线性代数

0. **核心:**
   - 可逆,**秩**,行列式(值)的关系
     - 秩的数量代表了多少个向量做出了贡献,可以形成多少维的空间(超平面)
     - 方阵A满秩->所有向量都做出了贡献->形成了n维空间->向量组线性无关->矩阵A可逆->A的行列式不为零->Ax=b有唯一解
     - A的行列式不为零->A可逆->A满秩
     - 以上的部分要改写的好看一点
   - n维矩阵与n维空间,n-1维超平面(本质)(可由上一点推出)
   - **线性空间**(也就是上一点的具体说法)(更为广义,包含向量空间(向量空间只由向量组成))(也是**线性代数的本质**所在)
   - 线性关系的意义
     - 线性 include 齐次性 + 可加性
     - 可加性: F(x+m)=F(x)+F(m)
     - 一次齐次性: F(mx)=mF(x)
     - **特征值的数量=维数,不同且不相等的特征值的数量=秩的数量**

1. **行列式(包含运算规则,可以计算为一个值)(一定是正方的)**
   1. 行列式的基本计算方法
      - 全排列(所有项)+计算逆序数(项的正负,偶数为正,奇数为负)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n p_n}$$

      其中$p_1 p_2 \dots p_n$为自然数1,2,3,...,n的一个排列,t为这个排列的逆序数,这样的排列用$n!$项
   2. 行列式的基本性质
      1. 转置相等
      2. 对换两行(列)变号==>两行(列)相同,行列式为零
      3. k乘某一行(列)所有元素,等于用k乘以该行列式==>可以提出公因子
      4. 两行(列)成比例,则行列式等于零

        5. 可以按行(列)拆开
        6. 某一行(列)各个元素*乘同一数(可以是1)*然后加到另一行列对应元素上去,行列式不变
    3. 行列式展开
        1. 余子式(M_{ij}),代数余子式(A_{ij})(代数余子式有正负之分)
            - $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$
        2. 拉普拉斯展开(使用代数余子式)
    4. 特殊行列式的解法(*应试警告*)

2. 矩阵及其运算(矩阵是一个数表)

1. 线性方程组
    - 方程组右侧全为零-->n元齐次线性方程组(一定有零解,不一定有非零解)
    - 方程组右侧有常数-->n元非齐次线性方程组
    - 方程的系数矩阵
    - $diag$对角矩阵
    - 单位矩阵
2. 矩阵的运算
    1. $A + B$ 直接对应元素相加
    2. λA 所有元素乘λ
    3. 矩阵相乘
        - 只有第一个矩阵的列数 = 第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘
        - 结果矩阵的m_{ij}元素 = 第一个矩阵的第i行 $\times$ 第二个矩阵的第j列
    4. 矩阵的转置(行列互换)
        - $(A^T)^T = A$;$(A+B)^T = A^T + B^T$
        - $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
        - $(AB)^T = B^TA^T$ (**重要!**)
    5. 方阵的行列式(只有正方的才能构成行列式)
        1. 记作$detA$或者$|A|$
        2. **性质**
            - $|A^T| = |A|$(行列式的性质)
            - $|\lambda A| = \lambda^T|A|$
            - $|AB| = |A||B|$ --> $|AB| = |BA|$
        3. 伴随矩阵(次级考点,是为了引出逆矩阵)
            - 每个元素的位置用自己的代数余子式替换
            - $AA^* = A^*A = |A|E$
3. **逆矩阵**
    1. **若矩阵A可逆,则$|A| \neq 0$ (重点)**
    2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ (不常用)
    3. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

        4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
        5. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (最常用,但是应该不会不知道)
    4. 克拉默法则(不常用,略过)
    5. 矩阵分块法
        - 分块法相同,矩阵运算就按正常的来,运算完之后再回代

3. **矩阵的初等变换和矩阵方程组**

    0. 总领
        - 点1(初等变换),教你如何解线性方程组(详细的解法在下一章中)
        - 点2,3(秩)教你如何判断是否有解
    1. 矩阵的初等变换
        1. 初等行变换
            - 对换两行($r_1 \leftrightarrow r_2$)
            - 以$k(k \neq 0)$乘某一行($r_i * k$)
            - 第j行的k倍倍加的第i行上($r_i + kr_j$)
        2. 经过 *有限次初等变换* 的矩阵等价
        3. 行最简矩阵(引出秩的概念)
        4. 初等矩阵
            - 单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵 叫 初等矩阵
            - 所有的初等**行**变换都可以用 $\text{初等矩阵} \times \text{矩阵}$表示
        - **性质**:对矩阵$A(m * n)$实施一次*初等**行**变换*,相当于$\text{初等矩阵}(m\text{阶}) \times A$;对A实施一次*初等**列**变换*,相当于$A \times \text{初等矩阵}(m\text{阶})$ 初等矩阵是单位矩阵实施相同变换(针对行)获得的
        - 记法:左行右列(A左边乘E',改变行,反之,改变列)
        - **用增广矩阵+行最简矩阵求解线性方程组**(详细展开在下一章)
    2. 矩阵的秩
        - (没有用书上的定义)行最简型矩阵,首非零元的个数 = 秩
        - 可逆矩阵的秩 = 矩阵的阶数(可逆矩阵都可以通过初等行变换变成单位矩阵,也就是:可逆矩阵与初等矩阵等价)(满秩矩阵)
        - 不可逆矩阵(奇异矩阵)-->降秩矩阵
        - 几个重要性质
            - $R(A^T) = R(A)$
            - 若A~B,则$R(A) = R(B)$(若两个矩阵等价,则秩相等)(倒过来说,若两个矩阵类型相同,且秩相等,则两个矩阵等价)
            - $AB = 0$,若A为列满秩矩阵,则$B = 0$
    3. **线性方程组的 *是否有解的判断* (重点,高数里都用到了)**(超级重点)
        - n元线性方程组$Ax = b$
            1. 无解的充分必要条件是$R(A) < R(A, b)$

2. 有唯一解的充分必要条件是$R(A) = R(A,b) = n$
3. 有无限多解的充分必要条件是$R(A) = R(A,b) < n$

- 这个定理可以从方程的角度去理解
    1. 相当于会出现 零 = 一个常数 所以无解
    2. 相当于有n个有效方程(线性无关),n个未知数 所以有唯一解
    3. 相当于有n个未知数,但是方程少于n个,所以有无限多解
- ***尝试从线性空间的角度去理解***
    - 前置条件
        1. 已知:秩表示维数,令$R(A) = r$,$R(A,b) = r'$,而n表示一个n维空间(题目条件所在的空间)
        2. A表示一个r维的空间(或 超平面)
        3. 同时A也要能够线性表示(A,b)所表示的空间(或 超平面)
        4. 低维无法表示高维(因为无法填满)
    - 所以:
        1. 当A维数低于(A,b)的维数时,无法表示,无解
        2. 当A的维数=(A,b)的维数=总维数,相当于A不仅可以表示(A,b),还将n维空间填满了(也就是A可以通过**改变参数**表示整个n维空间),同是(A,b)也是这样的,所以解唯一了
        3. 当第三种情况时,A与(A,b)是低维的(相对于n维),所以无论如何也无法填满n维空间,因此有无数解(咕咕咕,第三种的解释有点迷惑,没法解释为什么这两者有无数中方法相互表示)
    - 以三维空间为例:
        1. 情况一,相当于用一条线去表示一个面,怎么可能,无解
        2. 情况二,相当于两个非特殊面,只有一种参数下可以相互表示
        3. 情况三,相当于两个向量,有无数种不同的参数可以取,可以相互表示
- 齐次线性方程$R(A) = n$-->只有零解(行列式不为零);$R(A) < n$有非零解(行列式=0)

4. 向量组的线性相关性

1. 向量组,线性组合
    1. 向量b能由向量组$A: a_1, a_2, ..., a_n$线性表示的充分必要条件是矩阵$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$的秩等于矩阵$B = (a_1, a_2, ..., a_n, b)$的秩
        - 相当于向量b没有做任何贡献(没有改变秩-->没有做贡献)
    2. 向量组B能由向量组A线性表示: B中的每一个向量都可以由向量组A线性表示
    3. 若向量组A与向量组B能够相互**线性表示**,则两个向量组**等价**
    4. 两个向量组等价的充分必要条件是:$R(A) = R(B) = R(A,B)$(因为B中的每一个向量都可以由A的线性组合来表示-->B没有做贡献-->没有改变秩)
2. 向量组的线性相关性

    1. 基本定理: 向量组中至少有一个向量能由其余m-1个向量表示,则向量组线性相关(至少有一个向量没有做出贡献)
    2. 秩的角度:
        1. 向量组$A: a_1, a_2, \dots, a_m$线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵$A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$的秩小于向量个数m($R(A) < m$)
        2. 向量组A线性无关的充分必要条件是$R(A) = m$
    3. 重要定理:
        - m个n维向量,若维数n(相当于未知数的个数)<向量个数m时,一定线性相关,特别的,**n+1个n维向量一定线性相关**
3. 向量组的**秩**
    1. 向量组的*最大线性无关向量组*(**最大无关组**),的向量个数r称为 向量组A的秩,记作R_A
    2. 等价定义(书上定义): 设向量组$A_0: a_1, a_2, \dots, a_r$是向量组$A$的一个部分组,且满足
        - 向量组A_0线性无关
        - 向量组A的任一向量都能由向量组A_0线性表示
          那么向量组A_0是向量组A的一个最大线性无关组
    3. **矩阵的秩 = 其向量组的秩**(无论列向量组还是行向量组)(向量组的秩和对应矩阵的秩这两者可以相互代替)
4. 线性方程组的解的结构(真正的解方程,重点)
    1. 可以先通过上一章的内容判断是否有解
    2. 齐次线性方程
        - 解集的最大无关组 称为 基础解系
        - **重要定理**
            - **矩阵$A(m \times n)$,的秩$R(A) = r$,则n元齐次线性方程组$Ax = 0$的解集S的秩$R_S = n - r$**
        - 基础解系的求法:将方程化为行最简形,确定 主元,自由变量,通过任取自由变量获得 *不唯一* 的基础解系
    3. 非齐次线性方程
        - **非齐次方程的通解 = 对应的齐次方程的通解 + 非齐次方程的一个特解**
        - 特解的求法:
            - 将 *增广矩阵* 化为行最简形,确定 主元,自由变量 ,写出方程,给自由变量赋值(一般是0),求得主元,合在一起,获得特解
5. 向量空间(就是线性空间,放到第六章去讲)

5. 相似矩阵及二次型

- 章节总览: 内积(提供了高维空间中平方的方法)--->高维空间中长度,夹角的概念--->正交(高维空间中的垂直)--->标准正交基(高维空间的长度为"1"的"轴"(并不唯一))--->施密特正交化(从n维线性无关向量组求n维空间的标准正交基)--->由标准正交基组成的向量组称为正交矩阵--->正交变换的优良特性

特征值的定义,求法,性质--->相似矩阵的特征值相同(相似变换)--->相似矩阵中包含**对角矩阵**(对角化,对角矩阵的性质)--->对称矩阵(一种特殊矩阵)的对角化--->二次型就是对称矩阵(也就是要把各种二次型对角化)

对角矩阵的例子

对角矩阵更容易处理

1. 向量的内积,长度,正交性
   1. 内积
      - $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
      - $[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$
      - $[x, y]$称为x与y的内积
      - $[x, y] = x^T y$
   2. 长度(范数)
      - $||x|| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
      - $||x||$称为n维向量x的长度(或范数)
      - 是二维情况的推广
      - 单位化
        - $x = \frac{a}{||a||}$
        - x是一个单位向量,上式中的过程称为单位化
   3. 夹角
      - $\theta = \arccos \frac{[x,y]}{||x||+||y||}$
      - 是二维情况的推广
   4. 正交性(高维中的垂直)
      - $[x, y] = 0$时向量x与y正交
      - 此时,相当于二维中的垂直
   5. 标准正交基
      - 定义:如果n维向量$e_1, e_2, \ldots, e_n$是向量空间$V(V \subseteq R^n)$的一个基,如果$e_1, e_2, \ldots, e_n$两两正交,且都是单位向量,则称$e_1, e_2, \ldots, e_n$是V的一个**标准正交基**
   6. 标准正交化(施密特正交化)
      - 先施密特正交化得到正交向量组,在将正交向量组标准正交化
      - $b_1 = a_1,$
        $b_2 = a_2 - \frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]} b_1,$
        $\ldots\ldots$
        $b_r = a_r - \frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]} b_1 - \frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2b]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1}b_{r-1}]} b_{r-1}$

- 以上为施密特正交化
- $e_1 = \frac{1}{||b_1||}b_1$,$e_2 = \frac{1}{||b_2||}b_2, \cdots, e_r = \frac{1}{||b_r||}b_r$

7. 正交矩阵
   - A是正交矩阵 充分必要条件是 A的列向量都是单位向量,且两两正交
   - 也就是A是由标准正交基组成的向量组
   - 性质
     - $A^{-1} = A^T$或$A^T A = E$
     - A, A^{-1}, A^T都是正交矩阵,且$|A| = 1(or - 1)$
     - 两个正交矩阵相乘还是正交矩阵
8. 正交变换:
   - P为正交矩阵,则$y = Px$称为正交变换
   - 优良性质:
     - 正交变换前后,**长度保持不变**

2. 特征值和特征向量
   1. 定义
      - $(A - \lambda E)x = 0$
      - λ是特征值,非零向量x是对应于λ的特征向量(约定$p_n \to \lambda n$)
      - 也就是要$|A - \lambda E| = 0$(**特征值的求法**)
   2. 重要性质
      - $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$
      - $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$
      - 有上式可知,**A可逆的 充分必要条件时 它的n个特征值全不为零**
      - λ^2时A^2的特征值
      - 当A可逆时,$\frac{1}{\lambda}$时A^{-1}的特征值
      - **如果两个特征值不同,其对应的特征向量(或向量组)线性无关**
3. 相似矩阵(本身并不特别重要,重要的时其引出的规律)
   - 定义(并不是重点):
     - $P^{-1}AP = B$
     - B时A的相似矩阵,这个过程称为对A进行相似变换,P称为把相似变换矩阵
   - **推论(重点)**($P^{-1}AP = \Lambda$)
     - **若A与对角矩阵**

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

     相似,则$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是A的n个特征值
     - 寻找P,使$P^{-1}AP = \Lambda$的过程,称为把矩阵A对角化

- 分析可知(过程见书),P的列向量就是每一个λ_i对应的p_i(约定)
- **所以,P就是就是A的特征向量组(大家都不唯一)**
- A能对角化的 **充分必要条件是** A有n个**线性无关**的特征向量
- A的特征值互不相等 一定可以推出 A与对角矩阵相似,但是不能反推
- 解题时,排列次序要一致
- 例子见书本P126页

4. 对称矩阵的对角化
   - 对称矩阵的性质
     - 对称矩阵的特征值为实数
     - 对称矩阵的特征值λ_1,λ_2不同,则p_1与p_2正交
     - P129例题12(以及P134例题14)
5. 二次型及其标准形
   - 定义
     - $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$
       是二次型
     - $\sum\limits_{i,j=0}^{n}a_{ij}x_ix_j$也是二次型
   - 任给一个二次型,就唯一的确定一个对称矩阵
     - $f=x^TAx$ 其中f为二次型,A是对称矩阵
     - f叫做对称矩阵A的二次型,A的秩叫做二次型f的秩
   - **如何把二次型化为对称矩阵(三维为例):**
     - $f(x)=ax^2+by^2+cz^2+d\cdot xy+e\cdot xz+f\cdot yz$
     - $\begin{Bmatrix} & x & y & z \\ x & x^2 & \frac{1}{2}xy & \frac{1}{2}xz \\ y & \frac{1}{2}xy & y^2 & \frac{1}{2}yz \\ z & \frac{1}{2}xz & \frac{1}{2}yz & z^2 \end{Bmatrix}$
     - $f=(x,y,z)\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & b & \frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
   - **重点**
     - 任给二次型$f=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$,总有正交变换$x=Py$,使$f$化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$的矩阵$A=(a_{ij})$的特征值(标准型中的项数=二次型的秩)

  - 把二次形转换成对应的对称矩阵A后,对称矩阵A的各个部分其实是表示方程的各个部分(见上方大括号中的内容),所以将A对角化成Λ之后,Λ对角上的部分就是对应的标准形的表示方式(*用正交变换的方法将二次型化为标准形*)

6. 用配方法化二次型成标准形(*不用正交变换的方法*)
   - 拉格朗日配方法(在一定程度上更方便)
   - 这个链接好一点
   - 上个链接
   - 咕咕咕
7. 正定二次型
   - 咕咕咕

6. 线性空间与线性变换

限制条件:矩阵是方阵

矩阵行列式不为零-->矩阵可逆-->矩阵满秩-->矩阵对应的线性方程组有解(无论是否齐次)

$$|A|\neq 0 \dashrightarrow 存在A^{-1} \dashrightarrow R(A)=n \dashrightarrow Ax=b一定有解$$