

第 10 讲:图像复原

- 模糊模型
 - 空间不变模糊
 - 空变模糊
- 线性移不变复原
 - 逆滤波
 - 正则化: 约束最小二乘与稀疏模型
 - 正则化损伤
 - 边界取值问题
- 模糊辨识/盲复原
- 空变模糊图像复原
 - 凸集投影

线性空间不变模糊模型

- 空间不变模糊可建模为对图像使用空间点扩散函数PSF $h(n_1, n_2)$ 进行 2D 卷积:

$$y(n_1, n_2) = h(n_1, n_2) ** s(n_1, n_2) + v(n_1, n_2)$$

其中 $y(n_1, n_2)$, $s(n_1, n_2)$ 与 $v(n_1, n_2)$ 分别表示退化图像、理想图像和噪声。

- 根据成像原理, 可假设对于所有的 (n_1, n_2) , $h(n_1, n_2)$ 为非负实数, 且 $\sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) = 1$, 即不会由于图像模糊而增加或减少能量。
- 此模型可以被表示成向量-矩阵形式:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{s} + \mathbf{v}$$

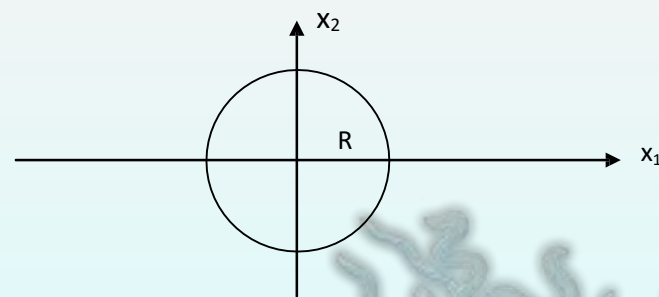
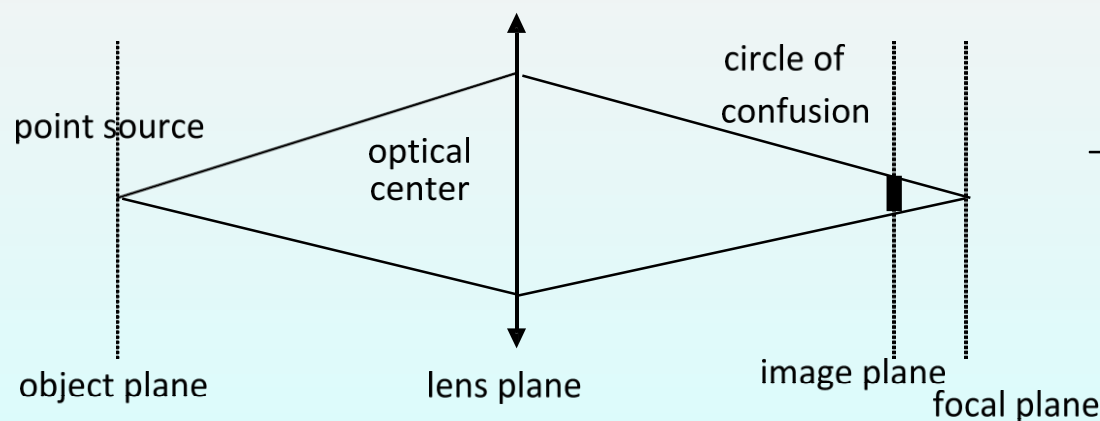
其中 \mathbf{y} , \mathbf{s} , 与 \mathbf{v} 分别表示观察图像、原图像以及噪声, 且均以字典排序方式组成 $N^2 \times 1$ 向量, 而 \mathbf{H} 为块Toeplitz阵, 它以算子形式描述了模糊 PSF 的特性。

失焦模糊

- 对于**理想聚焦照相机**，一个点光源在焦平面上可形成一个图像点。
- 将失焦成像系统的 PSF 建模为一个均匀的圆形区域，称为**散射圆盘**：

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中圆的半径表示了失焦的程度。



失焦模糊的PSF

失焦模糊 (cont'd)

- **离散的PSF $h(n_1, n_2)$** 可通过对 $h(x_1, x_2)$ 进行采样获得，此时采样是在每个像素区域内对连续的PSF求积分。
- **失焦模糊的频率响应** 可通过对 $h(x_1, x_2)$ 进行傅里叶变换得到：

$$H(u_1, u_2) = \frac{2\pi R}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} J_1 \left(R \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \right)$$

其中 $J_1(\cdot)$ 代表**第一类一阶贝塞尔函数**。

- $H(u_1, u_2)$ 为圆对称，且具有**规律的过零点**。

线性运动模糊

- 设在曝光期间 $[0, t_e]$, 照相机与场景之间的相对运动为沿与图像平面水平轴夹角为 θ 方向速度为 v 的恒速运动。定义运动位移为 $A = vt_e$, 则**线性运动模糊的 PSF** 为:

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{A} & \text{if } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{A}{2}, \frac{x_1}{x_2} = -\tan\theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- 如果运动**平行于**图像平面的**水平轴**, 可得**1D PSF**:

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{A} & \text{if } -\frac{A}{2} \leq x_1 \leq \frac{A}{2}, x_2 = 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- 1D 水平匀速运动模糊的**频率响应**为:

$$H(u_1, u_2) = \frac{\sin\left(\pi \frac{A}{2} u_1\right)}{\pi \frac{A}{2} u_1}$$

具有**周期性的过零点**。

线性空变模糊模型

- 定义**成像系统的空变 PSF** 为:

$$h(n_1, n_2; i_1, i_2) = L\{\delta(n_1 - i_1, n_2 - i_2)\}$$

代表点光源在 (i_1, i_2) 处的生成图像, 可能为无限冲激响应。

- 将一幅离散图像表示成**点源的加权移位之和**:

$$s(n_1, n_2) = \sum_{(i_1, i_2) \in S} s(i_1, i_2) \delta(n_1 - i_1, n_2 - i_2)$$

其中 $s(i_1, i_2)$ 表示图像的采样值, S 表示图像支撑区域。

上式两边经过系统, 并考虑加入的噪声 $v(n_1, n_2)$, 则模糊图像可以被表达为:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{(i_1, i_2)} \sum_{\in S} s(i_1, i_2) h(n_1, n_2; i_1, i_2) + v(n_1, n_2)$$

- 对于一幅 $N_1 \times N_2$ 观察模糊图像, 假定PSF已知, 此模型将给出 **$N_1 \times N_2$ 个耦合的线性方程**, 具有 **$N_1 \times N_2$ 个未知数 $s(i_1, i_2)$** 。

线性空间不变恢复

- **逆滤波器**: 如果向量 \mathbf{y} 位于矩阵 \mathbf{H} 的列空间; 即: 如果忽略噪声, 且矩阵 \mathbf{H} 为可逆的 (满秩矩阵), 通过直接求逆获得精确解:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{y}$$

其中 $\hat{\mathbf{s}}$ 表示理想图像的估计值, 此过程被称为**逆滤波**。由于逆滤波需要进行大型矩阵求逆运算, 通常是在频域内实现的。

- 忽略噪声项, 将卷积模型两边进行 **2D (空间)傅里叶变换**:

$$Y(f_1, f_2) = H(f_1, f_2) S(f_1, f_2)$$

- 则逆滤波可在**频域内**表达为:

$$\hat{S}(f_1, f_2) = \frac{Y(f_1, f_2)}{H(f_1, f_2)}$$

注意: 只要 \mathbf{H} (分块循环) 为**满秩矩阵**, 则 $H(f_1, f_2) \neq 0$ 。

逆滤波 (cont' d)

- 逆滤波器在**DFT域的实现**需要将 $H(f_1, f_2)$ 在频域内进行采样，而这会导致空域混叠。
- 逆滤波具有以下**缺点**:
 - 矩阵 **H** 可能为**奇异的**，即它的**特征值** $H(u_1, u_2)$ 中**至少有一个为零**，此时就会导致在 2D DFT 实现过程中出现除以零的情况。
 - 即使矩阵 **H** 是**非奇异的**，即对所有的 (u_1, u_2) ， $H(u_1, u_2) \neq 0$ ，由于观察噪声**v**的存在，向量 **y** 也**几乎不可能存在于矩阵 H 的列空间**，因此，不存在精确解。此时只能求助于**最小二乘 (LS) 解**，即对残差 $\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}$ 的范数进行最小化。最小二乘解，也被称为**伪逆滤波**，即：

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

如果矩阵 **H** 的列为线性独立的，则解存在。

- 伪逆滤波器可在**频域内实现**，其中除以零被定义为零。

约束最小二乘法

- **正则化反卷积**方法利用图像的先验信息，在奇异频率附近以及高频部分对伪逆滤波器的传递函数进行滚降操作，以**限制噪声的放大**。
- **约束最小二乘 (CLS) 法**的目的是对复原图像 $\|\mathbf{L}\mathbf{s}\|_2^2$ 中**高频成分的L2范数**进行最小化，这就要求它是尽可能平滑的，同时使解与观察值一致，即满足退化模型。因此，可归结为下面的约束优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \quad & \|\mathbf{L}\mathbf{s}\|_2^2 \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|_2^2 = \sigma_v^2 \end{aligned}$$

其中 \mathbf{L} 为**正则化算子**， σ_v^2 表示噪声方差。典型的算子 \mathbf{L} 为高通滤波器 (例如拉普拉斯滤波器) 以选取满足观察方程的最平滑解。

CLS 滤波器(cont'd)

- 使用**拉格朗日公式**，此问题可以转换为一个**无约束最优化**问题：

$$\min_{\mathbf{s}} E(\mathbf{s}), \text{ 其中: } E(\mathbf{s}) = \|\mathbf{Ls}\|_2^2 + \lambda(\|\mathbf{y} - \mathbf{Hs}\|_2^2 - \sigma_v^2)$$

λ 为拉格朗日乘子。对 $E(\mathbf{s})$ 关于 \mathbf{s} 求微分，并令其结果为 0，即：

$$\Phi(\hat{\mathbf{s}}) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}} E(\mathbf{s}) = \mathbf{L}^T \mathbf{L} \hat{\mathbf{s}} - \lambda \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}$$

- 则 **CLS 滤波器的解** $\hat{\mathbf{s}}$ 可表达为：

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

其中 $\alpha = 1/\lambda$ 被称为**正则化参数**，可控制**解的平滑性**与**忠实于观察值**的保真度之间的折中。

- 伪逆滤波器**是 CLS 滤波器的特殊情况，即当 $\alpha = 0$ 时。

CLS 滤波器：DFT域实现

- 频域滤波器可表示成：

$$\hat{S}(u_1, u_2) = \frac{H^*(u_1, u_2)}{|H(u_1, u_2)|^2 + \alpha |L(u_1, u_2)|^2} Y(k_1, k_2)$$

其中 $L(u_1, u_2)$ 表示正则化算子 L 的特征值。

- 上式可在**DFT域**中高效实现。算子 L 可以被定义为拉普拉斯滤波器的2D 移不变生成核（冲激响应），而 $L(u_1, u_2)$ 则是这个核的2-D DFT。

连续迭代逼近

- **逐次迭代**可使用**梯度下降**方法对 $\hat{E}(\mathbf{s})$ 进行优化，即沿着梯度 $\Phi(\mathbf{s})$ 的反方向进行迭代。

- 解的**迭代表达式**为：

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1} = \hat{\mathbf{s}}_k - \beta \Phi(\hat{\mathbf{s}}_k)$$

其中 β 被称为步长，初始条件 $\hat{\mathbf{s}}_k = \mathbf{0}$ 。显然 $\Phi(\hat{\mathbf{s}})$ 的根为迭代的稳定点。

- 将梯度表达式代入**逐次逼近迭代公式**，可得：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{s}}_k + \beta \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \beta (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \hat{\mathbf{s}}_k \\ &= \beta \mathbf{H}^T \mathbf{y} + [\mathbf{I} - \beta (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L})] \hat{\mathbf{s}}_k\end{aligned}$$

对于 $\alpha = 0$ ，则降级为收敛于**最小二乘解的 Landweber 迭代**。

连续迭代逼近: 收敛性

- 对于任意的迭代算法，有两个重要的问题：**i) 它是否收敛？**
如果是，**ii) 有限解是什么？**

- 通过**频域分析**可回答上述问题。令：

$$\hat{S}_{k+1}(u_1, u_2) = \beta H^*(u_1, u_2) Y(u_1, u_2) + [1 - \beta(|H(u_1, u_2)|^2 + \alpha |L(u_1, u_2)|^2)] \hat{S}_k(u_1, u_2)$$

- 易知**第k次迭代滤波器的频率响应**为：

$$T_k(u_1, u_2) = \beta \sum_{m=0}^{k-1} [1 - \beta(|H(u_1, u_2)|^2 + \alpha |L(u_1, u_2)|^2)]^m H^*(u_1, u_2)$$

- 因此，如果

$$|1 - \beta(|H(u_1, u_2)|^2 + \alpha |L(u_1, u_2)|^2)| < 1$$

- 则：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(u_1, u_2) = \frac{H^*(u_1, u_2)}{|H(u_1, u_2)|^2 + \alpha |L(u_1, u_2)|^2}$$

- 因此，如果上述条件满足，则**迭代会收敛到 CLS 解**。

维纳复原

- **维纳滤波器**提供了在给定观察模型、关于图像先验信息以及噪声（以它们的功率谱形式给出）条件下，对于理想图像的**线性最小均方误差 (LMMSE)** 估计。
- **维纳反卷积滤波器**可以证明是CLS滤波器的一种特殊情况。

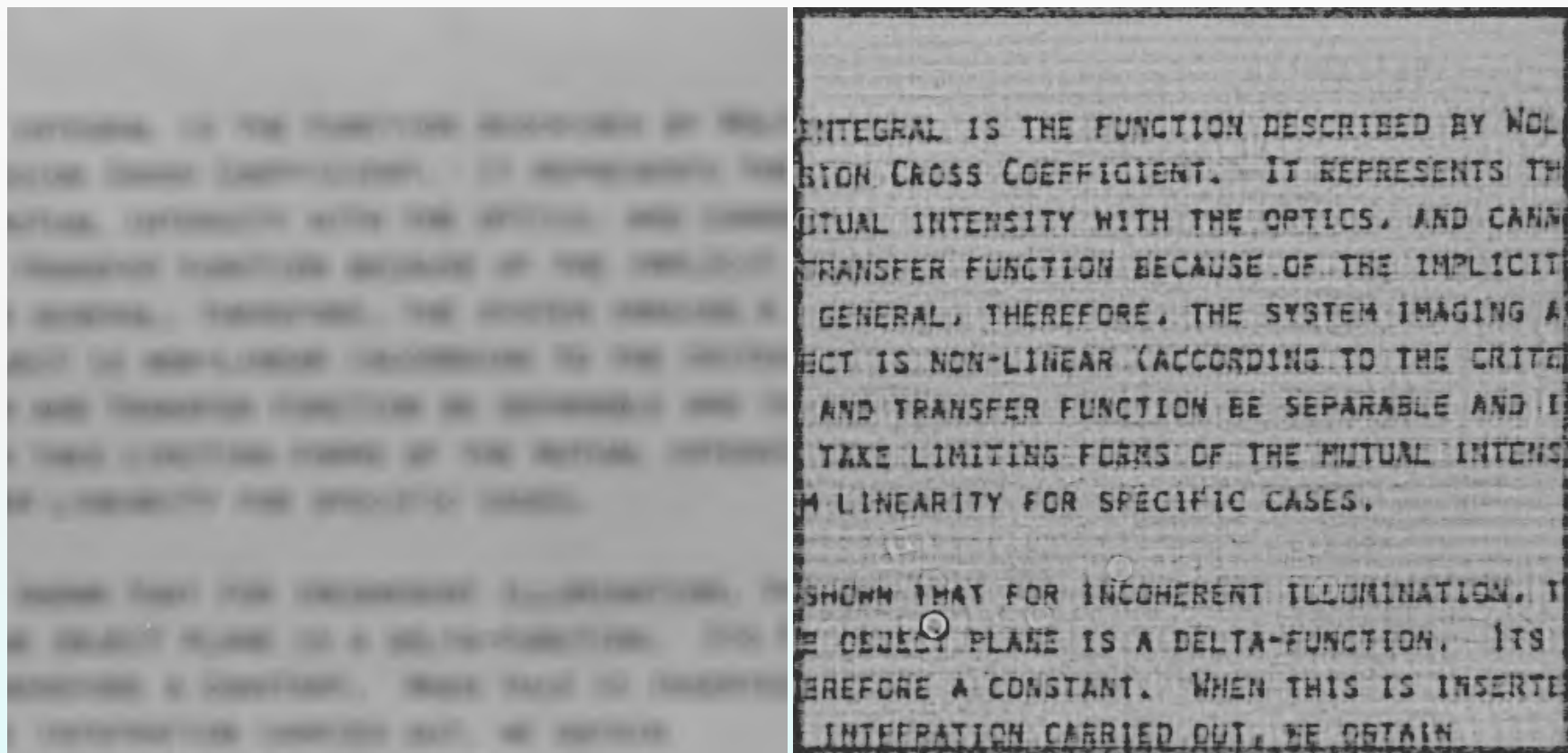
即： $\mathbf{L} = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{R}_v$ 或 $|L(u_1, u_2)|^2 = P_{vv}(u_1, u_2) / P_{ss}(u_1, u_2)$

$$\hat{S}(u_1, u_2) = \frac{P_{ss}(u_1, u_2) H^*(u_1, u_2)}{P_{ss}(u_1, u_2) |H(u_1, u_2)|^2 + P_{vv}(u_1, u_2)} Y(u_1, u_2)$$

其中 \mathbf{R}_s 与 \mathbf{R}_v 表示理想图像和噪声协方差矩阵， $P_{ss}(u_1, u_2)$ 与 $P_{vv}(u_1, u_2)$ 则分别表示它们的功率谱。

- **图像和噪声的功率谱**可根据给定的噪声图像进行估计。

LSI 图像恢复：示例



失焦模糊

正则化损伤

- **正则化复原** 滤波器估计图像与理想（原始）图像的关系是：

$$\begin{aligned}\hat{S}(k, l) &= \Phi(k, l) Y(k, l) \\ &= \Phi(k, l) [H(k, l) S(k, l) + V(k, l)] \\ &= S(k, l) + [\Phi(k, l) H(k, l) - 1] S(k, l) + \Phi(k, l) V(k, l)\end{aligned}$$

- 其中 $[\Phi(k, l) H(k, l) - 1] S(k, l)$ 被称为信号相关的**正则化损伤**。
 $[\Phi(k, l) H(k, l) - 1]$ 为正则化逆运算结果与直接逆运算之间的偏差。
- $\Phi(k, l) V(k, l)$ 被称为**噪声滤波损伤**。
- 显然，对于LSI复原，在**噪声滤波损伤**与**正则化损伤**之间存在折中问题。

基于稀疏建模的图像复原

- 在[Ela 10]中给出了一种**基于稀疏图像模型**的方法, 其中复原图像的稀疏表示系数可由下式得到:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \left\{ \lambda \|\alpha\|_p^p + \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{D}\alpha - \mathbf{y}\|_2^2 \right\}$$

这里 $\mathbf{D}\alpha$ 为稀疏图像表示, \mathbf{H} 为退化矩阵, \mathbf{y} 表示有噪的观察图像

- 该问题可通过使用**迭代收缩阈值(IST)算法**框架求解, 即:

$$\hat{\alpha}_{k+1} = \arg \min_{\alpha} \left\{ \lambda \|\alpha\|_p^p + \frac{1}{2} \|\alpha - \beta_k\|_2^2 \right\}$$

可交替使用下面两个步骤:

- i) E步骤**: 使用 $\beta_k = \hat{\alpha}_k - \gamma \mathbf{D}^T \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{D}\hat{\alpha}_k - \mathbf{y})$ 对 β_k 进行更新, 其运算复杂度为 $O(N \log N)$;
- ii) M步骤**: 对 β_k 进行尺度收缩。

图像复原中的边界取值问题

- 图像传感器具有**有限的视野**。由于视野（图像）边界上的模糊像素值依赖于一些超出视野边界的像素，因此用来复原边界像素的必要信息不足。
- 虽然此问题似乎只与边界像素有关，但一般来讲复原滤波器的冲激响应具有**很大的支撑区域**，因此边界像素问题造成的影响会**扩散**到几乎所有的像素。
- 可采用以下方法缓解此问题：
 - 在空域实现中，从边界像素**外推**出不存在的像素，通常是通过重复第一/最后一行/列。
 - 在 DFT 域实现中，由于图像被假定为循环周期的，可在最左和最右以及最上和最下的**边界像素间进行插值**，以估计出不存在的像素值。

模糊识别

- 对于线性移不变模糊 PSF, 其**模糊图像的功率谱**为:

$$P_y(\omega_1, \omega_2) = |H(\omega_1, \omega_2)|^2 P_s(\omega_1, \omega_2)$$

- 假定 $P_s(\omega_1, \omega_2)$ 没有过零点, $P_y(\omega_1, \omega_2)$ 的过零点**是由 $H(\omega_1, \omega_2)$ 导致的**。
使用周期图法估计观察图像在DFT域中的功率谱:

$$P_y[k_1, k_2] = \frac{1}{N_1 N_2} |Y[k_1, k_2]|^2$$

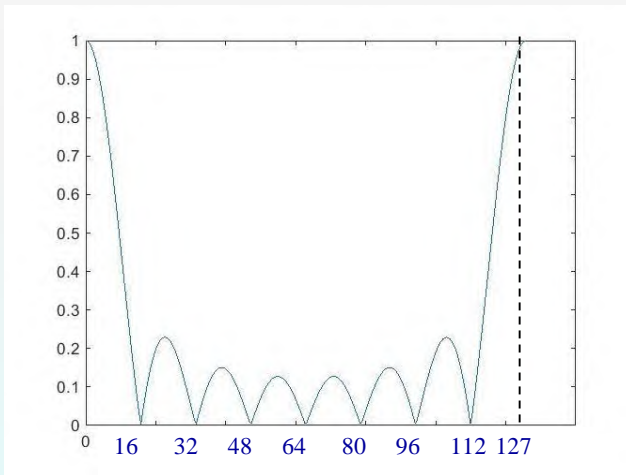
其中 $Y[k_1, k_2]$ 为噪声污染的 $N_1 \times N_2$ 图像的 DFT。定义**倒谱**为图像功率谱对数的离散傅里叶反变换:

$$c[n_1, n_2] = -\text{IDFT}(\log \{P_y[k_1, k_2]\})$$

- 注意到**识别倒谱域中的过零点**是比较容易的, 这是由于对数运算增强了过零位置的**可视性**。

模糊识别：示例

- **线性运动模糊**可建模为**均匀矩形PSF**，其频率响应为一个**sinc 函数**，具有**周期性的零点**。在一个 8×1 水平运动模糊和 128×128 DFT 的情况下，在 2D DFT 每行系数中有 7 个过零点，采样位置分别为 $k_1 = 16, 32, 48, 64, 80, 96, \text{和 } 112$ 。



MATLAB:

```
x = linspace(0,2*pi,256);  
plot(x,abs(diric(x,8)))
```

- **失焦模糊**的时域形式可建模为一个**均匀圆形 PSF**，其频率响应为一个**贝塞尔函数**，具有定期的零点，其位置为关于圆半径的函数。类似地，可通过退化图像功率谱中的过零点估计 PSF 的半径。

凸集映射

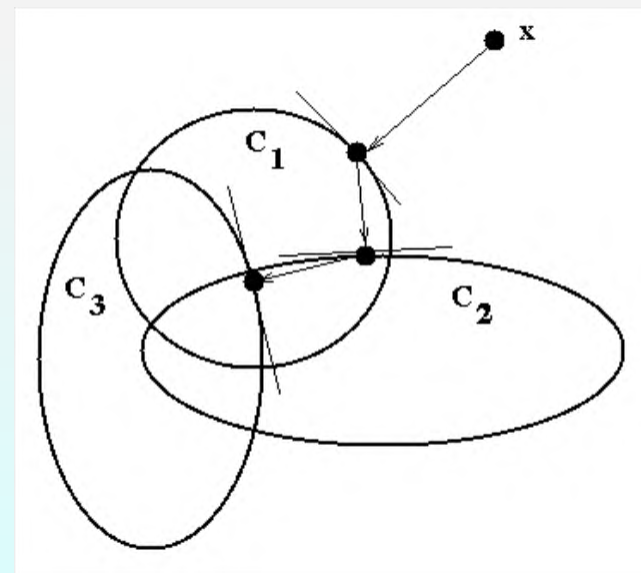
- 未知信号 \mathbf{s} 为某个希尔伯特空间的元素。每个先验信息或约束将解限制在一个闭合的凸集中。因此，对 m 条信息，有 m 个闭的凸集 $C_i \in H, i = 1, 2, \dots, m$ ，且 $\mathbf{s} \in C_0 \equiv \bigcap_{i=1}^m C_i$ ，条件是交集 C_0 非空。
- 给定集合 C_i 与其各自的投影算子 $\mathbf{P}_i, i = 1, 2, \dots, m$ ，可产生序列：

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{P}_m \mathbf{P}_{m-1} \cdots \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

或更为一般地，

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{T}_m \mathbf{T}_{m-1} \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{s}_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

其中： $\mathbf{T}_i \equiv (1 - \lambda_i \mathbf{I}) + \lambda_i \mathbf{P}_i, 0 < \lambda_i < 2$ ，
为松弛投影算子，弱收敛于约束集合 C_0
交集中的可行解。



空变模糊图像的恢复

- 假定**空变模糊 PSF**和**噪声统计参数**已知, 定义闭合的具有凸性的可行解(约束)集合, 对于每个观察像素:

$$C_{n_1, n_2} = \{x(i_1, i_2) \mid |r^x(n_1, n_2)| < \delta_0\} \quad 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$$

其中:

$$r^x(n_1, n_2) = y[n_1, n_2] - \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} x[i_1, i_2] h(n_1, n_2; i_1, i_2)$$

为与解 \mathbf{x} 相关的残差, \mathbf{x} 为集合中任意的一个元素。

- 数值 δ_0 为**先验界**, 反映了实际图像为集合 C_{n_1, n_2} 的一个元素的**可信度**。
如果 \mathbf{s} 表示理想图像, 则 $r^s(n_1, n_2) = v[n_1, n_2]$, 而 $r^s(n_1, n_2)$ 的统计特性应该与 $v[n_1, n_2]$ 相同。
- 如果假定**噪声是高斯**的, 且其标准差为 σ_v , δ_0 设置为 $c \sigma_v$, 其中 $c \geq 0$, 由一个适当的统计信度边界(例如: $c=3$, 99% 可信度)来决定。

空变恢复 (cont'd)

- 将一个任意的 $x[i_1, i_2]$ 投影到 C_{n_1, n_2} 的投影 $P_{n_1, n_2} \{x[i_1, i_2]\}$ 被定义为 [Tru 84]:

$$P_{n_1, n_2} \{x[i_1, i_2]\} = \begin{cases} x[i_1, i_2] + \frac{r^x(n_1, n_2) - \delta_0}{\sum_{o_1} \sum_{o_2} h^2(n_1, n_2; o_1, o_2)} h(n_1, n_2; i_1, i_2) & \text{if } r^x(n_1, n_2) > \delta_0 \\ x[i_1, i_2] & -\delta_0 \leq r^x(n_1, n_2) \leq \delta_0 \\ x[i_1, i_2] + \frac{r^x(n_1, n_2) + \delta_0}{\sum_{o_1} \sum_{o_2} h^2(n_1, n_2; o_1, o_2)} h(n_1, n_2; i_1, i_2) & \text{if } r^x(n_1, n_2) < -\delta_0 \end{cases}$$

- 附加约束, 如有界能量、幅值以及有限支撑, 可用来改善结果。幅值约束可被定义为:

$$C_A = \{z(i_1, i_2) \mid \alpha \leq z(i_1, i_2) \leq \beta \text{ for } 0 \leq i_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq i_2 \leq N_2 - 1\}$$

边界 $\alpha=0$, $\beta=255$.

- 投影到幅值约束 C_A 的投影 P_A 为:

$$P_A \{x[i_1, i_2]\} = \begin{cases} 0 & \text{if } x[i_1, i_2] < 0 \\ x[i_1, i_2] & \text{if } 0 \leq x[i_1, i_2] \leq 255 \\ 255 & \text{if } x[i_1, i_2] > 255 \end{cases}$$

空变恢复(cont'd)

- 理想图像 $\hat{s}_k(i_1, i_2)$ 的估计 $\hat{s}(i_1, i_2)$ 可通过迭代运算得到：

$$\hat{s}_{k+1}[i_1, i_2] = \mathbf{T}_A \mathbf{T}_{N_1-1, N_2-1} \mathbf{T}_{N_1-2, N_2-1} \cdots \mathbf{T}_{0,0} \{\hat{s}_k[i_1, i_2]\}$$

其中： $k = 0, 1, \dots, 0 \leq i_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq i_2 \leq N_2 - 1$ ，而 \mathbf{T} 表示广义的投影算子，观察的有噪模糊图像 $y[i_1, i_2]$ 可以作为初始估计 $\hat{s}_0(i_1, i_2)$ 。

- 在每次迭代循环 k 中，每个投影算子 \mathbf{T}_{n_1, n_2} 只使用一次，但其实现顺序可以是任意的。

空变恢复: 示例



习题

- 3.2
- 3.4 (其中 (b) 直方图均衡后范围为0~63, 结果四舍五入保留整数)
- 3.5 (表1为滤波器冲激响应)
- 3.9 (注意: 用DFT去推导, 而不是直接用DTFT的结果)
- 大作业: 任选 Matlab Excercises 中一道题。