高等数学知识点整理

1. 函数与极限

1. 极限:
    1. 夹逼准则
    2. 两个**重要极限**
        - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$
        - $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})=e$
    3. 无穷小的比较
        - 定义:
            - 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,那么$\beta$是$\alpha$的高级无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$
            - 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,那么$\beta$是$\alpha$的低阶无穷小
            - 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,那么$\beta$是$\alpha$的同阶无穷小
            - 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$,那么$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小
            - 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=$,那么$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记作$\alpha\sim\beta$
        - 重要的等价无穷小
            - 在$x\to 0$时,
            - $\sin x\sim x$
            - $\ln(1+x)\sim x$
            - $\tan x=x$
            - $\arcsin x\sim x$
            - $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
            - $e^x-1\sim x$
2. 间断点
    - 第一类间断点(左右极限都存在): 可去间断点(左右极限相同),跳跃间断点(左右极限不同)
    - 第二类间断点(除了第一类以外): 无穷间断点,震荡间断点

2. 导数与微分

1. 导数基础
    1. 可导必定连续,连续不一定可导($y=|x|$)
    2. 求导法则
        - dy,dx的表达形式是重点
        - 反函数求导法则

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

- 复合函数求导法则(只上一个公式,具体翻书)

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

3. 求导公式(见重要导数)

2. 高阶导数

$$y''=(y')'\ \text{ 或 }\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$$

- 莱布尼茨公式(求$(uv)'$的n阶导数)(求两个相乘的函数的n阶导数)
    - $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v(k)$
    - 跟二项式展开很像

3. 隐函数及有参数方程所确定的函数的导数
    - **隐函数求导**
        - 隐函数求二阶导数(**重点**) 咕咕咕
    - 参数方程求导

4. 微分(在某种程度上来说就是求导,此处是引出,其具体阐释是在下一章)

$$dy=f'(x)dx$$

- 微分表

3. 微分中值定理和导数的应用

1. 微分中值定理
    1. 罗尔定理(不常用,定义自己去查书,是下一个定理的一种特殊情 况)
    2. **拉格朗日中值定理**
        - $f(x)$满足:在$[a,b]$上连续,在$(a.b)$上可导
        - 那么在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$,使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立
        - 整理形式:$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$
        - 用语言表述整理后的形式的几何意义: 在限定条件中$f(x)\in[a,b]$上总有一个点的斜率,等于两个端点的连线的斜率
    3. 柯西中值定理(感觉不是很重要,所以先不整理了) 咕咕咕

2. 洛必达法则
    1. 定义:

- 当$x \to a(or\ \infty)$时,函数$f(x)$及$F(x)$都趋于零
- 在上一条件中,$f'(x), F'(x)$都存在
- $\lim \frac{f'(x)}{F('x)}$存在(或者无穷大)
- 则:
- $$\lim_{x\to a(or\infty)} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{a(or\infty)} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

3. 泰勒公式
    1. 泰勒展开
    2. 佩亚诺余项
    3. 拉格朗日余项
    4. 麦克劳林公式
4. 函数的单调性和凹凸性
    1. 单调性
    2. 凹凸性
    3. 拐点
    4. 驻点
        - 列一个表格
5. 函数的极值与最大值最小值
6. 曲率

4. 不定积分(求导的逆过程,相当于从导数找到原函数)

1. 基本性质(写在标题里了)
2. 基本积分表(见重要的积分)
3. **换元积分法**
    1. 第一类换元法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = [\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

    2. 第二类换元法

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$$

4. **分部积分法**

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$或者写成\int udv = uv - \int vdu$$

- v要容易求得
- $\int vdu$要比$\int udv$容易积出

5. 有理函数积分
    1. 连个多项式的商$\frac{P(x)}{Q(x)}$称为有理函数(有理分式),当$P(x)$的次数小于$Q(x)$的次数时,称为*真分式*,反之,称为*假分式*(与高中的概念相同)
    2. 通过将有理函数拆分,即将**真分式**化成**部分分式之和**的方式,在通过**基本性质**和**基本积分表**中的方法求积分
    3. 通过**换元法**将原本不是有理函数的函数化成有理函数的积分

5. 定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

1. 表示函数 `f(x)` 在区间 `[a,b]` 上与 `x轴围成的图形的面积`
2. 定积分中值公式
3. 牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4. 定积分的换元法,分部积分法
    - 就是用微积分的换元法,分部积分法
    - 求出原函数,然后用牛顿莱布尼茨公式求出定积分
5. 反常积分
    - 就是用 `特殊部分对应的极限` 代替 `特殊部分`
    - 如果极限存在则反常积分收敛,反之反常积分发散
    - 特殊部分包括 `无穷(无穷限)` `无界(间断点->瑕点)`

6. 定积分的应用

7. 微分方程

1. 在可以先行获得微分方程的情况下,用微分方程求出原函数
2. 最高阶导数的阶数->微分方程的阶
3. 通解:微分方程 `阶数` =解中 `任意常数(C)`数
4. 微分方程-->通解(+初值条件)-->特解
5. 几何意义
6. 针对不同情况的解法

1. 一阶微分方程

$$y' = f(x, y)$$

   1. 分离变量

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \ ==> \ g(y)dy = f(x)dx \ ==> \ F(y) = F(x)$$

   2. 齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \ ==> \ \frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$$

      令 $u = \frac{y}{x}$
      那么:

$$y = ux, \frac{dy}{dx} = y' = u + xu' = u + x\frac{du}{dx}$$

      将原式中 y , $\frac{dy}{dx}$代换,分离变量,解出,用$u = \frac{y}{x}$带入,得答案

   3. 可化为齐次的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

      当$c = c_1 = 0$时是齐次的
      当$c \neq c_1 \neq 0$时:
      令$x = X + h, y = Y + k,$
      则:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1} \ \ (*)$$

      此时如果

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

证明附于文末

则可将 (*) 式化为齐次方程

4. 一阶线性微分方程(注意这里的解法和线性代数中解**填空**很像)

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

解法

1. 先令$Q(x)=0$ *解其的齐次方程* $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$求得对应齐次方程的**通解**(含有一个任意常数C)
2. 使用**常数变易法**

8. 重要公式

1. 三角公式
    1. $\begin{cases} cot\alpha=\frac{1}{tan\alpha} \\ csc\alpha=\frac{1}{sin\alpha} \\ sec\alpha=\frac{1}{cos\alpha} \end{cases}$
    2. $\begin{cases} sin^2x+cos^2x=1 \\ 1+tan^2x=sec^2x \\ 1+cot^2x=csc^2x \end{cases}$
    3. $\begin{cases} sin(arcsinx)=x \\ cos(arccosx)=x \\ tan(arctanx)=x \end{cases}$
2. 重要的导数,积分,微分公式
    1. 导数
        - $(\tan x)'=\sec^2 x$
        - $(\cot x)'=-\csc^2 x$
        - $(\sec x)'=\sec x\tan x$
        - $(\csc x)'=-\csc x\cot x$
        - $(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$
        - $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
        - $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
        - $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
        - $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
        - $(\arccos x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
    2. 微分(不就是上面的公式变一下吗,不写了)

3. 积分

证明:

限制条件:矩阵是方阵

矩阵行列式不为零**-->**矩阵可逆**-->**矩阵满秩**-->**矩阵对应的线性方程组有解(无论是否齐次)

$$|A| \neq 0 \dashrightarrow \text{存在} A^{-1} \dashrightarrow R(A) = n \dashrightarrow Ax = b\text{一定有解}$$