维纳滤波器

$$x(n) = s(n) + v(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = \hat{s}(n)$$

最佳滤波器

维纳滤波器是最佳滤波器，需要已知信号和噪声的统计特性；

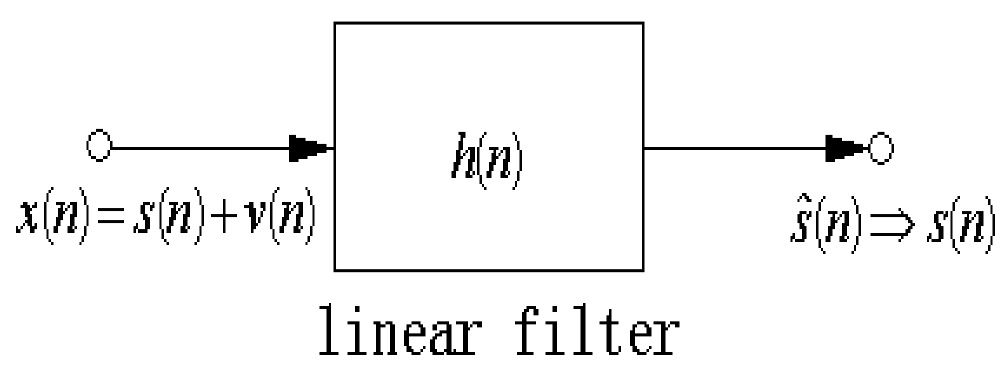
维纳滤波器的最优准则是最小均方误差准则（MMSE）；

维纳滤波器的参数是固定的，而自适应滤波器的参数是时变的，故维纳滤波器不是自适应滤波器；

$x(n)$ **观察/测量数据**

$s(n)$ **真实信号**

$v(n)$ **加性噪声/干扰**



$$\hat{s}(n)=x(n)*h(n)=\sum_i h(i)x(n-i)$$ **线性估计问题**

$$e(n)=s(n)-\hat{s}(n)$$ **估计误差**

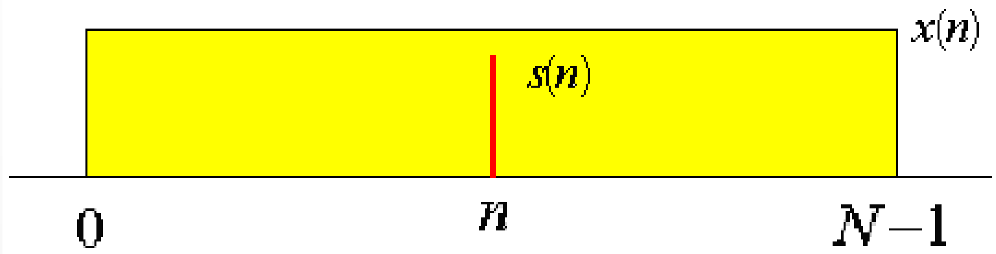
$$\xi(n)=E\left[e^2(n)\right]=\min\Rightarrow h(n)$$ **最小均方误差(MMSE)估计**

维纳滤波->对真实信号的最小均方误差估计问题.

线性估计根据其取值范围不同通常有下面几种情况:

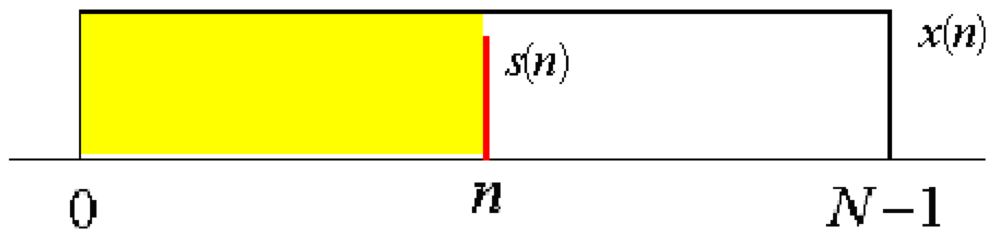
平滑

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=0}^{N-1}h(n-i)x(i)$$



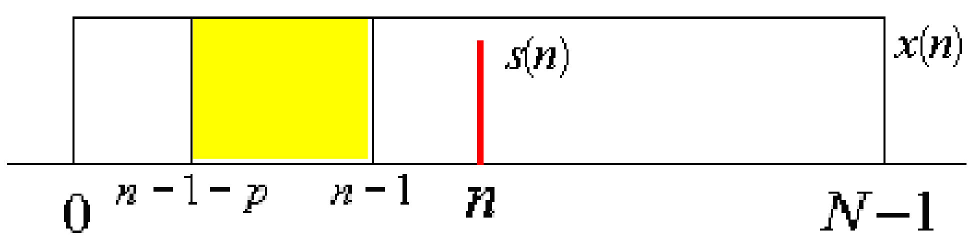
滤波

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=0}^{n}h(n-i)x(i)$$



预测

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=n-1-p}^{n-1}h(n-i)x(i)$$



这里只考虑滤波问题，相应的维纳滤波称为**最佳线性滤波**。

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=0}^{n}h(i)x(n-i),\quad n=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$$

$$\begin{bmatrix}\hat{s}(0)\\ \hat{s}(1)\\ \hat{s}(2)\\ \vdots\\ \hat{s}(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0\\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ h(N-1) & h(N-2) & h(N-3) & \cdots & h(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ \vdots\\ x(N-1)\end{bmatrix}$$

问题在于估计滤波器的参数/单位脉冲响应序列

一. 正交性原理与Wiener-Hopf方程

1. 正交方程

维纳滤波器是**线性移不变系统**，设

$$x(n)=s(n)+v(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)=\hat{s}(n)$$

输入=信号+噪声　　　　　　　　　　对s(n)的最佳估计

误差：

$$e(n)=s(n)-\hat{s}(n)$$

可看成均值为0的随机变量

均方误差：

$$E[e^2(n)]=E\left\{[s(n)-\hat{s}(n)]^2\right\}$$

设计维纳滤波器的过程，即寻求**使均方误差最小**的滤波器单位脉冲响应**h(n)**或系统函数**H(z)**。

$$y(n)=\hat{s}(n)=x(n)*h(n)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

又因为实际只能观测到有限个数据，设为N个，所以

$$\hat{s}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)$$

信号$s(n)$的估值$\hat{s}(n)$是N个观测数据的线性组合，组合系数$h(n)$，即为待求维纳滤波器的单位脉冲响应。

维纳滤波器对应一个长度为N的FIR数字滤波器。

令$h(m)=h_i$、$x(n-m)=x_i$，则

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=0}^{N-1}h_i x_i$$

若$e\to e(n), s\to s(n), \hat{s}\to\hat{s}(n)$，则

$$E[e^2(n)]=E\left\{[s(n)-\hat{s}(n)]^2\right\}$$

可表示为

$$E[e^2]=E[(s-\hat{s})^2]=E\left[\left(\sum_{i=0}^{N-1}h_i x_i-s\right)^2\right]$$

——均方误差性能函数表达式

h_i的选择要使得$E[e^2]$最小,须

$$\frac{\partial E[e^2]}{\partial h_i}=0 \Rightarrow E\left[\frac{\partial (e^2)}{\partial h_i}\right]=2E\left[e\frac{\partial (e)}{\partial h_i}\right]=2E[ex_i]=0$$

$$i=0,1,\cdots,N-1$$

得到:

$$E[ex_i]=0 \qquad i=0,1,\cdots,N-1$$

或

$$E\left[\left(\sum_{j=0}^{N-1}h_jx_j-s\right)x_i\right]=0 \qquad i=0,1,\cdots,N-1$$

——**正交方程**

2. 正交性原理及其推论

正交性原理

要使估计的均方误差最小，滤波系数$\{h_i\}$的选择应使估计误差e与所有的观测值x_i正交,其中$i=0,1,\cdots,N-1$。

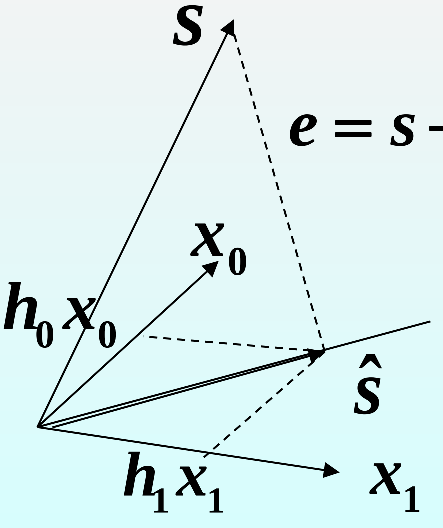
推论

要使估计的均方误差最小，滤波系数$\{h_i\}$的选择应使估计误差e与估计值$\hat{s}$(观测值的线性组合）正交，其中$i=0,1,\cdots,N-1$。

例如：N=2

e最小，仅当e与$\hat{s}$正交时

$e\perp x_i \rightarrow e\perp\hat{s}$



满足正交原理 ⇨ 满足MMSE条件

3. Wiener-Hopf 方程

$$E\left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} h_j x_j - s\right) x_i\right] = E\left[\sum_{j=0}^{N-1} h_j x_i x_j - s x_i\right] = 0$$

即 $$\sum_{j=0}^{N-1} h_j E[x_i x_j] - E[s x_i] = 0$$

令 $E[x_i x_j] = R_{ij}, E[s x_i] = R_{s x_i}$，则

$$\sum_{j=0}^{N-1} h_j R_{ij} = R_{s x_i}, \quad i = 0, 1, \cdots, \quad N-1$$

它反映了相关函数与最佳单位脉冲响应之间的关系。

Wiener-Hopf方程的矩阵形式

$$\vec{R}_{xx}\vec{h} = \vec{R}_{sx}$$

自相关矩阵　　　$s(n)$与$x(n)$的互相关

故最佳单位脉冲响应

$$\vec{h}_{opt} = \vec{R}_{xx}^{-1}\vec{R}_{sx}$$

其中

$$\vec{R}_{xx} = \begin{pmatrix} R_{0,0} & R_{0,1} & \cdots & R_{0,N-1} \\ R_{1,0} & R_{1,0} & \cdots & R_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N-1,0} & R_{N-1,1} & \cdots & R_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}_{opt} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-1} \end{bmatrix}^T$$

$$\vec{R}_{sx} = \begin{bmatrix} R_{sx_0} & R_{sx_1} & \cdots & R_{sx_{N-1}} \end{bmatrix}^T$$