

线性代数

0. 核心:

- 可逆, **秩**, 行列式(值)的关系
 - 秩的数量代表了多少个向量做出了贡献, 可以形成多少维的空间(超平面)
 - 方阵A满秩 \rightarrow 所有向量都做出了贡献 \rightarrow 形成了n维空间 \rightarrow 向量组线性无关 \rightarrow 矩阵A可逆 \rightarrow A的行列式不为零 $\rightarrow Ax=b$ 有唯一解
 - A的行列式不为零 \rightarrow A可逆 \rightarrow A满秩
 - 以上的部分要改写的好看一点
- n维矩阵与n维空间, n-1维超平面(本质)(可由上一点推出)
- **线性空间**(也就是上一点的具体说法)(更为广义, 包含向量空间(向量空间只由向量组成))(也是**线性代数的本质**所在)
- 线性关系的意义
 - 线性 include 齐次性 + 可加性
 - 可加性: $F(x+m)=F(x)+F(m)$
 - 一次齐次性: $F(mx)=mF(x)$
 - **特征值的数量=维数, 不同且不相等的特征值的数量=秩的数量**

1. 行列式(包含运算规则, 可以计算为一个值)(一定是正方的)

1. 行列式的基本计算方法

- 全排列(所有项)+计算逆序数(项的正负, 偶数为正, 奇数为负)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n p_n}$$

其中 $p_1 p_2 \dots p_n$ 为自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个排列, t 为这个排列的逆序数, 这样的排列用 $n!$ 项

2. 行列式的基本性质

1. **转置相等**
2. 对换两行(列)变号 \Rightarrow 两行(列)相同, 行列式为零
3. k乘某一行(列)所有元素, 等于用k乘以该行列式 \Rightarrow 可以提出公因子
4. 两行(列)成比例, 则行列式等于零

5. 可以按行(列)拆开
 6. 某一行(列)各个元素*乘同一数(可以是1)*然后加到另一行列对应元素上去,行列式不变
3. 行列式展开
1. 余子式(M_{ij}),代数余子式(A_{ij})(代数余子式有正负之分)
 - $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
 2. 拉普拉斯展开(使用代数余子式)
4. 特殊行列式的解法(应试警告)

2. 矩阵及其运算(矩阵是一个数表)

1. 线性方程组
 - 方程组右侧全为零-->n元齐次线性方程组(一定有零解,不一定有非零解)
 - 方程组右侧有常数-->n元非齐次线性方程组
 - 方程的系数矩阵
 - $diag$ 对角矩阵
 - 单位矩阵
2. 矩阵的运算
 1. $A + B$ 直接对应元素相加
 2. λA 所有元素乘 λ
 3. 矩阵相乘
 - 只有第一个矩阵的列数 = 第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘
 - 结果矩阵的 m_{ij} 元素 = 第一个矩阵的第 i 行 \times 第二个矩阵的第 j 列
 4. 矩阵的转置(行列互换)
 - $(A^T)^T = A; (A + B)^T = A^T + B^T$
 - $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
 - $(AB)^T = B^T A^T$ (重要!)
 5. 方阵的行列式(只有正方的才能构成行列式)
 1. 记作 $\det A$ 或者 $|A|$
 2. 性质
 - $|A^T| = |A|$ (行列式的性质)
 - $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
 - $|AB| = |A||B| \rightarrow |AB| = |BA|$
 3. 伴随矩阵(次级考点,是为了引出逆矩阵)
 - 每个元素的位置用自己的代数余子式替换
 - $AA^* = A^*A = |A|E$
3. 逆矩阵
 1. 若矩阵 A 可逆,则 $|A| \neq 0$ (重点)
 2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ (不常用)
 3. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$$4. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$5. AA^{-1} = A^{-1}A = E \text{ (最常用,但是应该不会不知道)}$$

4. 克拉默法则(不常用,略过)

5. 矩阵分块法

- 分块法相同,矩阵运算就按正常的来,运算完之后再回代

3. 矩阵的初等变换和矩阵方程组

0. 总领

- 点1(初等变换),教你如何解线性方程组(详细的解法在下一章中)
- 点2,3(秩)教你如何判断是否有解

1. 矩阵的初等变换

1. 初等行变换

- 对换两行($r_1 \leftrightarrow r_2$)
- 以 $k(k \neq 0)$ 乘某一行($r_i * k$)
- 第j行的k倍倍加的第i行上($r_i + kr_j$)

2. 经过有限次初等变换的矩阵等价

3. 行最简矩阵(引出秩的概念)

4. 初等矩阵

- 单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵叫初等矩阵
- 所有的初等行变换都可以用初等矩阵 \times 矩阵表示
- 性质:对矩阵 $A(m \times n)$ 实施一次初等行变换,相当于初等矩阵(m 阶) $\times A$;对 A 实施一次初等列变换,相当于 $A \times$ 初等矩阵(m 阶) 初等矩阵是单位矩阵实施相同变换(针对行)获得的
- 记法:左行右列(A 左边乘 E' ,改变行,反之,改变列)
- 用增广矩阵+行最简矩阵求解线性方程组(详细展开在下一章)

2. 矩阵的秩

- (没有用书上的定义)行最简型矩阵,首非零元的个数 = 秩
- 可逆矩阵的秩 = 矩阵的阶数(可逆矩阵都可以通过初等行变换变成单位矩阵,也就是:可逆矩阵与初等矩阵等价)(满秩矩阵)
- 不可逆矩阵(奇异矩阵)-->降秩矩阵
- 几个重要性质
 - $R(A^T) = R(A)$
 - 若 $A \sim B$,则 $R(A) = R(B)$ (若两个矩阵等价,则秩相等)(倒过来说,若两个矩阵类型相同,且秩相等,则两个矩阵等价)
 - $AB = 0$,若 A 为列满秩矩阵,则 $B = 0$

3. 线性方程组的 是否有解的判断(重点,高数里都用到了)(超级重点)

- n 元线性方程组 $Ax = b$

1. 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$

2. 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$
3. 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$
- 这个定理可以从方程的角度去理解
 1. 相当于会出现 零 = 一个常数 所以无解
 2. 相当于有 n 个有效方程(线性无关), n 个未知数 所以有唯一解
 3. 相当于有 n 个未知数, 但是方程少于 n 个, 所以有无限多解
- 尝试从线性空间的角度去理解
 - 前置条件
 1. 已知: 秩表示维数, 令 $R(A) = r, R(A, b) = r'$, 而 n 表示一个 n 维空间(题目条件所在的空间)
 2. A 表示一个 r 维的空间(或 超平面)
 3. 同时 A 也要能够线性表示 (A, b) 所表示的空间(或 超平面)
 4. 低维无法表示高维(因为无法填满)
 - 所以:
 1. 当 A 维数低于 (A, b) 的维数时, 无法表示, 无解
 2. 当 A 的维数 = (A, b) 的维数 = 总维数, 相当于 A 不仅可以表示 (A, b) , 还将 n 维空间填满了(也就是 A 可以通过改变参数表示整个 n 维空间), 同是 (A, b) 也是这样的, 所以解唯一了
 3. 当第三种情况时, A 与 (A, b) 是低维的(相对于 n 维), 所以无论如何也无法填满 n 维空间, 因此有无数解(咕咕咕, 第三种的解释有点迷惑, 没法解释为什么这两者有无数中方法相互表示)
 - 以三维空间为例:
 1. 情况一, 相当于用一条线去表示一个面, 怎么可能, 无解
 2. 情况二, 相当于两个非特殊面, 只有一种参数下可以相互表示
 3. 情况三, 相当于两个向量, 有无数种不同的参数可以取, 可以相互表示
- 齐次线性方程 $R(A) = n \rightarrow$ 只有零解(行列式不为零); $R(A) < n$ 有非零解(行列式=0)

4. 向量组的线性相关性

1. 向量组, 线性组合

1. 向量 b 能由向量组 $A : a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的秩等于矩阵 $B = (a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ 的秩
 - 相当于向量 b 没有做任何贡献(没有改变秩 \rightarrow 没有做贡献)
2. 向量组 B 能由向量组 A 线性表示: B 中的每一个向量都可以由向量组 A 线性表示
3. 若向量组 A 与向量组 B 能够相互线性表示, 则两个向量组等价
4. 两个向量组等价的充分必要条件是: $R(A) = R(B) = R(A, B)$ (因为 B 中的每一个向量都可以由 A 的线性组合来表示 $\rightarrow B$ 没有做贡献 \rightarrow 没有改变秩)

2. 向量组的线性相关性

1. 基本定理: 向量组中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量表示,则向量组线性相关(至少有一个向量没有做出贡献)
2. 秩的角度:
 1. 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩小于向量个数 $m(R(A) < m)$
 2. 向量组 A 线性无关的充分必要条件是 $R(A) = m$
3. 重要定理:
 - m 个 n 维向量,若维数 n (相当于未知数的个数) $<$ 向量个数 m 时,一定线性相关,特别的, $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关
3. 向量组的秩
 1. 向量组的最大线性无关向量组(最大无关组),的向量个数 r 称为 向量组 A 的秩,记作 R_A
 2. 等价定义(书上定义): 设向量组 $A_0: a_1, a_2, \dots, a_r$ 是向量组 A 的一个部分组,且满足
 - 向量组 A_0 线性无关
 - 向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示
 那么向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关组
 3. 矩阵的秩 = 其向量组的秩(无论列向量组还是行向量组)(向量组的秩和对应矩阵的秩这两者可以相互代替)
4. 线性方程组的解的结构(真正的解方程,重点)
 1. 可以先通过上一章的内容判断是否有解
 2. 齐次线性方程
 - 解集的最大无关组 称为 基础解系
 - 重要定理
 - 矩阵 $A(m \times n)$,的秩 $R(A) = r$,则 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 S 的秩 $R_S = n - r$
 - 基础解系的求法:将方程化为行最简形,确定 主元,自由变量,通过任取自由变量获得 不唯一的基础解系
 3. 非齐次线性方程
 - 非齐次方程的通解 = 对应的齐次方程的通解 + 非齐次方程的一个特解
 - 特解的求法:
 - 将增广矩阵化为行最简形,确定 主元,自由变量,写出方程,给自由变量赋值(一般是0),求得主元,合在一起,获得特解
5. 向量空间(就是线性空间,放到第六章去讲)

5. 相似矩阵及二次型

- 章节总览: 内积(提供了高维空间中平方的方法)--->高维空间中长度,夹角的概念--->正交(高维空间中的垂直)--->标准正交基(高维空间的长度为"1"的"轴"(并不唯一))--->施密特正交化(从 n 维线性无关向量组求 n 维空间的标准正交基)--->由标准正交基组成的向量组称为正交矩阵--->正交变换的优良特性

特征值的定义,求法,性质--->相似矩阵的特征值相同(相似变换)--->相似矩阵中包含**对角矩阵**(对角化,对角矩阵的性质)--->对称矩阵(一种特殊矩阵)的对角化--->二次型就是对称矩阵(也就是要把各种二次型对角化)

对角矩阵的例子

对角矩阵更容易处理

1. 向量的内积,长度,正交性

1. 内积

$$\begin{aligned} \blacksquare x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \blacksquare [x, y] &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ \blacksquare [x, y] &\text{称为} x \text{与} y \text{的内积} \\ \blacksquare [x, y] &= x^T y \end{aligned}$$

2. 长度(范数)

$$\begin{aligned} \blacksquare \|x\| &= \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ \blacksquare \|x\| &\text{称为} n \text{维向量} x \text{的长度(或范数)} \\ \blacksquare &\text{是二维情况的推广} \\ \blacksquare \text{单位化} \\ \blacksquare x &= \frac{a}{\|a\|} \\ \blacksquare x &\text{是一个单位向量,上式中的过程称为单位化} \end{aligned}$$

3. 夹角

$$\begin{aligned} \blacksquare \theta &= \arccos \frac{[x, y]}{\|x\| \|y\|} \\ \blacksquare &\text{是二维情况的推广} \end{aligned}$$

4. 正交性(高维中的垂直)

$$\begin{aligned} \blacksquare [x, y] &= 0 \text{时向量} x \text{与} y \text{正交} \\ \blacksquare &\text{此时,相当于二维中的垂直} \end{aligned}$$

5. 标准正交基

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{定义:如果} n \text{维向量} e_1, e_2, \dots, e_n &\text{是向量空间} V (V \subseteq R^n) \text{的一个基,如果} \\ e_1, e_2, \dots, e_n &\text{两两正交,且都是单位向量,则称} e_1, e_2, \dots, e_n \text{是} V \text{的一个标准正交基} \end{aligned}$$

6. 标准正交化(施密特正交化)

$$\begin{aligned} \blacksquare &\text{先施密特正交化得到正交向量组,再将正交向量组标准正交化} \\ \blacksquare b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1, \\ &\dots\dots\dots \\ b_r &= a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1} \end{aligned}$$

- 以上为施密特正交化
- $e_1 = \frac{1}{\|b_1\|}b_1, e_2 = \frac{1}{\|b_2\|}b_2, \dots, e_r = \frac{1}{\|b_r\|}b_r$

7. 正交矩阵

- A 是正交矩阵 充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量,且两两正交
- 也就是 A 是由标准正交基组成的向量组
- 性质
 - $A^{-1} = A^T$ 或 $A^T A = E$
 - A, A^{-1}, A^T 都是正交矩阵,且 $|A| = 1$ (or -1)
 - 两个正交矩阵相乘还是正交矩阵

8. 正交变换:

- P 为正交矩阵,则 $y = Px$ 称为正交变换
- 优良性质:
 - 正交变换前后,长度保持不变

2. 特征值和特征向量

1. 定义

- $(A - \lambda E)x = 0$
- λ 是特征值,非零向量 x 是对应于 λ 的特征向量(约定 $p_n \rightarrow \lambda n$)
- 也就是要 $|A - \lambda E| = 0$ (特征值的求法)

2. 重要性质

- $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$
- $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$
- 有上式可知, A 可逆的 充分必要条件时 它的 n 个特征值全不为零
- λ^2 时 A^2 的特征值
- 当 A 可逆时, $\frac{1}{\lambda}$ 时 A^{-1} 的特征值
- 如果两个特征值不同,其对应的特征向量(或向量组)线性无关

3. 相似矩阵(本身并不特别重要,重要的时其引出的规律)

- 定义(并不是重点):
 - $P^{-1}AP = B$
 - B 是 A 的相似矩阵,这个过程称为对 A 进行相似变换, P 称为把相似变换矩阵
- 推论(重点)($P^{-1}AP = \Lambda$)
 - 若 A 与对角矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似,则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值

- 寻找 P ,使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 的过程,称为把矩阵 A 对角化

- 分析可知(过程见书), P 的列向量就是每一个 λ_i 对应的 p_i (约定)
- 所以, P 就是 A 的特征向量组(大家都不唯一)
- A 能对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量
- A 的特征值互不相等 一定可以推出 A 与对角矩阵相似, 但是不能反推
- 解题时, 排列次序要一致
- 例子见书本 P126 页

4. 对称矩阵的对角化

- 对称矩阵的性质
 - 对称矩阵的特征值为实数
 - 对称矩阵的特征值 λ_1, λ_2 不同, 则 p_1 与 p_2 正交
 - P129 例题 12 (以及 P134 例题 14)

5. 二次型及其标准形

- 定义
 - $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$ 是二次型
 - $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ 也是二次型

- 任给一个二次型, 就唯一的确定一个对称矩阵
 - $f = x^T A x$ 其中 f 为二次型, A 是对称矩阵
 - f 叫做对称矩阵 A 的二次型, A 的秩叫做二次型 f 的秩

- 如何把二次型化为对称矩阵(三维为例):

$$f(x) = ax^2 + by^2 + cz^2 + d \cdot xy + e \cdot xz + f \cdot yz$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & x^2 & \frac{1}{2}xy & \frac{1}{2}xz \\ y & \frac{1}{2}xy & y^2 & \frac{1}{2}yz \\ z & \frac{1}{2}xz & \frac{1}{2}yz & z^2 \end{pmatrix}$$

$$f = (x, y, z) \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & b & \frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- 重点

- 任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$), 总有正交变换 $x = Py$, 使 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值(标准型中的项数=二次型的秩)

- 把二次形转换成对应的对称矩阵 A 后,对称矩阵 A 的各个部分其实是表示方程的各个部分(见上方大括号中的内容),所以将 A 对角化成 Λ 之后, Λ 对角上的部分就是对应的标准形的表示方式(用正交变换的方法将二次型化为标准形)

6. 用配方法化二次型成标准形(不用正交变换的方法)

- 拉格朗日配方法(在一定程度上更方便)
- [这个链接好一点](#)
- [上个链接](#)
- 咕咕咕

7. 正定二次型

- 咕咕咕

6. 线性空间与线性变换

限制条件:矩阵是方阵

矩阵行列式不为零-->矩阵可逆-->矩阵满秩-->矩阵对应的线性方程组有解(无论是否齐次)

$$|A| \neq 0 \rightarrow \text{存在 } A^{-1} \rightarrow R(A) = n \rightarrow Ax = b \text{ 一定有解}$$