第6讲：重采样与多分辨率表示

- **图像下采样**
  – 抗混叠滤波
- **图像插值**
  – LSI 插值滤波器
  – 自适应/非线性插值 / 单帧超分辨率
  – 去彩色马赛克
- **金字塔表示**
  – 高斯金字塔
  – 拉普拉斯金字塔
- **小波表示**
  – 小波滤波器 (FIR, 正交/双正交, 完全重构)

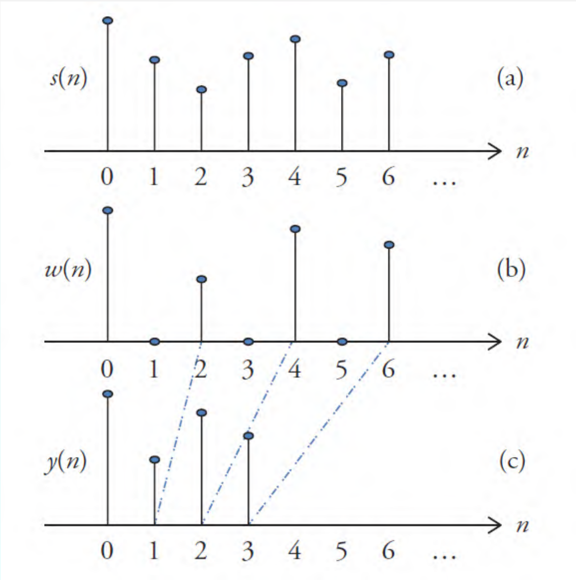
图像下采样

- 给定输入信号 $s(n)$, 定义一个**中间信号 $w(n)$** 为:

$$w(n) = s(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kM)$$

- 则按照**比例因子M下采样**的信号可以表示为:

$$y(n) = w(Mn)$$



下采样因子：M=2

下采样 (cont’d)

- 中间信号的频谱在间隔(—π,π)中具有**输入信号的 M 个复制:**

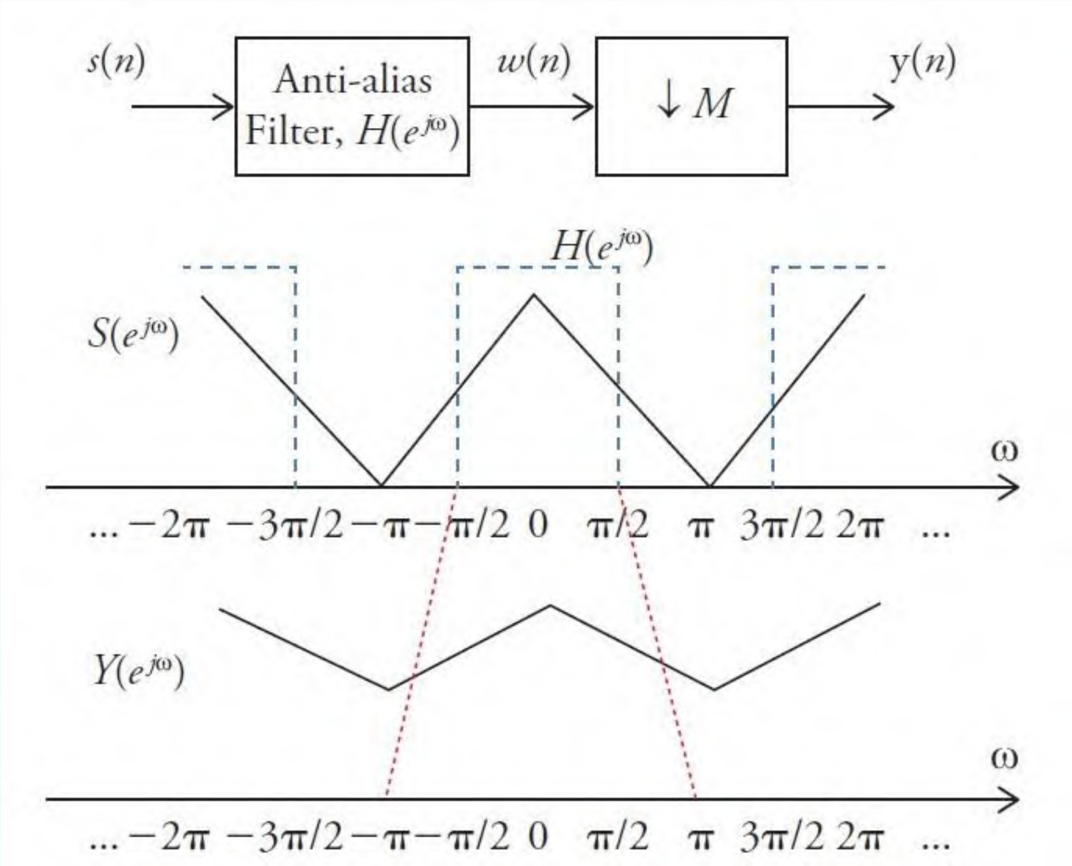
$$W\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{s(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kM)\right\}e^{-j\omega n}=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}S\left(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi k}{M}\right)}\right)$$

- 最终的下采样信号频谱 $Y(e^{j\omega})$ 可通过**扩展 $W(e^{j\omega})$ 的频率轴**来获得，即:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}w(Mn)\,e^{-j\omega n}=W\left(e^{j\frac{\omega}{M}}\right)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}S\left(e^{j\left(\frac{\omega-2\pi k}{M}\right)}\right)$$

下采样 (cont’d)

- 在下采样之前需要使用数字**抗混叠滤波**。

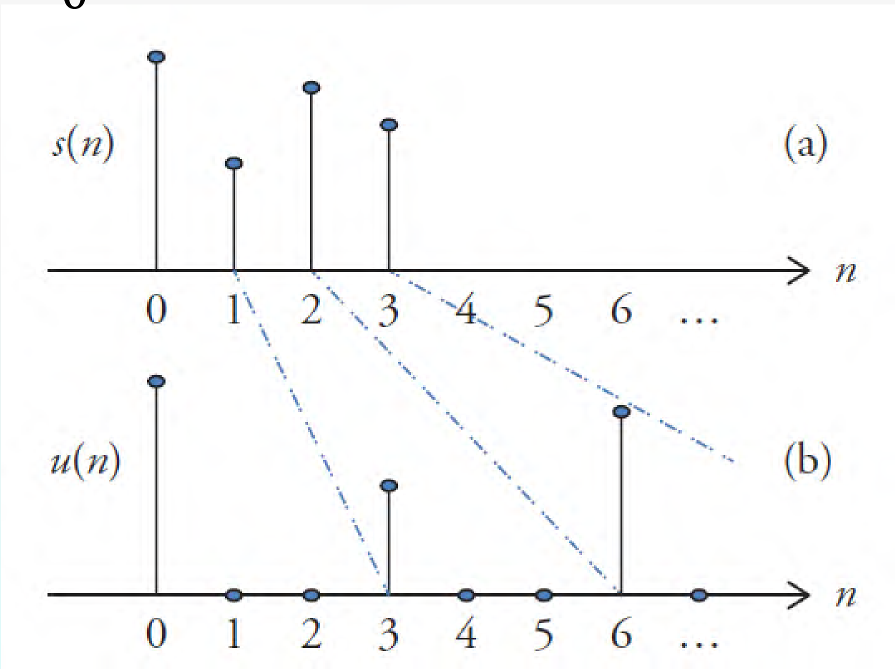


下采样因子：*M*=2

图像插值

- 第一步：使用**零填充进行上采样**：

$$u(n) = \begin{cases} s\left(n/_L\right) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

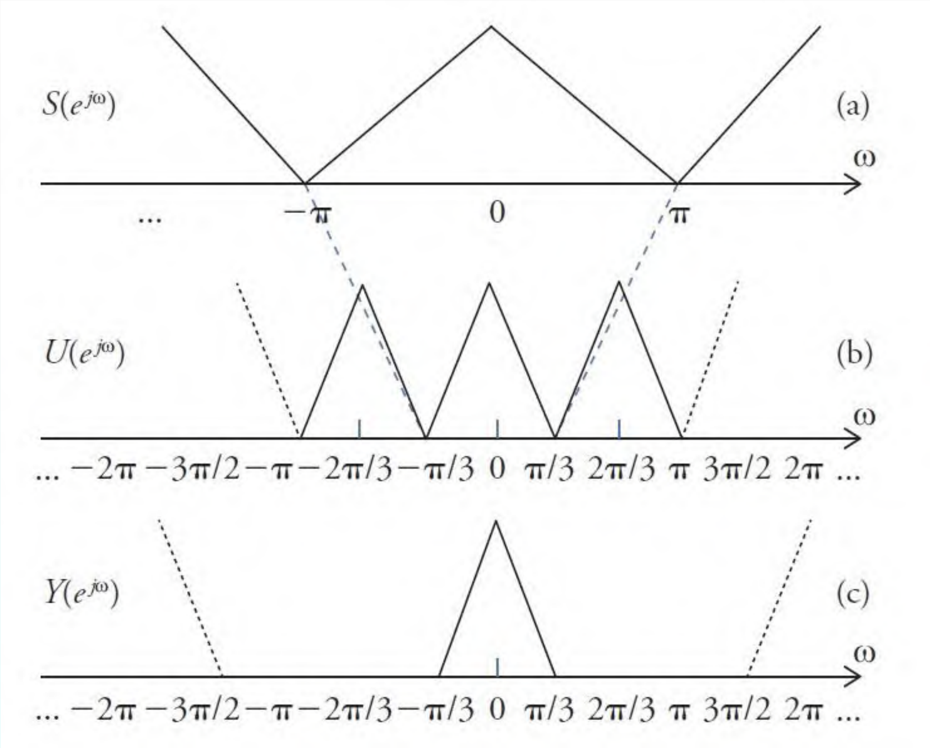


零填充因子 L = 3.

插值 (cont’d)

- 第二步：对u(n)进行**傅里叶变换**

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\, e^{-j\omega Ln} = S(e^{j\omega L})$$



L = 3

插值滤波器

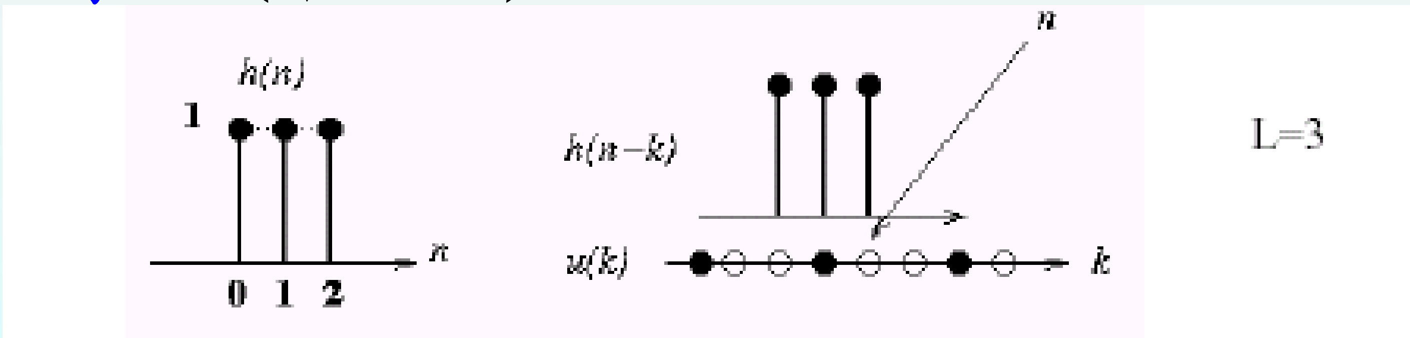
- **理想插值滤波器的冲激响应**为一个sinc函数，即：

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L}$$

- 则**插值信号样值**为：

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k) \frac{\sin(\pi(n-k)/L)}{\pi(n-k)/L}$$

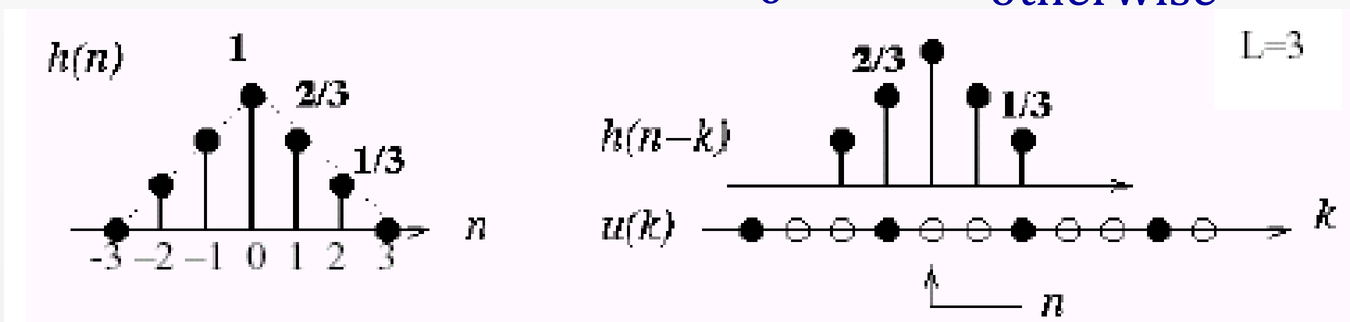
- **零阶保持**插值 (样值复制)



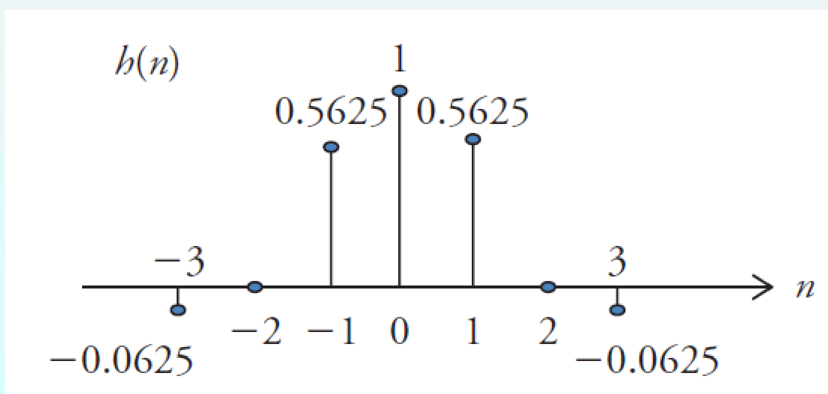
插值滤波器 (cont’d)

- 线性插值

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{L-|n|}{L} & \text{if } 0 \le |n| \le L-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



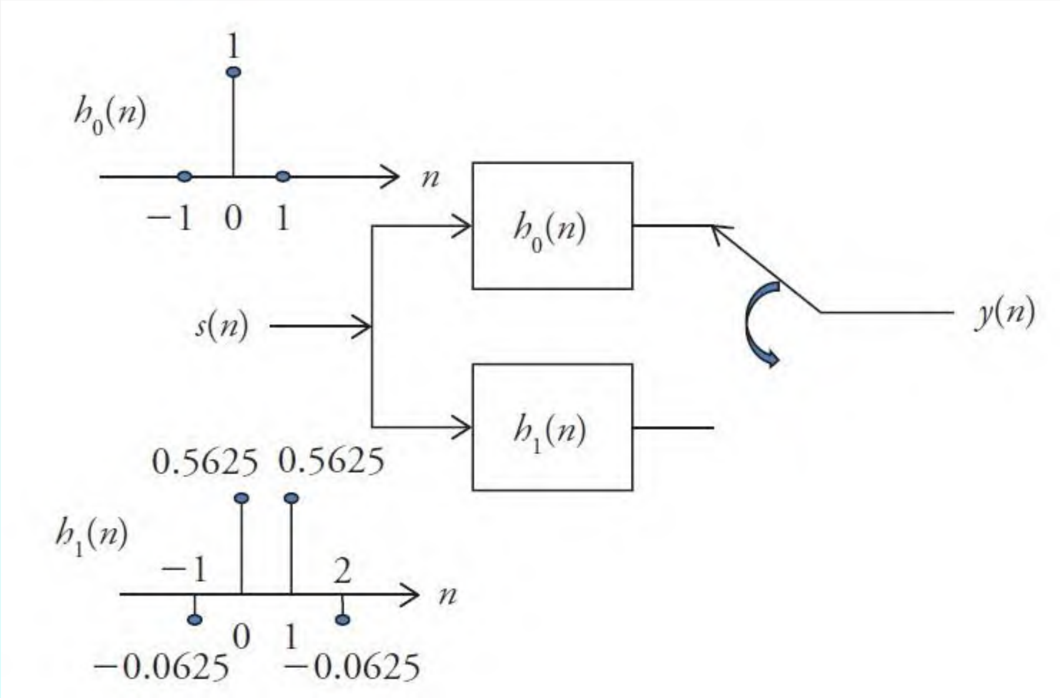
- 三次多项式插值



L = 2

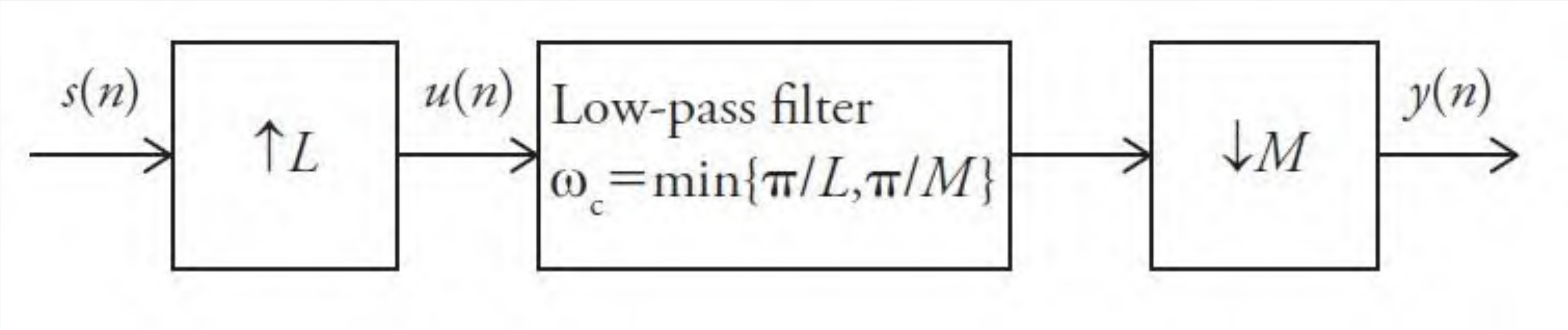
多相实现

- **多相滤波**是一种很有效的实现方式，可避免与0相乘的运算。其中，使用可影响每L个样值运算的冲激响应系数的子集来定义插值滤波器的L个多相组件。输入s(n)不经零填充而直接送入到多相滤波器中。



有理数因子下的采样率转换

- 在采样因子L/M下进行重采样意味着 **L 个输出样值将落在M个已知采样值之间**（非整数像素位置），且已知采样值在转换后必须被保留。



- 有理数因子L/M下重采样的**多相位实现**需要**L 个组件滤波器**，其输入为 s(n)。

自适应/非线性插值

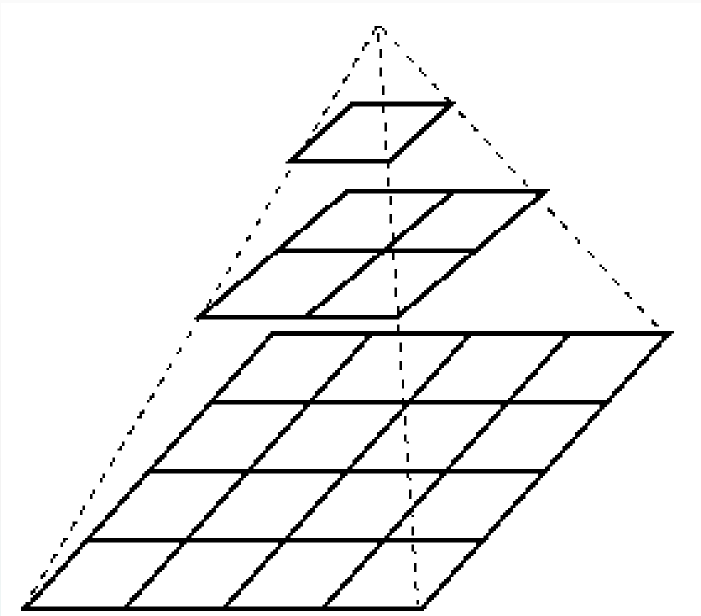
- **自适应/非线性滤波器**：根据图像的局部特性自适应地改变滤波的方向或核，以获得高保真度的边缘和纹理，将损伤降低到最小程度。 边缘自适应滤波器包含两个步骤： i) 检测一个边缘是否存在并判断其方向，ii) 根据边缘的方向和能量改变滤波器的形状和参数，以实现插值。
- **NEDI [Li 01]**：一种针对自然图像的边缘导向的插值算法。使用由低分辨率图像估计的局部协方差系数来改变高分辨率图像的滤波器参数，使得滤波器可以被调整到与任意方向的边缘进行匹配。另外，通过在双线性与自适应滤波器之间进行切换，以减少整体的运算复杂度。
- **各向异性高斯滤波**：滤波器核根据局部边缘方向进行调整，类似于双边滤波。

[Li 01] X. Li and M. Orchard, "New edge-directed interpolation," IEEE Trans. on Image Processing, vol. 10, no. 10, pp. 1521-1527, Oct. 2001.

去彩色马赛克

- **去马赛克**是指在各色彩通道内对于丢失的像素进行插值，常用的方法包括双线性和双三次滤波器，但因为独立地对每个色彩通道进行操作，因此经常会由于混叠错误导致伪彩色。
- **通道间相关性**可通过假定一个物体的颜色比率（或差别）是保持恒定的条件下进行建模，以防止色度的突然变化。
  - **G 通道首先被插值**, 这是由于它具有最多数量的像素，可使用一个边缘自适应滤波器。
  - **R/G 和 B/G 图像**可先通过已有的R 和 B 像素进行构造，再独立地进行插值。
  - **最终的 R 和 B 图像**可通过将插值后图像与G通道的像素值进行相乘来得到。

金字塔表示



由于高斯滤波器的频率响应会在$\omega=\pi/2$之外有一些泄露的问题，因此较上层图像可能会含有混叠。

- 高斯金字塔是**超完备**的，这是由于像素的总数量：

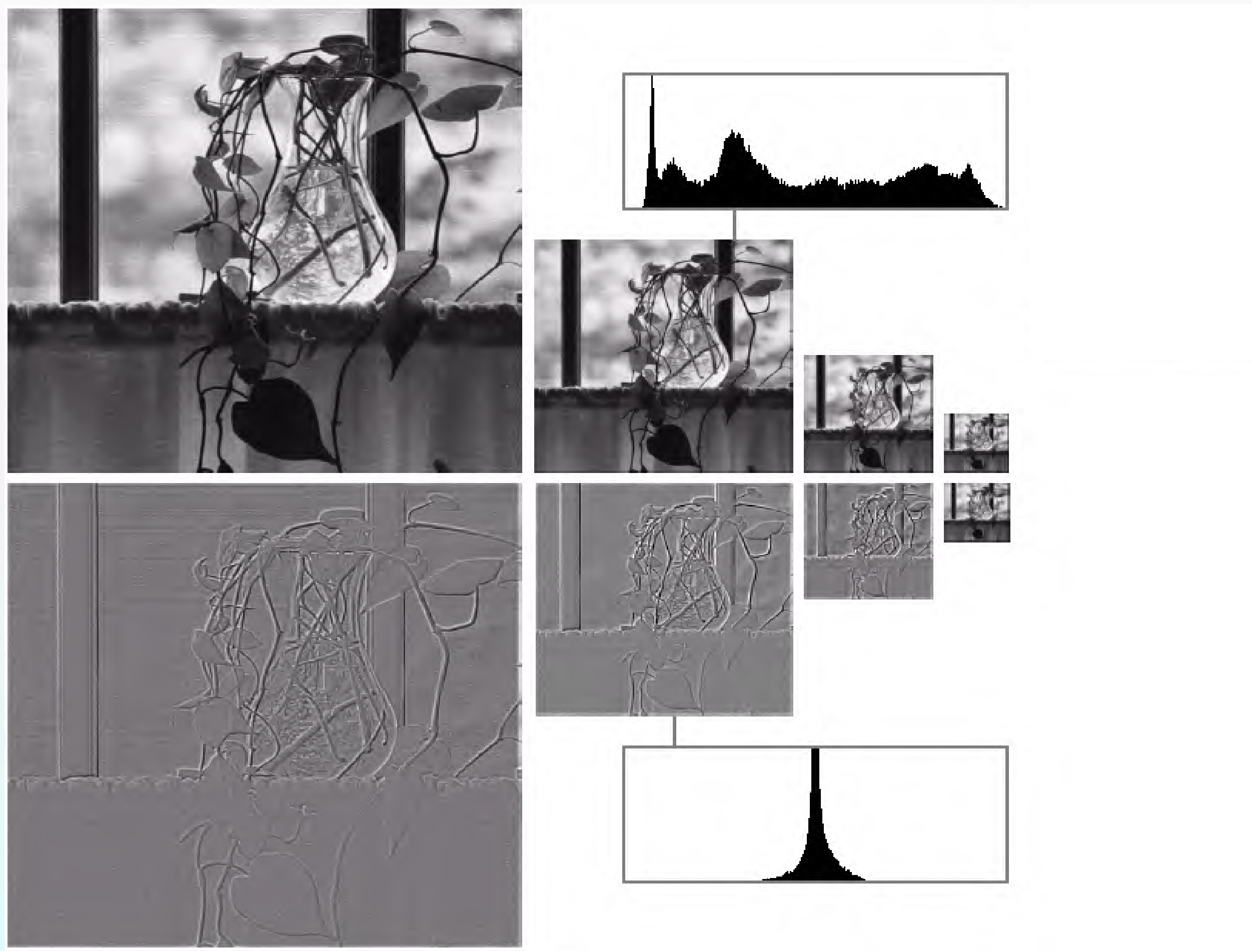
$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{N_1N_2}{4^l}=N_1N_2+\frac{N_1N_2}{4}+\frac{N_1N_2}{16}+\cdots=\frac{4}{3}N_1N_2$$

当层数趋向无穷时为图像像素数的 **4/3 倍**。

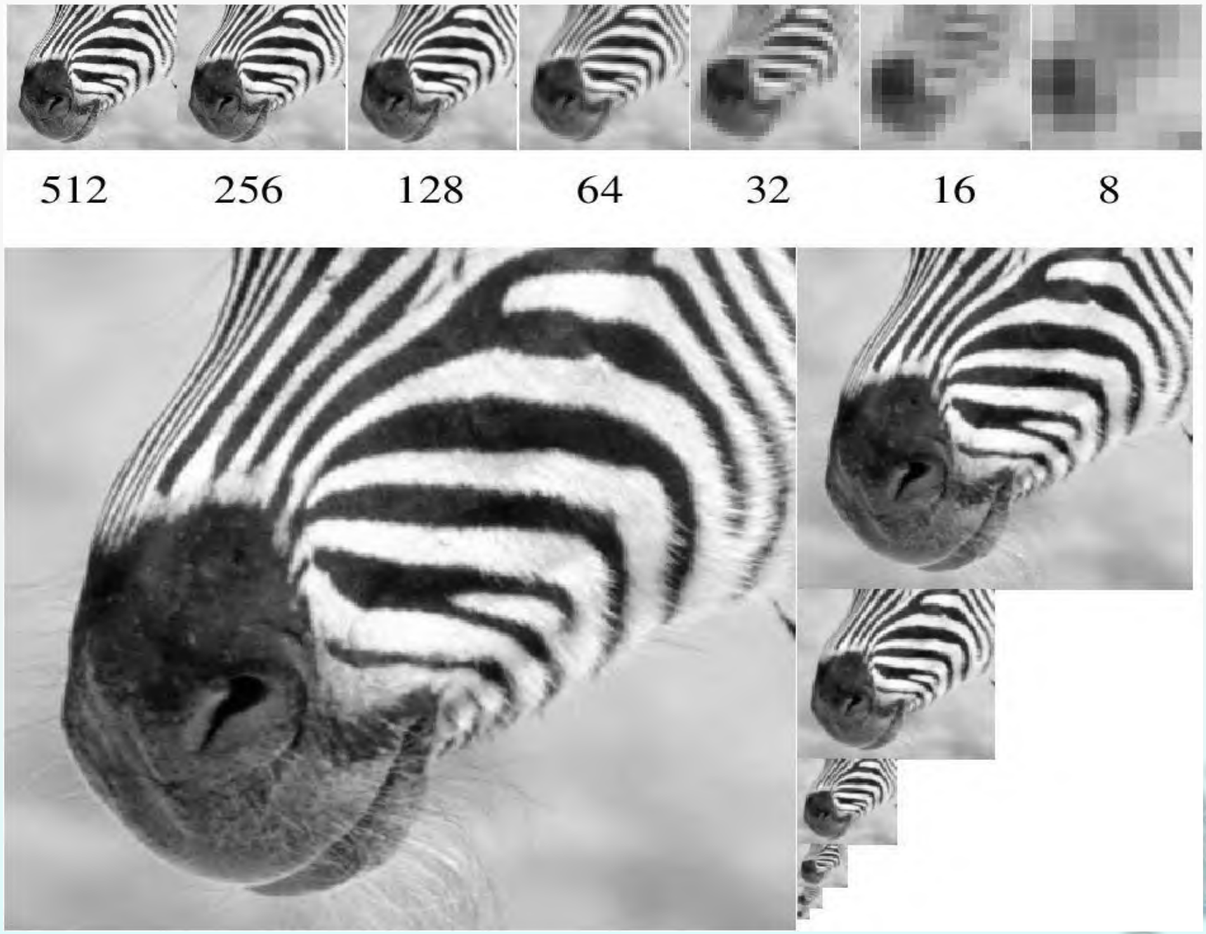
金字塔表示

高斯金字塔:

拉普拉斯金字塔:

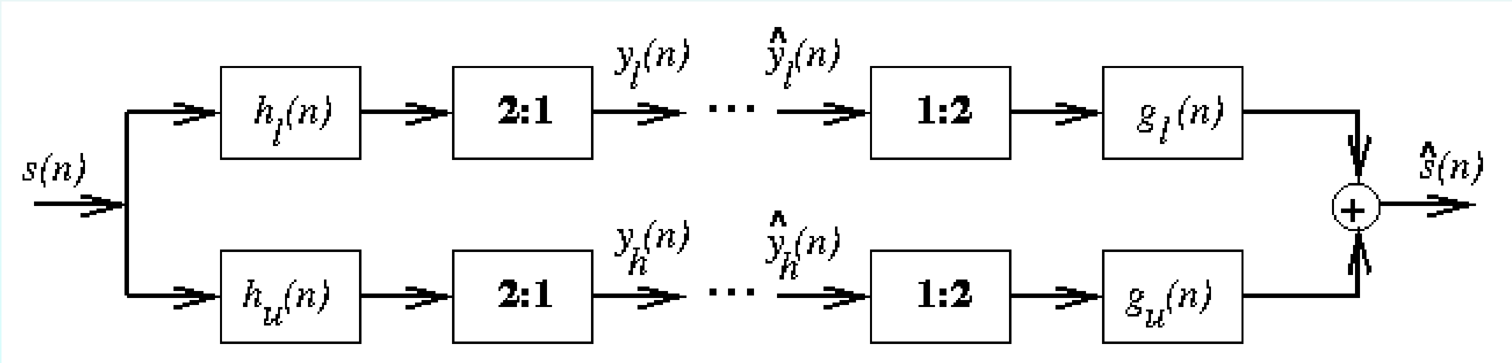


高斯金字塔



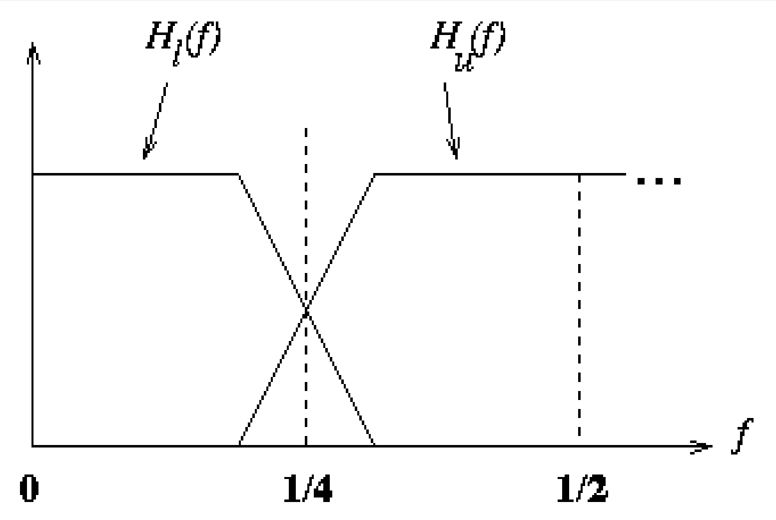
小波滤波

- 考虑**二通道（二进制）分解问题**，其中一个1D信号s(n) 被分成两个相同大小的频带，称为下频带和上频带。
- 在小波分析中，***尺度函数 Φ 与母小波 Ψ*** 可以关联到一个低通滤波器 $H_l(f)$ 与一个高通滤波器 $H_u(f)$。
- 如果设归一化采样频率 f = 1, 其中 ω= 2πf, 则二进制分解需要一个频带**f∈(0,1/4)的理想低通滤波器**和一个频带**f∈(1/4,1/2)的理想高通滤波器**。
- 这些分析滤波器的输出将会分别被因子2下采样以获取**低通和高通子信号 $y_l[n]$ 与 $y_h[n]$**。



小波滤波器组

- 小波变换是**严格采样**的，因为$y_l[n]$ 与 $y_h[n]$中的样值总数与 s (n) 的样值总数相等。
- 一对频率响应相对$f = 1/4$呈现镜像对称的低通与高通滤波器被称为**正交镜像滤波器 (QMF)** 对。
- 当每个子带信号被2倍下采样后，**低通滤波器$H_l(f)$的频率响应将延伸到频带 (1/4,1/2)**，而**高通滤波器的频率响应延伸到频带(0,1/4)**，则不可避免地引起混叠。



小波滤波器 (cont'd)

小波分析-综合滤波器的**期望特性**：

- **完全重构**：为了实现无混叠 (PR) 分析-综合滤波，滤波器必须按照一定方式进行设计，即由分析滤波器引入的混叠将恰好被综合滤波器所消除。
- **对称性**：为了保持滤波后的对称性以使小波系数的数量不会增加，则滤波器必须也是对称的。
- **正交性**：经过合适的归一化，正交变换可保持能量和范数不变，这可由Parseval定理来推断。

已经证明只有一种滤波器可以**同时满足**双通道完全重构、对称性和正交条件，即**2抽头 Haar滤波器对的平凡情况**$h_l[n]=\{1,1\}$, $h_u[n]=\{1,-1\}$。该滤波器对不具有好的频率选择或能量压缩特性。

完全重构条件

- **低通和高通滤波器支路的输出**为:

$$Y_l(f) = \frac{1}{2}\left[H_l\left(\frac{f}{2}\right)S\left(\frac{f}{2}\right) + H_l\left(-\frac{f}{2}\right)S\left(-\frac{f}{2}\right)\right]$$

$$Y_h(f) = \frac{1}{2}\left[H_u\left(\frac{f}{2}\right)S\left(\frac{f}{2}\right) + H_u\left(-\frac{f}{2}\right)S\left(-\frac{f}{2}\right)\right]$$

- **重建信号**可以被表示成:

$$\hat{S}(f) = G_l(f)\,\hat{Y}_l(2f) + G_u(f)\,\hat{Y}_h(2f)$$

- 假定 $\hat{Y}_l(f) = Y_l(f)$ 且 $\hat{Y}_h(f) = Y_h(f)$，则有:

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{2}\left[H_l(f)G_l(f) + H_u(f)G_u(f)\right]S(f) + \frac{1}{2}\left[H_l(-f)G_l(f) + H_u(-f)G_u(f)\right]S(-f)$$

- 只要滤波器满足下列条件，则可**实现混叠抵消 (PR)**:

$$H_l(f)G_1(f) + H_u(f)G_u(f) = 2$$

$$H_l(-f)G_1(f) + H_u(-f)G_u(f) = 0$$

正交滤波器

- 在正交的 QMF 中,可以通过选择下面滤波器**消除混叠频谱**进而实现完全重构:

$$H_u(f) = H_l(-f) = H_l\left(f + \frac{1}{2}\right)$$

$$G_l(f) = 2H_l(f) \quad \text{and} \quad G_u(f) = -2H_u(f)$$

- **第一个条件**等同于:

$$h_u[n] = (-1)^n h_l[n]$$

因此,正交 FIR 分析和综合滤波器具有相同的长度。

- 则**重构信号**为:

$$\hat{S}(f) = \left[H_l^2(f) - H_u^2(f)\right] S(f)$$

而**正交滤波器也必须满足**:

$$\left[H_l^2(f) - H_u^2(f)\right] = 1 \quad \text{对于所有 } f$$

双正交滤波器

- **完全重构条件**可以被表示为:

$$H_l(f)G_l(f) + H_l(-f)G_l(-f) = 2$$
$$H_u(f)G_u(f) + H_u(-f)G_u(-f) = 2$$
$$H_l(f)G_u(f) + H_l(-f)G_u(-f) = 0$$
$$H_u(f)G_l(f) + H_u(-f)G_l(-f) = 0$$

在空域中可以表达为**双正交约束**:

$$\langle h_l[k], g_l[2n-k]\rangle = \delta[n]$$
$$\langle h_u[k], g_u[2n-k]\rangle = \delta[n]$$
$$\langle g_u[k], h_l[2n-k]\rangle = 0$$
$$\langle g_l[k], h_u[2n-k]\rangle = 0$$

- 就小波而言，滤波器$\{h_l[n], h_u[n]\}$来自一对$\{\Phi_1, \Psi_1\}$，而滤波器$\{g_l[n], g_u[n]\}$来自另一对$\{\Phi_2, \Psi_2\}$，且与$\{\Phi_1, \Psi_1\}$的关系为**双正交约束**。

小波滤波器：例子

- **正交, 对称，近似完全重构滤波器**
  - Johnston 滤波器(早期的子带滤波器)
- **正交, 完全重构, 近似对称滤波器**
  - Symlet 或 Coiflet 族为近似对称 [Dau 92], 适用于图像去噪，这是由于白高斯噪声（图像域）的正交变换在小波域中仍然是白高斯的。
- **双正交，对称，完全重构滤波器**
  - 双正交小波有很多，其中 (9,7) 小波为近似正交的，可提供好的能量压缩性能。(9,7) 和 (5,3) 滤波器已经被JPEG2000 标准所选用。

2D 小波表示

- 2 级, 7子带分解