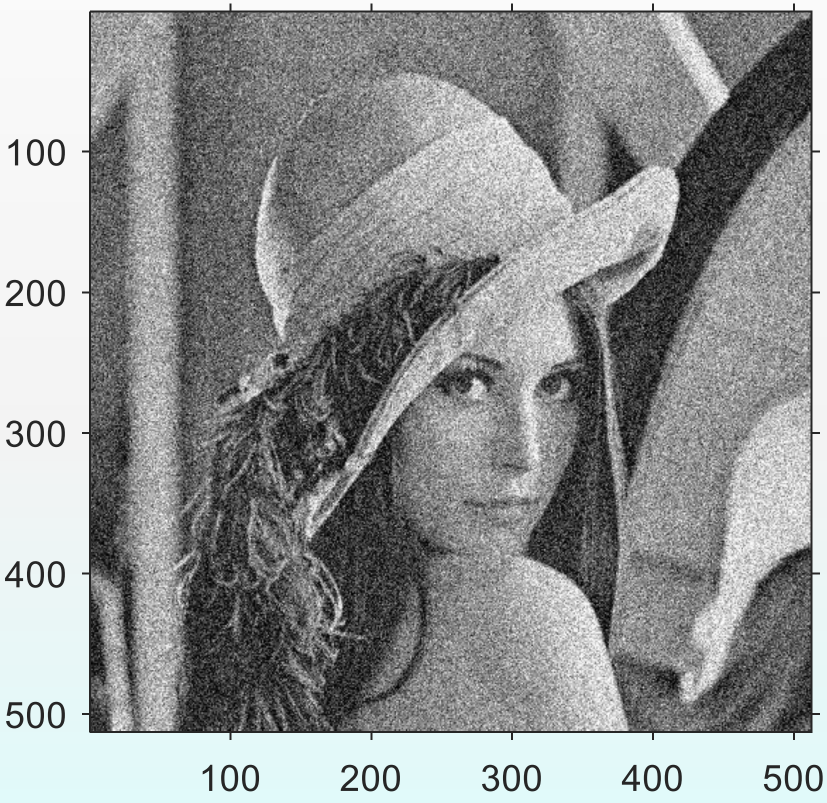
第9讲：图像去噪

- **如何将信号与噪声分离?**
  - 图像模型
  - 高斯 vs. 脉冲噪声
- **线性移不变滤波**
- **局部自适应滤波**
  - 局部 LMMSE 滤波器
- **非线性滤波**
  - 中值和顺序统计滤波
  - 小波收缩
  - 双边滤波
- **非局部滤波**
  - NLM 滤波
  - BM3D 滤波

如何将信号与噪声分离?

- 是否可以将**信号与噪声分离**以及**分离的程度**取决于**采用的模型。**
- **噪声模型:**
  - 白噪声
  - 信号无关
- **图像模型:**
  - 局部平滑,傅里叶域中低通特性
  - 变换域中稀疏性

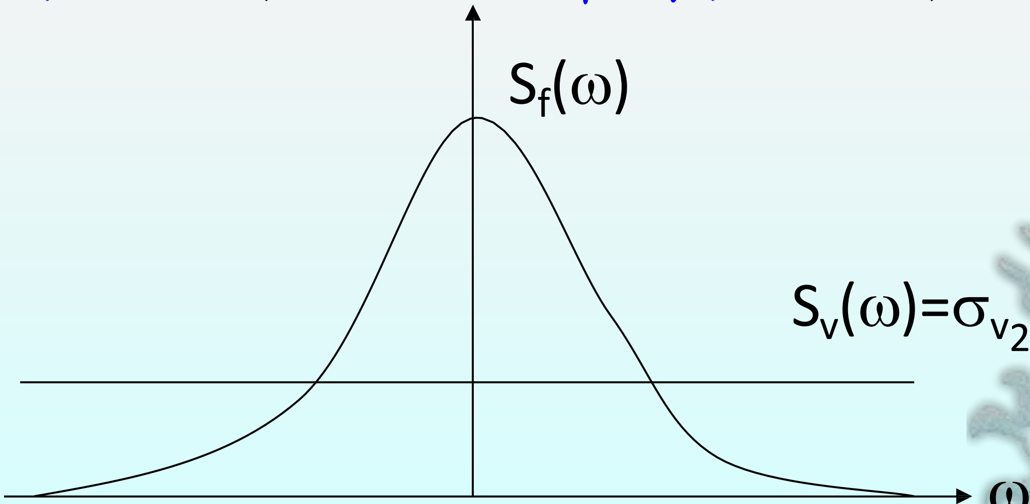
高斯 vs. 脉冲噪声


100
200
300
400
500
100
200
300
400
500


50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

线性移不变滤波

- **LSI 降噪滤波器**：消除或降低噪声功率超过信号功率的频谱分量。
- 在 LSI 去噪过程中，有一个固有的折中问题，即降噪通常会导致**图像细节的模糊**，这是由于任何 LSI 去噪滤波器从本质上讲是一种**低通滤波器**，也被称为**平滑滤波器**，则必定会抑制高频成分。



LSI 滤波：维纳滤波器

- 理想图像$s(n_1,n_2)$ 的 **LMMSE 估计 $\hat{s}(n_1,n_2)$**为：

$$\hat{s}(n_1,n_2)=\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}h(i_1,i_2)\,y(n_1-i_1,n_2-i_2)$$

其中$y(n_1,n_2)$ 为有噪图像，而 $h(n_1,n_2)$ 为滤波器的冲激响应。

- 根据**正交性原理**，每个像素的估计误差$s(n_1,n_2)-\hat{s}(n_1,n_2)$应该与观察图像的每个采样值正交，即：

$$\langle s(n_1,n_2)-\hat{s}(n_1,n_2),y[k_1,k_2]\rangle=E\{(s(n_1,n_2)-\hat{s}(n_1,n_2))y[k_1,k_2]\}=0$$

其中内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$被定义成期望算子$E\{\cdot\}$的形式。因此，正交就意味着**不相关**。

- 经过**变量代换和简化**，可写成：

$$E\left\{\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}h(i_1,i_2)\,R_{yy}(n_1-i_1-k_1,n_2-i_2-k_2)\right\}$$
$$=R_{sy}(n_1-k_1,n_2-k_2)\quad 对于所有的(n_1,n_2)和(k_1,k_2)$$

维纳滤波器 (cont'd)

- 观察值的**自相关函数**:

$$R_{yy}(n_1-i_1-k_1,n_2-i_2-k_2)=E\{y(n_1-i_1,n_2-i_2)\,y(k_1,k_2)\}$$

- 理想图像和观察图像间的**互相关函数**:

$$R_{sy}\big((n_1-k_1,n_2-k_2)\big)=E\{s(n_1,n_2)\,y(k_1,k_2)\}$$

- 双重求和可以被表达为**离散维纳-霍夫方程**（卷积形式）：

$$h(n_1,n_2)**R_{yy}(n_1,n_2)=R_{sy}(\,n_1,n_2)$$

  该方程定义了非因果IIR维纳滤波器的冲激响应,也被称为**不可实现的维纳滤波器**。

- 此 IIR 滤波器是不可实现的，这是因为计算输出样值需要**无穷大的时延**。
- 将离散维纳-霍夫方程两边进行2D傅里叶变换，可计算**维纳滤波器的频率响应：**

$$H(f_1,\ f_2)=\frac{P_{sy}(f_1,\ f_2)}{P_{yy}(f_1,\ f_2)}$$

维纳滤波器 (cont'd)

- 给定**噪声模型**：

$$R_{sy}(n_1, n_2) = E\{s(i_1,i_2)\, y(i_1-n_1,\, i_2-n_2)\}$$
$$= E\{s(i_1,i_2)\, s(i_1-n_1,\, i_2-n_2)\} + E\{s(i_1,i_2)v(i_1-n_1,i_2-n_2)\} = R_{ss}(n_1,n_2)$$

- $R_{yy}(n_1,n_2) = E\left\{\left(s(i_1,i_2)+v(i_1,i_2)\right)\left(s(i_1-n_1,i_2-n_2)+v(i_1-n_1,i_2-n_2)\right)\right\}$
$$= R_{ss}(n_1,n_2) + R_{vv}(n_1,n_2)$$

  其中假定图像和噪声为**不相关**的。

- 功率谱 $P_{sy}(f_1,f_2) = P_{ss}(f_1,f_2)$, $P_{yy}(f_1,f_2) = P_{ss}(f_1,f_2) + P_{vv}(f_1,f_2)$ 为相关函数的 2D 傅里叶变换。

- 则维纳滤波器的**频率响应**为：

$$H(f_1, f_2) = \frac{P_{ss}(f_1, f_2)}{P_{ss}(f_1,f_2) + P_{vv}(f_1, f_2)}$$

- 由于噪声为**白噪声**，可知 $P_{vv}(f_1,f_2) = \sigma_v^2$，而原图像的功率谱可使用有噪图像来估计：$\hat{P}_{ss}(f_1,f_2) = |Y(f_1,f_2)|^2 - \sigma_v^2$。

维纳滤波器：DFT 域实现

- 一种对滤波器的**近似实现**可通过**频域采样**来设计，将滤波器频域响应$H(f_1, f_2)$在频域内使用$N_1 \times N_2$个样值进行采样。可使用$N_1 \times N_2$ 快速傅里叶变换(FFT) 来实现。

- **频率采样设计方法**等同于使用$N_1 \times N_2$ FIR 滤波器的冲激响应$h\,(n_1, n_2)$对IIR滤波器的冲激响应$\tilde{h}(n_1, n_2)$ 的近似，其中：

$$\tilde{h}(n_1, n_2) = \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{\infty} h(n_1 - N_1 r_1, n_2 - N_2 r_2)$$

- 注意：频率采样设计方法会遇到**空域混叠问题**。在实际应用中，这个问题通常可以被忽略，只要N_1和N_2足够大，例如：$N_1 = N_2 = 512$或更大。

FIR LMMSE 滤波

- **FIR LMMSE 滤波器**可以被表示成**向量-矩阵形式**:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{H}\mathbf{y}$$

其中 $\hat{\mathbf{s}}$ 与 $\mathbf{y}$ 为 $N^2 \times 1$ 向量，分别由估计像素和观察像素所组成，而$\mathbf{H}$ 为 $N^2 \times N^2$ 矩阵，由FIR滤波器冲激响应系数所组成。

- **正交性原理**可以被表示成向量-矩阵形式:

$$E\{(\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{0} \quad (\text{零矩阵})$$

表明$\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}$ 中的每个元素与 $\mathbf{y}$ 的每一个元素是**不相关**的。

则有：$E\{(\mathbf{s} - \mathbf{H}\mathbf{y})\,\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{0}$, 可以简化为:

$$E\{\mathbf{s}\,\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\} = \mathbf{H}\,E\{\mathbf{y}\ \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\}$$

- 因此, **FIR LMMSE 滤波器算子 H** 为:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_{\mathrm{sy}}\mathbf{R}_{\mathrm{yy}}^{-1}$$

其中$\mathbf{R}_{yy}$ 是观察图像的**自相关矩阵**, 而$\mathbf{R}_{sy}$ 为理想图像和观察图像间的**互相关矩阵**。

FIR 维纳滤波器 (cont’d)

- 给定**观察模型**，如同**IIR滤波器**的推导过程，可知$\mathbf{R}_{sy}=\mathbf{R}_{ss}$，$\mathbf{R}_{yy}=\mathbf{R}_{ss}+\mathbf{R}_{vv}$, 其中 $\mathbf{R}_{ss}$ 与 $\mathbf{R}_{vv}$ 分别为理想图像和观察噪声的自相关矩阵。
- 则**滤波器算子**可表示成:

$$\mathbf{H}=\mathbf{R}_{ss}\left[\mathbf{R}_{ss}+\mathbf{R}_{vv}\right]^{-1}$$

- 可以看到，滤波器的实现需要$N^2\times N^2$ 矩阵的求逆运算。对于一幅典型的数字图像 $N=512$ 或更大值, **运算复杂度过高**。
- 假定图像和噪声为**广义平稳**的，也即它们具有恒定的均值 (不失一般性，可定为0) ，且相关矩阵具有空域不变性, 矩阵 $\mathbf{R}_{ss}$ 和 $\mathbf{R}_{vv}$ 为块Toeplitz阵。通常可使用块循环矩阵对块Toeplitz阵进行近似，这样就可以**通过 2D DFT 运算进行对角化**。容易得出，由此生成的频域FIR 滤波器表达式与通过将IIR维纳滤波器表达式中的频率(f_1,f_2)进行采样是相同的。

自适应FIR LMMSE 滤波器

- 定义**残差图像**:

$$r_s(n_1,n_2) = s(n_1, n_2) - \mu_s(n_1,n_2)$$

其中 $\mu_s(n_1,n_2)$为空域变化的平均图像。 残差图像 $r_s(n_1,n_2)$被建模为白噪声，即： $R_{rr}(n_1,n_2) = \sigma_s^2(n_1,n_2)\,\delta(n_1,n_2)$ 是对角的。

观察图像的残差被定义为： $r_y(n_1,n_2) = y(n_1,n_2) - \mu_y(n_1,n_2)$, 其中 $\mu_y(n_1, n_2)$ 为局部均值，$r_y(n_1,n_2)$ 为零均值白噪声，且 $\mu_y(n_1,n_2) = \mu_s(n_1,n_2)$。

- 将**FIR LMMSE 滤波器**应用到残差观察向量 $\mathbf{r}_y = \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y$,

$$\hat{\mathbf{r}}_s = \hat{s} - \boldsymbol{\mu}_s = \mathbf{H}\,\mathbf{r}_y = \mathbf{R}_{rr}\left[\mathbf{R}_{rr} + \mathbf{R}_{vv}\right]^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)$$

- 由于$\mathbf{R}_{rr}$ 为对角阵，向量-矩阵表达形式可简化为**标量形式**:

$$s(n_1,n_2) = \mu_y(n_1,n_2) + \frac{\sigma_s^2(n_1, n_2)}{\sigma_s^2(n_1,n_2) + \sigma_v^2}\left[y(n_1,n_2) - \mu_y(n_1,n_2)\right]$$

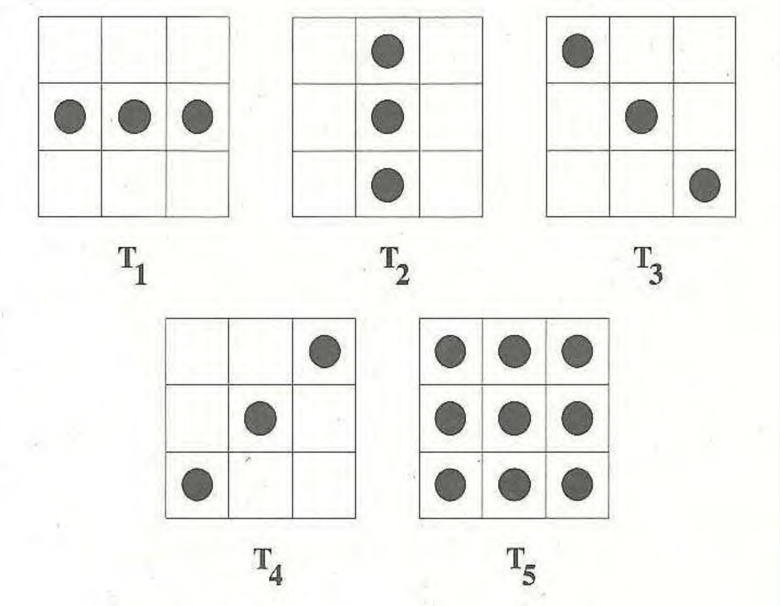
具有**校正预测结构**，其中 $\sigma_s^2(n_1,n_2)/\,(\sigma_s^2(n_1,n_2)+\sigma_v^2)$为滤波器增益。

自适应 FIR 维纳滤波器 (cont'd)

- 可估计：$$\mu_s(n_1,n_2)=\mu_y(n_1,n_2)=\frac{1}{M^2}\sum_{(i_1,i_2)\in W_{n_1,n_2}} y(i_1,i_2)$$
- 由于噪声具有**零均值**，且
$$\sigma_y^2(n_1,n_2)=\frac{1}{M^2}\sum_{(i_1,i_2)\in W_{n_1,n_2}}\left(y(i_1,i_2)-\mu_y(n_1,n_2)\right)^2$$
- 为了**避免方差出现负数**估计值，定义：
$$\hat{\sigma}_s^2(n_1,n_2)=\max\{\sigma_y^2(n_1,n_2)-\sigma_v^2,0\}$$
- 当 $\hat{\sigma}_s^2$较小时，表明为**平滑**图像区域，滤波器增益可忽略，此时自适应 LMMSE 滤波器近似于直接平均滤波器。
- 当 $\hat{\sigma}_s^2$ 相对σ_v^2较大时，则意味着出现了**边缘**或**高对比度纹理**，此时滤波器增益接近1，通过关闭滤波器以保留边缘/纹理信息，但带来的问题是边缘附近的噪声也同样被保留。

局部边缘自适应滤波

- 5种滤波器核（卷积算子）：4个边缘方向和1个非边缘滤波核：



- **方法I**：边缘方向检测或滤波器核选择
- **方法II**：串联 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3\mathbf{T}_4\mathbf{T}_5$, 其中$\mathbf{T}_i$ 为应用于相应核上的局部 LMMSE 滤波器

非线性滤波：中值滤波

- 中值滤波:

$$\hat{s}(n_1, n_2) = \mathrm{Med}\{\, y(i_1, i_2) \,\} \quad \text{for} \quad (i_1, i_2) \in \boldsymbol{B}_{(n_1, n_2)}$$

Original signal	10	10	10	10	10	10	40	40	40	40	40	80	80	80	80	80	80
Noisy signal	10	10	10	60	10	10	40	80	40	10	80	40	80	80	10	80	80
Mean filtered		10	27	27	27	20	43	53	43	43	43	67	67	57	57	57	
Median filtered		10	10	10	10	10	40	40	40	40	40	80	80	80	80	80	

- 加权中值滤波:

$$s(n_1, n_2) = \mathrm{Med}\left\{ w_{(i_1, i_2)} \lozenge\, y(i_1, i_2) \right\} \quad \text{for} \quad (i_1, i_2) \in \boldsymbol{B}_{(n_1, n_2)}$$

顺序统计滤波

- **顺序统计**滤波器需要将当前像素邻域内的像素值进行排序。
- **α均值滤波**是一种顺序统计滤波器：将排序和均值滤波相结合。具体讲，删除局部邻域内 L 个最小和 L 个最大像素值，剩余的像素值处于中间的像素值的平均值：

$$\hat{s}(n_1,n_2)=\frac{1}{N_W-2L}\sum_{i=L+1}^{N_W-L}y_{(i)}$$

- 当 $L=0$ 时，α均值滤波器就变成了**均值滤波器**；而当$L\to N_W/2$ 时，则成为**中值滤波器**。因此，通过选择合适的L，可有效抑制包含**高斯噪声**与**脉冲椒盐**噪声的混合噪声。

小波收缩滤波

- **自然图像**可以被表示成某些变换域中的一个**稀疏向量**，例如正交小波变换域。在稀疏图像模型下，加性噪声作用于小幅值的变换系数，会导致其SNR变得非常低。
- 所有的**小波收缩**方法包括以下步骤：
  - **线性小波正变换**
  - **非线性收缩 (硬判决或软判决)**
  - **小波反变换**

  许多小波收缩方法的不同之处在于小波变换实现的一些细节，对**收缩函数**的选择，以及所使**阈值**。

小波收缩 (cont'd)

- 对于去噪而言，**近似对称正交小波**是首选，这是由于**白噪声的正交变换仍然是白色的**，且正交变换可保持**均方差不变**。
- 选择何种**小波分析与合成**滤波器，**分辨率级别**的数量，以及**图像边界处理**方法，都会影响去噪的性能。一般选择symlet8小波进行3到4层分解，并对图像边界进行周期扩展或对称扩展。
- 小波系数 w 的**硬判决阈值**被定义为：

$$\delta^H(w)=\begin{cases} w & \text{if } |w|>\lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- **软判决阈值**被定义为：

$$\delta^S(w)=\begin{cases} \operatorname{sgn}(w)(|w|-\lambda) & \text{if } |w|>\lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 可使用**单一阈值**或针对不同分辨率级别（或子带）使用**自适应阈值**。
- **各种不同的用来估计最佳阈值的准则**，如 Stein的无偏似然估计(SURE), 极小极大算法, 以及贝叶斯准则 [Fod 03, Lui 07]。

双边滤波

- 双边滤波器应用于**图像去噪**：通过选择合适的核大小$N \times N$,域参数σ_p^2和范围参数 σ_q^2，以匹配噪声的统计特性。
- 在**噪声去除**和**边缘模糊**之间存在折中问题：其中值域参数越大，则滤波器越接近高斯滤波。
- 在出现**椒盐噪声**情况下，在双边滤波之前可先进行**中值滤波**。
- 不同于只处理亮度信息的处理过程，在处理彩色图像时，一种自然的方式是CIE-Lab 色彩空间中的值域滤波使用**感知色彩的相似性度量**，其中只有感知相似的色彩被平均，而感知上较为重要的边缘信息则被保留，而不会产生渗色和色彩模糊。

非局部滤波：NL 均值

- 基于像素的**NLM滤波器**实现：给定噪声图像$y(\mathbf{n})$，则对于每个像素$\mathbf{n}$，其滤波后的值$s(\mathbf{n})$,可以通过将图像中**所有相似像素k进行加权平均**得到，即：

$$s(\mathbf{n}) = \frac{1}{C(\mathbf{n})} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}(\mathbf{n})} w(\mathbf{n}, \mathbf{k})\, y(\mathbf{k})$$

其中 $C(\boldsymbol{n}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathrm{w}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ 为归一化常数，$\mathbf{N}(\mathbf{n})$ 表示 $(2q+1) \times (2q+1)$ 的中心像素为 $\mathbf{n}$ 的窗口，用以搜索相似块。

- 权重值 $\mathrm{w}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = e^{-\frac{\max\{d^2(\mathbf{n}) - 2\sigma^2, 0\}}{h^2}}$ 由像素间**相似性比较值**的绝对值和来决定，即：中心分别位于$\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{k}$ 的$(2r+1) \times (2r+1)$ 块 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}$之间进行比较。

$$d^2(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2r+1)^2} \sum_{\mathbf{i} \in \boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}} [y(\mathbf{n} - \mathbf{i}) - y(\mathbf{k} - \mathbf{i})]^2$$

- 除非是噪声很强的图像，一般**典型的块大小**为：5×5 (r =2), 搜索窗口大小可设定 21×21 ($q = 10$，对于中等噪声) 到35×35 ($q = 17$，对于大的噪声)，以提高运算效率。

非局部滤波: BM3D

- BM3D 为**基于块的非局部滤波方法**, 包括以下三个步骤:
  - **构造块组**: 给定当前块 $N_{\mathbf{n}}$, 选择与其相似块 $N_{\mathbf{k}}$ ，并将它们聚集为一个3D 数组。由于这些块之间或多或少都会存在一些结构上的差异，通常还需要进行协同滤波，而不是简单地将所有块相同位置上的像素进行直接平均。
  - **协同滤波**: 3D 块组内的相似性意味着其变换后的系数是稀疏的。滤波器的操作包括：3D 块组的3D 变换，变换系数的收缩, 以及 3D 反变换。
  - **聚合**: 滤波后的 2D 块返回到它们原先的位置。由于这些块会出现重叠，对每个像素来讲，有可能会有多个估计值，此时可以采用**加权平均**的方法，以得到最终的去噪估计值。