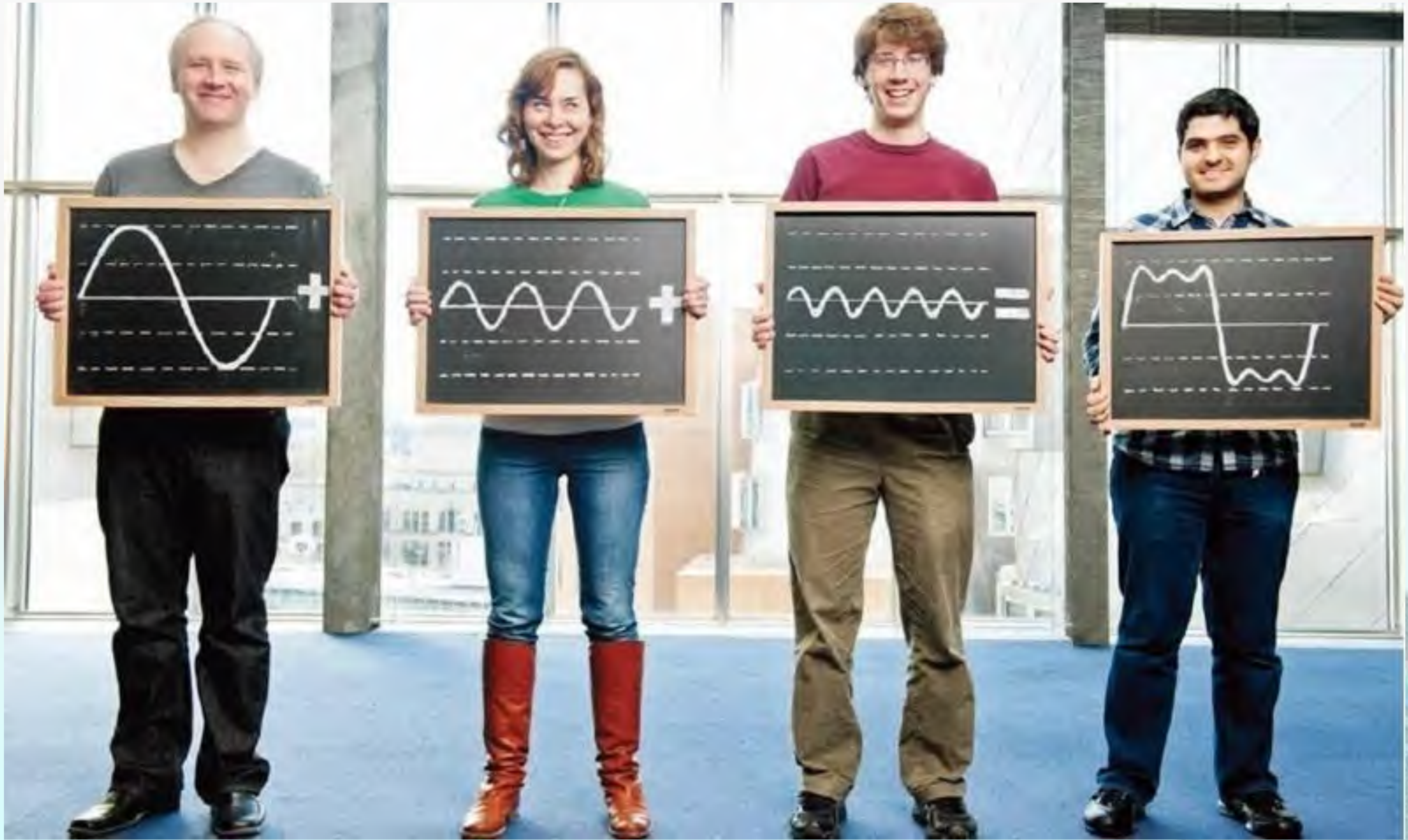
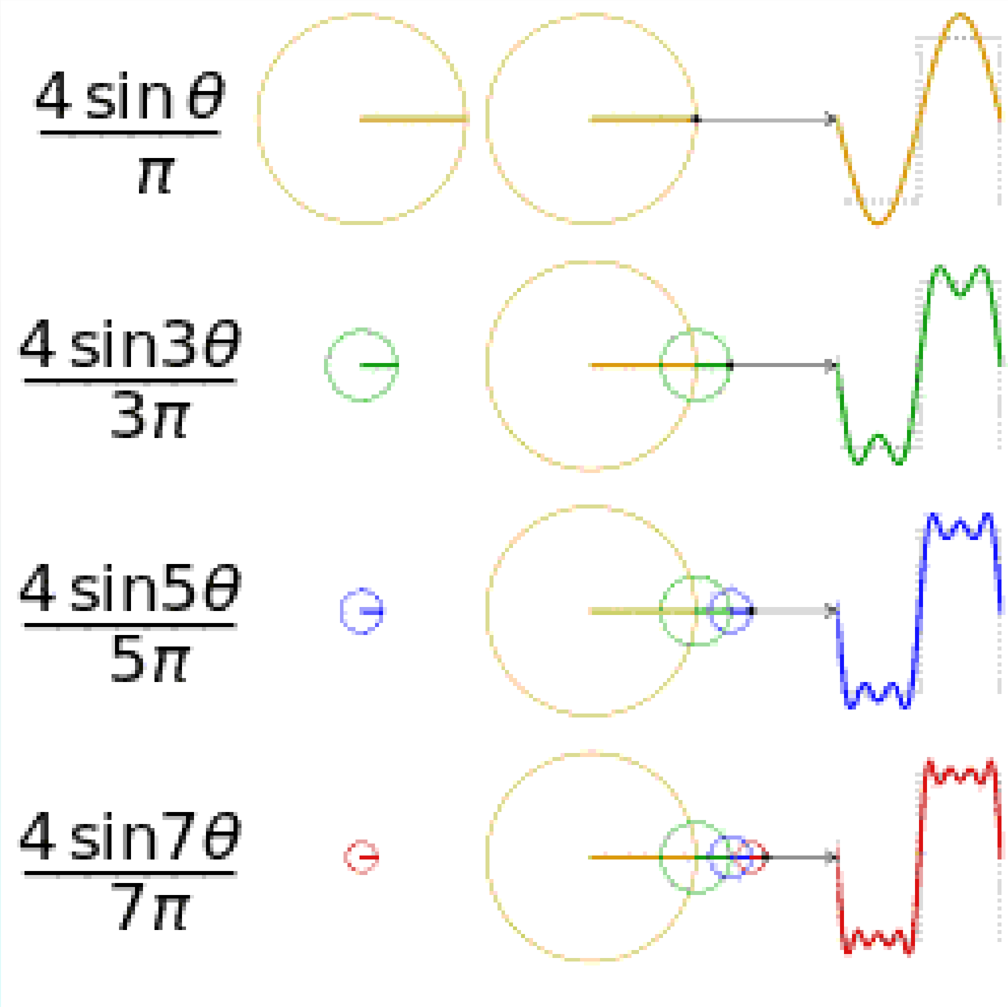
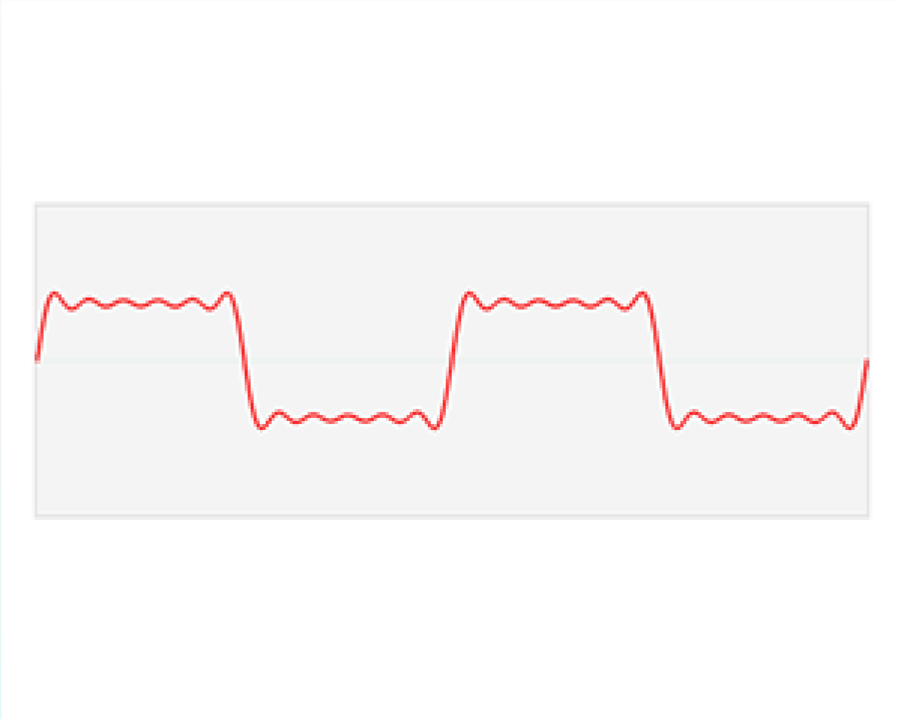
一维傅里叶变换



动态示意图



$\frac{4\sin\theta}{\pi}$
$\frac{4\sin 3\theta}{3\pi}$
$\frac{4\sin 5\theta}{5\pi}$
$\frac{4\sin 7\theta}{7\pi}$



提纲

- 连续周期时间信号的傅里叶级数(FS)
- 连续非周期时间信号的傅里叶变换(FT)
- 离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)
- 离散傅里叶变换(DFT)

连续周期时间信号的傅里叶级数(FS)

■连续周期信号的傅里叶级数

▪周期信号 $x(t)$，周期为T，$\boxed{\text{基波角频率为 } \omega_0 = 2\pi/T}$。在满足狄氏条件时，可展成

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

称为三角形式的傅里叶级数，其系数

▪直流分量 $$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t$$

▪余弦分量的幅度 $$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

▪正弦分量的幅度 $$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

连续周期时间信号的傅里叶级数(FS)

■连续周期信号的傅里叶级数--复指数形式

欧拉公式：$e^{\pm j\theta}=\cos\theta\pm j\sin\theta$ $\longrightarrow$

$$a_n\cos(n\omega_0 t)=\frac{a_n}{2}\left(e^{-jn\omega_0 t}+e^{jn\omega_0 t}\right)$$

$$b_n\sin(n\omega_0 t)=\frac{jb_n}{2}\left(e^{-jn\omega_0 t}-e^{jn\omega_0 t}\right)$$

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)]$$

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-jn\omega_0 t}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}\qquad n=\ldots-2,-1,0,1,2\ldots$$

$$c_0=a_0\qquad c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}$$

$$c_n=c_{-n}^{*}=\frac{a_n-jb_n}{2}$$

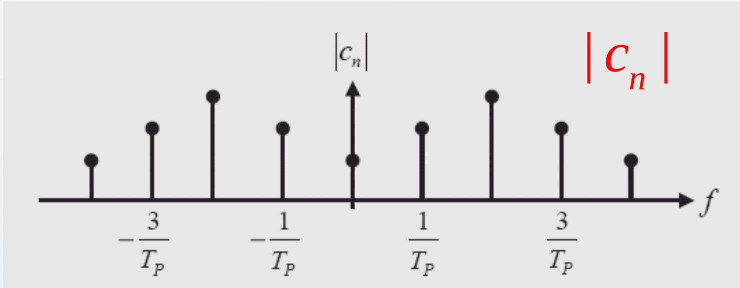
$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

连续周期时间信号的傅里叶级数(FS)

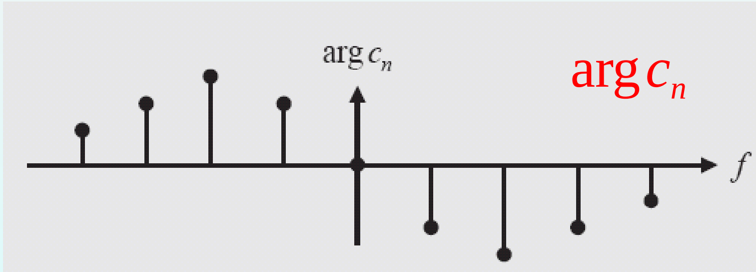
- 频谱的概念
  - 通过傅里叶级数的分解，一个周期信号可以看作由不同频率的简谐函数叠加而成。
  - c_n表示信号的各个频率分量，其一般为复数，通常用幅值谱和相位谱表示。
  - 周期信号频谱的特点:
    - 离散性，即谱线是离散的;
    - 谐波性，即谱线只出现在基波频率的整数倍上;
    - 收敛性，即谐波的幅度随着谐波次数的增高而减小

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}\quad n\in Z$$

$$c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}$$



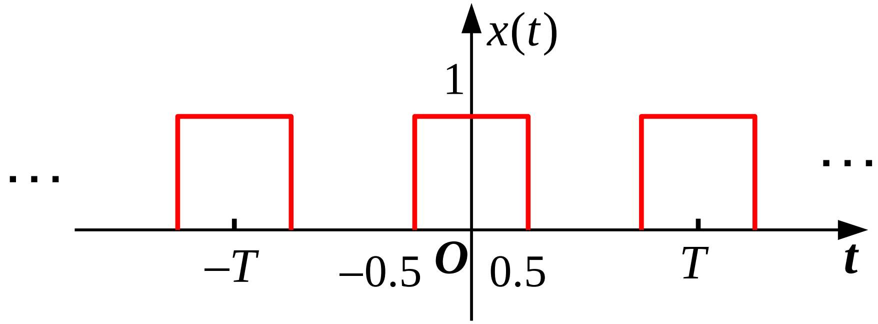
幅值谱



相位谱

连续非周期时间信号的傅里叶变换(FT)

■周期方波信号$x(t)$的分析

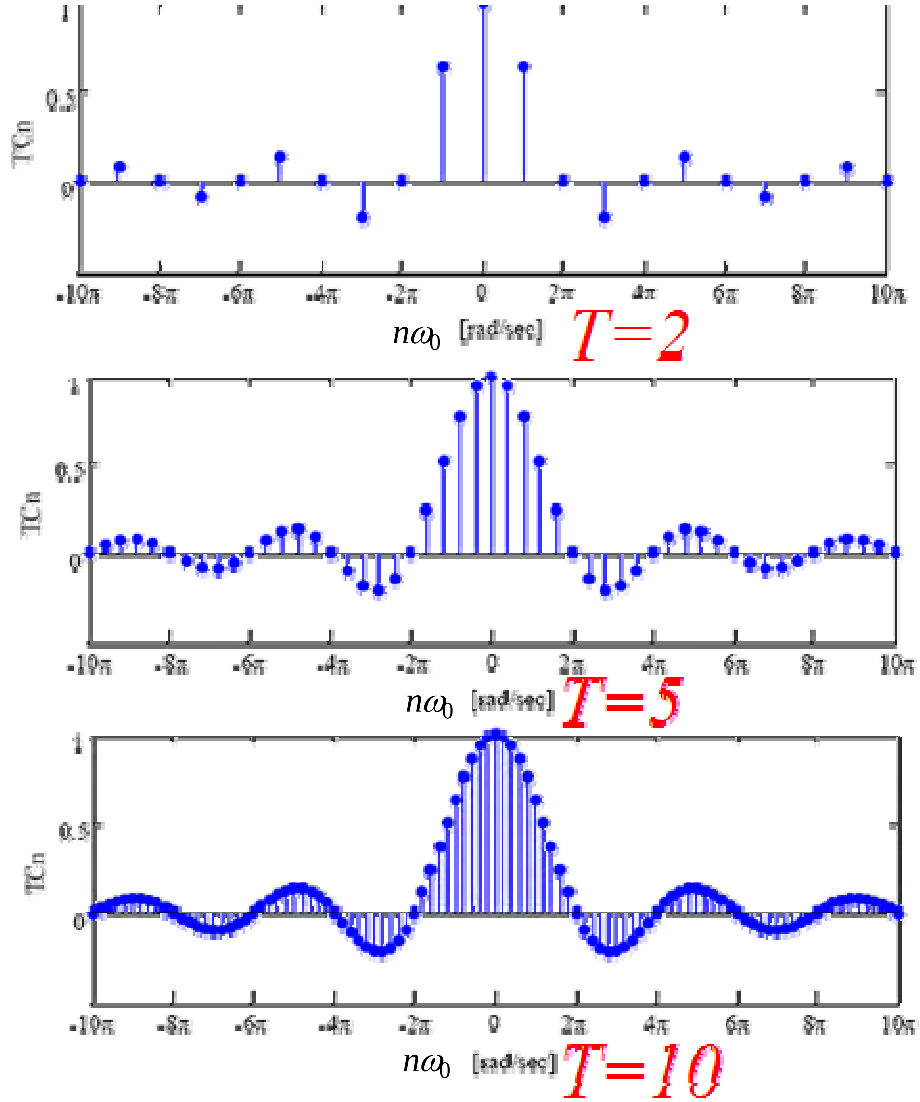


周期方波信号时域波形

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

$$c_n = \frac{2}{Tn\omega_0}\sin\frac{n\omega_0}{2} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$n = \dots -2,-1,0,1,2\dots$$



连续非周期时间信号的傅里叶变换(FT)

从傅里叶级数到连续时间信号的傅里叶变换(FT)

- 对于非周期信号，可以把它当作周期为无限长的信号来处理，此时有：$T \to \infty,\quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \Delta\omega \to 0$
- $n\omega_0 = n\Delta\omega = \omega$，所以离散频谱($n\omega_0$ 的函数)会演变成连续频谱(ω 的函数)
- 同时频谱系数 $c_n = \dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \to 0$
- 引入频谱密度概念：$Tc_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{c_n}{f_0} = \dfrac{c_n}{\omega_0}2\pi$

$$X(\omega) = \lim_{T\to\infty} Tc_n = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

连续非周期时间信号的傅里叶变换(FT)

- 从傅里叶级数到连续时间信号的傅里叶变换(FT)
  - 傅里叶反变换(IFT)

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Tc_n\frac{1}{T}e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Tc_n\frac{\omega_0}{2\pi}e^{jn\omega_0 t}$$

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Tc_n\frac{\omega_0}{2\pi}\;e^{jn\omega_0 t}\xrightarrow[n\omega_0\to\omega]{\omega_0\to d\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(\omega)=\lim_{T\to\infty}Tc_n$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

连续非周期时间信号的傅里叶变换(FT)

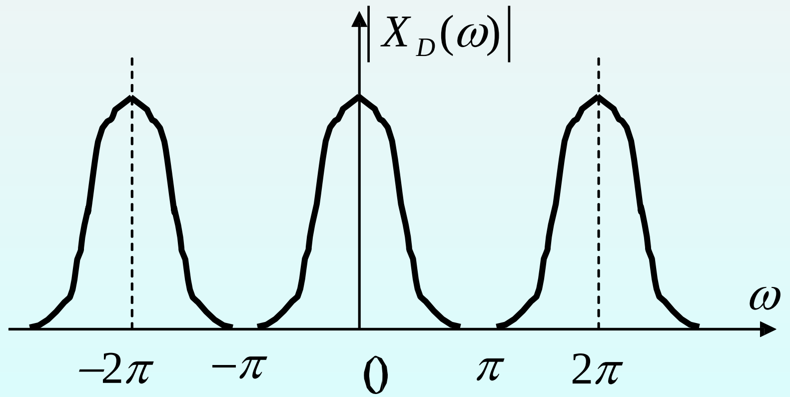
- **FT的基本性质** $FT[x(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}\,t=X(\omega)$
- 线性性质 $FT[ax_1(t)+bx_2(t)]=aX_1(\omega)+bX_2(\omega)$
- 时移性质 $FT[x(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
- 共轭对称性 $X(-\omega)=X^*(\omega)$
- 尺度变换性质 $FT[x(t)]=X(\omega)\rightarrow FT[x(at)]=\dfrac{1}{|a|}X(\dfrac{\omega}{a})$
- 时域微分性质 $FT[\dfrac{d}{dt}x(t)]=j\omega X(\omega)$
- **时域卷积性质** $FT[x_1(t)*x_2(t)]=X_1(\omega)X_2(\omega)$
- **频域卷积性质** $FT[x_1(t)\cdot x_2(t)]=\dfrac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$

离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)

- 离散时间信号傅里叶变换(DTFT)的定义

$$X_D(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

- DTFT的特点
  - $X_D(\omega)$是ω的连续函数
  - $X_D(\omega)$是ω的周期函数，周期为2π $\quad X_D(\omega)=X_D(\omega+2\pi)$
  - $X_D(\omega)$是ω的复函数 $\quad X_D(\omega)=\mathrm{Re}[X_D(\omega)]+j\,\mathrm{Im}[X_D(\omega)]$



离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)

- DTFT反变换
  - $X_D(\omega)$是ω的连续，周期函数，可利用连续周期函数的傅里叶级数来求DTFT反变换：

连续周期函数的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$X_D(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

DTFT

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_D(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

DTFT反变换

离散傅里叶变换(DFT)

- DFT
  - 是研究有限长序列的一种重要工具
  - 作用：使数字信号处理可以在频域采用数字运算的方法进行
  - 有快速算法(FFT)

设x(n)是一个长度为N的有限长序列，则x(n)的N点DFT为：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

IDFT为：

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

其中，$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，N为DFT变换区间长度