奇异值分解：图像处理、自然语言处理、和社交媒体

顾立平

01矩阵分解

- 矩阵分解是指将一个矩阵分解成多个矩阵的乘积的形式，以便更好地理解和分析矩阵。其中最常见的矩阵分解方法是奇异值分解（Singular Value Decomposition，SVD）、QR分解和LU分解。

✓SVD可以将任意矩阵分解为三个矩阵的乘积形式，分别是左奇异向量矩阵、奇异值矩阵和右奇异向量矩阵；

✓QR分解可以将任意矩阵分解为正交矩阵Q和上三角矩阵R的乘积形式；

✓LU分解可以将任意矩阵分解为下三角矩阵L和上三角矩阵U的乘积形式。

$$C_{m\times n} = U_{m\times m}\Sigma_{m\times n}V^t_{n\times n}$$

01矩阵分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

and B is a matrix with 3 rows and 2 columns:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Then $C = AB$ is a matrix with 3 rows and 2 columns:

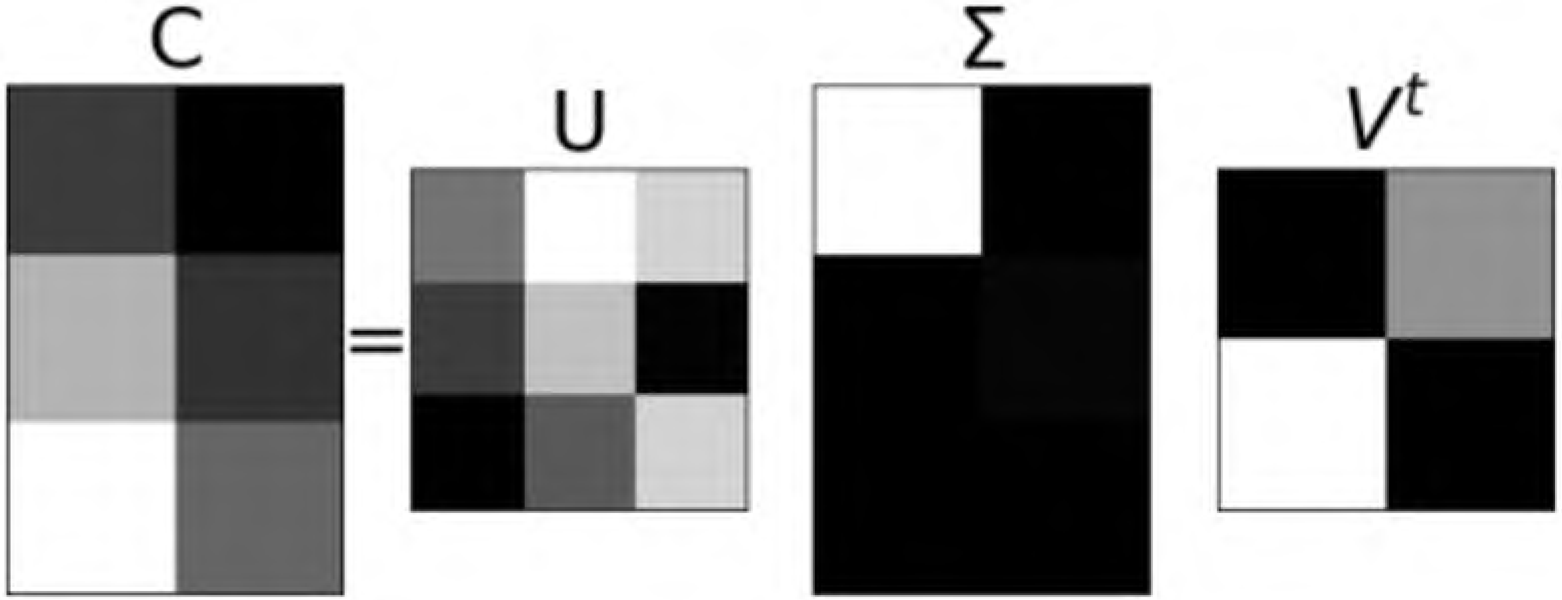
$$C_{3 \times 2} = A_{3 \times 3} B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 24 & 8 \\ 39 & 14 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

- 这些矩阵分解方法在信号处理、图像处理、机器学习等领域都有广泛的应用。

01矩阵分解

$$C_{3\times 2} = U_{3\times 3}\Sigma_{3\times 2}V^t_{2\times 2} =$$

$$\begin{pmatrix} -0.1853757 & 0.8938507 & 0.4082482 \\ -0.5120459 & 0.2667251 & -0.8164965 \\ -0.8387161 & -0.3604005 & 0.4082482 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 49.402266 & 0 \\ 0 & 1.189980 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.9446411 & -0.3281052 \\ 0.3281052 & -0.9446411 \end{pmatrix}$$

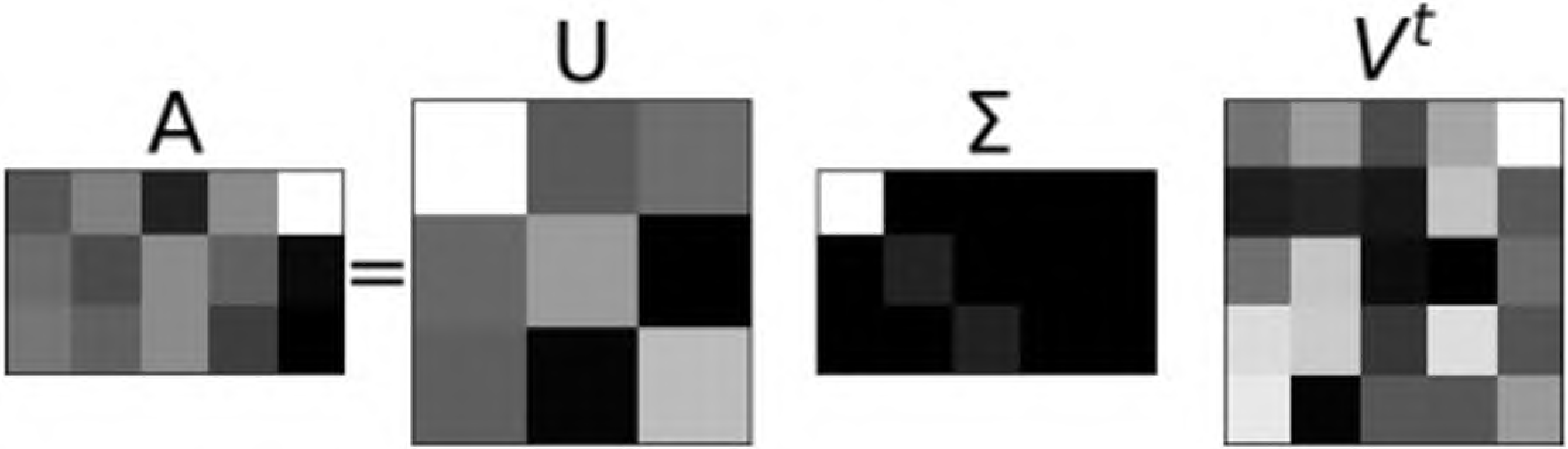


01矩阵分解

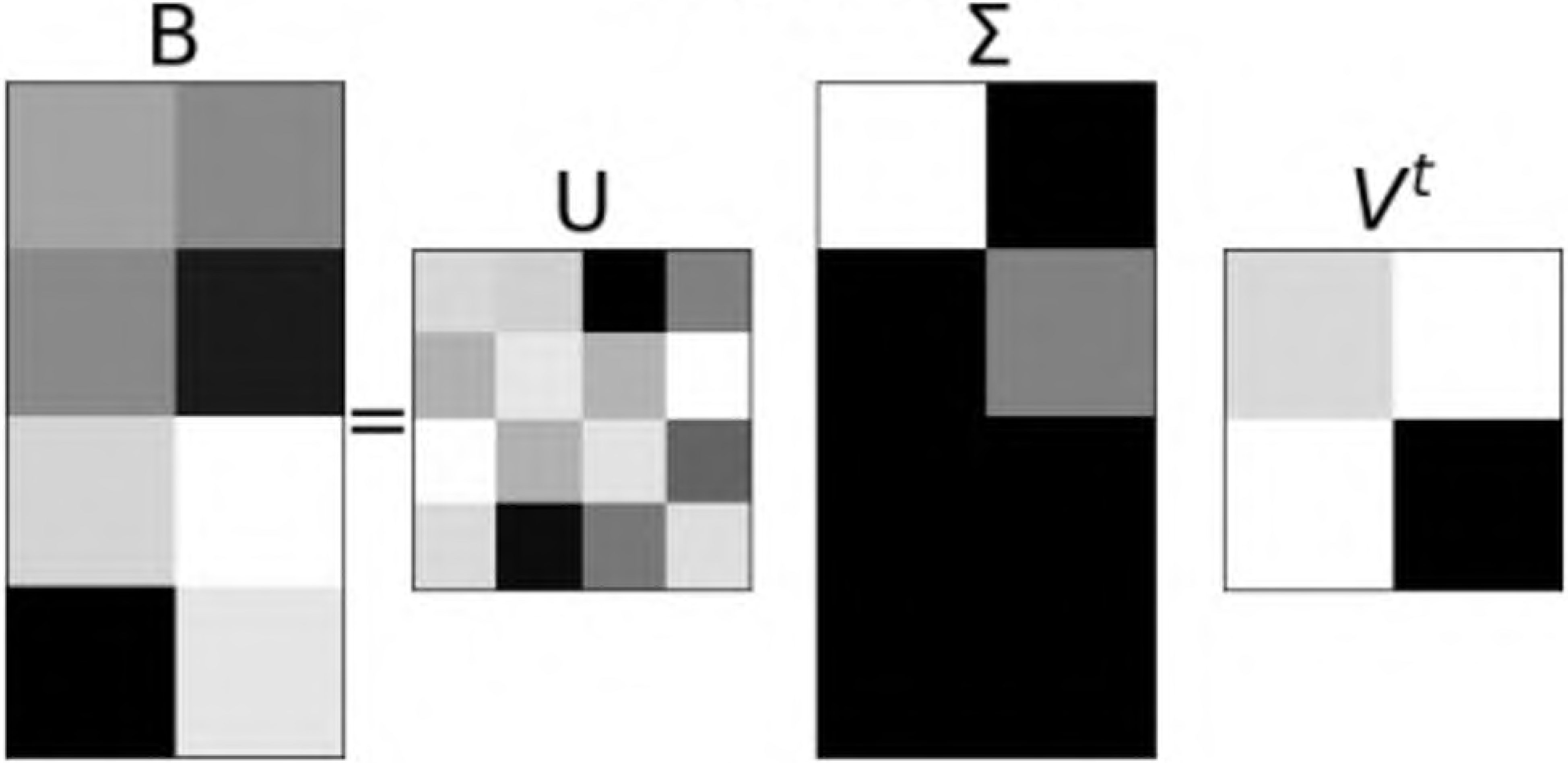
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 & 4 & 18 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & -8 \end{pmatrix}_{3\times 5} = U_{3\times 3}\Sigma_{3\times 5}V^t_{5\times 5}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 0 \\ 7 & 10 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}_{4\times 2} = U_{4\times 4}\Sigma_{4\times 2}V^t_{2\times 2}$$

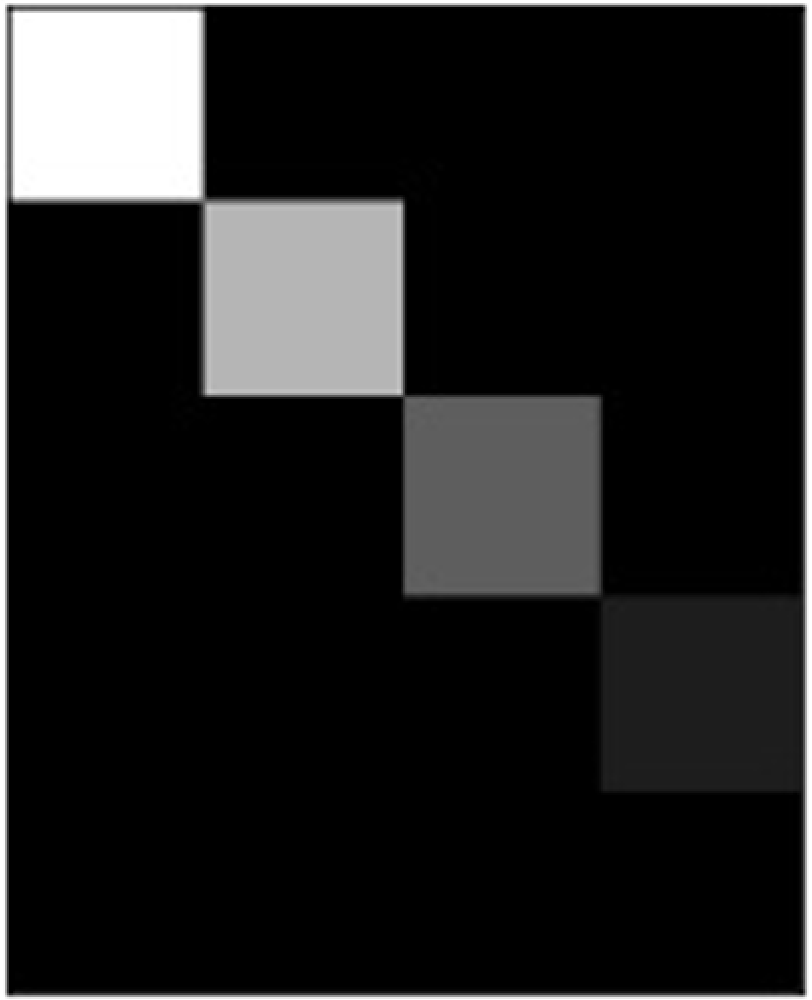
01矩阵分解



01矩阵分解



02对角矩阵



- 对角矩阵是一种特殊类型的矩阵，它的主对角线上的元素不为零，其余元素均为零。
- 对角矩阵通常表示为D = [d11, 0, ..., 0; 0, d22, ..., 0; ... ; 0, 0, ..., dnn]，其中dii是该矩阵在i行i列处的元素。对角矩阵具有一些特殊的性质，如它们易于求逆、行列式等于对角线上元素的乘积等。
- 在矩阵计算中，对角矩阵的乘法和求幂运算比一般的矩阵运算更加高效。

02对角矩阵

$$A\Sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 a_{11} & \sigma_2 a_{12} \\ \sigma_1 a_{21} & \sigma_2 a_{22} \\ \sigma_1 a_{31} & \sigma_2 a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 a_{11} & \sigma_1 a_{12} \\ \sigma_2 a_{21} & \sigma_2 a_{22} \\ \sigma_3 a_{31} & \sigma_3 a_{32} \end{pmatrix}$$

03作为作用于空间的线性变换的矩阵

- 矩阵可以被视为作用于空间向量和空间本身的线性变换（无扭曲）。如果不允许扭曲，因为它会使操作非线性，那么允许哪些操作？答案是旋转、反射、拉伸和/或挤压，这些都是非扭曲操作。奇异值分解$A=U\Sigma Vt$抓住了这个概念。当A作用于平均数v时，让我们逐步检查乘法$Av=U\Sigma V^{tv}$：

✓1.由于正交矩阵V^t，第一个v被旋转/反射。

$$A = U\Sigma\ V^t$$

✓2.然后，由于对角线，它会沿着特殊方向拉伸/挤压矩阵Σ。

✓3.最后，由于其他正交矩阵 U，它再次被旋转/反射。

- 因此，矩阵作为作用于空间的线性变换可以分为三个步骤：旋转/反射、拉伸/挤压和再次旋转/反射。

04A对右奇异向量的作用

- A对右奇异向量的作用可以用奇异值分解中的矩阵U和V^t来表示。由于U和V^t都是反射矩阵，所以它们分别对应着A对空间中的一组向量的旋转/反射作用。

$$A\vec{v} = U\Sigma\ V^t\vec{v}$$

- 对于右奇异向量来说，它们被映射到了左奇异向量，因此它们的变化是由U矩阵控制的。

$$A\vec{v}_1 = \sigma_1\vec{u}_1$$

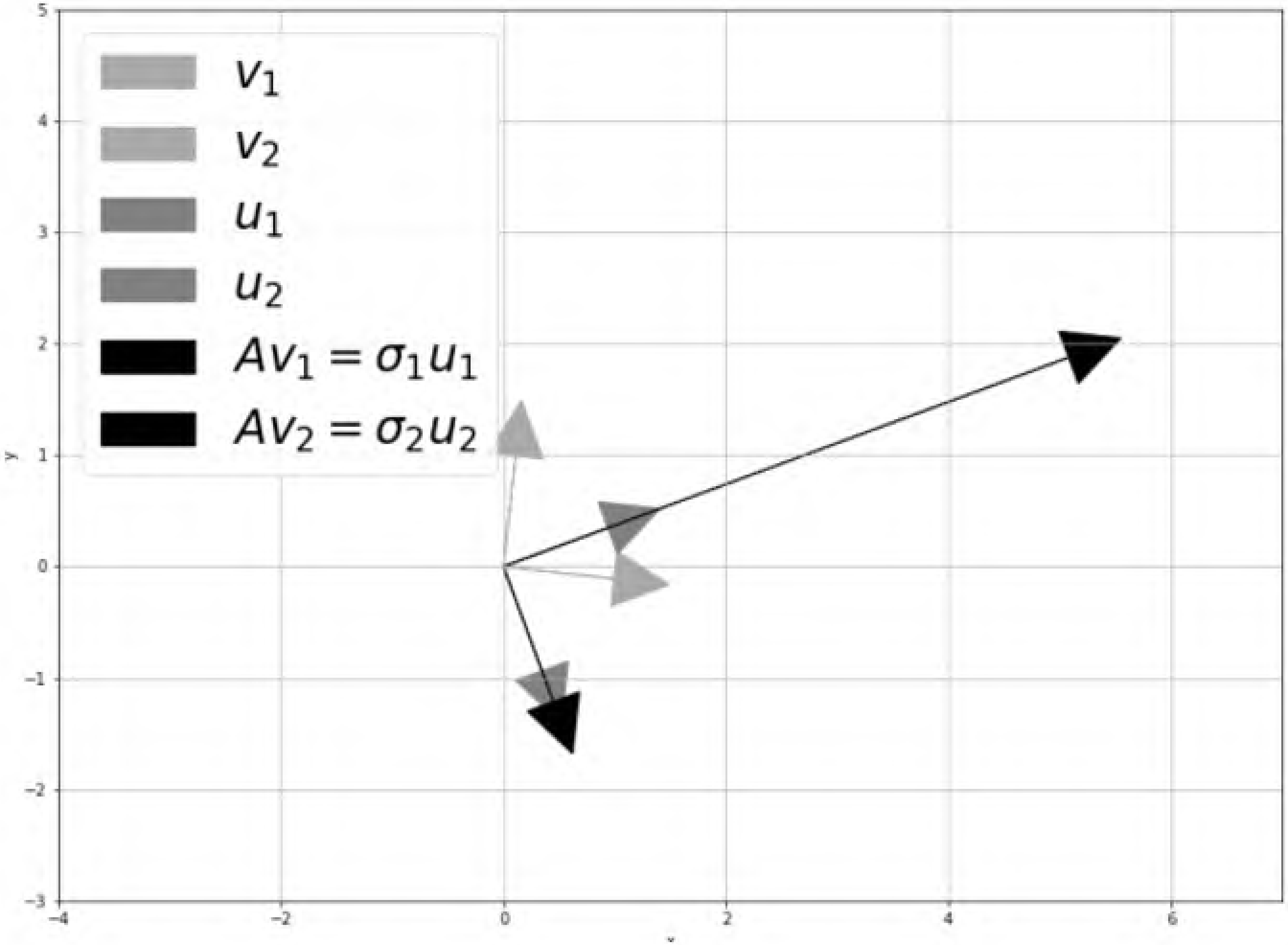
- 具体来说，$Av_1=\sigma_1u_1$，其中v_1是右奇异向量，u_1是左奇异向量，σ_1是奇异值。这表明A对右奇异向量的作用是在其原始方向上进行拉伸/压缩，拉伸/压缩的程度由对应的奇异值决定。

04A对右奇异向量的作用

$$A\vec{v}_1 = \sigma_1 \vec{u}_1$$

$$A\vec{v}_2 = \sigma_2 \vec{u}_2$$

$$Av_1 = \sigma_1 u_1 \ and \ Av_2 = \sigma_2 u_2$$

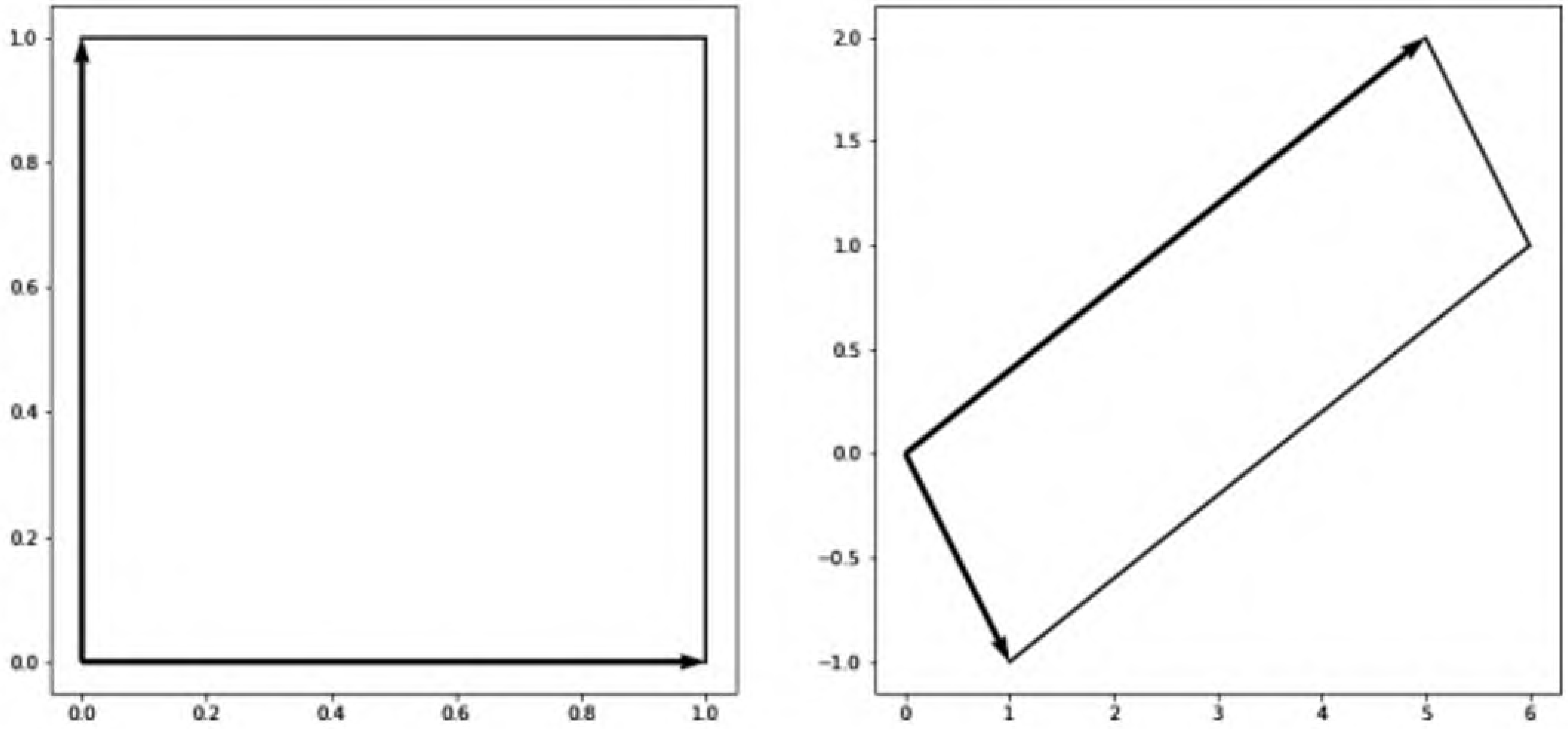


05A对标准单位向量的作用及单位平方的确定

- A对标准单位向量的作用是将其发送到自身的列中，从而将单位正方形转换为平行四边形。
- 这意味着A不会扭曲空间，而是只是对标准单位向量进行了旋转或反射。

- 此外，A还会将单位圆转换为椭圆，其主轴沿着左奇异向量（s），并且其主轴的长度等于奇异值（s）。
- 由于奇异值按照从最大到最小的顺序排列，因此可以确定具有最大变化的方向，并依次确定具有第二大变化的方向等。

05A对标准单位向量的作用及单位平方的确定

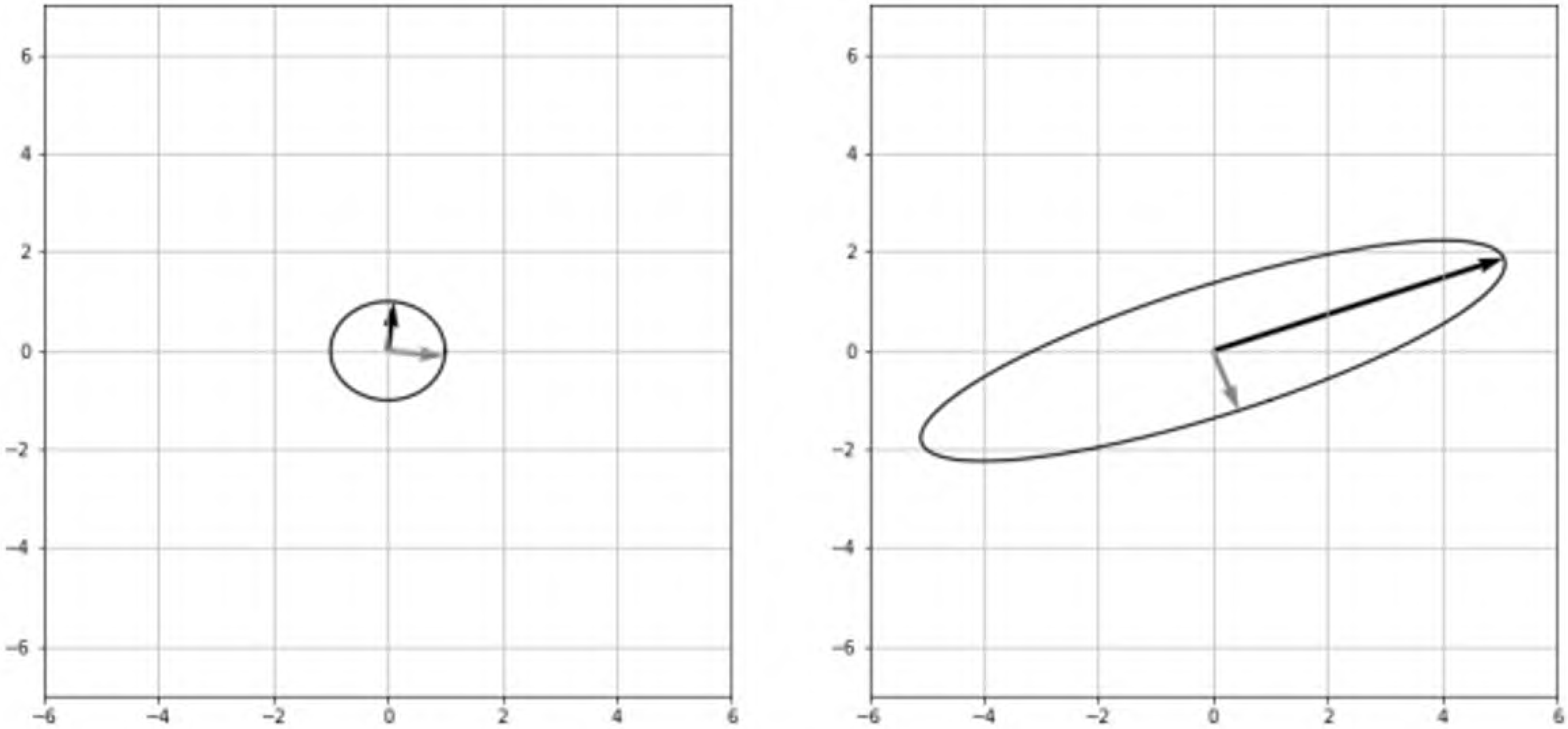


06A对单位圆的作用

- A对单位圆的作用是将其转换为椭圆，其中主轴沿着左奇异向量（s），主轴的长度等于奇异值（s）。

- 这意味着A将单位圆拉伸/压缩，并且不会扭曲它。由于奇异值按照从最大到最小的顺序排列，因此可以确定具有最大变化的方向，并依次确定具有第二大变化的方向等。

06A对单位圆的作用



07根据奇异值分解分解圆到椭圆变换

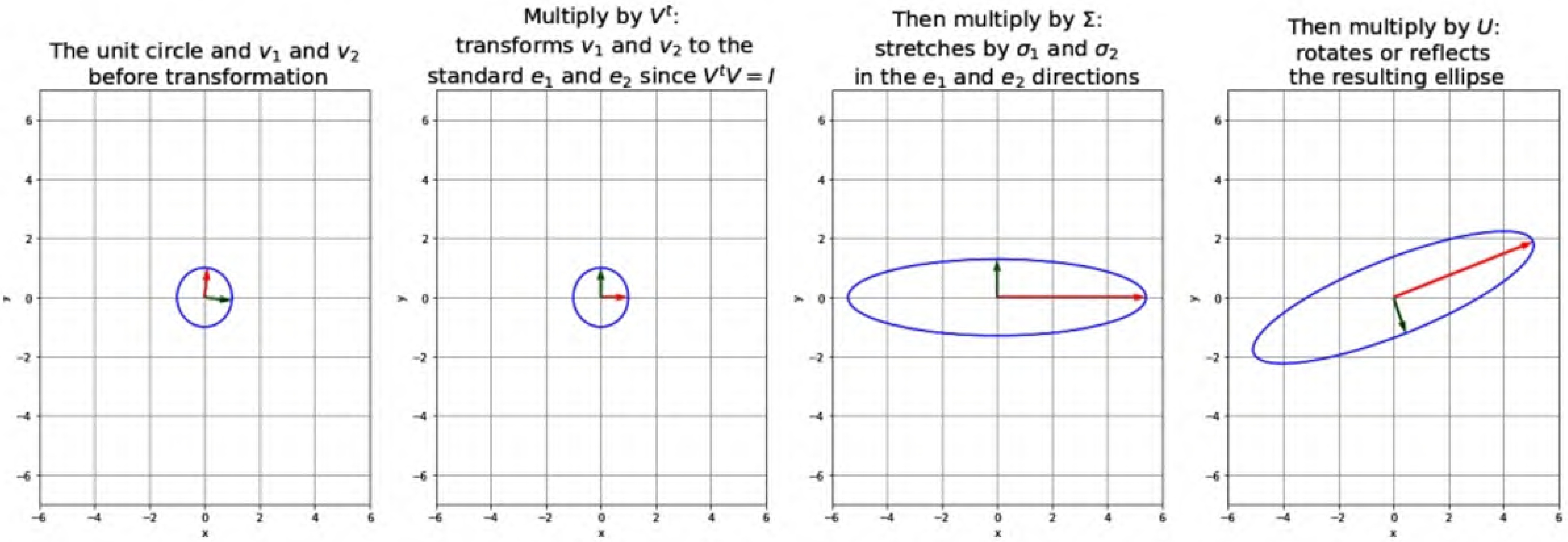
- 根据奇异值分解分解圆到椭圆变换的过程可以通过以下步骤来实现：

✓ 1. 将单位圆和向量V1和V2乘以Vt。由于VtV=I，所以有Vtv1=e1和Vtv2=e2。这样，奇异向量就被拉直并与标准单位向量对齐。

✓ 2. 然后乘以Σ。这里发生的是拉伸/挤压标准单位向量（拉伸或挤压取决于奇异值的大小大于或小于1）。

✓ 3. 最后乘以U。这反映了椭圆在一条直线上的旋转或反演。下一个小节将详细介绍旋转方向或反演结果椭圆。

07根据奇异值分解分解圆到椭圆变换



08旋转和反射矩阵

- 旋转和反射矩阵是用于描述平面上的几何变换的矩阵。

✓旋转矩阵是一个对角线上为1，其余元素为0的矩阵，非对角线元素是对称的。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

✓反射矩阵是一个满足自身逆等于自身的矩阵，通常由一个反射平面的法向量和一个原点的位置确定。这两个矩阵都可以通过奇异值分解得到。

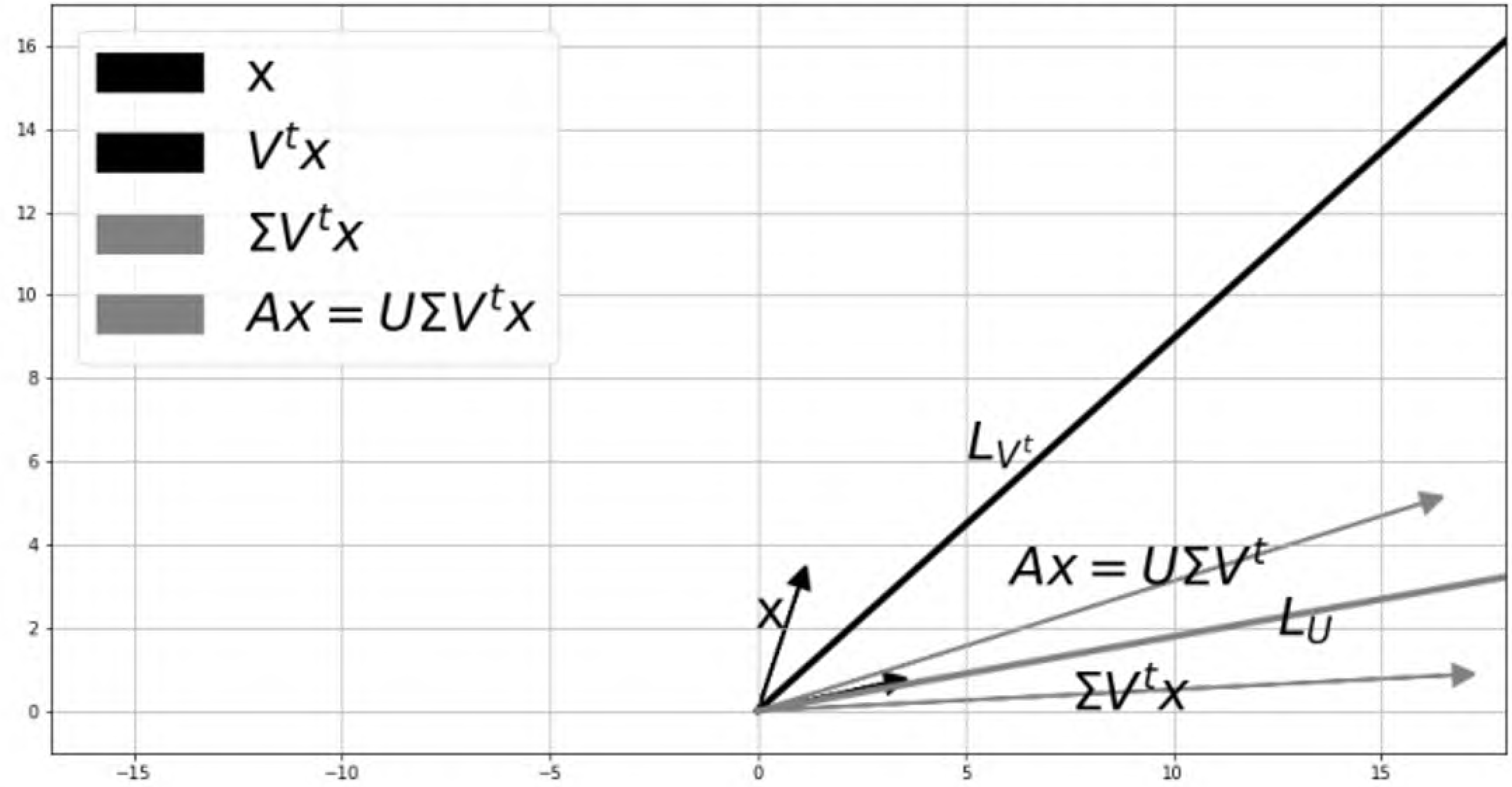
$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \qquad y = (\tan\theta)x$$

09A对一般向量x作用

- 对于一般的向量x，矩阵A的作用是将x映射到另一个向量y，其中y的每个元素都是A和x对应位置上的元素的乘积之和。
- 换句话说，y = Ax。这个过程可以看做是一种线性变换，将原始空间中的向量映射到新的空间中的向量。

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= U\Sigma V^t \\
&= \begin{pmatrix} 0.93788501 & 0.34694625 \\ 0.34694625 & -0.93788501 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.41565478 & 0 \\ 0 & 1.29254915 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.10911677 & 0.99402894 \\ 0.99402894 & -0.10911677 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

09A对一般向量x作用



10相乘矩阵的三种方法

- **矩阵乘法有三种常用的方法：**

✓**1. 行-列方法：通过获取矩阵A的第i行与矩阵B的第j列的点积，一次生成一个条目ab_{ij}。**

$$(ab)_{ij} = A_{row_i} B_{col_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

10相乘矩阵的三种方法

- 矩阵乘法有三种常用的方法：

✓2. 柱-柱方法：通过将矩阵A的列与矩阵B的第i列的条目线性组合，一次产生一列AB。

$$(AB)_{col_i} = b_{1i}A_{col_1} + b_{2i}A_{col_2} + \cdots + b_{ni}A_{col_n}$$

$$AB = A_{col_1}B_{row_1} + A_{col_2}B_{row_2} + \cdots + A_{col_n}B_{row_n}$$

10相乘矩阵的三种方法

- 矩阵乘法有三种常用的方法：

✓3. 列-行方法：通过将矩阵A的第一列与矩阵B的第一行相乘，将矩阵A的第二列乘以矩阵B的第二行，以此类推，生成一个乘积的秩，一次一个。然后将所有这些秩一矩阵相加，得到最终积AB。

$$A = U\Sigma V^t = \sigma_1 U_{col_1} V^t_{row_1} + \sigma_2 U_{col_2} V^t_{row_2} + \cdots + \sigma_r U_{col_r} V^t_{row_r}$$

11全局

- 全局指的是整个系统或者过程的整体情况，包括所有的部分和细节。
- 全局可以指人工智能技术在各个领域的应用和发展趋势，也可以指数学模型在人工智能中的作用和重要性。

$$Av_i = \sigma_i u_i$$

$$\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

12条件数与计算稳定性

- 条件数是指矩阵的特征值大小差异的度量，用于衡量矩阵在计算中的稳定性和可靠性。
- 如果条件数过大，表示矩阵在某个方向上的变化会对结果造成较大的影响，从而可能导致计算出现误差或不稳定的情况。因此，条件数在计算稳定性方面非常重要，需要考虑如何降低条件数来提高计算的精度和可靠性。

The star of the show in this chapter was one formula:

$$X = U\Sigma V^t = \sigma_1 U_{col_1} V^t_{row_1} + \sigma_2 U_{col_2} V^t_{row_2} + \cdots + \sigma_r U_{col_r} V^t_{row_r}$$

This is equivalent to $XV = U\Sigma$ and $XV_{col_i} = \sigma_i U_{col_i}$.

13奇异值分解的成分

- 奇异值分解是一种矩阵分解方法，可以将一个矩阵分解成三个部分：左奇异向量矩阵、右奇异向量矩阵和奇异值矩阵。
- 其中，左奇异向量矩阵和右奇异向量矩阵是对称正交矩阵。

$$Av_i = \sigma_i u_i.$$

14奇异值分解与特征值分解

- 奇异值分解和特征值分解都是矩阵分解方法，但它们的目标不同。
- 特征值分解主要用于求解矩阵的特征向量和特征值，而奇异值分解则主要用于降维和去除噪声。

$$A = U\Sigma V^t$$

- 需要注意的是，奇异值分解和特征值分解并不是通用的，只有特定类型的矩阵才能进行分解。

14奇异值分解与特征值分解

- 奇异值矩阵是一个对角矩阵，对角线上的是矩阵的奇异值。

$$A = PDP^{-1}$$

- 特征值分解则是将一个矩阵分解成两个部分：特征向量矩阵和特征值矩阵，其中特征向量矩阵是由矩阵的特征向量组成的矩阵，特征值矩阵是一个对角矩阵，对角线上的是矩阵的特征值。

$$\sigma_i = |\lambda_i| = -\lambda_i.$$

$$Av_i = -\lambda_i v_i = \lambda_i(-v_i) = \sigma_i u_i.$$

15奇异值分解的计算

- 奇异值分解的计算过程比较复杂，需要先求出原矩阵的特征向量和特征值，然后再通过一系列变换得到奇异值分解的结果。

$$Av = \lambda v$$

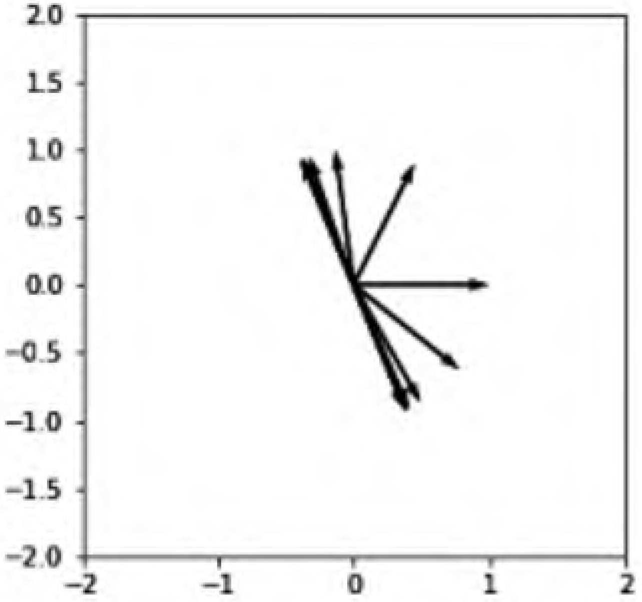
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -0.38268343 \\ 0.92387953 \end{pmatrix}$$

- 在实际应用中，我们通常只需要关心奇异值矩阵中的前k个奇异值，因为后面的奇异值往往很小，对结果影响不大。
- 同时，由于奇异值分解涉及到大量的矩阵运算，所以计算速度也是一个需要考虑的因素。

```
[1, 0]
[0.4472136  0.89442719]
[ 0.78086881 -0.62469505]
[-0.1351132   0.99083017]
[ 0.49483862 -0.86898489]
[-0.3266748   0.9451368]
[ 0.40898444 -0.91254136]
[-0.37000749  0.92902877]
[ 0.38871252 -0.92135989]
[-0.37979817  0.92506937]
[ 0.3840601 -0.9233081]
[-0.38202565  0.92415172]
[ 0.38299752 -0.92374937]
[-0.38253341  0.92394166]
[ 0.38275508 -0.92384985]
[-0.38264921  0.92389371]
[ 0.38269977 -0.92387276]
[-0.38267563  0.92388277]
[ 0.38268716 -0.92387799]
[-0.38268165  0.92388027]
[ 0.38268428 -0.92387918]
[-0.38268303  0.9238797 ]
[ 0.38268363 -0.92387945]
[-0.38268334  0.92387957]
[ 0.38268348 -0.92387951]
[-0.38268341  0.92387954]
[ 0.38268344 -0.92387953]
[-0.38268343  0.92387953]
[ 0.38268343 -0.92387953]

 v= [-0.38268343  0.92387953]
Av= [ 1.46507563 -3.53700546]
$\lambda=$ -3.828427140993716
```

15奇异值分解的计算



- 我们可以通过调用现成的库函数来实现奇异值分解的计算，比如在Python中可以使用numpy库中的linalg.svd()函数来进行计算。
- 这个函数接受一个矩阵作为输入参数，返回三个矩阵：U、S和V，分别表示左奇异向量矩阵、奇异值矩阵和右奇异向量矩阵。

16伪逆

- 伪逆是一种矩阵运算的概念，用于解决矩阵不可逆或几乎不可逆的情况下的线性方程组求解问题。

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

- 通常情况下，我们可以使用矩阵的逆来求解线性方程组，但是对于一些特殊情况，如矩阵不可逆或几乎不可逆，就不能使用逆矩阵了。此时，我们可以使用伪逆来代替逆矩阵，从而得到线性方程组的解。伪逆可以通过奇异值分解等方式来计算，其结果是一个近似的逆矩阵，可以用来求解线性方程组和最小二乘问题等。

$$A^{+} = V\Sigma^{+}U^{t}$$

17奇异值分解在图像中的应用

- 奇异值分解在图像处理中有广泛的应用。其中一种常见的应用是对彩色图像进行压缩。通过对彩色图像进行奇异值分解，可以将其表示为三个单色通道的线性组合，即红色、绿色和蓝色通道。由于不同通道的奇异值大小不同，我们可以选择保留较大的几个奇异值，舍去较小的奇异值，从而实现对图像的压缩。同时，通过重构图像时，只保留保留的奇异值，可以保证图像的质量不会受到太大的影响。

$$A = U\Sigma V^t = \sigma_1 U_{col_1} V^t_{row_1} + \sigma_2 U_{col_2} V^t_{row_2} + \cdots + \sigma_r U_{col_r} V^t_{row_r}$$

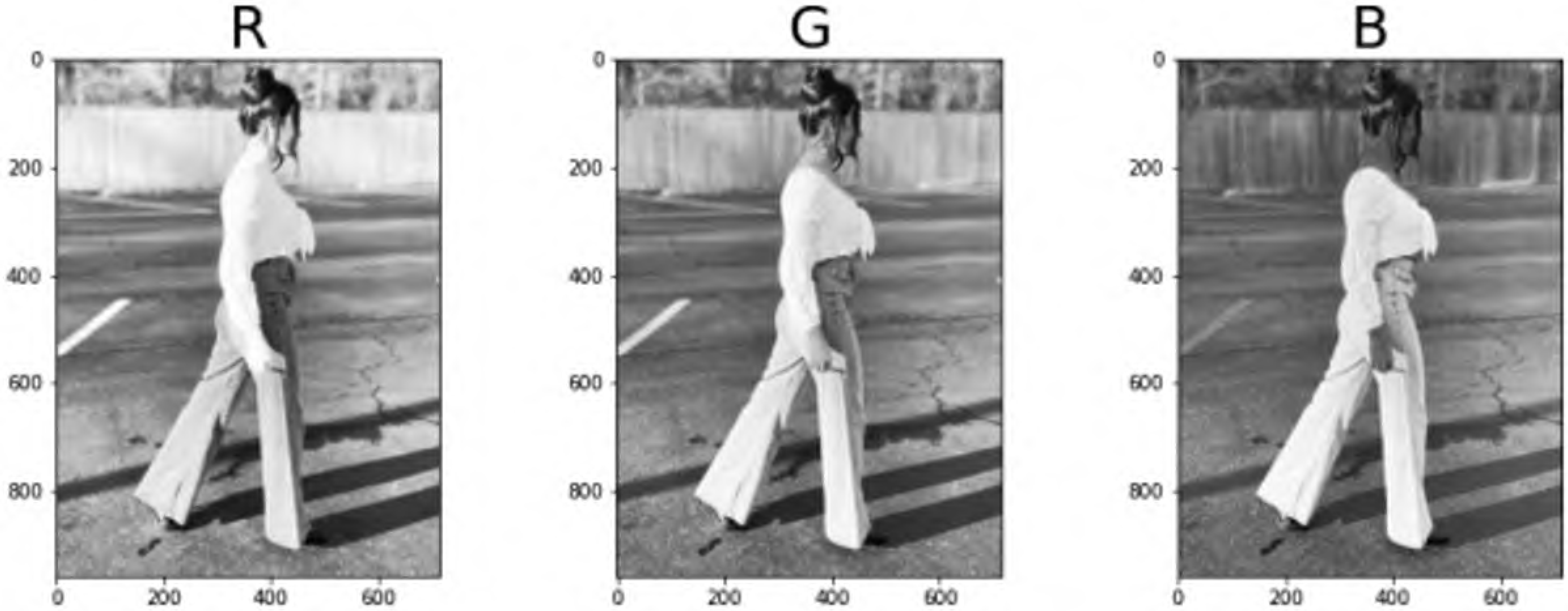
17奇异值分解在图像中的应用

- 另外，奇异值分解还可以用于图像增强和滤波等方面。例如，在图像增强方面，可以通过调整奇异值的权重来增强图像的对比度和亮度。

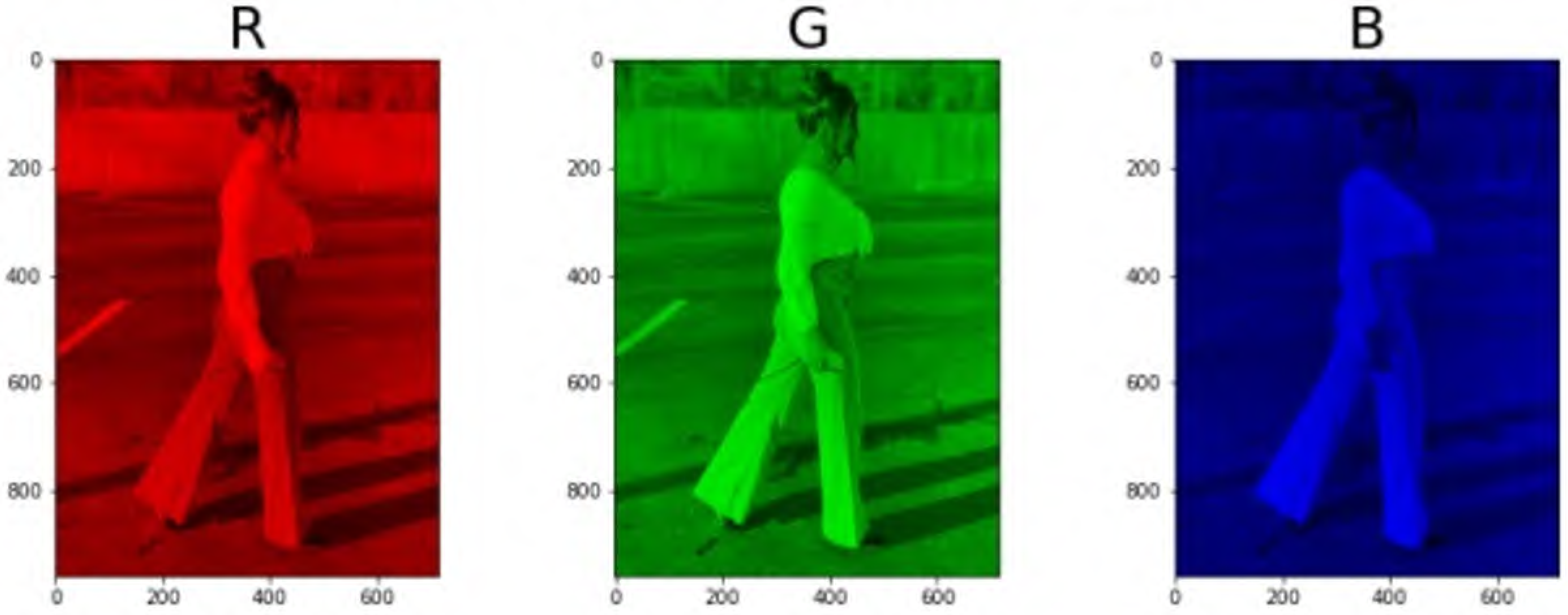
$$Channel_{reduced} = U_{960\times 25}\Sigma_{25\times 25}\left(V^{t}\right)_{25\times 714}$$

- 在图像滤波方面，可以通过构造不同的卷积核来进行图像平滑、锐化等操作。总之，奇异值分解在图像处理中有着广泛的应用前景。

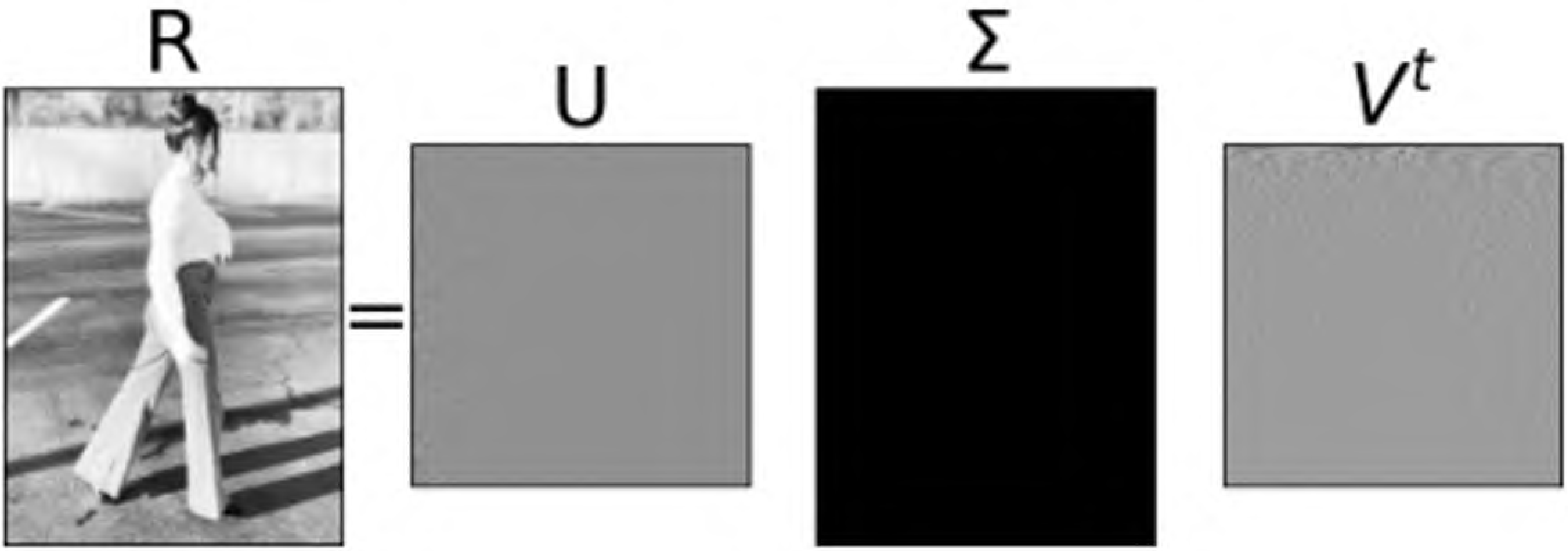
17奇异值分解在图像中的应用



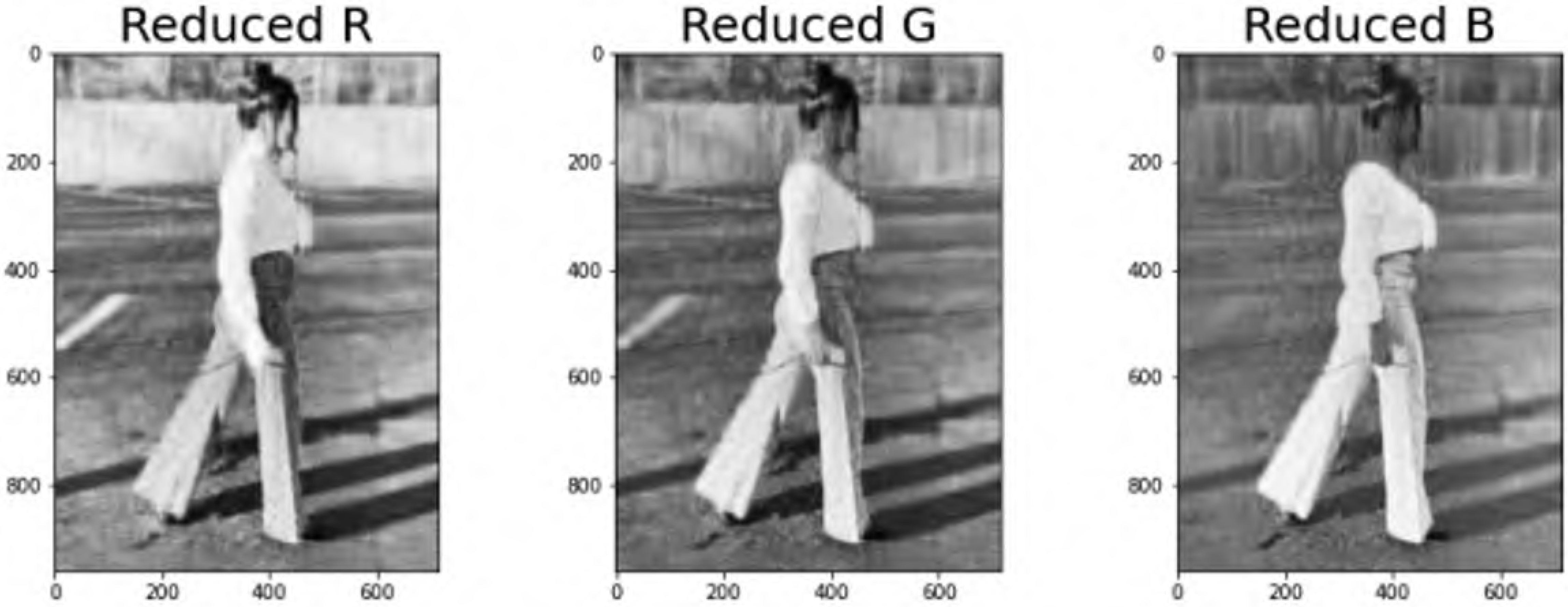
17奇异值分解在图像中的应用



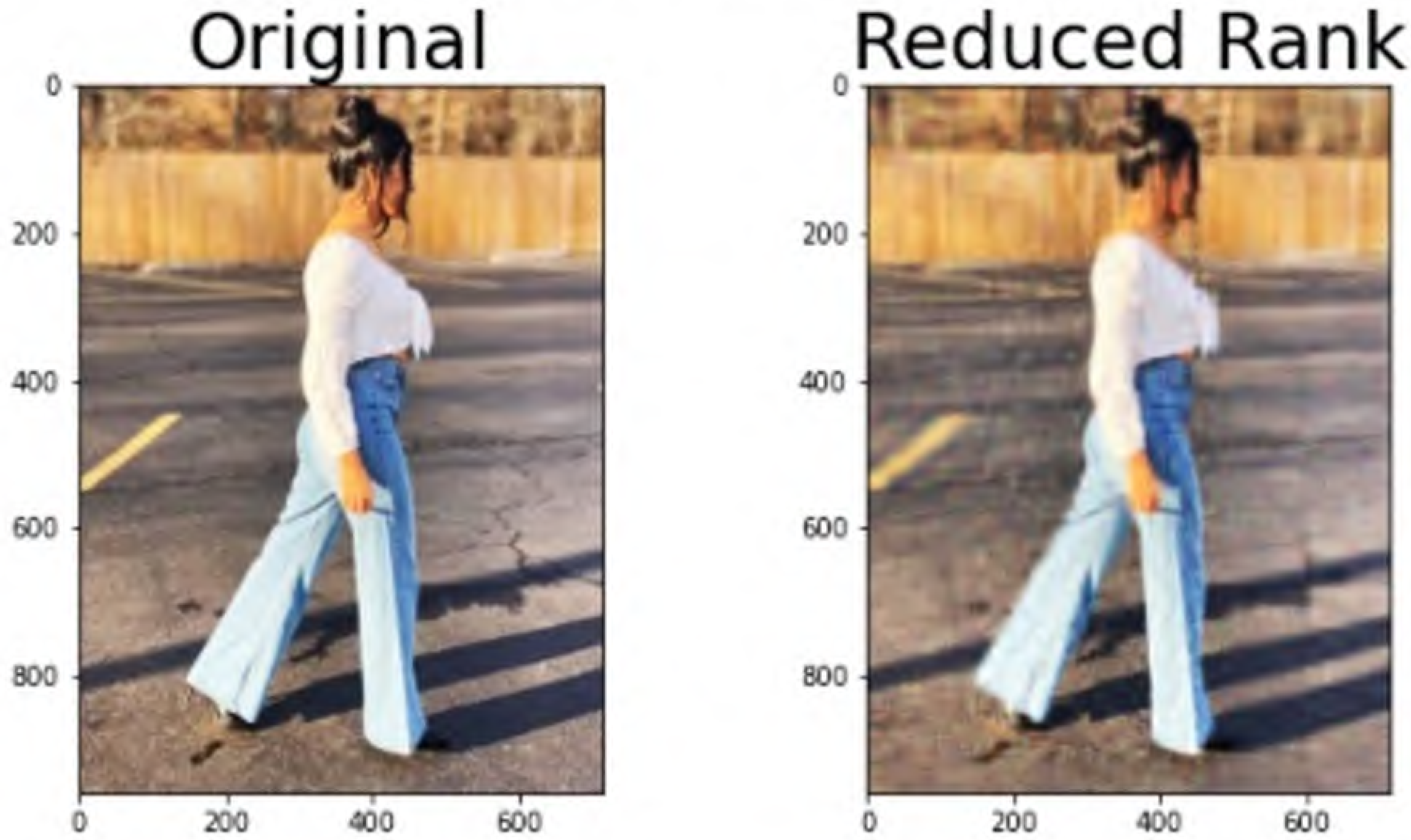
17奇异值分解在图像中的应用



17奇异值分解在图像中的应用



17奇异值分解在图像中的应用



18主成分分析和降维

- 主成分分析是一种常用的降维方法，它可以将高维数据映射到低维空间中，同时尽可能地保留原数据的信息。

$$X^t_{centered}X_{centered}$$

- 具体来说，主成分分析的目标是找到一个新的坐标系，使得在这个坐标系下，第一个坐标轴的方向是原始数据集中变量贡献最大的方向，第二个坐标轴的方向是在第一个坐标轴方向上正交且变量贡献次大的方向，以此类推。这样，我们就可以将原始数据投影到这些主成分上，得到新的低维数据，从而达到降维的目的。

$$XV_{col_i} = \sigma_i U_{col_i}$$

18主成分分析和降维

- 主成分分析的结果取决于所选的数据预处理方式。一般来说，我们需要先对数据进行中心化处理，即将每个变量的均值去掉，然后再进行主成分分析。

$\sigma_1 U_{col_1}$, $\sigma_2 U_{col_2}$ $\sigma_i U_{col_i}$,

- 此外，还需要考虑保留多少个主成分才能较好地保留原始数据的信息。这通常是通过计算每个主成分的方差贡献率来确定的。
- 一般情况下，我们会选择保留方差贡献率较高的主成分，直到累计方差贡献率达到一定的阈值为止。

19主成分分析和聚类

- 主成分分析和聚类都是常见的数据分析方法，它们可以用于发现数据中的模式和结构。在主成分分析中，我们通过线性变换将高维数据映射到低维空间中，以便更好地理解和可视化数据。而在聚类中，我们则是通过对数据进行分组，将相似的数据点归为一类，从而揭示数据中的内在结构。

- 有时候，我们可以发现在主成分分析中得到的降维数据集中存在着明显的聚类结构。例如，在一个包含不同种类花朵的数据集中，经过主成分分析后，我们可能会发现在前两个主成分上存在着明显的聚类结构，不同种类的花朵被分成了不同的簇。这时，我们可以利用聚类算法进一步对这些簇进行分析和研究，以深入了解数据中的结构和规律。

20社交媒体应用程序

- 社交媒体应用程序是指专门为用户交流、分享信息和互动而设计的应用程序。这些应用程序通常包括社交网络平台（如Facebook、Twitter）、即时通讯工具（如WhatsApp、WeChat）和图片/视频分享应用（如Instagram、TikTok）。
- 这些应用程序通常具有丰富的功能，如个人资料管理、消息通知、群组聊天、直播、广告投放等。
- 此外，一些社交媒体应用程序也提供了机器学习和人工智能技术的支持，以提高用户体验和个性化推荐。

21潜在语义分析

- 潜在语义分析是一种基于向量空间模型的信息检索技术，主要用于处理自然语言文本数据。
- 基本思想是通过降维的方式将高维的词向量映射到低维的空间中，从而捕捉词汇之间的语义关系。具体而言，潜在语义分析通过对文本数据进行奇异值分解（SVD）来提取文本的主题信息，进而实现文本的分类、聚类、检索等任务。

$$X = U\Sigma V^t$$

- 潜在语义分析被广泛应用于搜索引擎、推荐系统、情感分析等领域。

22随机奇异值分解

- 随机奇异值分解是一种利用随机抽样理论来进行矩阵分解的有效方法，它可以用于处理大规模的数据集。

$$(Y = Q^t X, \text{ so } X \approx QY)$$

- 其基本思想是对原始矩阵进行采样，得到一个更小的矩阵，对该矩阵进行奇异值分解，然后再将结果映射回原始矩阵的维度上。这种方法不仅可以提高计算效率，还可以保证较高的准确性。随机奇异值分解常用于图像压缩、数据降维、文本挖掘等领域。

$$(Y = U\Sigma V^t)$$

$$Q\,U_X = QU_Y$$

谢谢！

gulp@mail.las.ac.cn