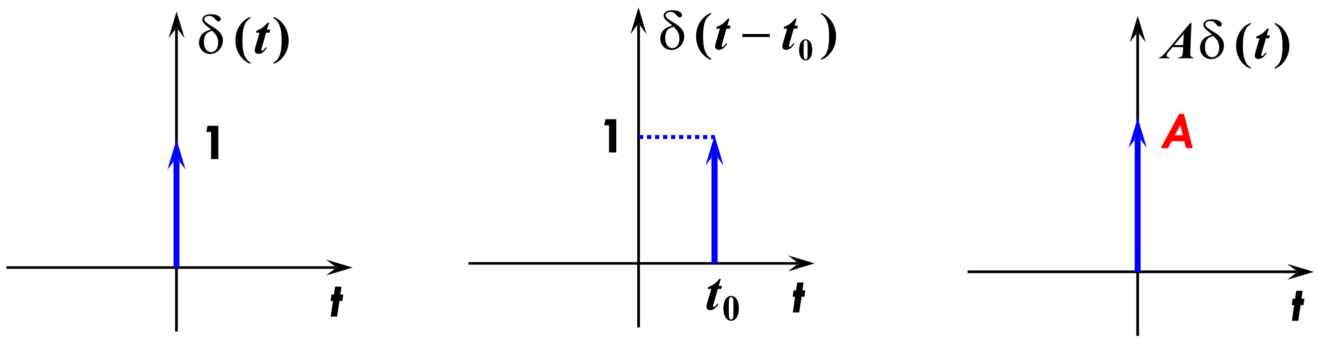
  - ➢ 则可得：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} dt \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi f t} dt$$

傅里叶级数与傅里叶变换

- 常用波形的傅里叶变换
  - 单位冲激函数

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases} \text{ 且 } \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1, \text{对任意}\varepsilon>0$$



傅里叶级数与傅里叶变换

- 单位冲激函数的性质
  - 筛选性质 设函数$f(t)$ 是定义在（$-\infty, +\infty$）上的有界函数

    且在$t=0$处连续，则 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$

    一般地，若$f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续，则

    $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

  - 对称性质

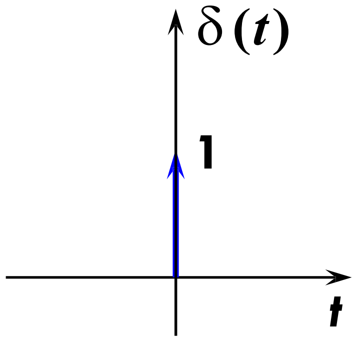
    δ 函数为偶函数，即 $\delta(t) = \delta(-t)$

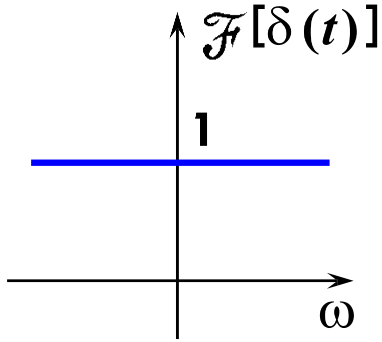
傅里叶级数与傅里叶变换

- 利用筛选性质，可得出δ函数的 Fourier 变换：

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1.$$

➢ 即$\delta(t)$与1构成Fourier变换对：$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$





➢ 由此可见，单位冲激函数包含所有频率成份，且它们具有相等的幅度，称此为均匀频谱或白色频谱。

傅里叶级数与傅里叶变换

- 按照 Fourier 逆变换公式有：

$$F^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \bullet e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$

- 由上式可得重要公式： $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{j\omega t} \mathbf{d}\omega = \mathbf{2\pi\delta(t)}.}$

例如， 求 $f(t)=1$ 的Fourier 变换。

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 e^{-j\omega t} \mathrm{d}\, t = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

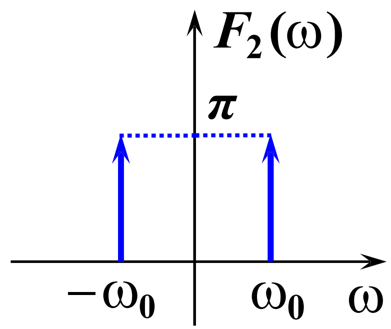
傅里叶级数与傅里叶变换

分别求函数 $f_2(t)=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$ 与 $f_2(t)=\cos\omega_0 t$ 的 Fourier 变换

(1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)] \quad =\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)t}\mathrm{d}t =2\pi\delta(\omega_0-\omega) =2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

(2) 由 $\cos\omega_0 t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$



有 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$

$$=\frac{1}{2}(\mathscr{F}[\mathrm{e}^{j\omega_0 t}]+\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}])$$

$$=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0).$$

傅里叶变换的性质

- 傅里叶变换有许多基本性质：
  - ➢ 线性
  - ➢ 奇偶性
  - ➢ 对称（互易）性
  - ➢ 尺度变换（时频展缩）
  - ➢ 时移（延时）特性
  - ➢ 频移特性
  - ➢ 卷积定理
  - ➢ 时域微分和积分
  - ➢ 频域的微分与积分特性

线性特性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$ $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则有: $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$

（这里包括齐次性、叠加性）

奇偶特性

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \qquad e^{-j\omega t}=\cos(\omega t)-j\sin(\omega t)$$

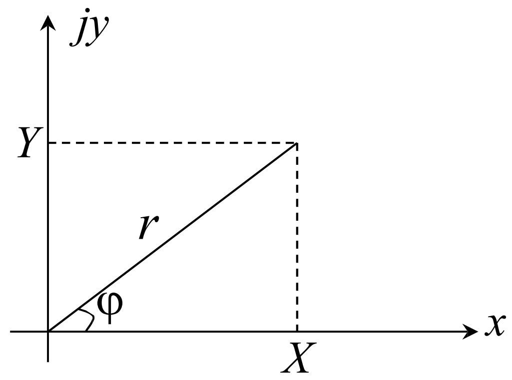
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt-j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$

$$=R(\omega)+jX(\omega)=|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

其中：

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

$$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$



从而：$|F(j\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

实函数：$f(t)$的频谱$F(j\omega)$是共轭对称函数，$R(\omega)$是偶函数，$X(\omega)$是奇函数，$|F(j\omega)|$是偶函数，$\varphi(\omega)$是奇函数。

若：$$F(-j\omega)=F^*(j\omega)=R(\omega)-jX(\omega)$$

有：
$$R(-\omega)=R(\omega),\quad X(-\omega)=-X(\omega)$$

则：$$|F(-j\omega)|=|F(j\omega)|$$

$$\varphi(-\omega)=\arctan\frac{X(-\omega)}{R(-\omega)}=-\varphi(\omega)$$

- 若$f(t)$是实偶函数，其频谱$F(j\omega)$也为实偶函数：
- 由于 $f(t)\sin\omega t$ 为奇函数，在对称区间积为零，即

$$X(\omega)=0$$

则 $$F(j\omega)=R(\omega)=2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

- 若$f(t)$是实奇函数，其频谱$F(j\omega)$为虚奇函数

由于 $f(t)\cos\omega t$ 为奇函数，在对称区间积分为零，

即 $$R(\omega)=0$$

则 $$F(j\omega)=-X(\omega)=-2j\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$

对称（互易）特性

- 若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，则有：$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

  当 $f(t)$ 为偶函数时有: $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

上式表明：傅里叶正反变换式之间存在着对称的互易关系，即信号的波形与信号频谱的波形有着互相置换的关系，其幅度之比为常数 2π ，式中 $-\omega$ 表示频谱函数的坐标轴必须正负对调。例:

$\delta(t) \leftrightarrow 1$ ，利用此性质有: $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

尺度变换（时频展缩）特性

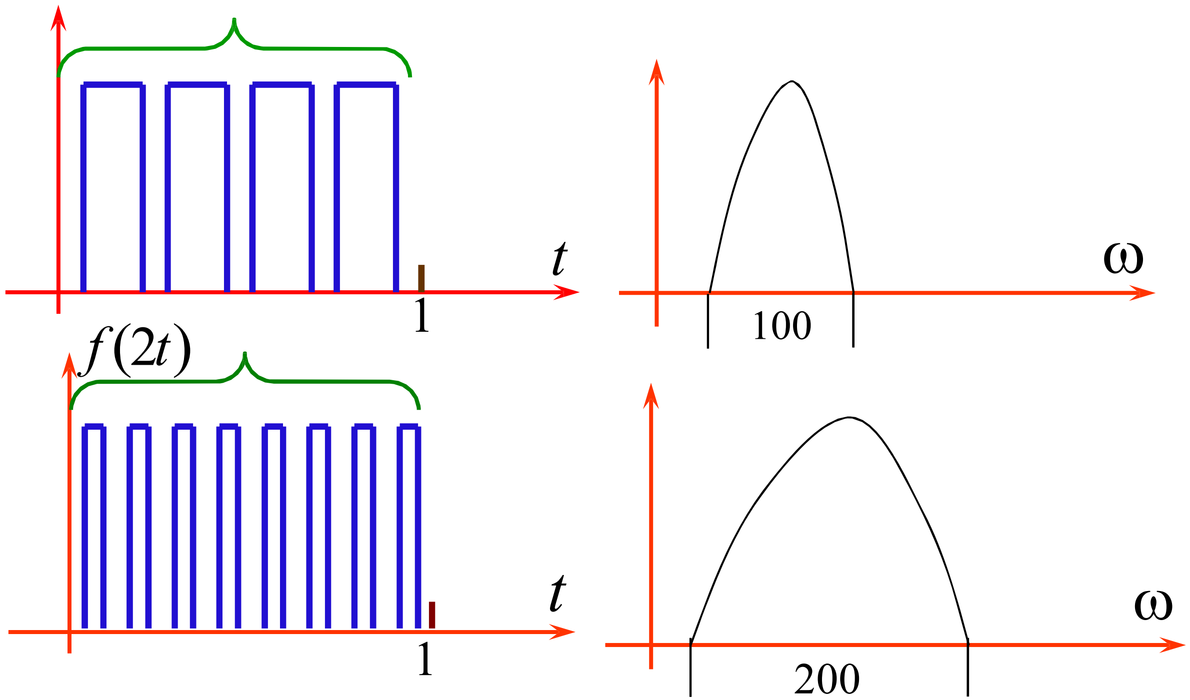
- 若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则有： $f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(j\dfrac{\omega}{a}\right) = \dfrac{1}{|a|} F\left(j\dfrac{1}{a}\omega\right) \qquad a \neq 0$

上式表明了时间函数与频谱函数之间的关系，即对时域的压缩对应于频域的扩展，由此得到一个重要结论：信号周期的持续时间与其所占频带成反比。

- 如果是一路数字信号：假设1个时间单位内传送4次，其带宽是100rad/s；若1个时间单位内传送4×2=8次则其带宽为2×100 = 200rad/s。

➢ 可以理解为：很短的时间发送了更多的信息，信息速率越大，占有的频谱带宽也就越大



延时（时移）特性与频移特性

- 延时特性

蕴含着信道多径效应与频率选择性衰落的关系

若 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$ 则有：$f(t\pm t_0)\leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0}F(j\omega)$

例：$\delta(t)\leftrightarrow 1$ $\delta(t\pm t_0)\leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0}$

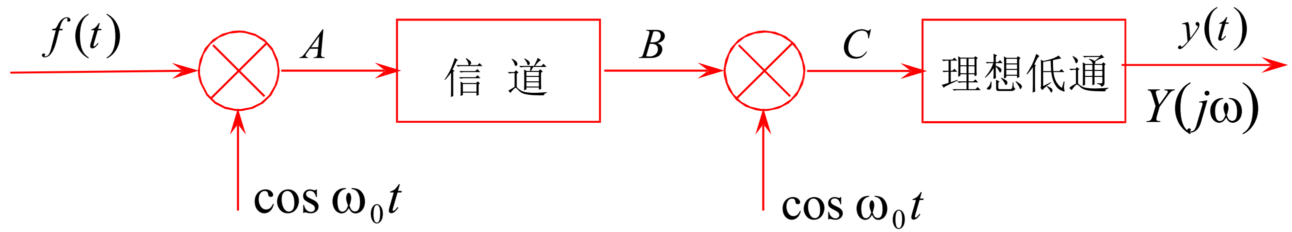
- 频移特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$ 则有：$f(t)e^{\pm j\omega_0 t}\leftrightarrow F(\omega\mp\omega_0)$

频移特性（调制特性）：将频谱函数在频率坐标上平移ω_0，则其代表的信号波形与原信号波形有很大区别。该特性在信号调制中有着十分重要的意义。

蕴含着频率复用

例：



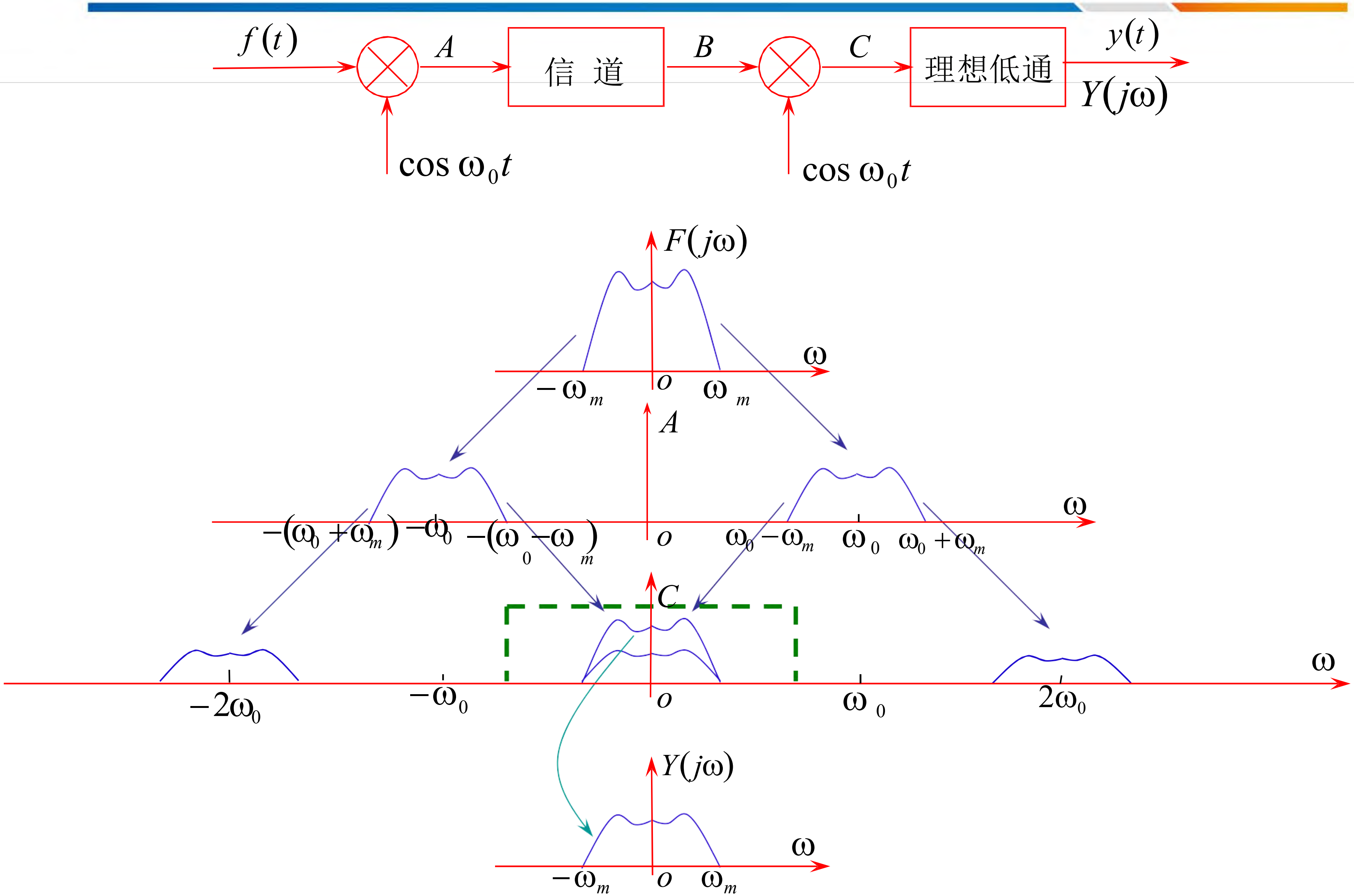
发端：$f_1(t) = f(t)\cos\omega_0 t = f(t)\dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2} = \dfrac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \dfrac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t}$

$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega \mp \omega_0)$

$$\leftrightarrow F_1(j\omega) = \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$$

收端：$f_2(t) = f_1(t)\cos\omega_0 t = \dfrac{1}{2}f_1(t)e^{j\omega_0 t} + \dfrac{1}{2}f_1(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow F_2(j\omega)$

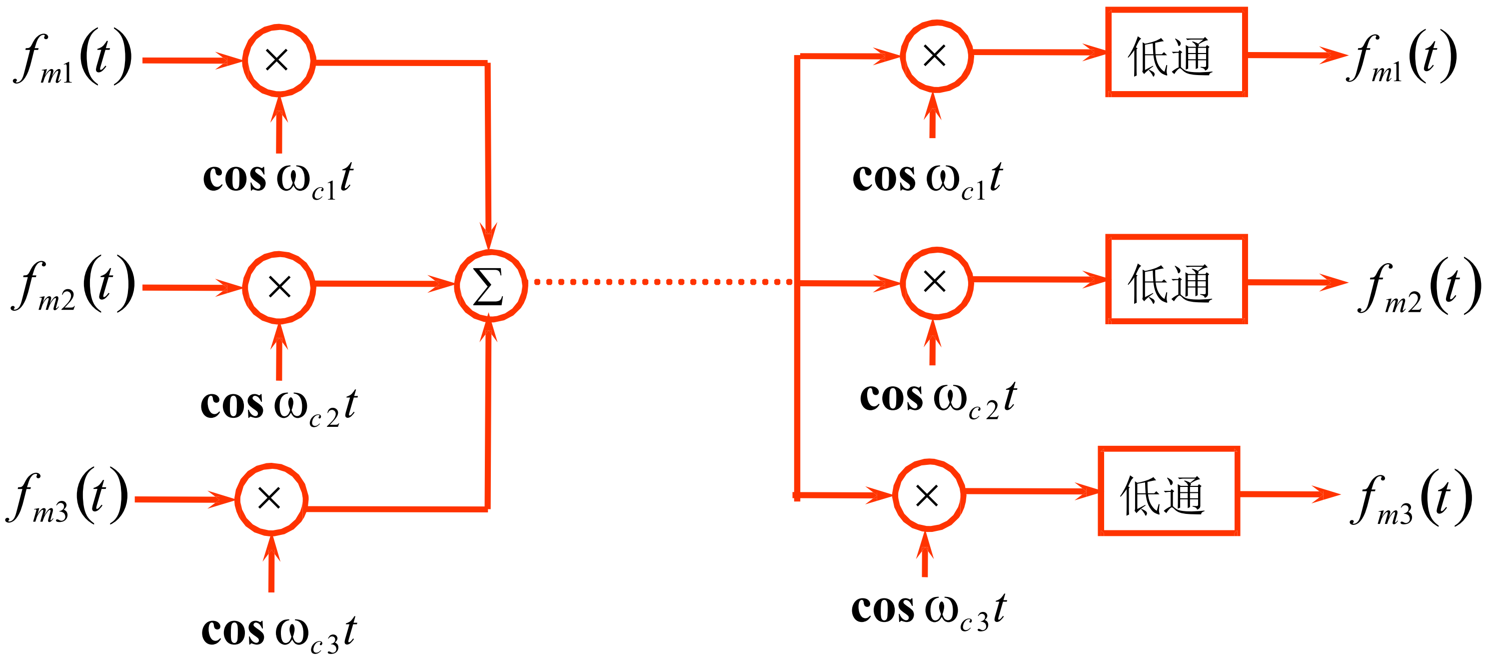
$$= \frac{1}{2}F_1(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F_1(\omega+\omega_0) = \frac{1}{4}F(\omega-2\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega) + \frac{1}{4}F(\omega+2\omega_0)$$



f(t)
A
信 道
B
C
理想低通
y(t)
Y(jω)
cos ω0t
cos ω0t
F(jω)
ω
−ωm
o
ωm
A
ω
−(ω0 +ωm)
−ω0
−(ω0 −ωm)
o
ω0 −ωm
ω0
ω0 +ωm
C
ω
−2ω0
−ω0
o
ω0
2ω0
Y(jω)
ω
−ωm
o
ωm

频分复用通信

- 用频率搬移手段，将原来各路频谱相同的信号，搬移到不同的频率段，以达到信道复用，且消除相互干扰的目的。



卷积定理

- 卷积运算：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\alpha) f_2(t-\alpha) d\alpha$$

- 时域卷积特性：变卷积运算为积分运算

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

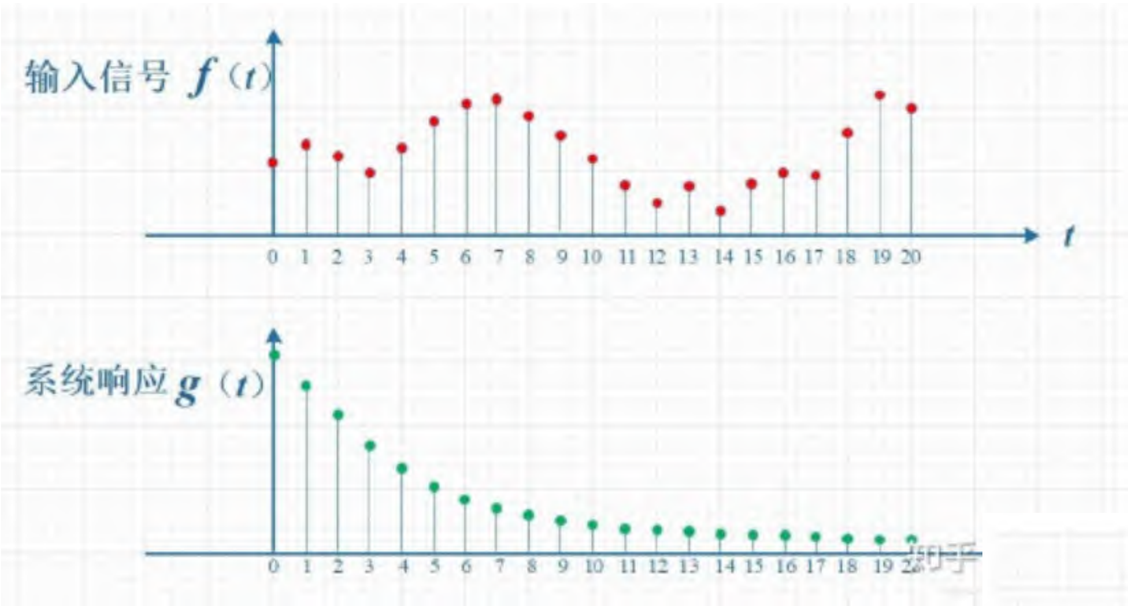
则有：$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) F_2(j\omega)$

- 频域卷积特性：又称为乘积特性，与上有互易关系

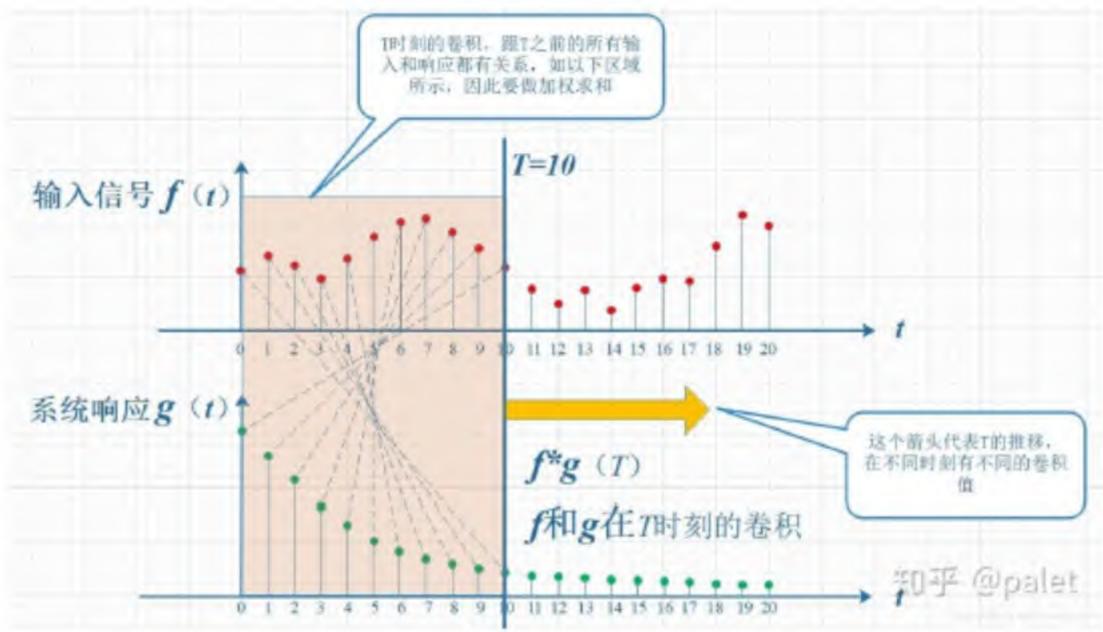
若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$，$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则有：$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}[F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]$

- 关于卷积，你们是怎么理解的？



$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\alpha) f_2(t-\alpha) d\alpha$$



微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，则有： $\frac{d}{dt} f(t) \leftrightarrow (j\omega) F(j\omega)$

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

例： $\delta(t) \leftrightarrow 1$

则有： $\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$

- 利用傅里叶变换的微分特性，可以使信号的幅值与 频率成正比，这正是设计鉴频器的原理。

积分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ ，则有：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \frac{1}{j\omega}F(j\omega)$ $F(0)=0$

当 $F(0) \neq 0$ 时，为：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}F(j\omega)$

例：

$$\delta(t) \leftrightarrow 1,\ \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\mathbf{sgn}(t) = 2\varepsilon(t) - 1 \leftrightarrow 2\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] - 2\pi\delta(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

Q&A