

# 高等数学知识点整理

## 1. 函数与极限

### 1. 极限:

#### 1. 夹逼准则

#### 2. 两个重要极限

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) = e$

#### 3. 无穷小的比较

- 定义:
  - 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 那么  $\beta$  是  $\alpha$  的高级无穷小, 记作  $\beta = o(\alpha)$
  - 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ , 那么  $\beta$  是  $\alpha$  的低阶无穷小
  - 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ , 那么  $\beta$  是  $\alpha$  的同阶无穷小
  - 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$ , 那么  $\beta$  是  $\alpha$  的  $k$  阶无穷小
  - 如果  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 那么  $\beta$  与  $\alpha$  是等价无穷小, 记作  $\alpha \sim \beta$
- 重要的等价无穷小
  - 在  $x \rightarrow 0$  时,
  - $\sin x \sim x$
  - $\ln(1+x) \sim x$
  - $\tan x \sim x$
  - $\arcsin x \sim x$
  - $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
  - $e^x - 1 \sim x$

### 2. 间断点

- 第一类间断点(左右极限都存在): 可去间断点(左右极限相同), 跳跃间断点(左右极限不同)
- 第二类间断点(除了第一类以外): 无穷间断点, 震荡间断点

## 2. 导数与微分

### 1. 导数基础

#### 1. 可导必定连续, 连续不一定可导( $y = |x|$ )

#### 2. 求导法则

- $dy, dx$  的表达形式是重点
- 反函数求导法则

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

- 复合函数求导法则(只上一个公式,具体翻书)

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

### 3. 求导公式(见[重要导数](#))

## 2. 高阶导数

$$y'' = (y')' \text{ 或 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$$

- 莱布尼茨公式(求 $(uv)'$ 的n阶导数)(求两个相乘的函数的n阶导数)

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

- 跟二项式展开很像

## 3. 隐函数及有参数方程所确定的函数的导数

### ■ 隐函数求导

- 隐函数求二阶导数(**重点**) 咕咕咕

### ■ 参数方程求导

## 4. 微分(在某种程度上来说就是求导,此处是引出,其具体阐释是在下一章)

$$dy = f'(x)dx$$

## 3. 微分中值定理和导数的应用

- 罗尔定理(不常用,定义自己去查书,是下一个定理的一种特殊情况)
- 拉格朗日中值定理

## 4. 不定积分

### 1. 基本性质

### 2. 基本积分表

### 3. 换元积分法

#### 1. 第一类换元法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[ \int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$$

#### 2. 第二类换元法

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$$

### 4. 分部积分法

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

$$\text{或者写成 } \int u dv = uv - \int v du$$

- $v$ 要容易求得
- $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出

## 5. 有理函数积分

1. 连个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数(有理分式),当 $P(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数时,称为真分式,反之,称为假分式(与高中的概念相同)
2. 通过将有理函数拆分,即将**真分式**化成**部分分式之和**的方式,在通过**基本性质**和**基本积分表**中的方法求积分
3. 通过**换元法**将原本不是有理函数的函数化成有理函数的积分

## 5. 定积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

1. 表示函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上与  $x$ 轴围成的图形的面积
2. 定积分中值公式
3. 牛顿莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

4. 定积分的换元法,分部积分法
  - 就是用**微积分的换元法,分部积分法**
  - 求出原函数,然后用牛顿莱布尼茨公式求出定积分
5. 反常积分
  - 就是用 特殊部分对应的极限 代替 特殊部分
  - 如果极限存在则反常积分收敛,反之反常积分发散
  - 特殊部分包括 无穷(无穷限) 无界(间断点->瑕点)

## 6. 定积分的应用

## 7. 微分方程

1. 在可以先行获得微分方程的情况下,用微分方程求出原函数
2. 最高阶导数的阶数->微分方程的阶

3. 通解:微分方程 阶数 =解中 任意常数(C)数

4. 微分方程-->通解(+初值条件)-->特解

5. 几何意义

6. 针对不同情况的解法

1. 一阶微分方程

$$y' = f(x, y)$$

1. 分离变量

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \implies g(y)dy = f(x)dx \implies F(y) = F(x)$$

2. 齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \implies \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}$$

那么:

$$y = ux, \frac{dy}{dx} = y' = u + xu' = u + x \frac{du}{dx}$$

将原式中  $y, \frac{dy}{dx}$  代换, 分离变量, 解出, 用  $u = \frac{y}{x}$  带入, 得答案

3. 可化为齐次的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

当  $c = c_1 = 0$  时是齐次的

当  $c \neq c_1 \neq 0$  时:

$$\text{令 } x = X + h, y = Y + k,$$

则:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1} \quad (*)$$

此时如果

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

证明附于文末

则可将 (\*) 式化为齐次方程

4. 一阶线性微分方程(注意这里的解法和线性代数中解**填空**很像)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

解法

1. 先令  $Q(x) = 0$  解其的齐次方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$  求得对应齐次方程的**通解**(含有一个任意常数  $C$ )
2. 使用**常数变易法**

## 8. 重要公式

1. 三角公式

$$\begin{aligned} 1. & \begin{cases} \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \\ \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \\ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \end{cases} \\ 3. & \begin{cases} \sin(\arcsin x) = x \\ \cos(\arccos x) = x \\ \tan(\arctan x) = x \end{cases} \end{aligned}$$

2. 重要的导数,积分,微分公式

1. **导数**

- $(\tan x)' = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \tan x$
- $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
- $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1)$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2. 微分(不就是上面的公式变一下吗,不写了)

3. 积分

证明:

限制条件:矩阵是方阵

矩阵行列式不为零-->矩阵可逆-->矩阵满秩-->矩阵对应的线性方程组有解(无论是否齐次)

$$|A| \neq 0 \rightarrow \text{存在 } A^{-1} \rightarrow R(A) = n \rightarrow Ax = b \text{ 一定有解}$$