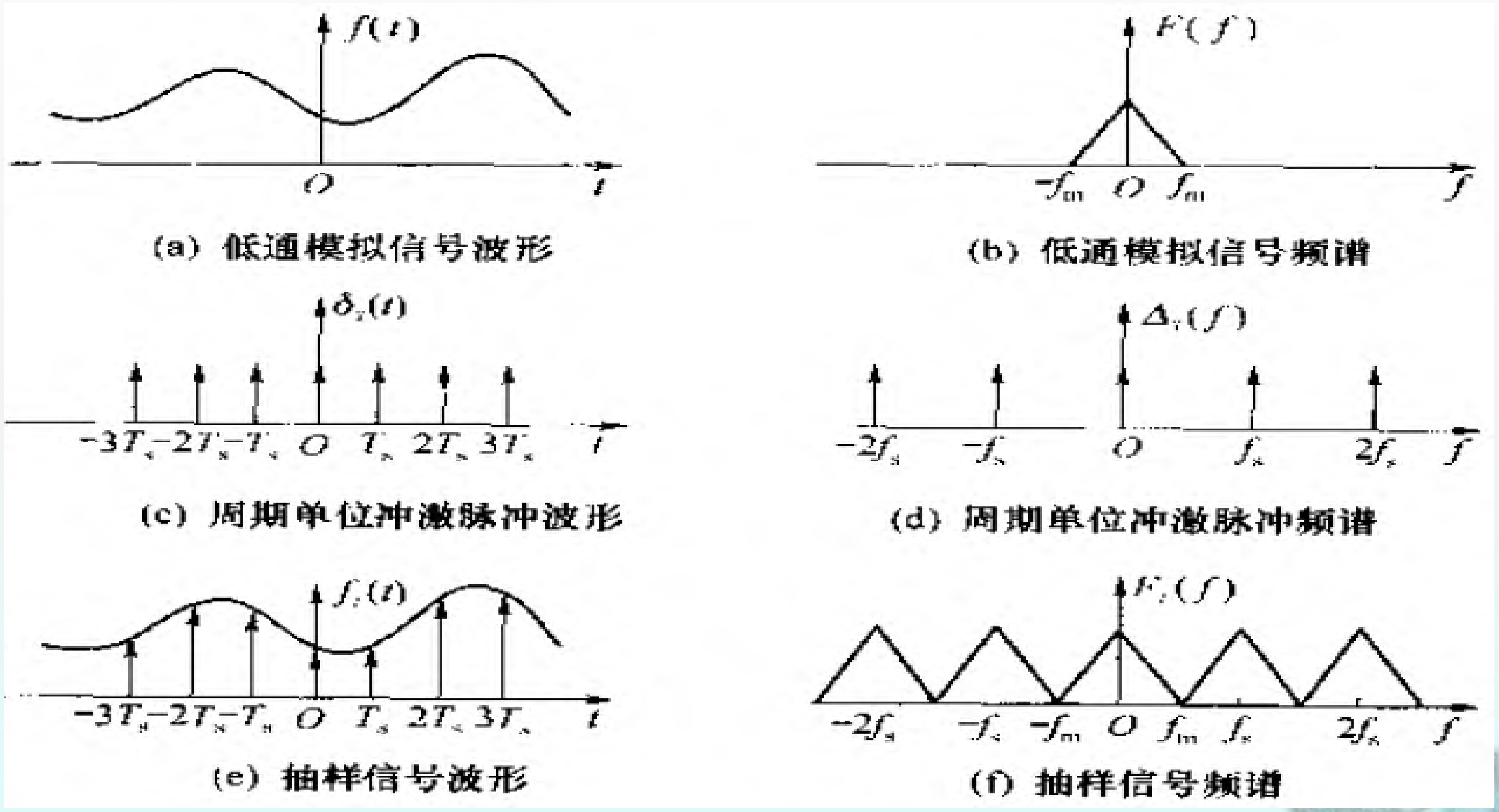
第4讲：多维采样与转换

- **多维采样**
  - 格上采样，采样矩阵
  - 格上采样信号的频谱，逆格
  - 格上采样的奈奎斯特准则
  - 抗混叠滤波
- **多维采样结构转换**
  - 问题描述，格的求和与交集运算
  - 采样结构转换滤波
  - 示例

一维采样



f(t)
(a) 低通模拟信号波形
F(f)
(b) 低通模拟信号频谱
(c) 周期单位冲激脉冲波形
(d) 周期单位冲激脉冲频谱
(e) 抽样信号波形
(f) 抽样信号频谱

多维格

- **格 $\Lambda^M \in \mathbf{R}^M$** 为所有关于 $v_1, v_2, \ldots, v_M$ 具有**整数系数的线性组合**的集合，即：

  $$\Lambda^M = \{n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + \cdots + n_M\mathbf{v}_M = \mathbf{V}\,\mathbf{n} \mid n_1, n_2, \ldots, n_M \in \mathbf{Z}\}$$

- **向量 $v_1, v_2, \ldots, v_M$ 所组成的集合**被称为**格 Λ^M 的一个基**，此集合定义了一个多维的具有任意周期的采样结构。使用向量矩阵表示方法，格 Λ^M 被定义为如下的点集：

  $$\Lambda^M = \{\mathbf{V}\,\mathbf{n} \mid \mathbf{n} \in Z^M\}$$

  其中称**V 为 M × M 采样矩阵**

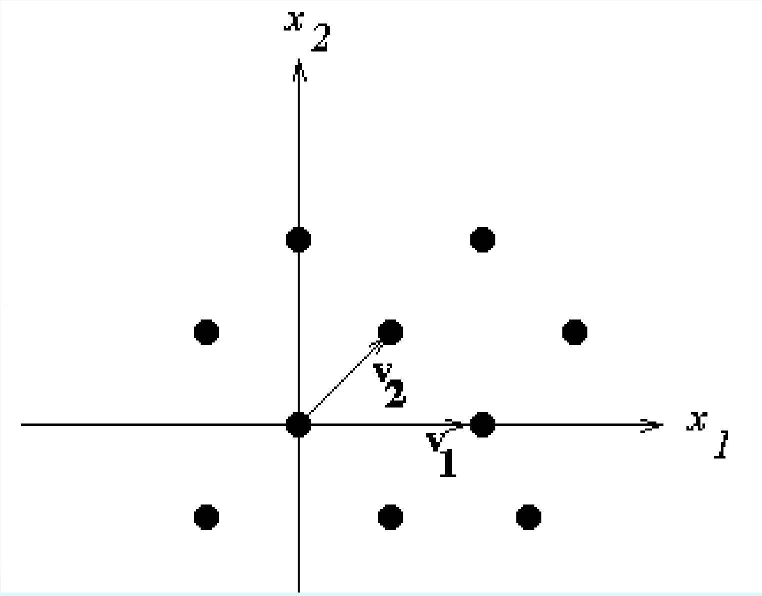
  $$\mathbf{V} = [\,\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{v}_M\,] \qquad \mathbf{n}^T = [\,n_1, n_2, \ldots, n_M\,].$$

- 这样的基（即采样矩阵）并**不是唯一的。** 特别地，对每一个采样矩阵 **V**，其他的关于 Λ^M 的采样矩阵可以通过**EV 来构造**，其中 **E** 是一个整数矩阵 且 $\det\{\mathbf{E}\} = \pm 1$。不过，其行列式 $|\det\{\mathbf{V}\}|$ 表示了采样密度的倒数，是唯一的。

模拟/数字(A/D)转换：格上采样

- **采样的多维信号**可以被表示成：

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(\mathbf{n}) &= \mathrm{S_c}(\mathbf{Vn}), \mathbf{n} \in \mathbf{Z}^M \\ &= \mathrm{S_c}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Lambda^M \end{aligned}$$



2D 采样格(M=2, 采样矩阵 **V** 为 2×2)

二维矩形 (逐行)采样

二维静止图像采样

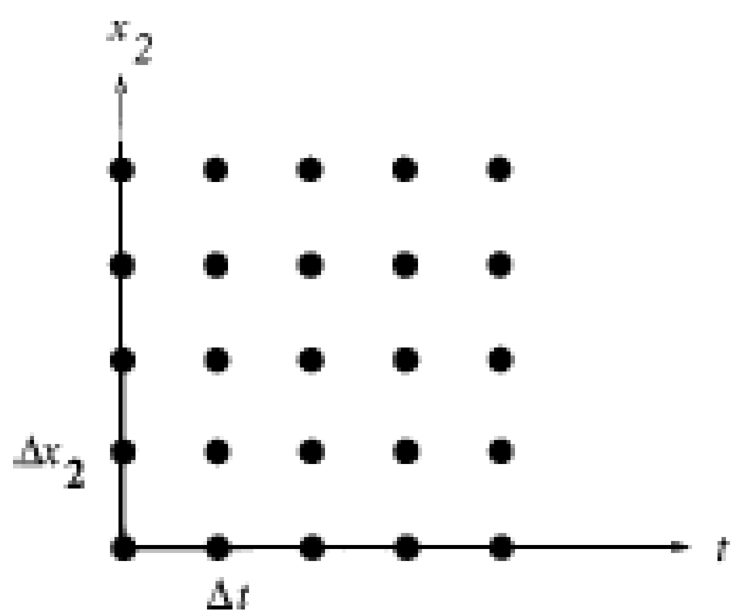
$$x_1 = n_1 \Delta x_1$$

$$x_2 = n_2 \Delta x_2$$

模拟视频采样

$$x_2 = n_2 \Delta x_2$$

$$t = k \Delta t$$



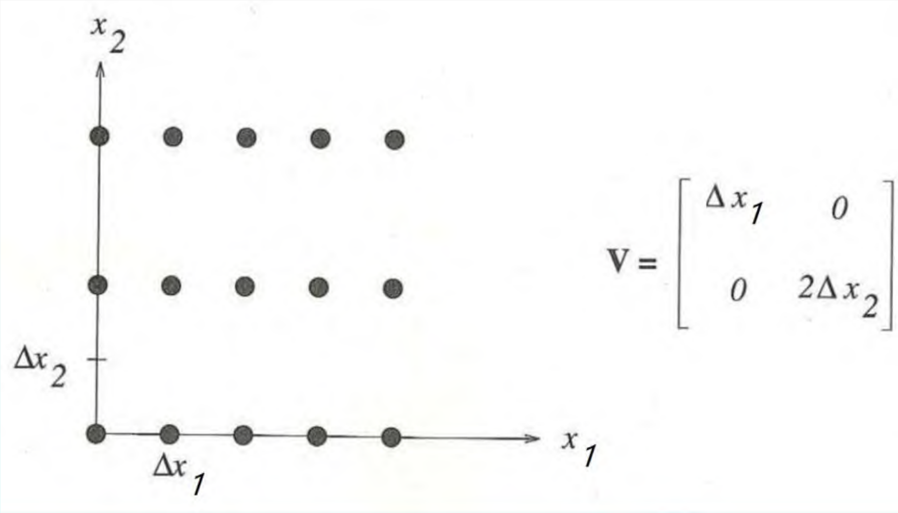
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta x_2 & 0 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix}$$

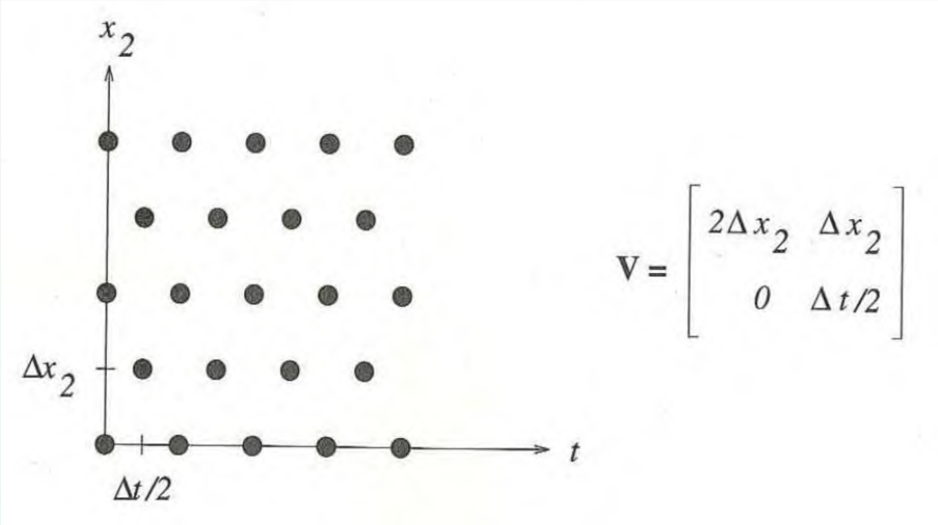
二维隔行采样

二维静止图像采样

$$x_1 = v_{11}n_1 + v_{12}n_2$$
$$x_2 = v_{21}n_1 + v_{22}n_2$$

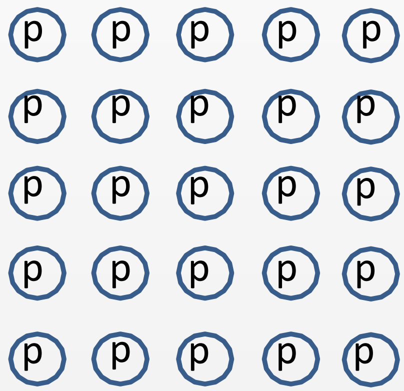
2:1 隔行模拟视频采样





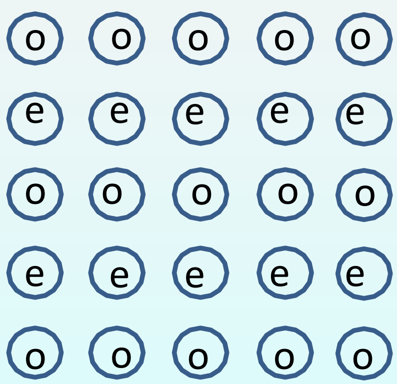
三维采样(2D+t)

逐行



$$V=\begin{bmatrix}\Delta x_1 & 0 & 0\\ 0 & \Delta x_2 & 0\\ 0 & 0 & \Delta t\end{bmatrix}$$

隔行



$$V=\begin{bmatrix}\Delta x_1 & 0 & 0\\ 0 & 2\Delta x_2 & \Delta x_2\\ 0 & 0 & {}^{\Delta t}\!/_{2}\end{bmatrix}$$

格上采样信号的频谱

- **连续信号的傅立叶变换**可以用向量表示为:

$$S_c(\mathbf{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} s_c(\mathbf{x})\, e^{-j2\pi \mathbf{F}^T\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1\, x_2 \ldots x_M] \qquad \mathbf{F}^T = [F_1\, F_2 \ldots F_M], \ -\infty \le F \le \infty$$

- **离散信号的傅立叶变换**可以用向量表示为:

$$S(\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} s(\mathbf{n})\, e^{-j2\pi \mathbf{f}^T\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{n}^T = [n_1\, n_2 \ldots n_M] \text{ and } \mathbf{f}^T = [f_1\, f_2 \ldots f_M], \ -\frac{1}{2} \le f_i \le \frac{1}{2}$$

- **离散信号的傅立叶反变换**可以表示为:

$$s(\mathbf{n}) = \int_{-1/2}^{1/2} S(\mathbf{f})\, e^{j2\pi \mathbf{f}^T\mathbf{n}}\, d\mathbf{f}$$

逆格与单位域

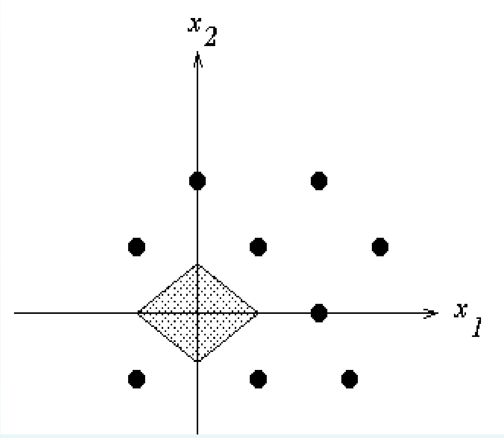
- 给定一个格Λ^M, 所有满足以下条件的向量$\mathbf{r}$所组成的集合被称为**逆格**，记作 Λ^{M*}。即：对所有$\mathbf{x} \in \Lambda^M$，使$\mathbf{r}^T \mathbf{x}$为整数。
- Λ^{M*} 的**一个基为向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_M$的集合**，须满足：

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, M$$

或等价地,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_M$$

其中 $\mathbf{I}_M$ 为 M × M 单位阵。



- 格的**单位域不是唯一**的。定义格的**沃罗诺域**：所有的离原点比离其他采样值更近的点所组成的集合 被设置为一个单位域。它对应于格的基本周期。

采样信号的频谱 (cont’d)

- 采样信号 $s(\mathbf{n}) = s_c(\mathbf{Vn}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\mathbf{F}) e^{j2\pi \mathbf{F}^T \mathbf{Vn}} d\mathbf{F}$
- 经过变量代换 $\mathbf{f} = \mathbf{V}^T\mathbf{F}$, 则有:

$$s(\mathbf{n}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{V})|} \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\mathbf{Uf}) e^{j2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{n}} d\mathbf{f}$$

其中 $\mathbf{U} = (\mathbf{V}^T)^{-1}$ 为逆格 Λ^{M*}的采样矩阵，而 $d\mathbf{f} = |\det(\mathbf{V})|\, d\mathbf{F}$.

- 将整个**f**平面上的双重积分可以**写成在单位正方形域 (—1/2,1/2)× (—1/2,1/2)上的积分再求和**, 即:

$$s(\mathbf{n}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{V})|} \sum_{\mathbf{k}} \int_{-1/2}^{1/2} S_c(\mathbf{U}(\mathbf{f}-\mathbf{k})) e^{j2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{n}} e^{-j2\pi \mathbf{k}^T \mathbf{n}} d\mathbf{f}$$

其中: $e^{-j2\pi \mathbf{k}^T \mathbf{n}} = 1$, $\mathbf{k}$ 为整数值的向量（通过逆格的定义）

采样信号的频谱 (cont'd)

- 最后，将此表达式与傅里叶反变换表达式

  $$s(\mathbf{n}) = \int_{-1/2}^{1/2} S(\mathbf{f})\, e^{j2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{n}}\, d\mathbf{f}$$，进行比较，可得：

  $$S(\mathbf{f}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{V})|} \sum_{\mathbf{k}} S_c\big(\mathbf{U}(\mathbf{f} - \mathbf{k})\big)$$

  其中$\mathbf{U}$为频率域周期性矩阵，满足$\mathbf{U}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_M$，其中$\mathbf{I}_M$为$M \times M$单位阵。周期性矩阵可以被表示成$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{u}_M]$，其中$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_M$为逆格的基向量。

- 在格Λ^M上采样信号的傅里叶变换由在逆格Λ^{M*}上的模拟信号频谱周期性复制之和所组成。

采样信号的频谱：奈奎斯特定理

- 或者，多维格采样信号也可以被表示成**连续信号的表达形式**:

$$S_p(\mathbf{x}) = s_c(\mathbf{x})\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^M}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{Vn}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{Z}^M} s(\mathbf{n})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{Vn})$$

- 经过变量代换，采样信号$s_p(x)$的**傅里叶变换 $S_p(F)$**可以由**模拟信号 $S_c(F)$**来表示:

$$S_p(\mathbf{F}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{V})|}\sum_{\mathbf{k}} S_c(\mathbf{F}-\mathbf{Uk})$$

其中频率变量 **F = Uf** (归一化变量).

- **奈奎斯特定理:** 模拟信号的带宽应该限制在采样格逆格的单位域之内。

示例：2D 矩形采样

$M=2,\quad x_1=n_1\Delta x_1 \quad x_2=n_2\Delta x_2$

$$s(n_1,n_2)=\iint_{-\infty}^{\infty} S_c(F_1,F_2)e^{j2\pi(F_1 n_1\Delta x_1+F_2 n_2\Delta x_2)}\,dF_1\,dF_2$$

变量代换 $f_1=F_1\Delta x_1 f_2=F_2\Delta x_2$

$$s(n_1,n_2)=\frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2}\iint_{-\infty}^{\infty} S_c\left(\frac{f_1}{\Delta x_1},\frac{f_2}{\Delta x_2}\right)e^{j2\pi(f_1 n_1+f_2 n_2)}\,df_1\,df_2$$

$$s(n_1,n_2)=\frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\iint_{SQ(k_1,k_2)} S_c\left(\frac{f_1}{\Delta x_1},\frac{f_2}{\Delta x_2}\right)e^{j2\pi(f_1 n_1+f_2 n_2)}df_1 df_2$$

$$-\frac{1}{2}+k_1\le f_1<\frac{1}{2}+k_1 \text{ and } -\frac{1}{2}+k_2\le f_2<\frac{1}{2}+k_2$$

示例：2D 矩形采样

变量代换：$f_1 \rightarrow f_1 - k_1$; $f_2 \rightarrow f_2 - k_2$

$$s(n_1, n_2) = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \iint_{-1/2}^{1/2} S_c\left(\frac{f_1 - k_1}{\Delta x_1}, \frac{f_2 - k_2}{\Delta x_2}\right) e^{j2\pi(f_1 n_1 + f_2 n_2)} \, df_1 \, df_2$$

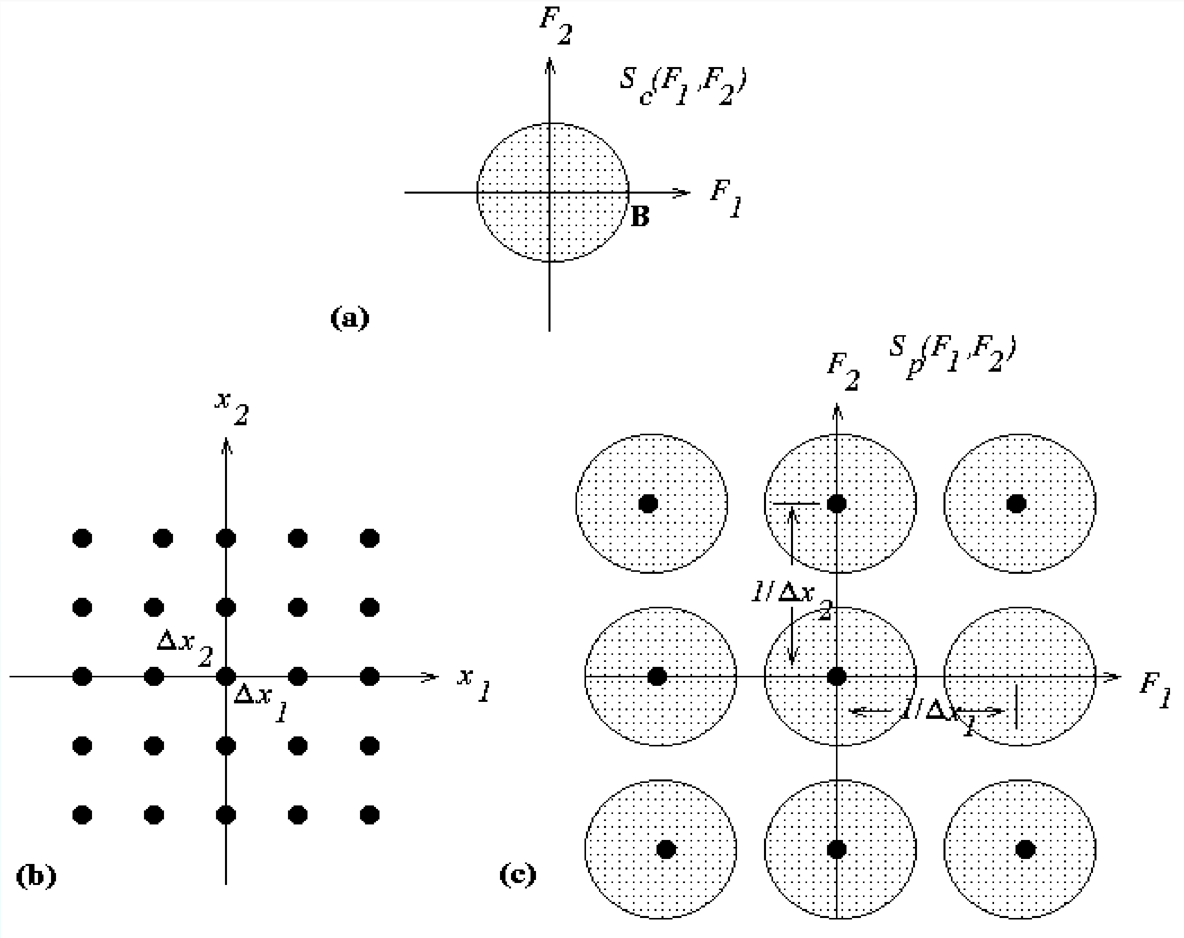
$$s(n_1, n_2) = \iint_{-1/2}^{1/2} S(f_1, f_2) e^{j2\pi(f_1 n_1 + f_2 n_2)} \, df_1 \, df_2$$

比较上面两式，可得：

$$S(f_1, f_2) = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} S_c\left(\frac{f_1 - k_1}{\Delta x_1}, \frac{f_2 - k_2}{\Delta x_2}\right)$$

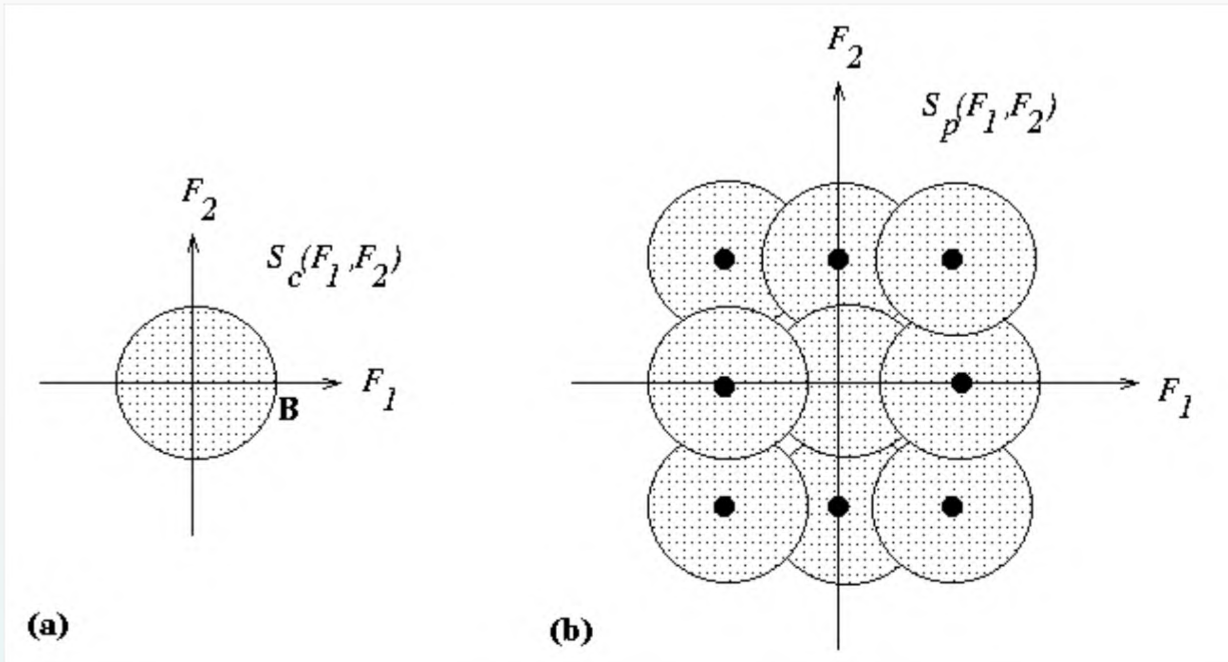
示例：2D 矩形采样

无混叠



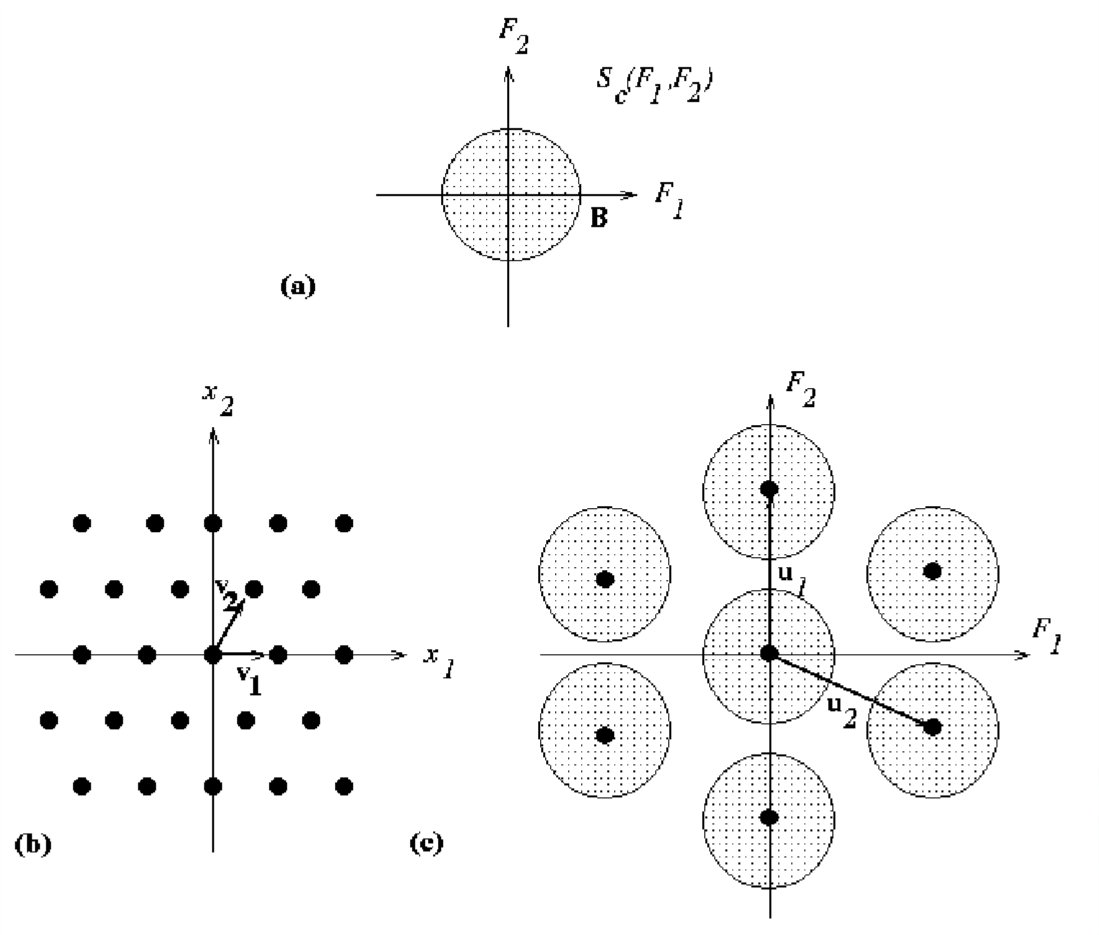
示例：2D矩形采样 (cont’d)

有混叠



需要在采样前进行适当的**抗混叠滤波**。抗混叠滤波器的频带应限制在**逆格的单位域之内**。

示例：2D任意周期采样



数字/模拟(D/A)转换：理想重建

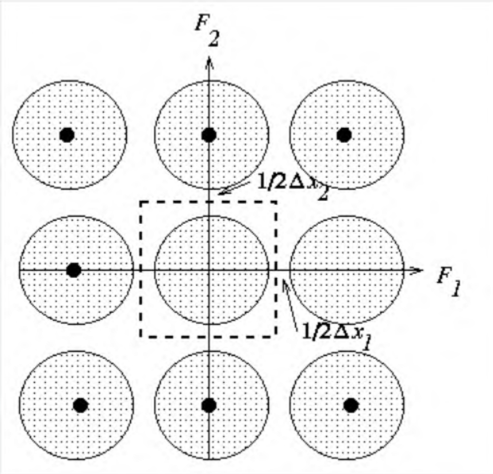
- 重建的时变图像$s_r(\mathbf{x}, t)$ 可以通过**理想低通滤波操作**来得到：

$$S_r(\mathbf{F}) = \begin{cases} \det(\mathbf{V})\mathbf{S}(\mathbf{V}^T\mathbf{F}) & \mathbf{F} \in \mathbf{P} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- 使用傅里叶反变换，可获得**重建的时变图像**:

$$s_r(\mathbf{x}, t) = \sum_{(\mathbf{n},k)\in \mathbf{Z}^3} s(\mathbf{n}, k)\, h\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ t\end{bmatrix} - \mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{n}\\ k\end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{(\mathbf{z},\tau)\in \Lambda^3} s_p(\mathbf{z}, \tau)\, h\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ t\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \tau\end{bmatrix}\right)$$

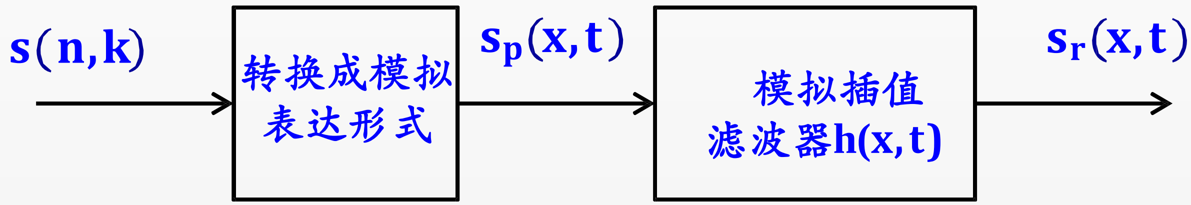


其中:

$$h(\mathbf{x}, t) = |\det(\mathbf{V})| \int_P e^{j2\pi \mathbf{F}^T \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ t\end{bmatrix}} d\mathbf{F}$$

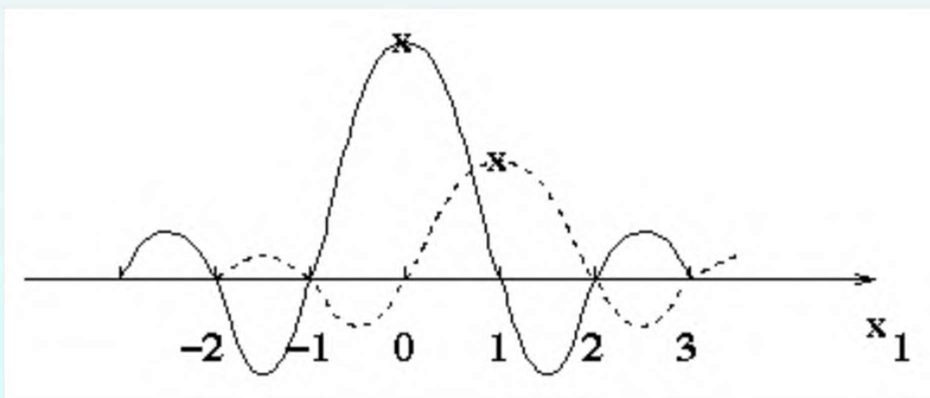
为理想带限空时插值滤波器的冲激响应。

模拟插值滤波



- 逐行（矩形）采样信号的**模拟重建:**

$$h(x,t)=\frac{\sin\left(\pi(x_1-n_1\Delta x_1)/\Delta x_1\right)}{\pi(x_1-n_1\Delta x_1)/\Delta x_1}\,\frac{\sin\left(\pi(x_2-n_2\Delta x_2)/\Delta x_2\right)}{\pi(x_2-n_2\Delta x_2)/\Delta x_2}\,\frac{\sin\left(\pi(t-k\Delta T)/\Delta T\right)}{\pi(t-k\Delta T)/\Delta T}$$



采样结构转换

- **格的和:**

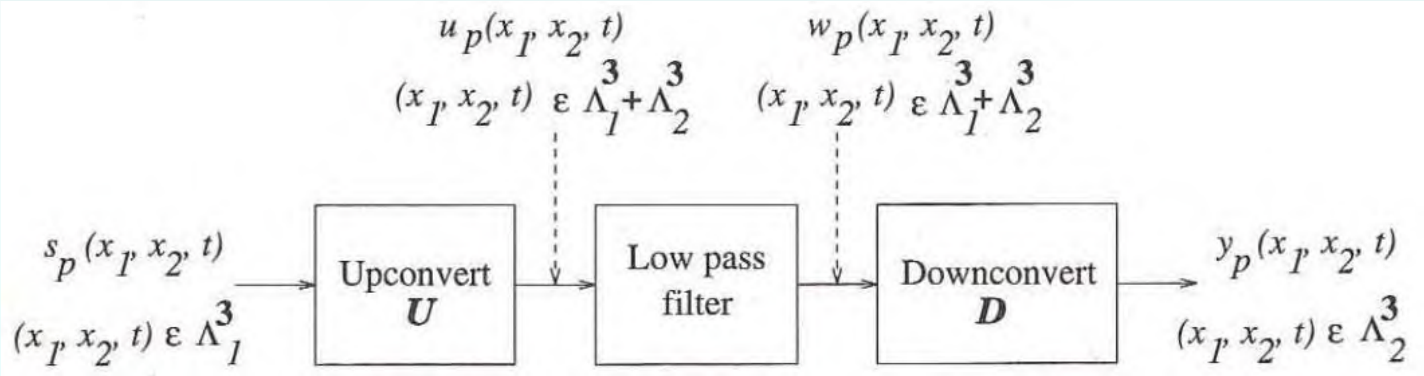
$$\Lambda_1^M + \Lambda_2^M = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \epsilon \boldsymbol{\Lambda}_1^M \text{ and } \mathbf{x}_2 \epsilon \boldsymbol{\Lambda}_2^M\}$$

两个格求和运算可通过将其中一个格的每个点增加到另外一个格上来完成。

- **格的交集:**

$$\Lambda_1^M \cap \Lambda_2^M = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \epsilon \boldsymbol{\Lambda}_1^M \text{ and } \mathbf{x} \epsilon \boldsymbol{\Lambda}_2^M\}$$

- **交集$\boldsymbol{\Lambda}_1^M \cap \boldsymbol{\Lambda}_2^M$为$\boldsymbol{\Lambda}_1^M$和$\boldsymbol{\Lambda}_2^M$的子格中的最大格，而格的和$\boldsymbol{\Lambda}_1^M + \boldsymbol{\Lambda}_2^M$为包含$\boldsymbol{\Lambda}_1^M$和$\boldsymbol{\Lambda}_2^M$的最小格。**



采样结构转换 (cont'd)

- **从$\mathbf{\Lambda_1}^M$ 到 $\mathbf{\Lambda_1}^M + \mathbf{\Lambda_2}^M$ 的上转换**被定义为：

$$u_p(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\, s_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} s_p(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \mathbf{\Lambda}_1^M \\ 0 & \mathbf{x} \notin \mathbf{\Lambda}_1^M \text{ and } \mathbf{x} \in \mathbf{\Lambda}_1^M + \mathbf{\Lambda}_2^M \end{cases}$$

- **从 $\mathbf{\Lambda}_1^M + \mathbf{\Lambda}_2^M$ 到 $\mathbf{\Lambda}_2^M$ 的下转换**被定义为：

$$y_p(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\, w_p(\mathbf{x}) = w_p(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbf{\Lambda}_2^M$$

- 在格$\Lambda_1^M + \Lambda_2^M$上进行**低通滤波**，此格比 Λ_1^M 和 Λ_2^M具有**更高的采样密度。**

- 根据定义，如果输入移位了向量$\mathbf{p}$而输出也移位了$\mathbf{p}$，则此**滤波器为移不变**的。因此，需要$\mathbf{p} \in \mathbf{\Lambda}_1^M \cap \mathbf{\Lambda}_2^M$。要满足此条件，则需要$\mathbf{\Lambda}_1^M \cap \mathbf{\Lambda}_2^M$ 为格，即：$\mathbf{V}_1^{-1}\,\mathbf{V}_2$是有理数组成的矩阵。这个条件同一维采样率转换问题中要求L/M为一个有理数相类似。

采样结构转换 (cont'd)

- 格$\Lambda_1^M+\ \Lambda_1^M$上的**线性移不变滤波**操作可以表示成:

$$w_p(x) = \sum_{z\in\Lambda_1^M+\Lambda_2^M} u_p(\mathbf{z})\, h_p(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \qquad x\in\boldsymbol{\Lambda}_1^M+\ \boldsymbol{\Lambda}_2^M$$

- 根据定义，**上采样 $u_p(x) = s_p(x)$, $x\in\Lambda_1^M$, 否则为0**

$$w_p(\mathbf{x}) = \sum_{z\in\Lambda_1^M} s_p(\mathbf{z})\, h_p(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \qquad x\in\boldsymbol{\Lambda}_1^M+\ \boldsymbol{\Lambda}_2^M$$

- 经过**下采样**:

$$y_p(\mathbf{x}) = \sum_{z\in\Lambda_1^M} s_p(\mathbf{z})\, h_p(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \qquad \mathbf{x}\in\boldsymbol{\Lambda}_2^M$$

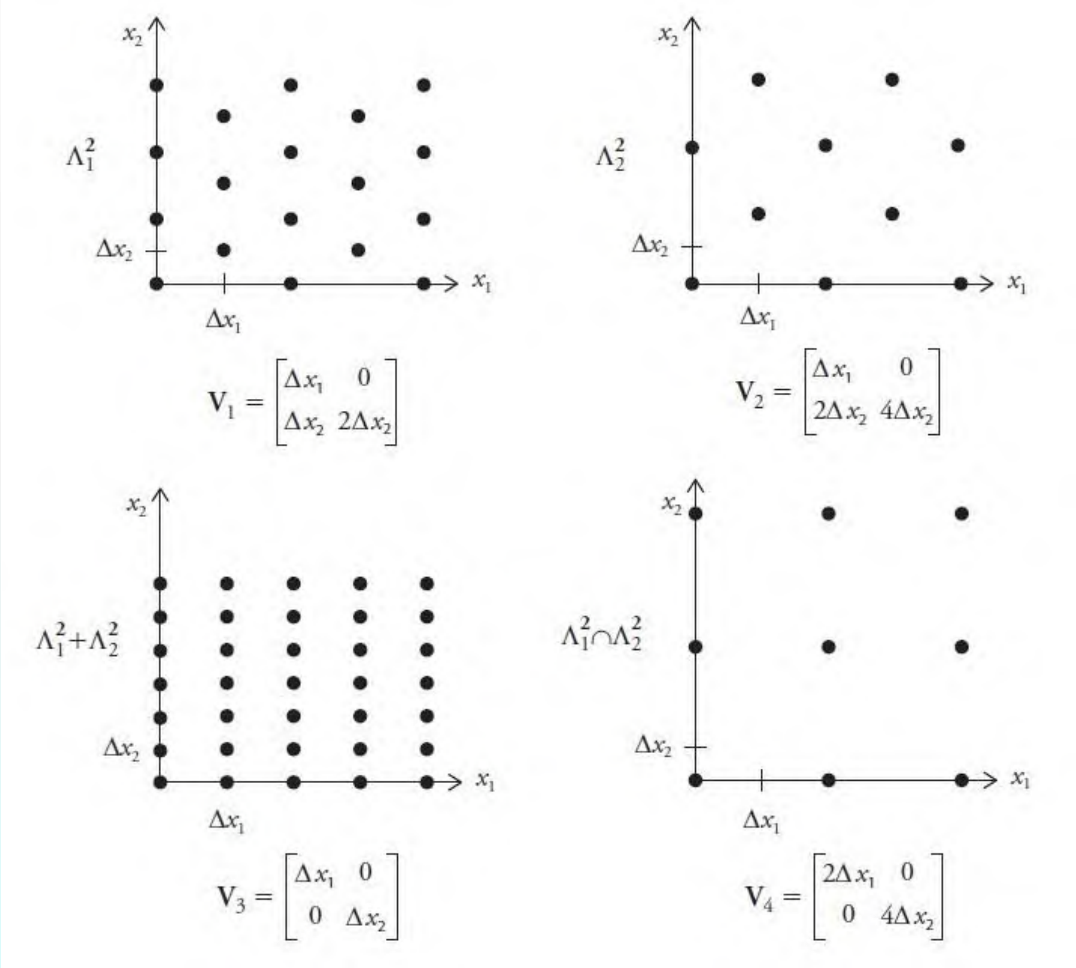
- 滤波器的频率响应为周期性的，其主周期等于$(\boldsymbol{\Lambda}_1^M+\boldsymbol{\Lambda}_2^M)^*$的单位域。为了防止混叠，插值/抗混叠滤波器的频带需**限制在$(\Lambda_1)^{M*}$和$(\Lambda_2)^{M*}$中较小的沃罗诺域**。

采样结构转换：例 1

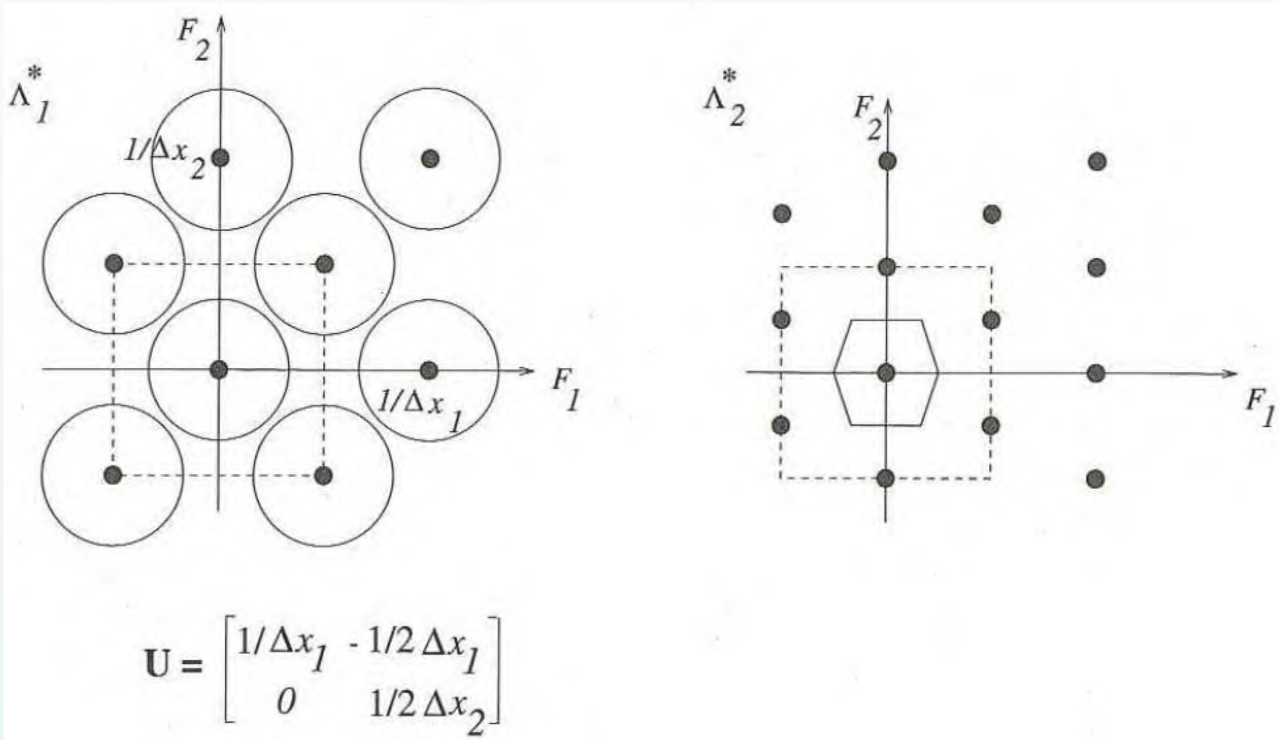
- 考虑从**输入格 Λ_1^2** 到**输出格Λ_2^2**的**2D采样格转换**问题。

- Λ_1^2 和 Λ_2^2 的**采样密度**与 V_1 和 V_2的**行列式**成**反比**
  $\det(V_1) = 2\Delta x_1 \Delta x_2$
  $\det(V_2) = 4\Delta x_1 \Delta x_2$

- 因此，这是一个**下采样问题。**



例 1 (cont'd)



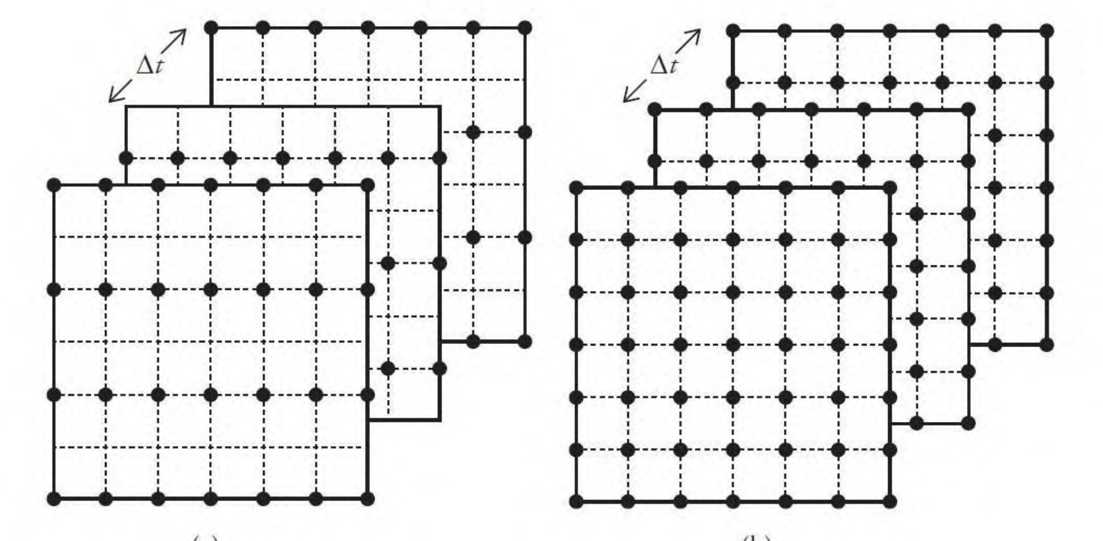
滤波器的频率响应被限制在$(\Lambda_2^2)^*$的沃罗诺域，此单位域由矩阵$(\mathbf{U}_2^T)^{-1} = \mathbf{V}_2$来决定。

采样结构转换：例 2

去隔行是指从隔行采样网格（输入）转换为逐行采样网格（输出）。输入和输出网格的采样矩阵为：

$$V_{in} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Delta x_2 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \qquad V_{out} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix}$$

注意：$|\det V_{in}| = 2\,|\det V_{out}|$；因此，这是一个**2倍空时插值问题**。



(a) (b)

习题

- ✓ 1.2（证明是否可分离可使用反证法）
- ✓ 1.5（设N_1>=3,N_2>=3，注意要求出卷积结果，再求滤波器h的频率响应）
- ✓ 1.7（注意利用调制特性推导）
- ✓ 1.13（画图表示）

- ✓ 大作业：Matlab Excercises 1.1或1.2。