

# 机器学习

## Machine learning

## 第二章 贝叶斯学习

### Bayesian Learning

授课人：周晓飞  
zhouxiaofei@iie.ac.cn  
2024-9-13

## 第二章 贝叶斯学习

2.1 概述

2.2 贝叶斯决策论

2.3 贝叶斯分类器

2.4 贝叶斯学习与参数估计问题

## 第二章 贝叶斯学习

### 2.1 概述

### 2.2 贝叶斯决策论

### 2.3 贝叶斯分类器

### 2.4 贝叶斯学习与参数估计问题

## 例子：天气预报

### 依赖先验的决策

某地全年 365 天，晴朗 265 天，非晴朗 100 天。 $A$ =晴， $\sim A$ =非晴；

$P(A)=265/365=0.726$ ， $P(\sim A)=100/365=0.274$ ；判断明天天气如何？ 计算  $P(A)$ ， $P(\sim A)$ 。

## 例子：天气预报

### 依赖先验的决策

某地全年 365 天，晴朗 265 天，非晴朗 100 天。 $A$ =晴， $\sim A$ =非晴；

$P(A)=265/365=0.726$ ， $P(\sim A)=100/365=0.274$ ；判断明天天气如何？ 计算  $P(A)$ ， $P(\sim A)$ 。

只有一种预测可能： $P(A)>P(\sim A)$

即  $P(\text{晴天})>P(\text{非晴天})$

# 概述

## 例子：天气预报

### 依赖先验的决策

某地全年 365 天，晴朗 265 天，非晴朗 100 天。 $A$ =晴， $\sim A$ =非晴；

$P(A)=265/365=0.726$ ， $P(\sim A)=100/365=0.274$ ；判断明天天气如何？ 计算  $P(A)$ ， $P(\sim A)$ 。

只有一种预测可能： $P(A)>P(\sim A)$

即  $P(\text{晴天})>P(\text{非晴天})$

### 增加类别条件概率信息

若增加可观测信息：晴朗（非晴朗）天气前一天特征（是否有晚霞）统计。 $B$ =晚霞， $\sim B$ =无晚霞；

$P(B/A)=0.7$ ， $P(\sim B/A)=0.3$ ， $P(B/\sim A)=0.1$ ， $P(\sim B/\sim A)=0.9$ ；

今天有晚霞，判断明天天气如何？ 计算  $P(A/B)$ ， $P(\sim A/B)$

当然，还可能的问题：今天没有晚霞，判断明天天气如何？ 计算  $P(A/\sim B)$ ， $P(\sim A/\sim B)$

# 概述

## 例子：天气预报

### Bayesian 决策

$$P(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B|A)p(A) + p(B|\sim A)p(\sim A)}$$

$$P(\sim A|B) = \frac{p(B|\sim A)p(\sim A)}{p(B)} = \frac{p(B|\sim A)p(\sim A)}{p(B|A)p(A) + p(B|\sim A)p(\sim A)}$$

$$p(A, B) = p(B|A)p(A) = 0.5082; \quad p(\sim A, B) = p(B|\sim A)p(\sim A) = 0.0274; \quad p(B) = p(B|A)p(A) + p(B|\sim A)p(\sim A) = 0.5356$$

$$P(A|B) = \frac{p(A, B)}{p(B)} = 0.9488, \quad P(\sim A|B) = \frac{p(\sim A, B)}{p(B)} = 0.0512$$

结果：  $P(A|B) > P(\sim A|B)$       即 **P（晴天/晚霞） > P（非晴天/晚霞）**

## 第二章 贝叶斯学习

2.1 概述

2.2 贝叶斯决策论

2.3 贝叶斯分类器

2.4 贝叶斯学习与参数估计问题



# 贝叶斯决策论

## 基础知识

### 1. 概率基础

事件 A 的概率:  $0 \leq P(A) \leq 1$

条件概率:  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

乘法定理:  $P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

全概率公式:  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$  且  $A_i \cap A_j = \varnothing$ , 则  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$

(重要的) Bayes 公式:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j)P(A_j)},$$

$$P(A_i | B) \propto P(B | A_i)P(A_i)$$

# 贝叶斯决策论

## 基础知识

### 2. Bayes 决策

- 基于观察特征、类别的贝叶斯公式

$$P(\omega_i|x) = \frac{p(x|\omega_i)p(\omega_i)}{p(x)} \quad (\text{posterior} = \frac{\text{likelihood} * \text{prior}}{\text{evidence}})$$

$$= \frac{p(x|\omega_i)p(\omega_i)}{\sum_j p(x|\omega_j)p(\omega_j)}$$

$$P(\omega_i|x) \propto p(x|\omega_i)p(\omega_i) \quad (\text{posterior} \propto \text{likelihood} * \text{prior})$$

# 贝叶斯决策论

## 基础知识

- 贝叶斯决策

$$\text{Decide } \begin{cases} \omega_1 & \text{if } p(\omega_1|x) > p(\omega_2|x) \\ \omega_2 & \text{otherwise} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 & \text{if } p(x|\omega_1)p(\omega_1) > p(x|\omega_2)p(\omega_2) \\ \omega_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**or**

$$\begin{cases} \omega_1 & \text{if } \frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} > \frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)} \\ \omega_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

# 贝叶斯决策论

## 基础知识

- 类别相似性函数

$$g_i(x) = p(\omega_i | x) = \frac{p(x | \omega_i) p(\omega_i)}{\sum_{j=1}^c p(x | \omega_j) p(\omega_j)}$$

$$g_i(x) = p(x | \omega_i) p(\omega_i)$$

$$g_i(x) = \ln p(x | \omega_i) + \ln p(\omega_i)$$

# 贝叶斯决策论

## 基础知识

- 决策函数  $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$   $? > 0$

$$g(x) = p(\omega_1 | x) - p(\omega_2 | x) \quad ? > 0$$

$$g(x) = \ln \frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} + \ln \frac{p(\omega_1)}{p(\omega_2)} \quad ? > 0$$

## 参考文献

1. 周志华，机器学习，清华大学出版社，2016.
2. Duda, R.O. et al. Pattern classification. 2nd, 2003.
2. 边肇祺，张学工等编著，模式识别(第二版)，清华大学，1999。