线性代数

0. **核心:**
    - 可逆,**秩**,行列式(值)的关系
        - 秩的数量代表了多少个向量做出了贡献,可以形成多少维的空间(超平面)
        - 方阵A满秩->所有向量都做出了贡献->形成了n维空间->向量组线性无关->矩阵A可逆->A的行列式不为零->Ax=b有唯一解
        - A的行列式不为零->A可逆->A满秩
        - 以上的部分要改写的好看一点
    - n维矩阵与n维空间,n-1维超平面(本质)(可由上一点推出)
    - **线性空间**(也就是上一点的具体说法)(更为广义,包含向量空间(向量空间只由向量组成))(也是**线性代数的本质**所在)
    - 线性关系的意义
        - 线性 include 齐次性 + 可加性
        - 可加性: F(x+m)=F(x)+F(m)
        - 一次齐次性: F(mx)=mF(x)

1. **行列式(包含运算规则,可以计算为一个值)(一定是正方的)**
    1. 行列式的基本计算方法
        - 全排列(所有项)+计算逆序数(项的正负,偶数为正,奇数为负)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_np_n}$$

        其中$p_1p_2\dots p_n$为自然数1,2,3,...,n的一个排列,t为这个排列的逆序数,这样的排列用$n!$项
    2. 行列式的基本性质
        1. 转置相等
        2. 对换两行(列)变号==>两行(列)相同,行列式为零
        3. k乘某一行(列)所有元素,等于用k乘以该行列式==>可以提出公因子
        4. 两行(列)成比例,则行列式等于零
        5. 可以按行(列)拆开

        6. 某一行(列)各个元素*乘同一数(可以是1)*然后加到另一行列对应元素上去,行列式不变
    3. 行列式展开
        1. 余子式(M_{ij}),代数余子式(A_{ij})(代数余子式有正负之分)
            - $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
        2. 拉普拉斯展开(使用代数余子式)
    4. 特殊行列式的解法(*应试警告*)

2. 矩阵及其运算(矩阵是一个数表)

1. 线性方程组
    - 方程组右侧全为零-->n元齐次线性方程组(一定有零解,不一定有非零解)
    - 方程组右侧有常数-->n元非齐次线性方程组
    - 方程的系数矩阵
    - $diag$对角矩阵
    - 单位矩阵
2. 矩阵的运算
    1. $A+B$ 直接对应元素相加
    2. λA 所有元素乘λ
    3. 矩阵相乘
        - 只有第一个矩阵的列数 = 第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘
        - 结果矩阵的m_{ij}元素 = 第一个矩阵的第i行 $\times$ 第二个矩阵的第j列
    4. 矩阵的转置(行列互换)
        - $(A^T)^T = A; (A+B)^T = A^T + B^T$
        - $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
        - $(AB)^T = B^T A^T$ (**重要!**)
    5. 方阵的行列式(只有正方的才能构成行列式)
        1. 记作$detA$或者$|A|$
        2. **性质**
            - $|A^T| = |A|$(行列式的性质)
            - $|\lambda A| = \lambda^T |A|$
            - $|AB| = |A||B|$ --> $|AB| = |BA|$
        3. 伴随矩阵(次级考点,是为了引出逆矩阵)
            - 每个元素的位置用自己的代数余子式替换
            - $AA^* = A^*A = |A|E$
3. **逆矩阵**
    1. **若矩阵A可逆,则$|A| \neq 0$ (重点)**
    2. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ (不常用)
    3. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
    4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

        5. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (最常用,但是应该不会不知道)
    4. 克拉默法则(不常用,略过)
    5. 矩阵分块法
        - 分块法相同,矩阵运算就按正常的来,运算完之后再回代

3. 矩阵的初等变换和矩阵方程组

0. 总领
    - 点1(初等变换),教你如何解线性方程组(详细的解法在下一章中)
    - 点2,3(秩)教你如何判断是否有解
1. 矩阵的初等变换
    1. 初等行变换
        - 对换两行($r_1 \leftrightarrow r_2$)
        - 以$k(k \neq 0)$乘某一行($r_i * k$)
        - 第j行的k倍倍加的第i行上($r_i + kr_j$)
    2. 经过 *有限次初等变换* 的矩阵等价
    3. 行最简矩阵(引出秩的概念)
    4. 初等矩阵
        - 单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵 叫 初等矩阵
        - 所有的初等**行**变换都可以用 初等矩阵 $\times$ 矩阵表示
    - **性质**:对矩阵$A(m * n)$实施一次 *初等**行**变换*,相当于$初等矩阵(m阶) \times A$;对A实施一次 *初等**列**变换*,相当于$A \times 初等矩阵(m阶)$ 初等矩阵是单位矩阵实施相同变换(针对行)获得的
    - 记法:左行右列(A左边乘E',改变行,反之,改变列)
    - **用增广矩阵+行最简矩阵求解线性方程组**(详细展开在下一章)
2. 矩阵的秩
    - (没有用书上的定义)行最简型矩阵,首非零元的个数 = 秩
    - 可逆矩阵的秩 = 矩阵的阶数(可逆矩阵都可以通过初等行变换变成单位矩阵,也就是:可逆矩阵与初等矩阵等价)(满秩矩阵)
    - 不可逆矩阵(奇异矩阵)-->降秩矩阵
    - 几个重要性质
        - $R(A^T) = R(A)$
        - 若A~B,则$R(A) = R(B)$(若两个矩阵等价,则秩相等)(倒过来说,若两个矩阵类型相同,且秩相等,则两个矩阵等价)
        - $AB = 0$,若A为列满秩矩阵,则$B = 0$
3. **线性方程组的 *是否有解的判断* (重点,高数里都用到了)**(超级重点)
    - n元线性方程组$Ax = b$
        1. 无解的充分必要条件是$R(A) < R(A, b)$
        2. 有唯一解的充分必要条件是$R(A) = R(A, b) = n$

3. 有无限多解的充分必要条件是$R(A) = R(A,b) < n$
- 这个定理可以从方程的角度去理解
   1. 相当于会出现 零 = 一个常数 所以无解
   2. 相当于有n个有效方程(线性无关),n个未知数 所以有唯一解
   3. 相当于有n个未知数,但是方程少于n个,所以有无限多解
- 尝试从线性空间的角度去理解
   1. 先咕为敬
- 齐次线性方程$R(A) = n$-->只有零解(行列式不为零);$R(A) < n$有非零解(行列式=0)

4. 向量组的线性相关性

1. 向量组,线性组合
   1. 向量b能由向量组$A: a_1, a_2, ..., a_n$线性表示的充分必要条件是矩阵$A = (a_1, a_2, ..., a_n)$的秩等于矩阵$B = (a_1, a_2, ..., a_n, b)$的秩
      - 相当于向量b没有做任何贡献(没有改变秩-->没有做贡献)
   2. 向量组B能由向量组A线性表示: B中的每一个向量都可以由向量组A线性表示
   3. 若向量组A与向量组B能够相互**线性表示**,则两个向量组**等价**
   4. 两个向量组等价的充分必要条件是:$R(A) = R(B) = R(A, B)$(因为B中的每一个向量都可以由A的线性组合来表示-->B没有做贡献-->没有改变秩)
2. 向量组的线性相关性
   1. 基本定理: 向量组中至少有一个向量能由其余m-1个向量表示,则向量组线性相关(至少有一个向量没有做出贡献)
   2. 秩的角度:
      1. 向量组$A: a_1, a_2, ..., a_m$线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵$A = (a_1, a_2, ..., a_m)$的秩小于向量个数m($R(A) < m$)
      2. 向量组A线性无关的充分必要条件是$R(A) = m$
   3. 重要定理:
      - m个n维向量,若维数n(相当于未知数的个数)<向量个数m时,一定线性相关,特别的,**n+1个n维向量一定线性相关**
3. 向量组的**秩**
   1. 向量组的*最大线性无关向量组*(**最大无关组**),的向量个数r称为 向量组A的秩,记作R_A
   2. 等价定义(书上定义): 设向量组$A_0: a_1, a_2, ..., a_r$是向量组A的一个部分组,且满足
      - 向量组A_0线性无关
      - 向量组A的任一向量都能由向量组A_0线性表示
        那么向量组A_0是向量组A的一个最大线性无关组
   3. **矩阵的秩 = 其向量组的秩**(无论列向量组还是行向量组)(向量组的秩和对应矩阵的秩这两者可以相互代替)
4. 线性方程组的解的结构(真正的解方程,重点)
   1. 可以先通过上一章的内容判断是否有解

2. 齐次线性方程
    - 解集的最大无关组 称为 基础解系
    - **重要定理**
        - **矩阵$A(m \times n)$,的秩$R(A)=r$,则n元齐次线性方程组$Ax=0$的解集S的秩$R_S=n-r$**
    - 基础解系的求法:将方程化为行最简形,确定 主元,自由变量,通过任取自由变量获得 *不唯一* 的基础解系
3. 非齐次线性方程
    - **非齐次方程的通解 = 对应的齐次方程的通解 + 非齐次方程的一个特解**
    - 特解的求法:
        - 将 *增广矩阵* 化为行最简形,确定 主元,自由变量 ,写出方程,给自由变量赋值(一般是0),求得主元,合在一起,获得特解

5. 向量空间(就是线性空间,放到第六章去讲)

5. 相似矩阵及二次型

- 章节总览: 内积(提供了高维空间中平方的方法)--->高维空间中长度,夹角的概念--->正交(高维空间中的垂直)--->标准正交基(高维空间的长度为"1"的"轴"(并不唯一))--->施密特正交化(从n维线性无关向量组求n维空间的标准正交基)--->由标准正交基组成的向量组称为正交矩阵--->正交变换的优良特性
  特征值的定义,求法,性质--->相似矩阵的特征值相同(相似变换)--->相似矩阵中包含**对角矩阵**(对角化,对角矩阵的性质)--->对称矩阵(一种特殊矩阵)的对角化--->二次型就是对称矩阵(也就是要把各种二次型对角化)

  $$对角矩阵的例子$$

  对角矩阵更容易处理

6. 线性空间与线性变换

限制条件:矩阵是方阵
矩阵行列式不为零-->矩阵可逆-->矩阵满秩-->矩阵对应的线性方程组有解(无论是否齐次)

$$|A| \neq 0 \dashrightarrow 存在A^{-1} \dashrightarrow R(A)=n \dashrightarrow Ax=b一定有解$$