

线性代数

0. 核心:

- 可逆, **秩**, 行列式(值)的关系
 - 秩的数量代表了多少个向量做出了贡献, 可以形成多少维的空间(超平面)
 - 方阵A满秩 \rightarrow 所有向量都做出了贡献 \rightarrow 形成了n维空间 \rightarrow 向量组线性无关 \rightarrow 矩阵A可逆 \rightarrow A的行列式不为零 $\rightarrow Ax=b$ 有唯一解
 - A的行列式不为零 \rightarrow A可逆 \rightarrow A满秩
 - 以上的部分要改写的好看一点
- n维矩阵与n维空间, n-1维超平面(本质)(可由上一点推出)
- **线性空间**(也就是上一点的具体说法)(更为广义, 包含向量空间(向量空间只由向量组成))(也是**线性代数的本质**所在)
- 线性关系的意义
 - 线性 include 齐次性 + 可加性
 - 可加性: $F(x+m)=F(x)+F(m)$
 - 一次齐次性: $F(mx)=mF(x)$

1. 行列式(包含运算规则, 可以计算为一个值)(一定是正方的)

1. 行列式的基本计算方法

- 全排列(所有项)+计算逆序数(项的正负, 偶数为正, 奇数为负)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

其中 $p_1 p_2 \dots p_n$ 为自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ 的一个排列, t 为这个排列的逆序数, 这样的排列用 $n!$ 项

2. 行列式的基本性质

1. **转置相等**
2. 对换两行(列)变号 \implies 两行(列)相同, 行列式为零
3. k 乘某一行(列)所有元素, 等于用 k 乘以该行列式 \implies 可以提出公因子
4. 两行(列)成比例, 则行列式等于零
5. 可以按行(列)拆开

6. 某一行(列)各个元素*乘同一数(可以是1)*然后加到另一行列对应元素上去,行列式不变
3. 行列式展开
 1. 余子式(M_{ij}),代数余子式(A_{ij})(代数余子式有正负之分)
 - $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
 2. 拉普拉斯展开(使用代数余子式)
4. 特殊行列式的解法(应试警告)

2. 矩阵及其运算(矩阵是一个数表)

1. 线性方程组
 - 方程组右侧全为零-->n元齐次线性方程组(一定有零解,不一定有非零解)
 - 方程组右侧有常数-->n元非齐次线性方程组
 - 方程的系数矩阵
 - *diag*对角矩阵
 - 单位矩阵
2. 矩阵的运算
 1. $A + B$ 直接对应元素相加
 2. λA 所有元素乘 λ
 3. 矩阵相乘
 - 只有第一个矩阵的列数 = 第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘
 - 结果矩阵的 m_{ij} 元素 = 第一个矩阵的第*i*行 \times 第二个矩阵的第*j*列
 4. 矩阵的转置(行列互换)
 - $(A^T)^T = A; (A + B)^T = A^T + B^T$
 - $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
 - $(AB)^T = B^T A^T$ (重要!)
 5. 方阵的行列式(只有正方的才能构成行列式)
 1. 记作 $\det A$ 或者 $|A|$
 2. 性质
 - $|A^T| = |A|$ (行列式的性质)
 - $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
 - $|AB| = |A||B| \rightarrow |AB| = |BA|$
 3. 伴随矩阵(次级考点,是为了引出逆矩阵)
 - 每个元素的位置用自己的代数余子式替换
 - $AA^* = A^*A = |A|E$
3. 逆矩阵
 1. 若矩阵 A 可逆,则 $|A| \neq 0$ (重点)
 2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ (不常用)
 3. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
 4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

5. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (最常用,但是应该不会不知道)
4. 克拉默法则(不常用,略过)
5. 矩阵分块法
 - 分块法相同,矩阵运算就按正常的来,运算完之后再回代

3. 矩阵的初等变换和矩阵方程组

0. 总领

- 点1(初等变换),教你如何解线性方程组(详细的解法在下一章中)
- 点2,3(秩)教你如何判断是否有解

1. 矩阵的初等变换

1. 初等行变换

- 对换两行($r_1 \leftrightarrow r_2$)
- 以 $k(k \neq 0)$ 乘某一行($r_i * k$)
- 第j行的k倍加到第i行上($r_i + kr_j$)

2. 经过有限次初等变换的矩阵等价

3. 行最简矩阵(引出秩的概念)

4. 初等矩阵

- 单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵叫初等矩阵
- 所有的初等行变换都可以用初等矩阵 \times 矩阵表示
- 性质:对矩阵 $A(m * n)$ 实施一次初等行变换,相当于初等矩阵(m 阶) $\times A$;对 A 实施一次初等列变换,相当于 $A \times$ 初等矩阵(m 阶) 初等矩阵是单位矩阵实施相同变换(针对行)获得的
- 记法:左行右列(A 左边乘 E' ,改变行,反之,改变列)
- 用增广矩阵+行最简矩阵求解线性方程组(详细展开在下一章)

2. 矩阵的秩

- (没有用书上的定义)行最简型矩阵,首非零元的个数 = 秩
- 可逆矩阵的秩 = 矩阵的阶数(可逆矩阵都可以通过初等行变换变成单位矩阵,也就是:可逆矩阵与初等矩阵等价)(满秩矩阵)
- 不可逆矩阵(奇异矩阵)-->降秩矩阵
- 几个重要性质
 - $R(A^T) = R(A)$
 - 若 $A \sim B$,则 $R(A) = R(B)$ (若两个矩阵等价,则秩相等)(倒过来说,若两个矩阵类型相同,且秩相等,则两个矩阵等价)
 - $AB = 0$,若 A 为列满秩矩阵,则 $B = 0$

3. 线性方程组的 是否有解的判断(重点,高数里都用到了)(超级重点)

- n 元线性方程组 $Ax = b$
 1. 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$
 2. 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$

3. 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$
- 这个定理可以从方程的角度去理解
 1. 相当于会出现 零 = 一个常数 所以无解
 2. 相当于有 n 个有效方程(线性无关), n 个未知数 所以有唯一解
 3. 相当于有 n 个未知数, 但是方程少于 n 个, 所以有无限多解
- 尝试从线性空间的角度去理解
 1. 先咕为敬
- 齐次线性方程 $R(A) = n \rightarrow$ 只有零解(行列式不为零); $R(A) < n$ 有非零解(行列式=0)

4. 向量组的线性相关性

1. 向量组, 线性组合

1. 向量 b 能由向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的秩等于矩阵 $B = (a_1, a_2, \dots, a_n, b)$ 的秩
 - 相当于向量 b 没有做任何贡献(没有改变秩 \rightarrow 没有做贡献)
2. 向量组 B 能由向量组 A 线性表示: B 中的每一个向量都可以由向量组 A 线性表示
3. 若向量组 A 与向量组 B 能够相互线性表示, 则两个向量组等价
4. 两个向量组等价的充分必要条件是: $R(A) = R(B) = R(A, B)$ (因为 B 中的每一个向量都可以由 A 的线性组合来表示 $\rightarrow B$ 没有做贡献 \rightarrow 没有改变秩)

2. 向量组的线性相关性

1. 基本定理: 向量组中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量表示, 则向量组线性相关(至少有一个向量没有做出贡献)
2. 秩的角度:
 1. 向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩小于向量个数 m ($R(A) < m$)
 2. 向量组 A 线性无关的充分必要条件是 $R(A) = m$
3. 重要定理:
 - m 个 n 维向量, 若维数 n (相当于未知数的个数) $<$ 向量个数 m 时, 一定线性相关, 特别的, $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关

3. 向量组的秩

1. 向量组的最大线性无关向量组(最大无关组), 的向量个数 r 称为 向量组 A 的秩, 记作 R_A
2. 等价定义(书上定义): 设向量组 $A_0: a_1, a_2, \dots, a_r$ 是向量组 A 的一个部分组, 且满足
 - 向量组 A_0 线性无关
 - 向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示
 那么向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关组
3. 矩阵的秩 = 其向量组的秩(无论列向量组还是行向量组)(向量组的秩和对应矩阵的秩这两者可以相互代替)

4. 线性方程组的解的结构(真正的解方程, 重点)

1. 可以先通过上一章的内容判断是否有解

2. 齐次线性方程

- 解集的最大无关组 称为 基础解系
- 重要定理
 - 矩阵 $A(m \times n)$, 的秩 $R(A) = r$, 则 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 S 的秩 $R_S = n - r$
- 基础解系的求法: 将方程化为行最简形, 确定 主元, 自由变量, 通过任取自由变量获得 不唯一的基础解系

3. 非齐次线性方程

- 非齐次方程的通解 = 对应的齐次方程的通解 + 非齐次方程的一个特解
- 特解的求法:
 - 将 增广矩阵 化为行最简形, 确定 主元, 自由变量, 写出方程, 给自由变量赋值(一般是 0), 求得主元, 合在一起, 获得特解

5. 向量空间(就是线性空间, 放到第六章去讲)

5. 相似矩阵及二次型

- 章节总览: 内积(提供了高维空间中平方的方法)--->高维空间中长度, 夹角的概念--->正交(高维空间中的垂直)--->标准正交基(高维空间的长度为"1"的"轴"(并不唯一))--->施密特正交化(从 n 维线性无关向量组求 n 维空间的标准正交基)--->由标准正交基组成的向量组称为正交矩阵--->正交变换的优良特性
- 特征值的定义, 求法, 性质--->相似矩阵的特征值相同(相似变换)--->相似矩阵中包含 **对角矩阵**(对角化, 对角矩阵的性质)--->对称矩阵(一种特殊矩阵)的对角化--->二次型就是对称矩阵(也就是要把各种二次型对角化)

对角矩阵的例子

对角矩阵更容易处理

6. 线性空间与线性变换

限制条件: 矩阵是方阵

矩阵行列式不为零-->矩阵可逆-->矩阵满秩-->矩阵对应的线性方程组有解(无论是否齐次)

$$|A| \neq 0 \rightarrow \text{存在 } A^{-1} \rightarrow R(A) = n \rightarrow Ax = b \text{ 一定有解}$$