第5讲：图像模型和平滑

- **病态问题**
  - 定义
  - 图像和视频处理中的病态问题
- **图像模型**
  - 确定性模型：先验信息，约束条件
  - 随机场模型：GRF，概率分布函数
- **噪声模型**
- **图像平滑**
  - 线性低通滤波：box滤波与高斯滤波
  - 双边带滤波

病态问题

- **适定问题** (Hadamard, 1923):
  - 解存在
  - 解唯一
  - 解稳定 (对数据小的扰动不会使解产生大的偏差)
- 如果上述条件之中任意一个不满足，则为**病态问题**
- **例子**: 求逆问题 A x = b
  - 超定/非一致线性方程组(解不存在)
  - 欠定线性方程组 (解不唯一)
  - 矩阵的条件数很大
- **许多图像/视频处理问题都是病态的**，如：插值，梯度估计，噪声滤波，图像恢复，图像修补，运动估计。

矩阵条件数

- 矩阵A的**条件数**等于A的范数与A逆的范数的乘积，即cond(A)=‖A‖·‖A^{-1}‖，对应矩阵的3种范数，相应地可以定义3种条件数。
- 函数 cond(A,1)、cond(A)或cond(A inf) 是**判断矩阵病态与否**的一种度量，条件数越大矩阵越病态。
- 表示矩阵计算对于**误差的敏感性**。
  - 对于线性方程组Ax=b，如果A的条件数大，b的微小改变就能引起解x较大的改变，数值稳定性差。
  - 如果A的条件数小，b有微小的改变，x的改变也很微小，数值稳定性好。
- 例子:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 的解是(x,y)=(0.0,0.1),

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ 1.01 \end{bmatrix}$$ 的解是(x,y)=(-0.17,0.22)。

病态问题的解

- 超定/非一致(解不存在)
  - 线性或非线性最小二乘解（普通最小二乘法)

$$\text{minimize} \quad \|\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$$

- 欠定：解不唯一
  - 图像模型：使用关于期望图像的确定性或统计性先验知识对解空间进行约束
- 噪声敏感性
  - 数据预处理：使用预平滑
  - 解的正则化(Tikhonov, 1943): 对问题解施加约束，图像建模

$$\text{最小化} \quad \|\mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \gamma\,\|\mathbf{L}\,\mathbf{x}\|^2$$

最小二乘解

- 给定**一组（M个）线性方程，有N个未知数，M > N,** 可写成: $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ **其中 A** 是M × N 系数矩阵，秩为N, **y** 表示观察向量，**x** 是 N×1 未知数向量。假定系数矩阵为有噪的, 超定系统 $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 是非一致的且无解。

- **通用最小二乘解**是对下式进行最小化：

$$E_{LS} = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}\|^2,$$

其中 : $E_{LS} = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\,\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{A}\,\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} - 2\,(\mathbf{A}\,\mathbf{x})^T\,\mathbf{y} + (\mathbf{A}\,\mathbf{x})^T\,(\mathbf{A}\,\mathbf{x})$

$$\frac{dE_{LS}}{dx} = 2\,\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x} - 2\mathbf{A}^T\mathbf{y} = 0$$

则有 :

$$\hat{x}_{LS} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{y}$$

图像模型：确定性

- **确定性模型 (向量空间):** 将一幅离散图像$s(n_1, n_2)$表示成$N \times N$ 个像素组成的矩阵或$N^2 \times 1$维度的向量 $s = [\ s_1\ s_2\ \dots\ s_{N^2}\ ]^T$(将像素 (n_1, n_2) 按照顺序展开成一个一维序列 $j = 1, \dots, N^2$, 例如：字典排序。)

- 对问题解进行**正则化**，可通过最小化:
  - 受约束的关于$\mathbf{L}s$ 的 **L2范数**, 其中 **L** 表示拉普拉斯算子 (平滑性)

    $$\text{minimize } \|\mathbf{L}\,\mathbf{s}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N^2-1} [(\mathbf{Ls})_n]^2 \quad \text{服从：}\quad \mathbf{A\ s = b}$$

  - 受约束的关于$\mathbf{L}s$ 的 **L1范数** (鲁棒估计, 边缘保护)

    $$\text{minimize } \|\mathbf{Ls}\|_1 = \sum_{n=0}^{N^2-1} |(\mathbf{Ls})_n| \quad \text{服从：}\quad \mathbf{A\ s = b}$$

  - 受约束的关于$\mathbf{Ts}$ 的 **L0 范数**, 其中 **T** 表示某种变换，如小波变换 (稀疏性)

    $$\text{最小化}\quad \|\mathbf{T\ s}\|_0 = \lim_{p\to 0} \|\mathbf{T\ s}\|_p^p = \{\#\ i, (\mathbf{Ts})_i \neq 0\} \quad \text{服从：}\quad \mathbf{A\ s = b}$$

图像模型：随机性

- **随机（贝叶斯）模型**：将离散图像表示成一个随机场(每个像素表示一个随机变量)，其联合概率分布为 p($\mathbf{z}$)。
- **贝叶斯框架 – 贝叶斯规则**: $p(\mathbf{z}|\mathbf{y}) = \dfrac{p(\mathbf{y}|\mathbf{z})\,p(\mathbf{z})}{p(\mathbf{y})}$
- **马尔科夫随机场 (MRF)**: 一个随机场 $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Lambda}\}$被称为:
  关于一个邻域系统 N 的一个 MRF， 条件是： $p(\mathbf{z}) > 0$， 对所有 $\mathbf{z}$ 且
  $p\left(z(\mathbf{x}_i) \mid z(\mathbf{x}_j),\ \mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_i\right) = p\left(z(\mathbf{x}_i) \mid z(\mathbf{x}_j)\right)$, only $\mathbf{x}_j \in \mathbf{N}_{\mathbf{x}_i}$
- **吉布斯分布**: 离散值吉布斯随机场（GRF）的联合概率密度函数为：

$$p(\mathbf{z}) = \frac{1}{Q}\sum_{\boldsymbol{\Omega}} e^{-\frac{U(\mathbf{z}=\boldsymbol{\Omega})}{\mathbf{T}}}\,\delta(\mathbf{z}-\boldsymbol{\Omega})$$

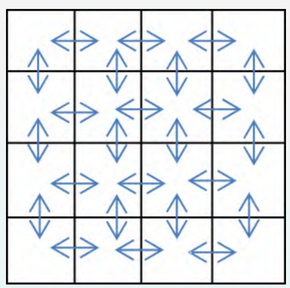
  且归一化约束 Q 为： $Q = \sum_{\boldsymbol{\Omega}} e^{-\frac{U(\mathbf{z}=\boldsymbol{\Omega})}{\mathbf{T}}}$
- **正则化—通过最大化:** 吉布斯势能: $U(\mathbf{z}) = \sum_{C \in \mathbf{C}} V_C\left(z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in C\right)$
  - 对数似然函数$\log\left(p(\mathbf{y}|\mathbf{z})\right)$
  - 后验概率$p(\mathbf{z}|\mathbf{y})$

离散GRF模型：例子

- 假定一个离散值GRF z 被定义在4×4 格子上, 下面显示了一个4×4 二进制分割标记场的两种实现结果。令**二像素团的势能函数**定义为:

$$V_C\big(z(\mathbf{x}_i), z(\mathbf{x}_j)\big) = \begin{cases} -\beta & \text{if } z(\mathbf{x}_i) = z(\mathbf{x}_j) \\ \beta & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 β 为正数。



1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

1	2	1	2
2	1	2	1
1	2	1	2
2	1	2	1

- 在一个4×4图像中共有**24 个二像素团**。图C.2 (b) 和 (c) 显示的配置中的吉布斯势分别为 -24 β 和 +24 β。很明显，图C.2(b) 显示的空域平滑配置具有较高的先验概率

噪声模型

- 加性

$$y = s + v$$

- 白噪声，其方差：σ_v^2

$$E\{v(n_1,n_2)\,v(i_1,i_2)\} = \sigma_v^2\delta(n_1 - i_1, n_2 - i_2)$$

$$= \begin{cases} \sigma_v^2 & \text{if } (n_1,n_2) = (i_1,i_2) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- 信号独立

$$E\{s(n_1,n_2)\,v(i_1,i_2)\} = 0 \quad \text{对所有}(n_1,n_2)\text{与}(i_1,i_2)$$

- 信号噪声比：

$$SNR = 10\log\frac{\sigma_s^2}{\sigma_v^2}$$

其中σ_s^2为信号的方差。

SNR估计

- 使用给定样本图像对整体图像统计特性进行估计需要假定该随机过程为**各态历经**的。
- 噪声的方差可以从一个**平滑（无纹理）**的图像区域中计算得到，这是由于当无噪声时，该区域的方差应该为0。
- 可以手动标记一个**平滑的矩形区域 W**，然后估计其均值：

$$\hat{\mu}_{y\in W}=\frac{1}{M}\sum_{(i_1,i_2)\in W} y[i_1,i_2]$$

其中 M 是选择区域的像素数。

则**噪声方差的估计**为:

$$\hat{\sigma}_v^2=\hat{\sigma}_{y\in W}^2=\frac{1}{M}\sum_{(i_1,i_2)\in W}\left(y[i_1,i_2]-\mu_{y\in W}\right)^2$$

- **无噪图像的方差的估计**为： $\hat{\sigma}_S^2=\max\{\hat{\sigma}_y^2-\hat{\sigma}_v^2,0\}$

图像滤波/平滑

- 线性空间不变滤波
  - 冲激响应
  - 相关核
  - 频域分析
- 自适应与非线性滤波
  - 双边滤波
  - 中值滤波

FIR 线性空间不变滤波

- FIR LSI 可以表达为**空域内的 2D 卷积求和**

$$s_L(n_1, n_2) = \sum_{(i_1,i_2)\in W}\sum h(i_1, i_2)\, s(n_1 - i_1, n_2 - i_2)$$

其中 $h(i_1,i_2)$ 表示**滤波器的冲激响应**，W 为**滤波器支撑区域**。

冲激响应被归一化为：

$$\sum_{(n_1,n_2)\in M}\sum h(i_1, i_2) = 1$$

则滤波后图像的平均亮度值将保持不变。

- 通常需要滤波器为**对称可分离**的或**圆周对称**的，以得到零相位特性、易于设计以及快速实现。

2D FIR LSI 低通滤波器：示例

- **2D box滤波器 –可分离**

  $h(n) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

- **2D 高斯滤波器**

$$h(n_1, n_2) = K\,e^{-\left(\frac{n_1^2+n_2^2}{2\sigma^2}\right)} = C\,e^{-\left(\frac{n_1^2}{2\sigma^2}\right)} \cdot C\,e^{-\left(\frac{n_2^2}{2\sigma^2}\right)} = h_1(n_1) \cdot h_2(n_2)$$

  – 可分离

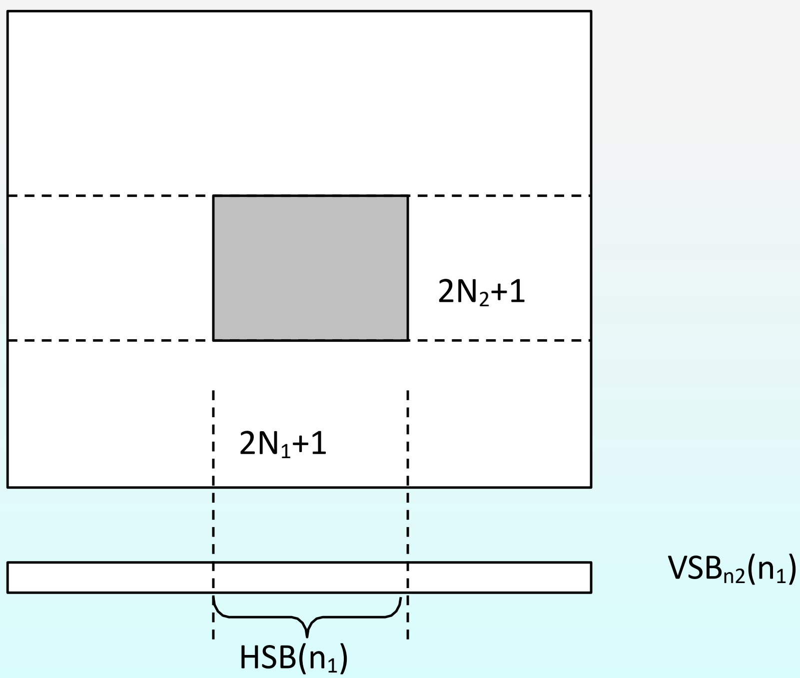
  $h(n) = [1 \quad 4 \quad 7 \quad 4 \quad 1]$

  – 参数σ决定了滤波器的强度。

1	4	7	4	1
4	16	28	16	4
7	28	49	28	7
4	16	28	16	4
1	4	7	4	1

box滤波器的有效实现

- box滤波器的有效实现需要两个运行缓冲区，即**垂直求和缓冲区 (VSB)** 和**水平求和缓冲区 (HSB)**。VSB 通过移除一整行（最上面一行）并增加新的一行对每行进行更新。HSB 则是利用当前的 VSB 计算其均值。



box滤波器的有效实现 (cont'd)

- **VSB 被初始化**为： $VSB_{N_2}(n_1) = \sum_{n_2=0}^{2N_2} s(n_1, n_2)$

其更新方程为：

$$VSB_{n_2+1}(n_1) = VSB_{n_2}(n_1) - s(n_1, n_2 - N_2) + s(n_1, n_2 + N_2 + 1)$$

- **行 n_2 的HSB 被初始化**为： $HSB_{n_2}(N_1) = \sum_{n_1=0}^{2N_1} VSB_{n_2}(n_1)$

对于$n_1 = N_1, \ldots$ 其更新方程：

$$HSB_{n_2}(n_1 + 1) = HSB_{n_2}(n_1) - VSB_{n_2}(n_1 - N_1) + VSB_{n_2}(n_1 + N_1 + 1)$$

- **滤波输出图像**为：

$$s_L(n_1, n_2) = \frac{1}{(2N_1+1)(2N_2+1)} HSB_{n_2}(n_1)$$

- box滤波的计算复杂度为**每像素一次乘法（除法），两次加法和两次减法**，而与滤波器冲激响应的大小无关。

卷积 vs. 相关

- 卷积

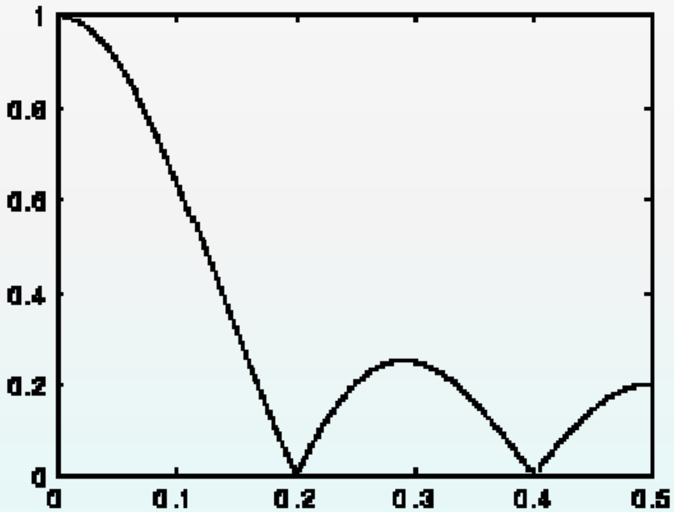
a	b	c
d	e	f
g	h	i

- 相关

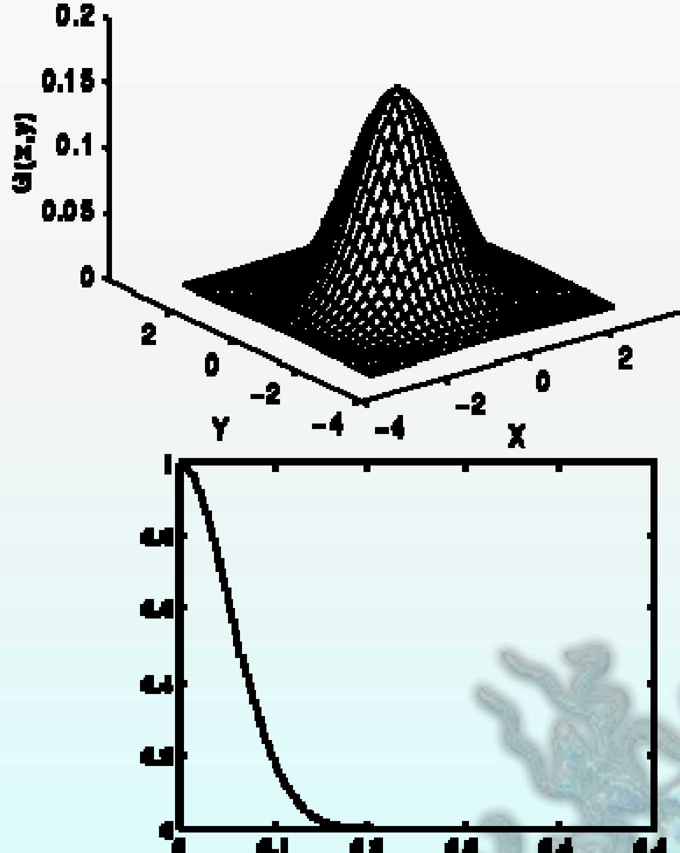
i	h	g
f	e	d
c	b	a

频率响应

- LSI 滤波器可以**在频域进行刻画。**



5×5 box滤波器频域响应的1D 截面图



高斯滤波器频域响应的1D 截面图

2D DFT 域的滤波

1) 将滤波器冲激响应$h(n_1,n_2)$与图像$s(n_1,n_2)$进行**零填充**以获取$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$的数组。

(数组大小通常被设定为大于N + M —1 的2的幂。)

2) 对$h(n_1,n_2)$ 和$s(n_1, n_2)$分别计算**$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$个点的DFT**。

3) 将$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$的数组$H(k_1,k_2)$与$S(k_1, k_2)$进行**逐元素相乘**。

4) 对乘积结果进行**$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$个点的IDFT**以获得最终结果。

双边滤波器

- 基本思想是在一个当前像素$\mathrm{n} = (\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2)^T$的**局部邻域内计算 s(k) 的加权平均**,而邻域内像素应满足灰度值与当前（中心）像素值在一定范围内，即：

$$g(\mathbf{n}) = \sum_{k} w(\mathbf{n}, \mathbf{k})\ s(\mathbf{k})$$

其中权重 $w(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ 取决于像素**n** 和 **k**之间的**空域接近性**和 **亮度相似性**。$\mathbf{k} = (k_1, k_2)^T$.

- **空域接近函数 p(·)** 与 **亮度相似性函数 q(·)** 为高斯的，

$$p(\mathbf{n} - \mathbf{k}) = e^{-\frac{\|\mathbf{n}-\mathbf{k}\|^2}{2\sigma_p^2}}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示从N × N核中心像素**n**到像素**k**的欧氏距离。σ_p^2决定了空域接近性的重要程度。而

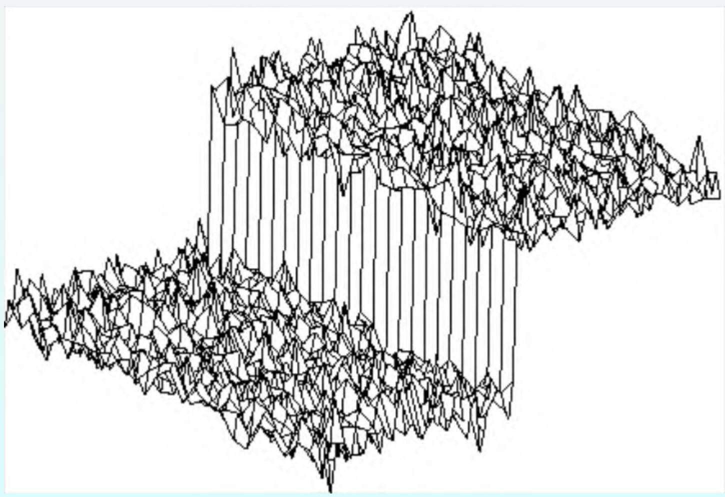
$$q(\mathbf{n} - \mathbf{k}) = e^{-\frac{d(s(\mathbf{n}), s(\mathbf{k}))}{2\sigma_q^2}}$$

双边滤波器 (cont'd)

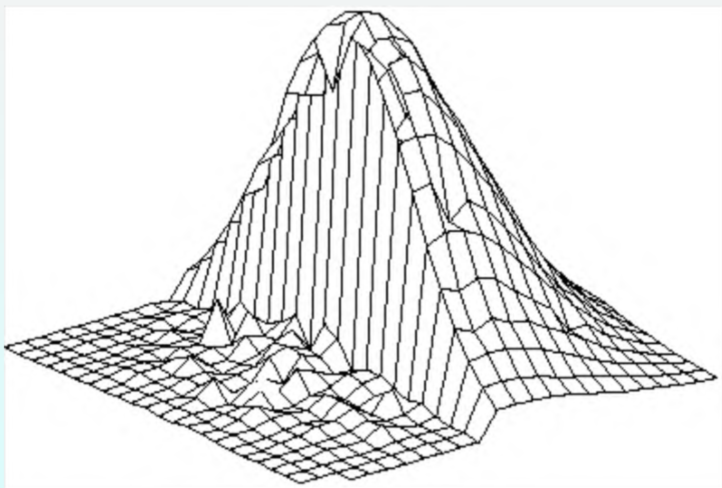
- 将像素**n**作为中心时，**双边滤波器的系数（权重）**为：

$$w(\mathbf{n},\mathbf{k}) = K(\mathbf{n})p(\mathbf{n}-\mathbf{k})\,q(\mathbf{n}-\mathbf{k})$$

其中K(**n**) 为归一化常数，使所有像素的权重值之和为1。



$q(\mathbf{n}-\mathbf{k})$ 对于通过**n**的一个阶跃边缘



双边带滤波器核： $w(\mathbf{n},\mathbf{k})$

双边滤波器 (cont’d)

- **三个自由参数**: 局部邻域的大小 N, 尺度参数 σ_p^2 和范围参数 σ_q^2。当范围参数较大时，双边滤波器接近于高斯滤波器。
- **双边滤波器的有效实现**: 可采用亮度量化以及空域下采样的思想进行快速运算 [Par 08]。

[Par 08] S. Paris, P. Kornprobst, J. Tumblin and F. Durand, “Bilateral filtering: Theory and applications,” Foundations and Trends in Comp. Graphics and Vision, vol. 4, no. 1, pp. 1–73, 2008.