第3讲：多维系统（滤波器）

- 冲激响应与多维卷积
  - 例子：二维卷积
  - 向量矩阵表示法
- 多维频率响应
  - DFT域, 循环移位, 循环(圆)卷积 vs. 线性卷积
- 多维有限脉冲响应（FIR）滤波器与对称性
  - 对称性与零相位
- 多维无限脉冲响应（IIR）滤波器
  - 差分方程
  - 可迭代计算性, 稳定性, 边界条件

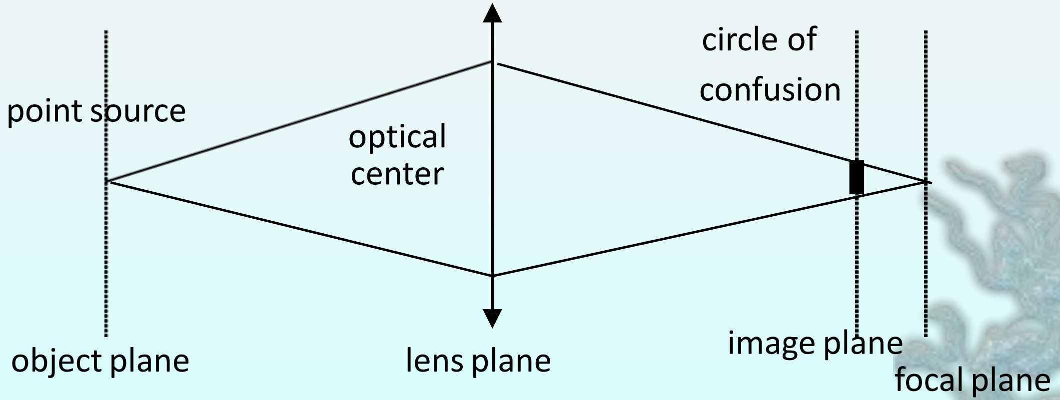
冲激响应

- **二维冲激响应**是二维系统$\boldsymbol{L}$对二维单位冲激输入的响应，即：

$$h(n_1, n_2) = \boldsymbol{L}[\delta(n_1, n_2)]$$

- **多维线性移不变(LSI)滤波器**可以完全由它的冲激响应来描述

- 例子：**点扩散函数（PSF）**



二维FIR滤波器：二维卷积

- **二维LSI系统**对于任意输入$s(n_1, n_2)$的输出：

$$g(n_1,n_2) = \boldsymbol{L}[s(n_1,n_2)]$$

- 将输入表示成**加权位移的二维冲激信号的叠加**：

$$g(n_1,n_2) = \boldsymbol{L}\left[\sum_{k_1}\sum_{k_2} s(k_1,k_2)\,\delta(n_1-k_1,n_2-k_2)\right]$$

- 根据**线性条件**，改变运算符L与累加器的顺序：

$$g(n_1,n_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} s(k_1,k_2)\,\boldsymbol{L}[\delta(n_1-k_1,n_2-k_2)]$$

- 使用**线性移不变性质**，则有：

$$g(n_1,n_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} s(k_1,k_2)\,h(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

二维卷积 (cont’d)

- 经过**变量置换**，也可以写成：

$$g(n_1,n_2)=\sum_{k_1}\sum_{k_2}h(k_1,k_2)\,s(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

- 二维卷积的**交换律**：

$$h(n_1,n_2)**s(n_1,n_2)=s(n_1,n_2)**h(n_1,n_2)$$

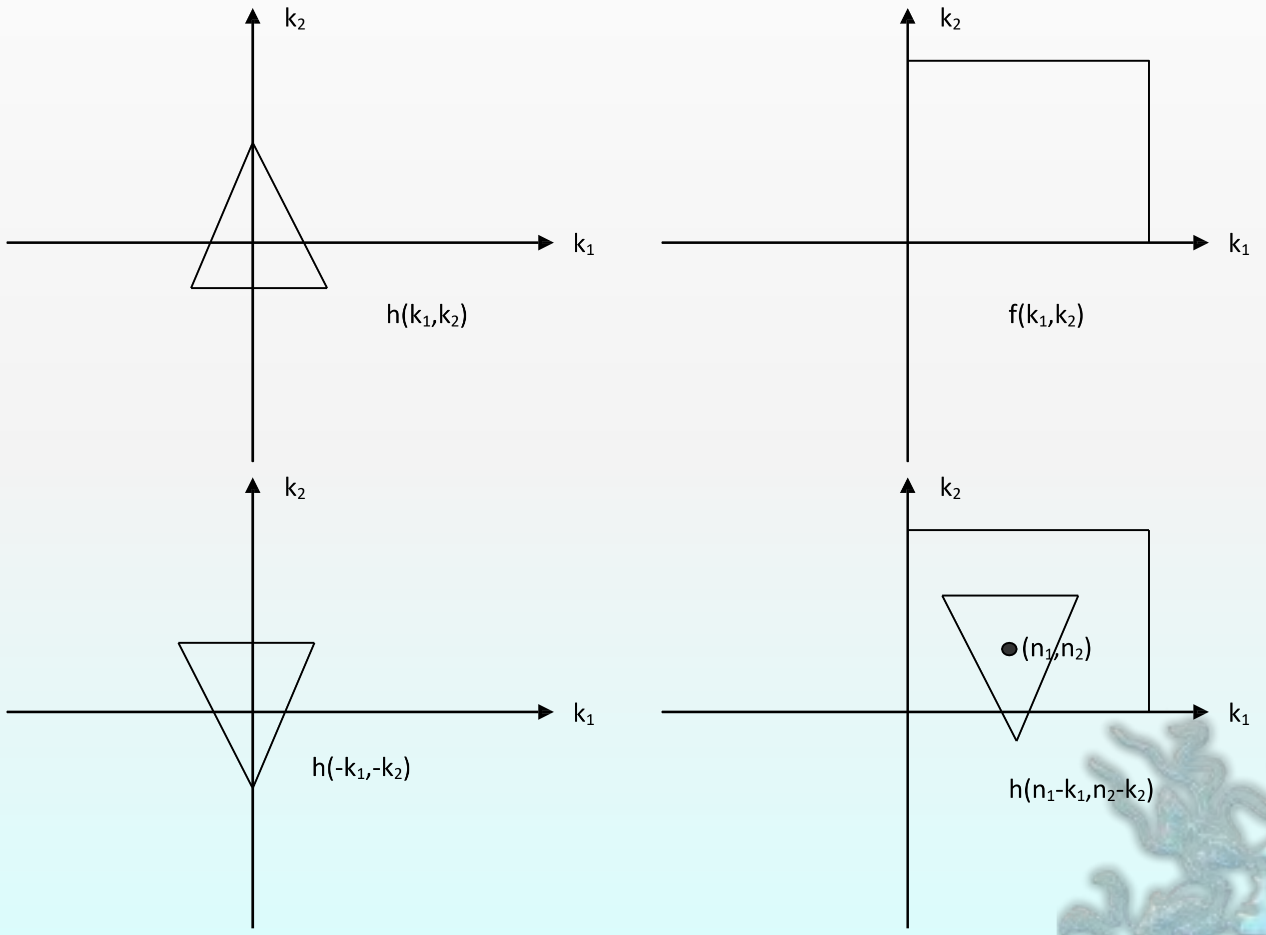
- 二维卷积的**结合律**：（串联）

$$h_1(n_1,n_2)**(h_2(n_1,n_2)**s(n_1,n_2))=(h_1(n_1,n_2)**h_2(n_1,n_2))**s(n_1,n_2)$$

- 二维卷积的**加法分配律**（并联）

$$(h_1(n_1,n_2)+h_2(n_1,n_2))**s(n_1,n_2)$$
$$=h_1(n_1,n_2)**s(n_1,n_2)+h_2(n_1,n_2)**s(n_1,n_2)$$

二维卷积：示例



二维可分离滤波器

- 如果滤波器的冲激响应是可分离的，则称为**可分离滤波器**

$$h(n_1,n_2)= h_1(n_1)h_2(n_2)$$

- 可以由**两个一维卷积的串联**来实现:

$$g(n_1,n_2) = \sum_{k_1}\sum_{k_2} s(k_1,k_2)\, h(n_1-k_1,n_2-k_2)$$

$$= \sum_{k_1}\sum_{k_2} s(k_1,k_2)\, h_1(n_1-k_1)\, h_2(n_2-k_2)$$

$$= \sum_{k_1} h_1(n_1-k_1) \sum_{k_2} s(k_1,k_2)\, h_2(n_2-k_2)$$

$$= h_1(n_1) * [h_2(n_2) * s(n_1,n_2)]$$

二维可分离滤波器 (cont’d)

- 容易设计
- 执行速度快

每像素的乘法运算次数

Filter size	7×7	9×9	11×11
General	49	81	121
Separable	14	18	22

二维FIR滤波器：向量矩阵形式

- **一维卷积** $g(n)=\sum_{k=-L}^{L} h(k)\,s(n-k)$
- 输入为N个样值，冲激响应为 L个样值，则输出为$N+L-1$个样值。

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(N-2) \\ g(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & \cdots & h(-L) & 0 & \cdots & & & & & & \\ h(1) & h(0) & \cdots & h(-L) & 0 & \cdots & & & & & \\ & & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(0) & \cdots & h(-L) & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & & & & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-2) \\ s(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}=\mathbf{H}\mathbf{s}$$

- 输出样值$g(-L)$到$g(-1)$，$g(N)$到$g(N+L-2)$被截断，以使输入与输出向量具有相同长度。
- 矩阵**H** 为 **Toeplitz阵**。

向量矩阵形式 (cont'd)

- **二维卷积**可表示成:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{N-2} \\ \mathbf{g}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{H}_{-\mathrm{L}} & \mathbf{0} & \cdots & & & & & \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{H}_{-\mathrm{L}} & \mathbf{0} & \cdots & & & & \\ & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathrm{L}} & \cdots & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{H}_{-\mathrm{L}} & \mathbf{0} \cdots & \mathbf{0} \\ & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & & & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathrm{L}} & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N-2} \\ \mathbf{s}_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\mathcal{K}}\boldsymbol{s}$$

其中 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 为向量，可分别由 输出与输入图像的各行串接而得到。$\boldsymbol{\mathcal{K}}$ 为块矩阵。

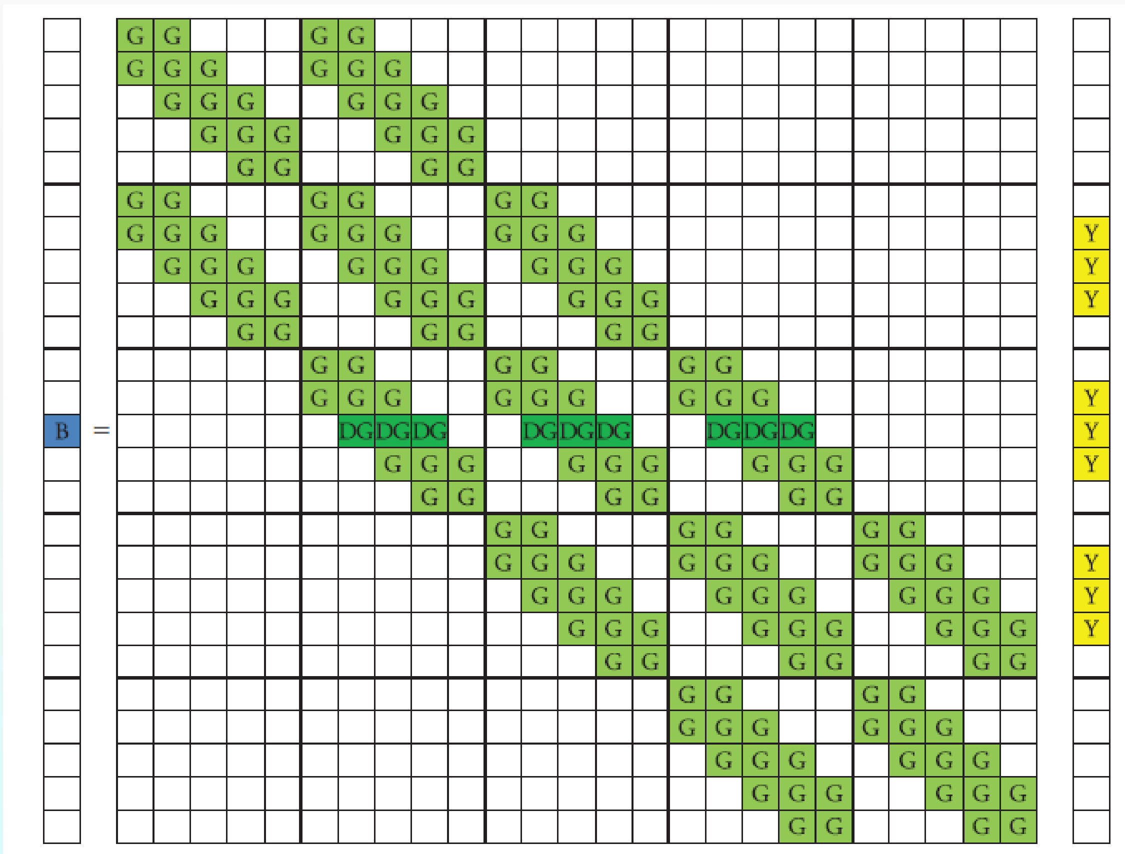
- 矩阵 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ 为**双重Toeplitz阵**，即：$\boldsymbol{\mathcal{K}}$ 为块Toeplitz阵，每个块矩阵皆为Toeplitz阵.

向量矩阵形式：示例

- 对5×5 输入图像的3×3 卷积

输入向量

输出向量
(边界样值已截断)



第1行

第2行

第3行

第4行

第5行

2D DFT: 向量矩阵形式

- **2DDFT**: $S(k_1,k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\left[\sum_{n_2=0}^{N_2-1} s(n_1, n_2)e^{-j\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2}\right]e^{-j\frac{2\pi k_1}{N_1}n_1}$

  其中：

$$S(n_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} s(n_1, n_2)e^{-j\frac{2\pi k_2}{N_2}n_2}, \qquad k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$$

  为图像第n_1列的一维DFT。

- 第n_1列的一维DFT使用**向量矩阵形式**:

$$\mathbf{S}_{n_1} = \mathbf{W}\mathbf{s}_{n_1}$$

$$\mathbf{S}_{n_1} = \begin{bmatrix} S(n_1,0) \\ S(n_1,1) \\ S(n_1,2) \\ \vdots \\ S(n_1,N_2-1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{s}_{n_1} = \begin{bmatrix} s(n_1,0) \\ s(n_1,1) \\ s(n_1,2) \\ \vdots \\ s(n_1,N_2-1) \end{bmatrix}, \quad n_1 = 0, \dots, N_1 - 1$$

2D DFT: 向量矩阵形式 (cont'd)

$$\mathbf{W}_{N_2\times N_2}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & W_{N_2} & W_{N_2}^2 & W_{N_2}^3 & \cdots & W_{N_2}^{N_2-1}\\ 1 & W_{N_2}^2 & W_{N_2}^4 & W_{N_2}^6 & \cdots & W_{N_2}^{2(N_2-1)}\\ 1 & W_{N_2}^3 & W_{N_2}^6 & W_{N_2}^9 & \cdots & W_{N_2}^{3(N_2-1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 1 & W_{N_2}^{N_2-1} & W_{N_2}^{2(N_2-1)} & W_{N_2}^{3(N_2-1)} & \cdots & W_{N_2}^{(N_2-1)(N_2-1)}\end{bmatrix}$$

其中: $W_{N_2}=e^{-j\frac{2\pi}{N2}}$

- 所有N_1个变换后的列向量 $\mathbf{S}_{n_1}$的转置可写成一个$N_1\times N_2$的矩阵:

$$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_0^T\\ \mathbf{S}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{S}_{N_1-1}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{s}_0\\ \mathbf{s}_1\\ \vdots\\ \mathbf{s}_{N_1-1}\end{bmatrix}_{N_1\times N_2}\mathbf{W}_{N_2\times N_2}=\boldsymbol{s}_{N_1\times N_2}\mathbf{W}_{N_2\times N_2}$$

2D DFT: 向量矩阵形式 (cont'd)

- $N_1 \times N_2$ 图像矩阵$\boldsymbol{s}_{N_1 \times N_2}$的二维傅里叶变换等同于**各个变换列转置的一维傅里叶变换**，即：

$$\mathbf{S}_{N_1 \times N_2} = \boldsymbol{W}_{N_1 \times N_1} \tilde{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{W}_{N_1 \times N_1} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{s}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N_1 - 1} \end{bmatrix} \mathbf{W}_{N_2 \times N_2}$$

$$= \mathbf{W}_{N_1 \times N_1} \boldsymbol{s}_{N_1 \times N_2} \mathbf{W}_{N_2 \times N_2}$$

二维频率响应

- 线性移不变系统对于**复指数输入的响应**：

$$s(n_1, n_2) = e^{j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}$$

可以由卷积求和得到：

$$g(n_1,n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1,k_2)\, e^{j[\omega_1(n_1-k_1) + \omega_2(n_2-k_2)]}$$

- 提取与k_1和k_2的无关项：

$$g(n_1,n_2) = e^{j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1,k_2)\, e^{-j(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)}$$

- 系统的**频率响应$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$**可被定义为：

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1,k_2)\, e^{-j(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2)}$$

二维频率响应 (cont'd)

- 频率响应为**复值函数**

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H_R(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) + jH_I(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$$

可以被表示成**极坐标形式**，即使用一个正实数幅值和一个实数相位函数$\theta(\omega_1,\ \omega_2)$来表示：

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = |H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})| e^{j\theta(\omega_1,\omega_2)}$$

其中：

$$|H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) + H_I^2(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}$$

$$\theta(\omega_1, \omega_2) = \tan^{-1}\left(\frac{H_I(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}{H_R(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})}\right)$$

频率域的二维卷积

- **空域里的卷积**对应于**频率域中的乘积：**

$$y(n_1,n_2) = h(n_1,n_2)^{**}\ s(n_1,n_2) \leftrightarrow$$

$$Y\left(e^{j\omega 1},e^{j\omega 2}\right) = H\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)S\left(e^{j\omega 1},e^{j\omega 2}\right)$$

- 因此，输出的**幅值和相位**分别为：

$$\left|Y\left(e^{j\omega 1},e^{j\omega 2}\right)\right|| = |H\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega 2}\right)||S\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)|$$

$$\theta_Y(\omega_1,\omega_2) = \theta_H(\omega_1,\omega_2) + \theta_S(\omega_1,\omega_2)$$

2D DFT域的实现

- 如果设置**DFT的大小**至少为$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$，则循环卷积将得到**与线性卷积相同**的结果。

1) 将滤波器冲激响应$h(n_1,n_2)$和图像$s(n_1,n_2)$**填零**，以得到$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$的数组。
2) 对$h(n_1,n_2)$和$s(n_1,n_2)$计算$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$个点的DFT。
3) 将$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$数组$H(k_1,k_2)$和$S(k_1,k_2)$相乘。
4) 使用$(N_1+M_1-1)\times(N_2+M_2-1)$个点的IDFT以获得卷积结果。

2D FIR 滤波器：对称性和零相位

- 如果**频率响应$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$为实数**，则称其具有**零相位**，即：$h(n_1,n_2)=h(-n_1,-n_2)$。
- 因此，**奇数长偶对称 FIR**滤波器具有**零相位**。
- 严格来讲，对那些使$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})<0$的$(\omega_1,\omega_2)$，其相位$\theta(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \pm\pi$，但这样的滤波器仍然具有**零群延迟**。
- **零相位滤波器不会引入任何相位失真**，这是由于：

$$\theta_Y(\omega_1,\omega_2) = \theta_S(\omega_1,\omega_2)$$

圆周对称滤波器

- 一个更加严谨的对称形式为**圆周对称**, 具有各向同性。
- 如果$H(e^{j\omega 1}, e^{j\omega 2})$为关于$\omega_1^2+\omega_2^2$的函数，其中：$\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2} \le \pi$ $(-\pi \le \omega_1, \omega_2 \le \pi)$，且在此区域外为常数，则该滤波器具有**圆周对称频率响应**。
- $H(e^{j\omega 1}, e^{j\omega 2})$**为圆周对称**则意味着$h(n_1,n_2)$**为圆周对称**，反之则不然。

圆周对称滤波器：示例

- 频率响应为**圆周对称的理想低通滤波器**:

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \le \omega_c \\ 0 & \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} > \omega_c \text{ and } 0 \le |\omega_1|, |\omega_2| < \pi \end{cases}$$

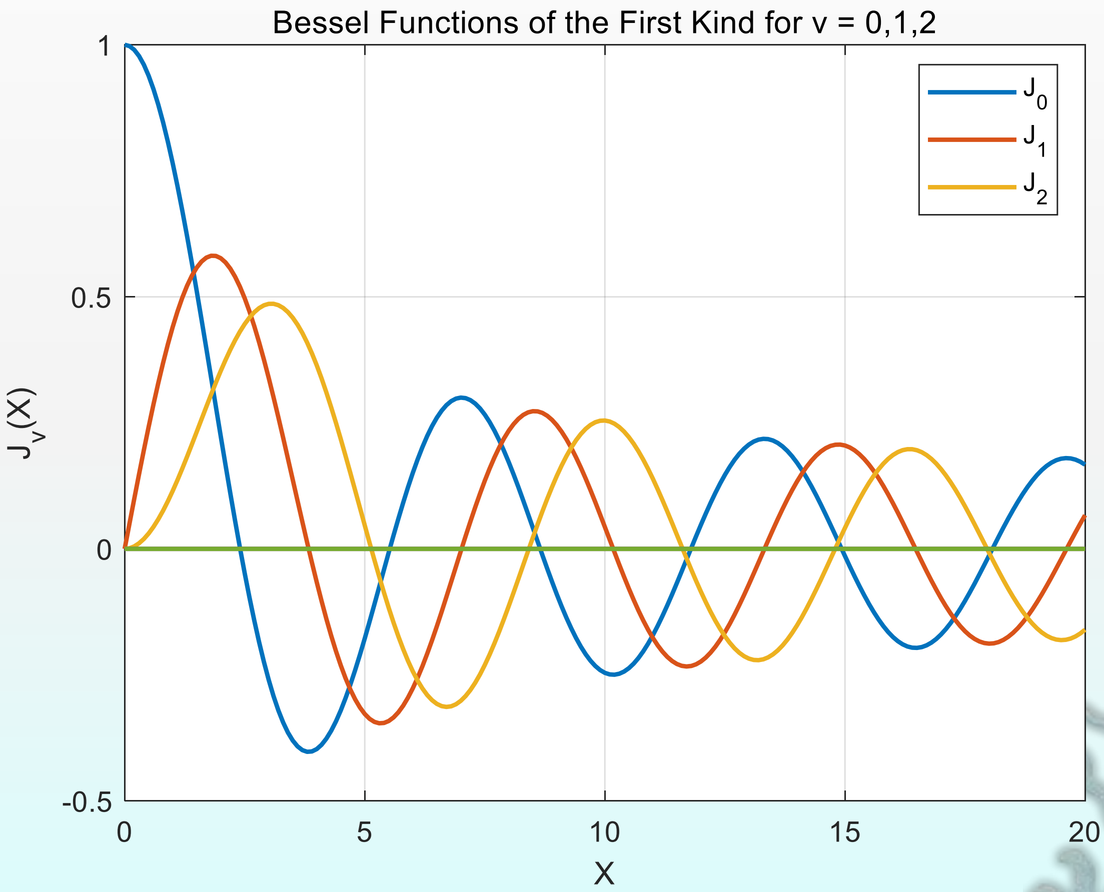
对$H(e^{j\omega 1}, e^{j\omega 2})$进行2D傅里叶反变换，则可得其**冲激响应**:

$$h(n_1, n_2) = \frac{\omega_c}{2\pi\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} J_1\left(\omega_c \sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right)$$

其中$J_1(x)$ 表示**第一类一阶贝塞尔函数**，其表达式为:

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 2!} + \frac{x^5}{2^5 2!\, 3!} - \frac{x^7}{2^7 3!\, 4!} + \cdots$$

贝塞尔函数



Bessel Functions of the First Kind for v = 0,1,2
1
0.5
0
-0.5
0
5
10
15
20
X
$J_v(X)$
J_0
J_1
J_2

2D IIR滤波器：差分方程

- 迭代形式

$$g(n_1, n_2) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} a_{i_1 i_2} \, g(n_1 - i_1, n_2 - i_2) + \sum_{i_1} \sum_{i_2} b_{i_1 i_2} \, s(n_1 - i_1, n_2 - i_2)$$

差分方程 (cont’d)

- 可迭代计算性
  - –字典顺序排序
- 稳定性

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}|h(n_1,n_2)|<\infty$$

- 边界条件

2D IIR 滤波器：示例

- 一个具有**NSHP支撑**的**二维自回归 (2D AR) 模型**可以用一个含有白噪声$w(n_1,n_2)$的差分方程来表示，即：

$$
\begin{aligned}
s(n_1,n_2) &= a_{11}\, s(n_1-1,n_2-1)+a_{01}\, s(n_1,n_2-1) \\
&+ a_{-11}\, s(n_1+1,n_2-1)+a_{10}\, s(n_1-1,n_2) + w(n_1,n_2)
\end{aligned}
$$

- 输出信号$s(n_1, n_2)$的**第一列、最后一列以及第一行必须为已知量，**以便通过迭代的方法计算剩余的输出样值。

- 根据经验估计, 如果满足如下条件，则滤波器通常是**稳定**的。 $\sum_{i_1}\sum_{i_2} a_{i_1 i_2} < 1$