高等数学知识点整理

1. 函数与极限

1. 极限:
    1. 夹逼准则
    2. 两个**重要极限**
        - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
        - $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x}) = e$
    3. 无穷小的比较
        - 定义:
            - 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$,那么$\beta$是$\alpha$的高级无穷小,记作$\beta = o(\alpha)$
            - 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$,那么$\beta$是$\alpha$的低阶无穷小
            - 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$,那么$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小
            - 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$,那么$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小
            - 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} =$,那么$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记作$\alpha \sim \beta$
        - 重要的等价无穷小
            - 在$x \to 0$时,
            - $\sin x \sim x$
            - $\ln(1 + x) \sim x$
            - $\tan x = x$
            - $\arcsin x \sim x$
            - $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$
            - $e^x - 1 \sim x$
2. 间断点
    - 第一类间断点(左右极限都存在): 可去间断点(左右极限相同),跳跃间断点(左右极限不同)
    - 第二类间断点(除了第一类以外): 无穷间断点,震荡间断点

2. 导数与微分

1. 导数基础
    1. 可导必定连续,连续不一定可导($y = |x|$)
    2. 求导法则
        - dy, dx的表达形式是重点
        - 反函数求导法则

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \text{或} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

        - 复合函数求导法则(只上一个公式,具体翻书)

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \text{或} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

3. 求导公式(见重要导数)
2. 高阶导数

$$y'' = (y')' \text{ 或 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$$

- 莱布尼茨公式(求$(uv)'$的n阶导数)(求两个相乘的函数的n阶导数)
  - $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v(k)$
  - 跟二项式展开很像
3. 隐函数及有参数方程所确定的函数的导数
- **隐函数求导**
  - 隐函数求二阶导数(**重点**) 咕咕咕
- 参数方程求导
4. 微分(在某种程度上来说就是求导,此处是引出,其具体阐释是在下一章)

$$dy = f'(x)dx$$

- 微分表

3. 微分中值定理和导数的应用

1. 微分中值定理
   1. 罗尔定理(不常用,定义自己去查书,是下一个定理的一种特殊情 况)
   2. **拉格朗日中值定理**
      - $f(x)$满足:在$[a,b]$上连续,在$(a.b)$上可导
      - 那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a < \xi < b)$,使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

        成立
      - 整理形式:$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
      - 用语言表述整理后的形式的几何意义: 在限定条件中$f(x) \in [a,b]$上总有一个点的斜率,等于两个端点的连线的斜率
   3. 柯西中值定理(感觉不是很重要,所以先不整理了) 咕咕咕
2. 洛必达法则
   1. 定义:
      - 当$x \to a(or\ \infty)$时,函数$f(x)$及$F(x)$都趋于零
      - 在上一条件中,$f'(x)$, $F'(x)$都存在
      - $\lim \frac{f'(x)}{F('x)}$ 存在(或者无穷大)
      - 则:
      - $$\lim_{x \to a(or\infty)} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{a(or\infty)} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$
3. 泰勒公式

1. 泰勒展开(可以带有两种余项)
    - $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}x_0}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$
2. 佩亚诺余项
    - $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$
3. 拉格朗日余项
    - $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
4. 麦克劳林公式(可以带有两种余项)
    - $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

4. 函数的单调性和凹凸性(此处没有采用严谨的定义)
    1. 单调性
        - 喵,这个还能不知道?
    2. 凹凸性
        - $f''(x)>0$,函数图形时凹的
        - $f''(x)<0$,函数图形时凸的
    3. **拐点**
        - 曲线的凹凸性改变处
        - $f''(x)=0$或$f''(x)$不存在的点可能是拐点
        - 在上一条件下,$f''(x)$在x的两侧符号相反,则是拐点
    4. 驻点
        - $f'(x)=0$的点
        - 可导函数的极值点必定是驻点,但是驻点不一定是极值点($y=x^3$)
5. 函数的极值与最大值最小值
    - **函数的极值点可能是:驻点,不可导点**,并检验左右临近情况
    - 最大值和最小值求法
        1. 求出在(a,b)内所有驻点和不可导点
        2. 计算所有上述点处的函数值,及$f(a),f(b)$
        3. 比较2中各个值的大小,最大的是最大值,最小值亦然
6. 曲率(老师说期末考可能会考)(请背公式)
    - 曲率K等于

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

    - 通过特定的点x算出这一点的y',y''再代入公式求得该点处的曲率
    - 曲率半径$\rho=\frac{1}{K}$

4. 不定积分(求导的逆过程,相当于从导数找到原函数)

1. 基本性质(写在标题里了)
2. 基本积分表(见重要的积分)

3. **换元积分法**
    1. 第一类换元法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = [\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

    2. 第二类换元法

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$$

4. **分部积分法**

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\text{或者写成} \int udv = uv - \int vdu$$

    - v要容易求得
    - $\int vdu$要比$\int udv$容易积出
5. 有理函数积分
    1. 连个多项式的商$\frac{P(x)}{Q(x)}$称为有理函数(有理分式),当$P(x)$的次数小于$Q(x)$的次数时,称为*真分式*,反之,称为*假分式*(与高中的概念相同)
    2. 通过将有理函数拆分,即将**真分式**化成**部分分式之和**的方式,在通过**基本性质**和**基本积分表**中的方法求积分
    3. 通过**换元法**将原本不是有理函数的函数化成有理函数的积分

5. 定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

1. 表示函数 `f(x)` 在区间 `[a,b]` 上与 `x轴围成的图形的面积`
2. 定积分中值公式
3. 牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4. 定积分的换元法,分部积分法
    - 就是用微积分的换元法,分部积分法
    - 求出原函数,然后用牛顿莱布尼茨公式求出定积分
5. 反常积分
    - 就是用 `特殊部分对应的极限` 代替 `特殊部分`
    - 如果极限存在则反常积分收敛,反之反常积分发散
    - 特殊部分包括 `无穷(无穷限)` `无界(间断点->瑕点)`

6. **定积分的应用**

7. **微分方程**

    1. 在可以先行获得微分方程的情况下,用微分方程求出原函数
    2. 最高阶导数的阶数->微分方程的阶数
    3. 通解:微分方程 `阶数` =解中 `任意常数(C)`数
    4. 微分方程-->通解(+初值条件)-->特解
    5. 几何意义
    6. 针对不同情况的解法
        1. 一阶微分方程

$$y' = f(x,y)$$

            1. 分离变量

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \ \ ==> \ \ g(y)dy = f(x)dx \ \ ==> \ \ F(y) = F(x)$$

            2. 齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \ \ ==> \ \ \frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$$

令 $u = \frac{y}{x}$
那么:

$$y = ux, \frac{dy}{dx} = y' = u + xu' = u + x\frac{du}{dx}$$

将原式中 `y` ,$\frac{dy}{dx}$代换,分离变量,解出,用$u = \frac{y}{x}$带入,得答案

            3. 可化为齐次的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

当$c = c_1 = 0$时是齐次的
当$c \neq c_1 \neq 0$时:
令$x = X + h, y = Y + k,$
则:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1} \ \ (*)$$

此时如果

$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$$

证明附于文末

则可将 (*) 式化为齐次方程

4. 一阶线性微分方程(注意这里的解法和线性代数中解**非齐次线性方程组**很像)

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

解法

1. 先令$Q(x)=0$ *解其的齐次方程* $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$求得对应齐次方程的**通解**(含有一个任意常数C,$y=Cf(temp)$)
2. 使用**常数变易法**,将C替换成x的未知函数$u(x)\to u$,带入上一式子中,得$y=uf(tmep)$
3. 对其求微分,即$\frac{dy}{dx}=u'f+f'u$
4. 再将$y,\frac{dy}{dx}$带回$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$,解得u'
5. 对u',两端积分(不要忘了常数C),再将u带入$y=uf(temp)$,得到通解
6. 原理我没法和你解释,因为我只是一只doctor
7. 详见书本P316的列题1
8. **一阶非齐次线性方程的通解=对应齐次方的通解+非齐次方程的一个特解**(与线性代数里一样)

5. 伯努利方程
   1. 咕咕咕

2. 可降阶的高阶微分方程
   1. $y^n=f(x)$型
      - 左右多次取积分,降阶,$y^n\to y$
   2. $y''=f(x,y')$型
      - 令$p=y'$,则$y''=\frac{dp}{dx}=p'$
      - 带入,分离变量,求积分
   3. $y''=f(y,y')$型
      - 令$p=y'$,则$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$
      - 带入,分离变量,求积分
3. 高阶微分方程(以二阶线性微分方程为主)(概念开始与线性代数有关)(先研究解的结构)
   1. 线性微分方程解的结构:
      - 有n个特解线性组合得到通解,n=齐次线性方程的阶数=最高阶导数的阶数
      - n阶齐次线性方程中,$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$,其中$y_*(x)$是各个线性无关的特解
      - 线性无关的判断:两个解之比不为常数
      - 非齐次方程的解=对应齐次方程的通解+非齐次方程的特解
      - 常数变易法(用于解非齐次线性方程)
4. 常系数齐次线性微分方程(真正开始解)
   1. 特征方程($y''\to r^2,y'\to r,y\to r^0=1$)
   2. r_1,r_2为两个解

3. 分情况讨论(针对特征方程)
   1. 当$\Delta > 0$时
      - 有两个不相等的实根,所以通解是$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
   2. 当$\Delta = 0$时
      - 因为$r_1 = r_2$,得到一个解$y_1 = e^{r_1x}$
      - 另一个解$y_2 = xe^{r_1x}$
      - 通解为$y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$
   3. 当$\Delta < 0$时
      - 一对共轭复根$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$
      - 通解$y = e^{ax}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
5. 常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

   1. 解=通解(用上面的方法求)+特解(y^*)
   2. 此处只讨论f(x)的两种情况:
      1. $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$型)
         - 特解的结构:$y^* = x^kR_m(x)e^{\lambda x}$
         - 其中,k按照λ是特征方程的根的重复次数,不是根(重复0次)是0,重复一次是1,重复两次是2,高阶情况以此类推
         - $R_m(x)$是与$P_m(x)$同次(m次)的多项式
           - 举例,当$m = 1$时,设$R_m(x) = b_0x + b_1$,求得y^*表达式
           - 算出$y^*\,'$和$y^*\,''$后一起带入$y'' + py' + qy = f(x)$
           - 化简,观察,比较得到特解
      2. $f(x) = e^{\lambda x}[P_l \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$型
         - 特解的结构:$y^* = x^ke^{kx}[R_m^{(1)}(x)(\cos \omega x + R^{(2)}m(x) \sin \omega x]$
         - k按照$\lambda + \omega i$是特征方程根的重复次数取值(与上面一样)
         - $R_m^{(1)}(x), R_m^{(1)}(x)$是m次多项式,$m = \max[n, l]$,注意这两者是不一样的
         - 具体解法同上
   3. 上两种情况的特点是不用积分就可以求出$y*$,叫做待定系数法
6. 欧拉方程

8. 重要公式

1. 三角公式
   1. $\begin{cases} cot\alpha = \frac{1}{tan\alpha} \\ csc\alpha = \frac{1}{sin\alpha} \\ sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} \end{cases}$
   2. $\begin{cases} sin^2x + cos^2x = 1 \\ 1 + tan^2x = sec^2x \\ 1 + cot^2x = csc^2x \end{cases}$

3. $\begin{cases} sin(arcsinx) = x \\ cos(arccosx) = x \\ tan(arctanx) = x \end{cases}$

2. 重要的导数,积分,微分公式
   1. 导数
      - $(\tan x)' = \sec^2 x$
      - $(\cot x)' = -\csc^2 x$
      - $(\sec x)' = \sec x \tan x$
      - $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
      - $(a^x)' = a^x \ln a(a > 0, a \neq 1)$
      - $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
      - $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
      - $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
      - $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
      - $(\arccos x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
   2. 微分(不就是上面的公式变一下吗,不写了)
   3. 积分
      - $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
      - $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
      - $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
      - $\int \cos x dx = sinx + C$
      - $\int \sin x dx = -\cos x + C$
      - $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = tanx + C$
      - $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
      - $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
      - $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
      - $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

证明:

限制条件:矩阵是方阵

矩阵行列式不为零-->矩阵可逆-->矩阵满秩-->矩阵对应的线性方程组有解(无论是否齐次)

$$|A| \neq 0 \dashrightarrow 存在A^{-1} \dashrightarrow R(A) = n \dashrightarrow Ax = b一定有解$$