

高等数学知识点整理

1. 函数与极限

1. 极限:

1. 夹逼准则

2. 两个重要极限

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

3. 无穷小的比较

- 定义:
 - 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 那么 β 是 α 的高级无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$
 - 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 那么 β 是 α 的低阶无穷小
 - 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 那么 β 是 α 的同阶无穷小
 - 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$, 那么 β 是 α 的 k 阶无穷小
 - 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 那么 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$
- 重要的等价无穷小
 - 在 $x \rightarrow 0$ 时,
 - $\sin x \sim x$
 - $\ln(1+x) \sim x$
 - $\tan x \sim x$
 - $\arcsin x \sim x$
 - $1 - \cos x \sim x^2$
 - $e^x - 1 \sim x$

2. 间断点

- 第一类间断点(左右极限都存在): 可去间断点(左右极限相同), 跳跃间断点(左右极限不同)
- 第二类间断点(除了第一类以外): 无穷间断点, 震荡间断点

2. 导数与微分

1. 导数基础

1. 可导必定连续, 连续不一定可导($y = |x|$)

2. 求导法则

- dy, dx 的表达形式是重点
- 反函数求导法则

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

- 复合函数求导法则(只上一个公式, 具体翻书)

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

3. 求导公式(见重要导数)

2. 高阶导数

$$y'' = (y')' \text{ 或 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

- 莱布尼茨公式(求 $(uv)'$ 的n阶导数)(求两个相乘的函数的n阶导数)

- $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

- 跟二项式展开很像

3. 隐函数及有参数方程所确定的函数的导数

- 隐函数求导

- 隐函数求二阶导数(重点) 咕咕咕

- 参数方程求导

4. 微分(在某种程度上来说就是求导,此处是引出,其具体阐释是在下一章)

$$dy = f'(x)dx$$

- 微分表

3. 微分中值定理和导数的应用

1. 微分中值定理

1. 罗尔定理(不常用,定义自己去查书,是下一个定理的一种特殊情况)

2. 拉格朗日中值定理

- $f(x)$ 满足:在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 上可导
- 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$,使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

成立

- 整理形式: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
- 用语言表述整理后的形式的几何意义: 在限定条件中 $f(x) \in [a, b]$ 上总有一个点的斜率,等于两个端点的连线的斜率

3. 柯西中值定理(感觉不是很重要,所以先不整理了) 咕咕咕

2. 洛必达法则

1. 定义:

- 当 $x \rightarrow a(or \infty)$ 时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零
- 在上一条件中, $f'(x), F'(x)$ 都存在
- $\lim \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或者无穷大)
- 则:

- $$\lim_{x \rightarrow a(or \infty)} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{a(or \infty)} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

3. 泰勒公式

1. 泰勒展开(可以带有两种余项)

$$\blacksquare f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

2. 佩亚诺余项

$$\blacksquare R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

3. 拉格朗日余项

$$\blacksquare R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

4. 麦克劳林公式(可以带有两种余项)(泰勒展开中 $x_0 = 0$ 时的情况)

$$\blacksquare f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

4. 函数的单调性和凹凸性(此处没有采用严谨的定义)

1. 单调性

▪ 喵,这个还能不知道?

2. 凹凸性(顺时针转 90° 请)

▪ $f''(x) > 0$, 函数图形时凹的

▪ $f''(x) < 0$, 函数图形时凸的

3. 拐点

▪ 曲线的凹凸性改变处

▪ $f''(x) = 0$ 或 $f''(x)$ 不存在的点可能是拐点

▪ 在上一条件下, $f''(x)$ 在 x 的两侧符号相反,则是拐点

4. 驻点

▪ $f'(x) = 0$ 的点

▪ 可导函数的极值点必定是驻点,但是驻点不一定是极值点($y = x^3$)

5. 函数的极值与最大值最小值

▪ 函数的极值点可能是:驻点,不可导点,并检验左右临近情况

▪ 极值点:二次导数大于零,是极小值

▪ 二次导数小于零,是极大值

▪ 最大值和最小值求法

1. 求出在 (a, b) 内所有驻点和不可导点

2. 计算所有上述点处的函数值,及 $f(a), f(b)$

3. 比较(2)中各个值的大小,最大的是最大值,最小值亦然

6. 曲率(老师说期末考可能会考)(请背公式)

▪ 曲率 K 等于

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

▪ 通过特定的点 x 算出这一点的 y', y'' 再代入公式求得该点处的曲率

▪ 曲率半径 $\rho = \frac{1}{K}$

4. 不定积分(求导的逆过程,相当于从导数找到原函数)

1. 基本性质(写在标题里了)
2. 基本积分表(见[重要的积分](#))
3. 换元积分法

1. 第一类换元法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = [\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

2. 第二类换元法

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$$

4. 分部积分法

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

或者写成 $\int u dv = uv - \int v du$

- v 要容易求得
- $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出

5. 有理函数积分

1. 连个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数(有理分式),当 $P(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数时,称为真分式,反之,称为假分式(与高中的概念相同)
2. 通过将有理函数拆分,即将真分式化成部分分式之和的方式,在通过基本性质和基本积分表中的方法求积分
3. 通过换元法将原本不是有理函数的函数化成有理函数的积分

5. 定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

1. 表示函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上与 x 轴围成的图形的面积
2. 定积分中值公式

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) (a \leq \xi \leq b)$$

3. 牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4. 定积分的换元法,分部积分法

- 就是用[微积分的换元法](#),[分部积分法](#)

- 求出原函数,然后用牛顿莱布尼茨公式求出定积分

5. 反常积分

- 就是用 特殊部分对应的极限 代替 特殊部分
- 如果极限存在则反常积分收敛,反之反常积分发散
- 特殊部分包括 无穷(无无限) 无界(间断点->瑕点)

6. 定积分的应用

1. 旋转体的体积

- $V = \int_b^a \pi [f(x)]^2 dx$
- a, b 为 $f(x)$ 的取值范围

2. 平行截面面积为已知的立体的体积

- $V = \int_b^a A(x) dx$
- $A(x)$ 为底面面积

3. 平滑曲线的弧长

- $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$

4. 抱歉,不会极坐标,告辞,咕咕咕

7. 微分方程

1. 在可以先行获得微分方程的情况下,用微分方程求出原函数

2. 最高阶导数的阶数->微分方程的阶数

3. 通解:微分方程 阶数 = 解中 任意常数(C)数

4. 微分方程-->通解(+初值条件)-->特解

5. 几何意义

6. 针对不同情况的解法

1. 一阶微分方程

$$y' = f(x, y)$$

1. 分离变量

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \implies g(y)dy = f(x)dx \implies F(y) = F(x)$$

2. 齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \implies \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}$$

那么:

$$y = ux, \frac{dy}{dx} = y' = u + xu' = u + x \frac{du}{dx}$$

将原式中 $y, \frac{dy}{dx}$ 代换, 分离变量, 解出, 用 $u = \frac{y}{x}$ 带入, 得答案

3. 可化为齐次的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

当 $c = c_1 = 0$ 时是齐次的

当 $c \neq c_1 \neq 0$ 时:

令 $x = X + h, y = Y + k,$

则:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1} \quad (*)$$

此时如果

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

证明附于文末

则可将 (*) 式化为齐次方程

4. 一阶线性微分方程(注意这里的解法和线性代数中解非齐次线性方程组很像)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

解法

1. 先令 $Q(x) = 0$ 解其的齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 求得对应齐次方程的通解(含有一个任意常数 $C, y = Cf(temp)$)
 2. 使用常数变易法, 将 C 替换成 x 的未知函数 $u(x) \rightarrow u$, 带入上一式子中, 得 $y = uf(temp)$
 3. 对其求微分, 即 $\frac{dy}{dx} = u'f + f'u$
 4. 再将 $y, \frac{dy}{dx}$ 带回 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, 解得 u'
 5. 对 u' , 两端积分(不要忘了常数 C), 再将 u 带入 $y = uf(temp)$, 得到通解
 6. 原理我没法和你解释, 因为我只是一只 doctor
 7. 详见书本 P316 的例题 1
 8. 一阶非齐次线性方程的通解 = 对应齐次方的通解 + 非齐次方程的一个特解(与线性代数里一样)
- ### 5. 伯努利方程
1. 咕咕咕
- ### 2. 可降阶的高阶微分方程
1. $y^n = f(x)$ 型
 - 左右多次取积分, 降阶, $y^n \rightarrow y$

2. $y'' = f(x, y')$ 型

- 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = p'$
- 带入, 分离变量, 求积分

3. $y'' = f(y, y')$ 型

- 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$
- 带入, 分离变量, 求积分

3. 高阶微分方程(以二阶线性微分方程为主)(概念开始与线性代数有关)(先研究解的结构)

1. 线性微分方程解的结构:

- 有 n 个特解线性组合得到通解, n = 齐次线性方程的阶数 = 最高阶导数的阶数
- n 阶齐次线性方程中, $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$, 其中 $y_*(x)$ 是各个线性无关的特解
- 线性无关的判断: 两个解之比不为常数
- 非齐次方程的解 = 对应齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解
- 常数变易法(用于解非齐次线性方程)

4. 常系数齐次线性微分方程(真正开始解)

1. 特征方程($y'' \rightarrow r^2, y' \rightarrow r, y \rightarrow r^0 = 1$)

2. r_1, r_2 为两个解

3. 分情况讨论(针对特征方程)

1. 当 $\Delta > 0$ 时

- 有两个不相等的实根, 所以通解是 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2. 当 $\Delta = 0$ 时

- 因为 $r_1 = r_2$, 得到一个解 $y_1 = e^{r_1 x}$
- 另一个解 $y_2 = x e^{r_1 x}$
- 通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

3. 当 $\Delta < 0$ 时

- 一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$
- 通解 $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

5. 常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

1. 解 = 通解(用上面的方法求) + 特解(y^*)

2. 此处只讨论 $f(x)$ 的两种情况:

1. $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型)

- 特解的结构: $y^* = x^k R_m(x) e^{\lambda x}$
- 其中, k 按照 λ 是特征方程的根的重复次数, 不是根(重复0次)是0, 重复一次是1, 重复两次是2, 高阶情况以此类推
- $R_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次(m 次)的多项式
 - 举例, 当 $m = 1$ 时, 设 $R_m(x) = b_0 x + b_1$, 求得 y^* 表达式
 - 算出 $y^{*'}$ 和 $y^{*''}$ 后一起带入 $y'' + py' + qy = f(x)$
 - 化简, 观察, 比较得到特解

2. $f(x) = e^{\lambda x} [P_l \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 型

- 特解的结构: $y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) (\cos \omega x + R^{(2)} m(x) \sin \omega x]$
- k 按照 $\lambda + \omega i$ 是特征方程根的重复次数取值(与上面一样)

- $R_m^{(1)}(x), R_m^{(1)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max[n, l]$, 注意这两者是不一样的
- 具体解法同上

3. 上两种情况的特点是不用积分就可以求出 y^* , 叫做待定系数法

6. 欧拉方程

8. 重要公式

1. 三角公式

$$\begin{aligned}
 1. & \begin{cases} \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \\ \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \\ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \end{cases} \\
 2. & \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \end{cases} \\
 3. & \begin{cases} \sin(\arcsin x) = x \\ \cos(\arccos x) = x \\ \tan(\arctan x) = x \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. 重要的导数, 积分, 微分公式

1. 导数

- $(\tan x)' = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \tan x$
- $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
- $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1)$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2. 微分(不就是上面的公式变一下吗, 不写了)

3. 积分(记得加 C)

- $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
- $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

证明:

限制条件:矩阵是方阵

矩阵行列式不为零-->矩阵可逆-->矩阵满秩-->矩阵对应的线性方程组有解(无论是否齐次)

$$|A| \neq 0 \rightarrow \text{存在 } A^{-1} \rightarrow R(A) = n \rightarrow Ax = b \text{ 一定有解}$$