

Definizioni utili

Estremo superiore, inferiore, massimo e minimo (insiemi)

Siano X, E insiemi, $X \neq \emptyset, E \subseteq X$.

- E si dice limitato **superiormente** se $\exists M$ t.c. $x \leq M \forall x \in E$.
- E si dice limitato **inferiormente** se $\exists m$ t.c. $x \geq m \forall x \in E$.
- E si dice **limitato** se è limitato inferiormente e superiormente:

$$\exists M, m \text{ t.c. } m \leq x \leq M \forall x \in E$$

\bar{x} è **massimo** per E se:

1. $\forall x \in E : x \leq \bar{x}$ (max E)
2. $\bar{x} \in E$

\underline{x} è **minimo** per E se:

1. $\forall x \in E : x \geq \underline{x}$ (min E)
2. $\underline{x} \in E$

Ricorda: sia il massimo che il minimo $\in E$.

sia $k \in X$ (non necessariamente in E , questa è la differenza con massimo e minimo).

- k è detto **maggiorante** di E se $x \leq k \forall x \in E$.
- k è detto **minorante** di E se $x \geq k \forall x \in E$.

Chiameremo **estremo superiore** di E ($\sup E$) il più piccolo tra tutti i maggioranti.

Chiameremo **estremo inferiore** di E ($\inf E$) il più grande tra tutti i minoranti.

Axioma di completezza (o continuità)

Sia A insieme, $A \subset \mathbb{R}$:

- se A è limitato superiormente ammette $\sup A$;
- se A è limitato inferiormente ammette $\inf A$;

Valore assoluto

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{x, -x\}$

Oss: $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Sia $a \geq 0$:

- $|x| = a \iff x = a \vee x = -a$
- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \iff x \leq -a \vee x \geq a$

Disuguaglianza triangolare:

$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$

Dim: somma membro a membro

Proprietà:

$\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$

Intorni

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si definiscono intorni di x_0 gli intervalli del tipo

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

dove $\varepsilon > 0$ e piccolo.

Siano $A \subset \mathbb{R}, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

1. Il punto x_0 si dice **interno** ad A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A

$$\exists I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 \text{ t.c. } I \subset A$$

2. Il punto y_0 si dice **esterno** ad A se esiste un intorno di y_0 tutto contenuto nel complementare di A

$$\exists I = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 \text{ t.c. } I \subset A^c$$

3. I punti che non sono né interni né esterni sono detti di frontiera

Funzioni

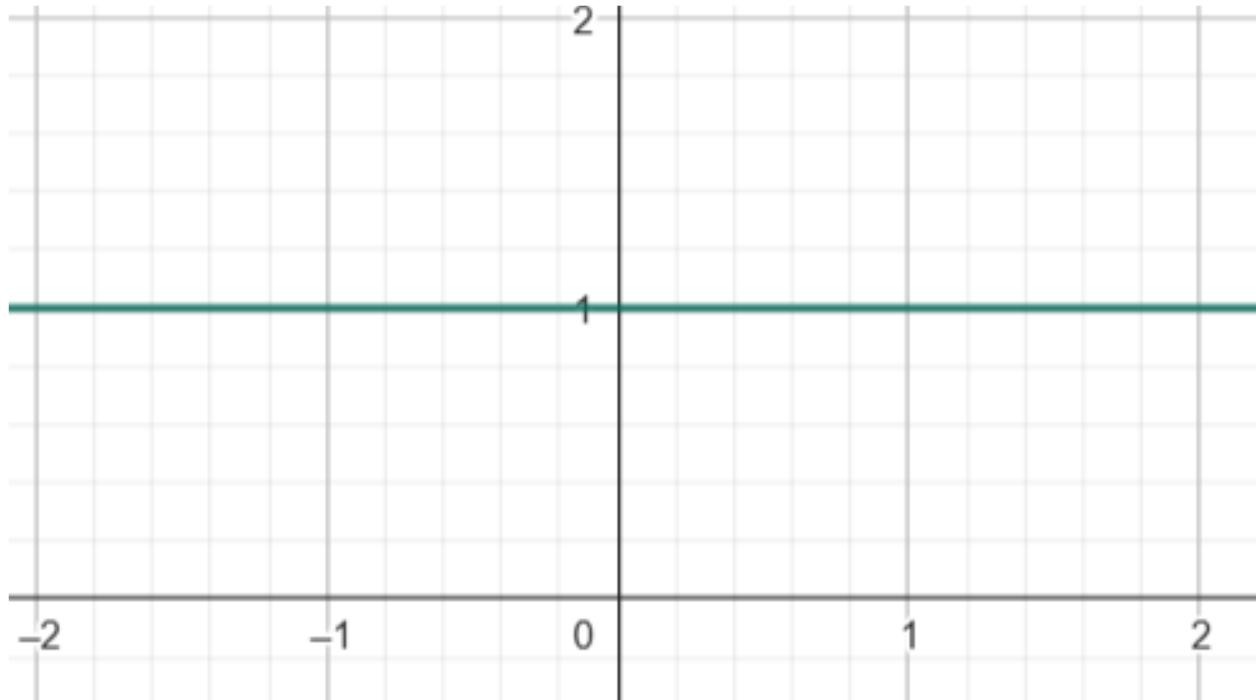
Siano A, B due insiemi. Una funzione $f : A \rightarrow B$ di dominio A e codominio B è una qualsiasi legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B .

$$f : x \in A \rightarrow f(x) \in B$$

- Si dice insieme **immagine** di f $Im\ f = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.
- L'insieme delle coppie $(x, f(x))$ al variare di $x \in A$ prende il nome di **grafico** di f .

Funzione costante:

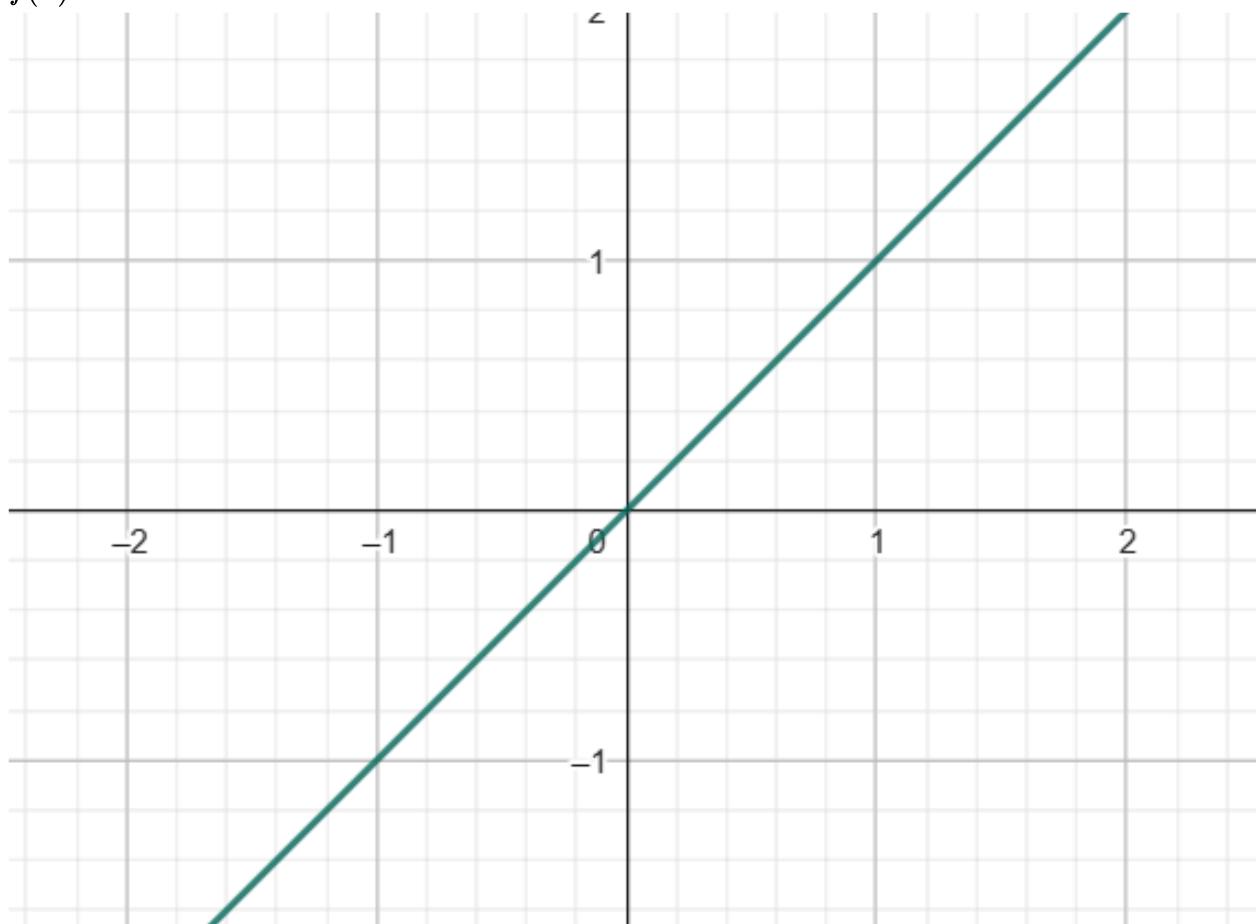
$$f(x) = c$$



Oss: $Dom\ f = \mathbb{R}, Im\ f = c$

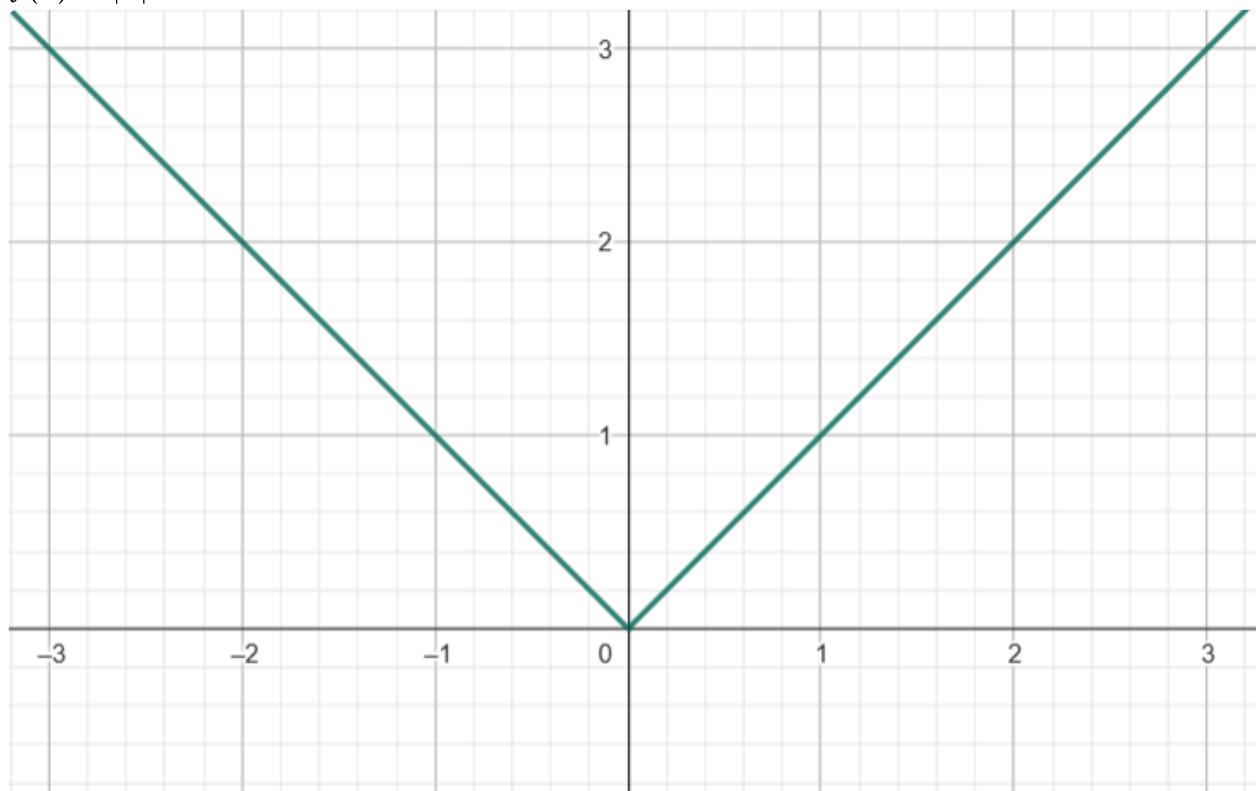
Funzione identica

$$f(x) = x$$



Funzione valore assoluto

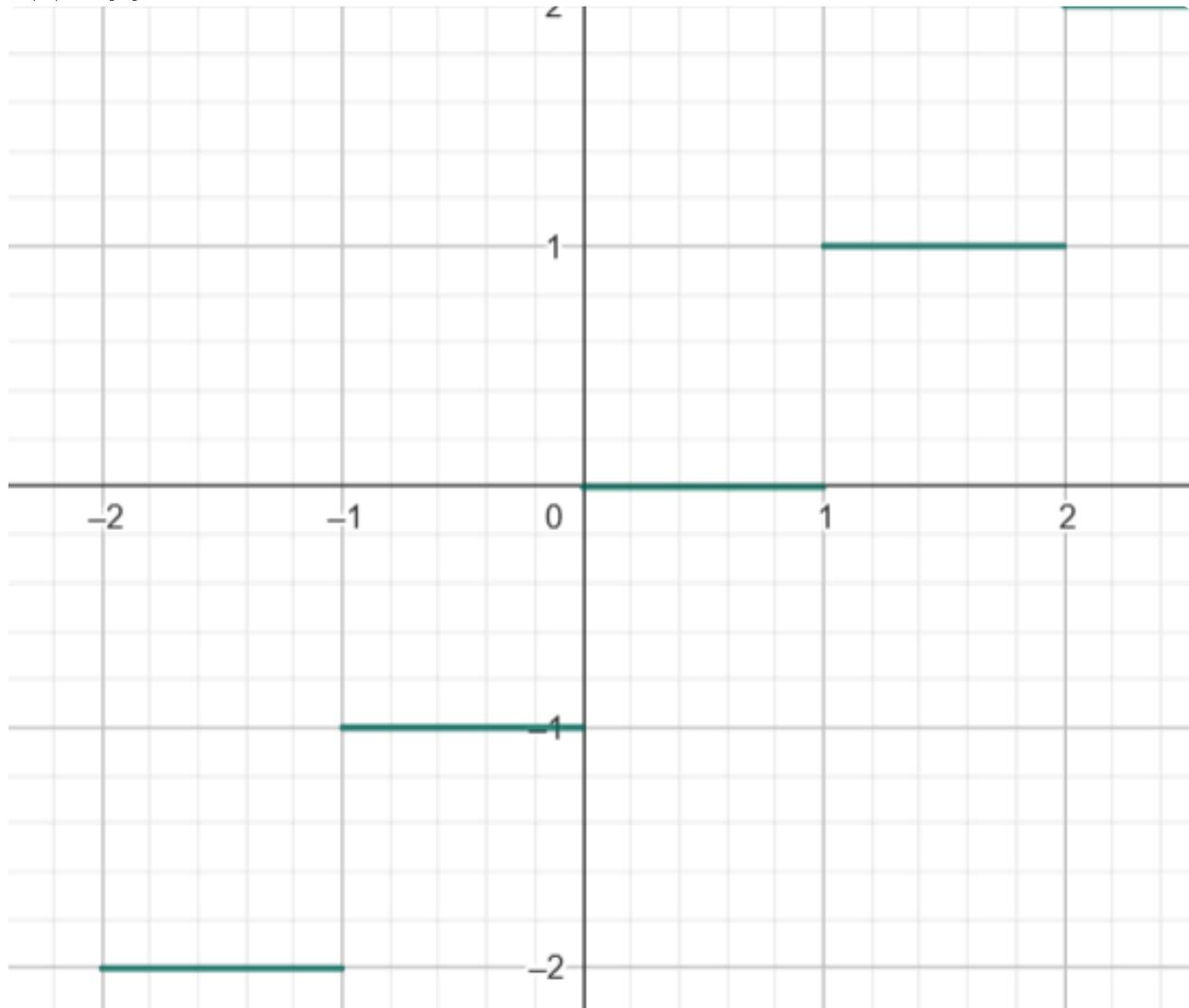
$$f(x) = |x|$$



Oss: $\text{Dom } f = \mathbb{R}, \text{Im } f = [0, +\infty)$

Funzione parte intera

$$f(x) = [x]$$



Oss: $\text{Dom } f = \mathbb{R}, \text{Im } f = \mathbb{Z}$

Simmetrie

Una funzione si dice:

- pari se $f(-x) = f(x) \forall x \in A$
- dispari se $f(-x) = -f(x) \forall x \in A$

Funzioni periodiche

$A \subseteq \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che A sia periodico di periodo $T > 0$, ovvero

$$x \in A \rightarrow x + T \in A$$

La funzione f si dice **periodica** di periodo $T > 0$ se $\forall x \in A : f(x) = f(x + T)$

Oss: una funzione periodica si ripete su ogni intervallo di ampiezza T .

Funzioni iniettive e suriettive

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- f si dice **iniettiva** se $\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ (a valori diversi di x corrispondono immagini diverse)
- f si dice **suriettiva** se $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in A$ t.c. $f(x) = y$ (per ogni elemento del codominio esiste almeno un elemento del dominio collegato ad esso)
- f si dice **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Se una funzione è biettiva allora è **invertibile**.

Oss: le funzioni pari e periodiche non sono **mai** iniettive.

Monotonia

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f si dice:

1. Monotona **crescente**: se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \text{ allora } f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. Monotona **decrescente**: se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \text{ allora } f(x_1) \geq f(x_2)$$

3. **Strettamente monotona crescente**: se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \text{ allora } f(x_1) < f(x_2)$$

4. **Strettamente monotona decrescente**: se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \text{ allora } f(x_1) > f(x_2)$$

Oss: attenzione ai \geq / \leq della monotona e ai $> / <$ della strettamente monotona!

Teorema: ogni funzione strettamente monotona è iniettiva.

Dim: se una funzione è strettamente monotona crescente, avremo che

$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, allora (per ipotesi) $f(x_1) < f(x_2)$, ovvero $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Stesso ragionamento vale per le funzioni strettamente monotone decrescenti.

Utile da ricordare:

- La monotonia della funzione è determinata dal segno della derivata prima in un determinato intervallo.
- Se nell'intervallo ci sono alcuni punti in cui la derivata si annulla \rightarrow monotona (attenzione nel caso di funzioni costanti!);

- Se nell'intervallo la derivata non si annulla → strettamente monotona;

Estremi e limitatezza

Massimi e minimi assoluti e relativi

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

- x_0 si dice **punto di minimo assoluto** (o globale) se

$$\forall x \in A : f(x) \geq f(x_0)$$

- x_0 si dice **punto di massimo assoluto** (o globale) se

$$\forall x \in A : f(x) \leq f(x_0)$$

il valore $f(x_0)$ si dice **minimo** (o **massimo**) **assoluto** di f .

Oss: non confondere **punto di massimo/minimo** con **massimo/minimo**!

- x_0 punto di massimo/minimo
- $f(x_0)$ massimo/minimo

Oss: se il minimo o il massimo assoluto esiste esso è unico, ma i punti in cui si realizza possono non essere unici.

Oss: il minimo di f si indica con

$$\min f(x) \quad x \in A = \text{minimo dell'insieme immagine } Im(f)$$

Oss: il massimo di f si indica con

$$\max f(x) \quad x \in A = \text{massimo dell'insieme immagine } Im(f)$$

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

- x_0 si dice **punto di minimo relativo** (o locale) se $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 :$

$$f(x) \geq f(x_0)$$

- x_0 si dice **punto di massimo relativo** (o locale) se $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 :$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Oss: i minimi o massimi locali (se esistono) possono **non essere** unici.

Limitatezza

Sia $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- f si dice **limitata inferiormente** se

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall x \in A : f(x) \geq m$$

- f si dice **limitata superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall x \in A : f(x) \leq M$$

- f si dice **limitata** se è limitata sia superiormente sia inferiormente

Notazione: se f non è limitata inferiormente si pone $\inf f(x) = -\infty$.

Notazione: se f non è limitata superiormente si pone $\sup f(x) = +\infty$.

Convessità

- Una funzione f si dice **convessa** in I se $\forall a, b \in I$ t.c. $[a, b] \subseteq I$:

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

$$\forall x \in [a, b].$$

- Una funzione f si dice **concava** se non è convessa.

Oss. per ricordare:

- concava faccina **triste**
- convessa faccina **felice**

Algebra delle funzioni

Siano $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo $A \cap B \neq \emptyset$.

Allora possiamo definire:

- $f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ (funzione somma)

$$x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- $f \cdot g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ (funzione prodotto)

$$x \rightarrow (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Proprietà:

- La **somma di due funzioni pari** (risp. **dispari**) è una **funzione pari** (risp. **dispari**). Infatti

$$f, g \text{ pari } (f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

- Il **prodotto di due funzioni aventi la stessa parità è pari**, il prodotto di due funzioni aventi **diversa parità è dispari**
- Sia f periodica di periodo $T_1 > 0$ e sia g periodica di periodo $T_2 > 0$. Supponiamo che $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.c.

$$m_1 T_1 = m_2 T_2$$

Allora $f + g$ e $f \cdot g$ sono periodiche di periodo $T = m_1 T_1 = m_2 T_2$

- La **somma di due funzioni monotone con stesso tono** è essa stessa **monotona**, ovvero:

- f, g monotone crescenti $\Rightarrow f + g$ monotona crescente
 - f, g monotone decrescenti $\Rightarrow f + g$ monotona decrescente
- Oss: per il prodotto non vi è equivalente.

- La **somma di due funzioni convesse** (risp. **concave**) è essa stessa **convessa** (risp. **concava**)
- La **somma di due funzioni limitate** (inferiormente e/o superiormente) è essa stessa **limitata** (inferiormente e/o superiormente)

Funzione composta

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni t.c. $f(A) \subseteq B$. (le immagini di f devono essere contenute in B).

Allora possiamo definire:

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Oss: non è detto che esistano sia $g \circ f$ sia $f \circ g$.

Possiamo definire $f \circ g$ come:

$$\begin{aligned} f \circ g : B &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{aligned}$$

Ricorda! In generale:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Funzione inversa

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biettiva. Allora f è **invertibile**, ovvero

$$\exists f^{-1} : \text{Im } f \rightarrow A$$

t.c. $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ (identità)

Proposizione: $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **strettamente monotona** $\Rightarrow f$ è **invertibile** e f^{-1} **conserva la stessa monotonia**.

Funzioni elementari

1. Funzione potenza ad esponente intero positivo

Fissiamo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Definiamo la funzione potenza n -esima:

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^n \in \mathbb{R}$$

Oss: per $n = 1, f(x) = x$ (f identica).

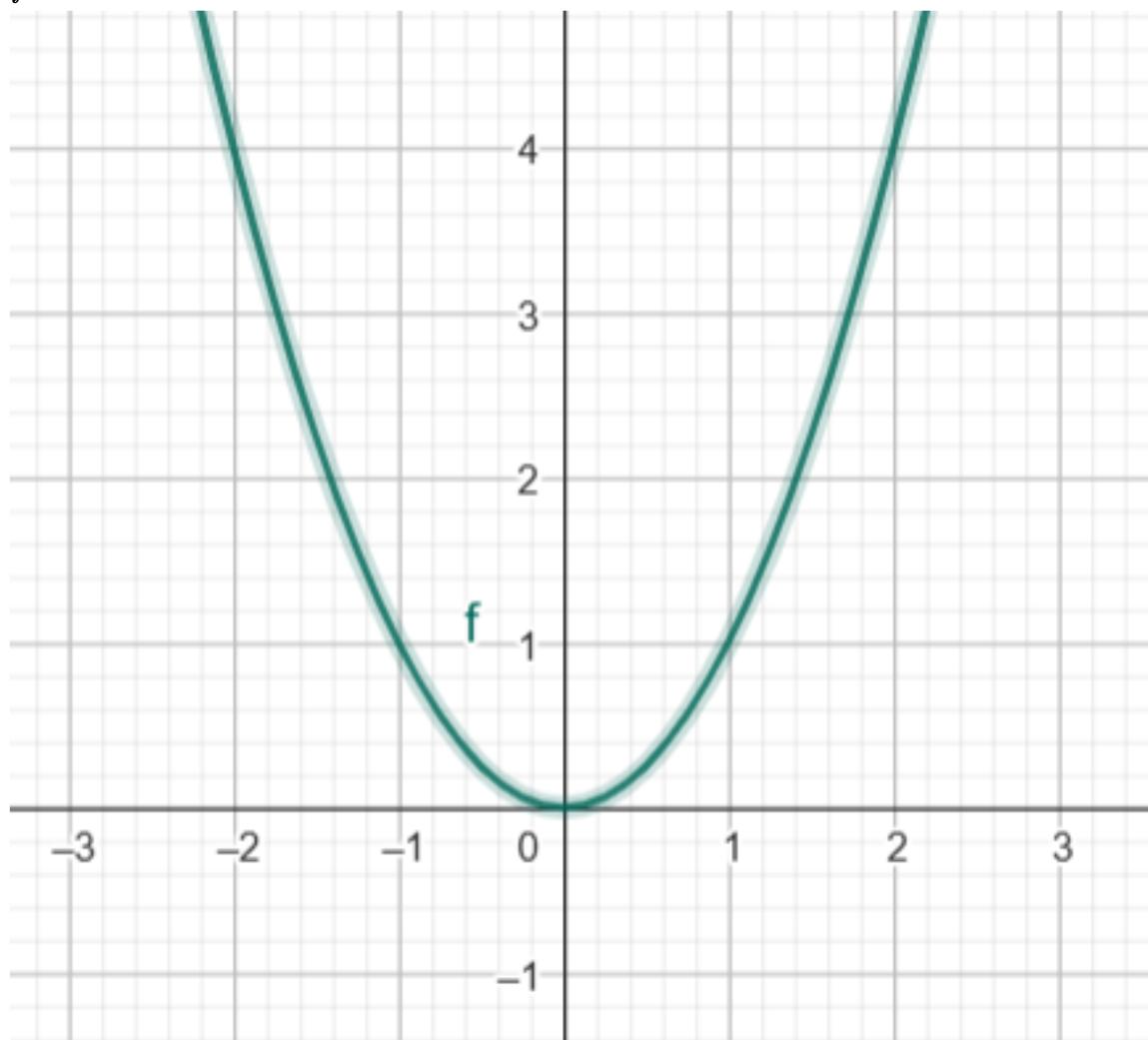
Attenzione:

- per n pari: $f(x) = x^n$ è una **funzione pari** (grafico simmetrico rispetto all'asse y) e **non iniettiva**
- per n dispari $f(x) = x^n$ è una **funzione dispari** (grafico simmetrico rispetto all'origine) e **iniettiva**

Per n pari:

- $\text{Im } f = [0, +\infty)$
- se x è negativa $\Rightarrow f(x)$ strettamente monotona decrescente
- se x è positiva $\Rightarrow f(x)$ strettamente monotona crescente
- non limitata superiormente ($\sup f(x) = +\infty$)
- ha minimo assoluto $f(0) = 0$

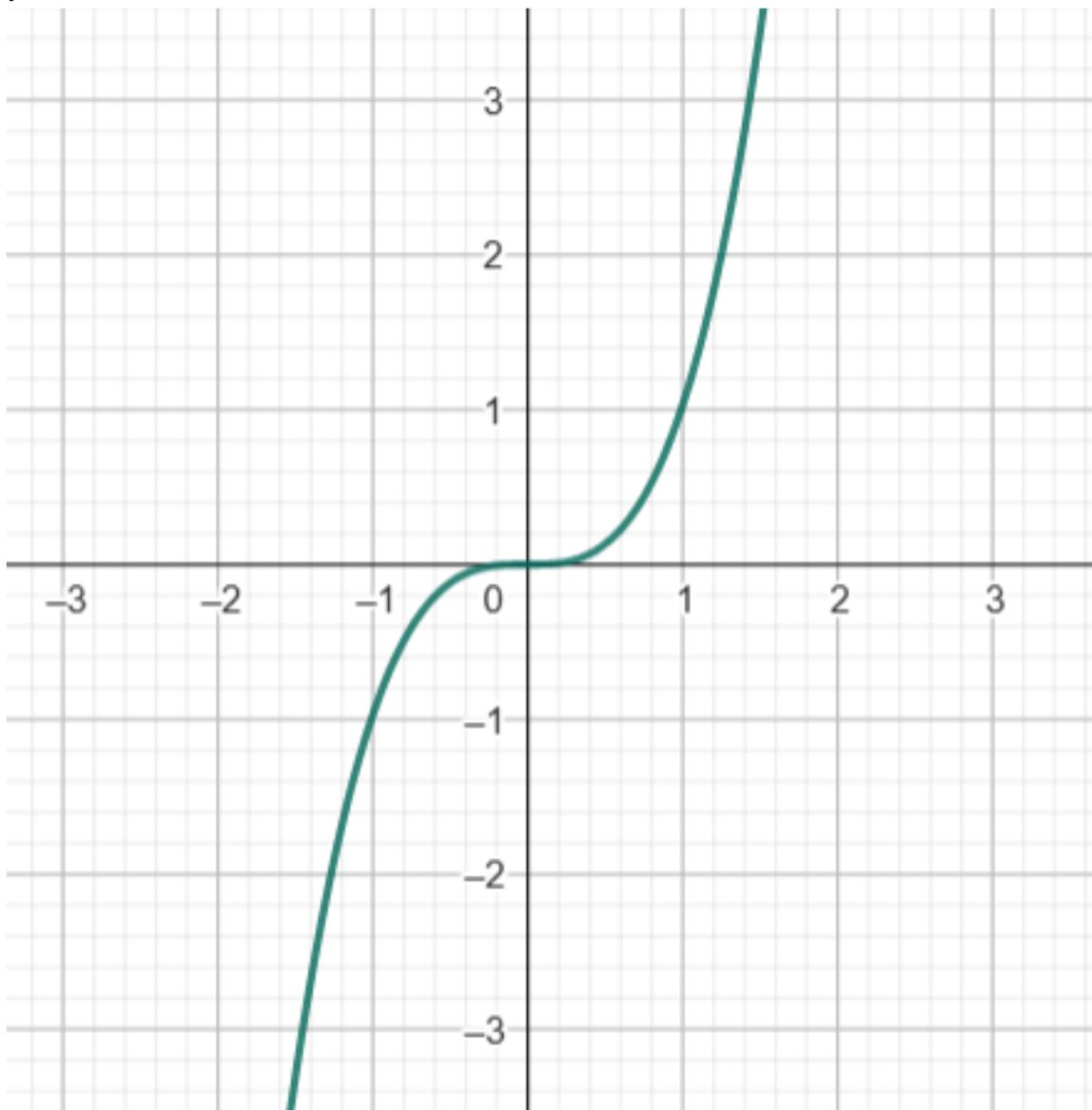
- f non invertibile



Per n dispari:

- $Im f = \mathbb{R}$
- Non è limitata
- f strettamente monotona crescente

- f invertibile



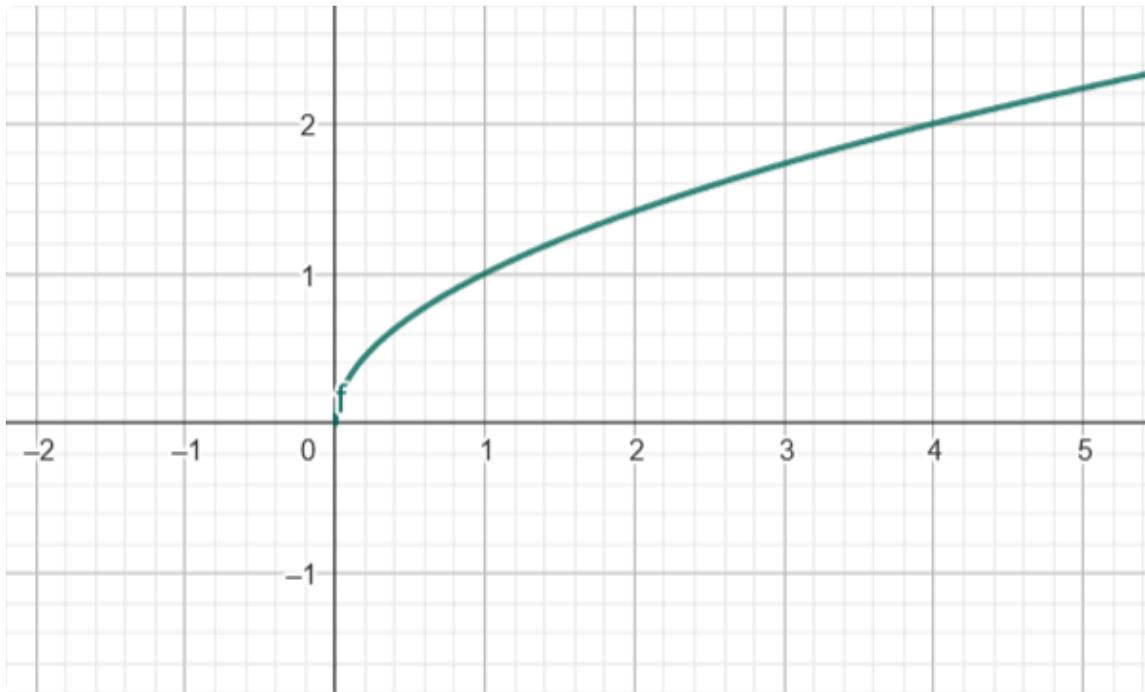
2. Funzione radice n -esima

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt[n]{x}$$

Per n pari:

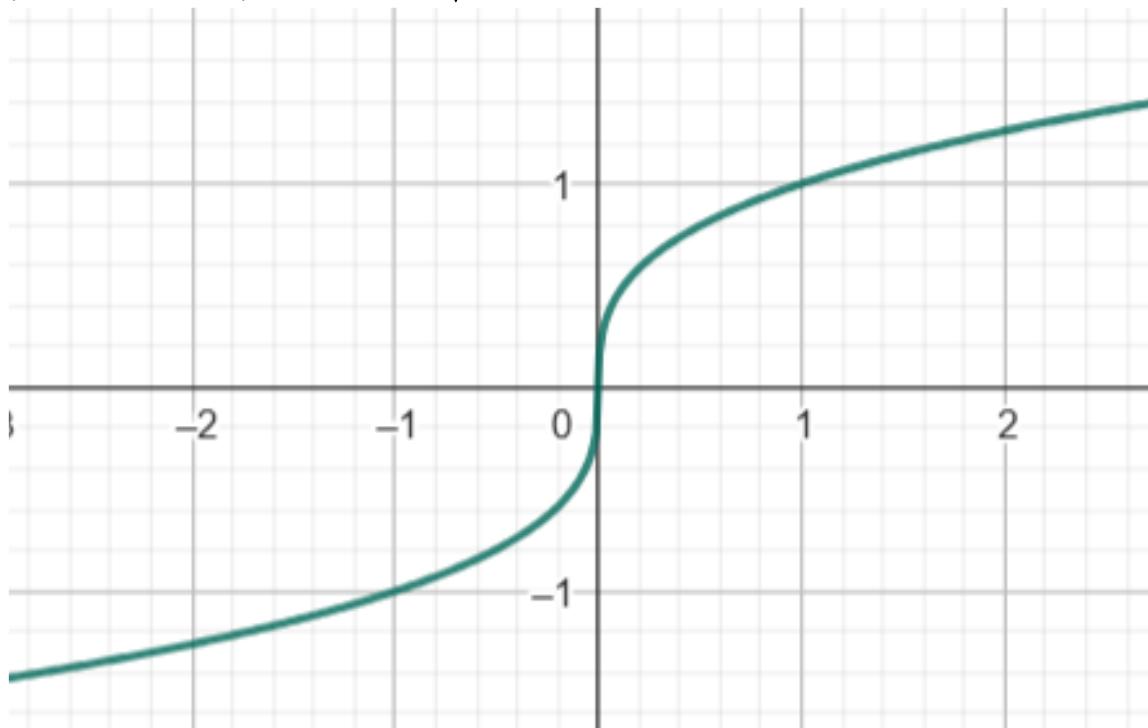
- $f : x \in [0, +\infty) \rightarrow x^n \in [0, +\infty)$

- f invertibile $\Rightarrow \exists f^{-1} : x \in [0, +\infty) \rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty)$



Per n dispari:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- f invertibile $\Rightarrow \exists f^{-1} : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$

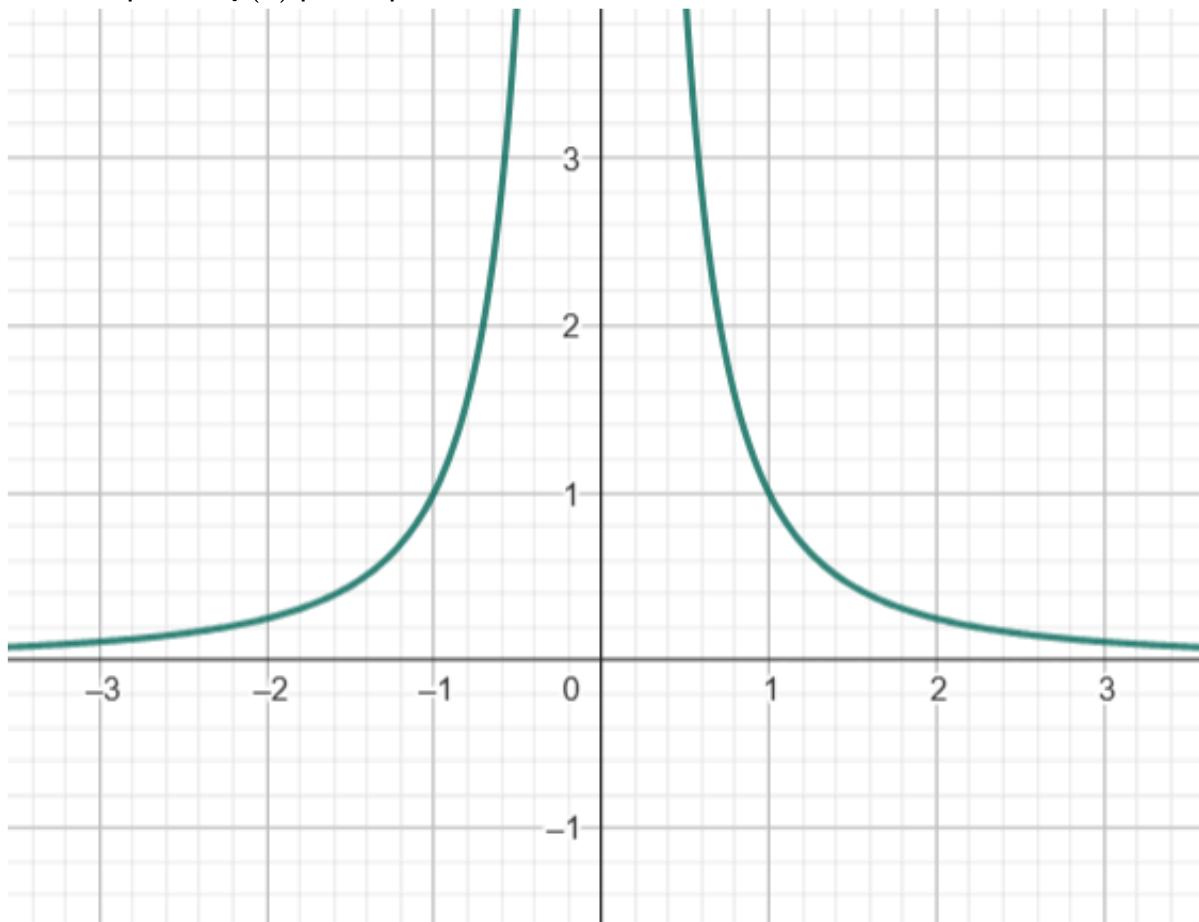


3. Potenze ad esponente intero

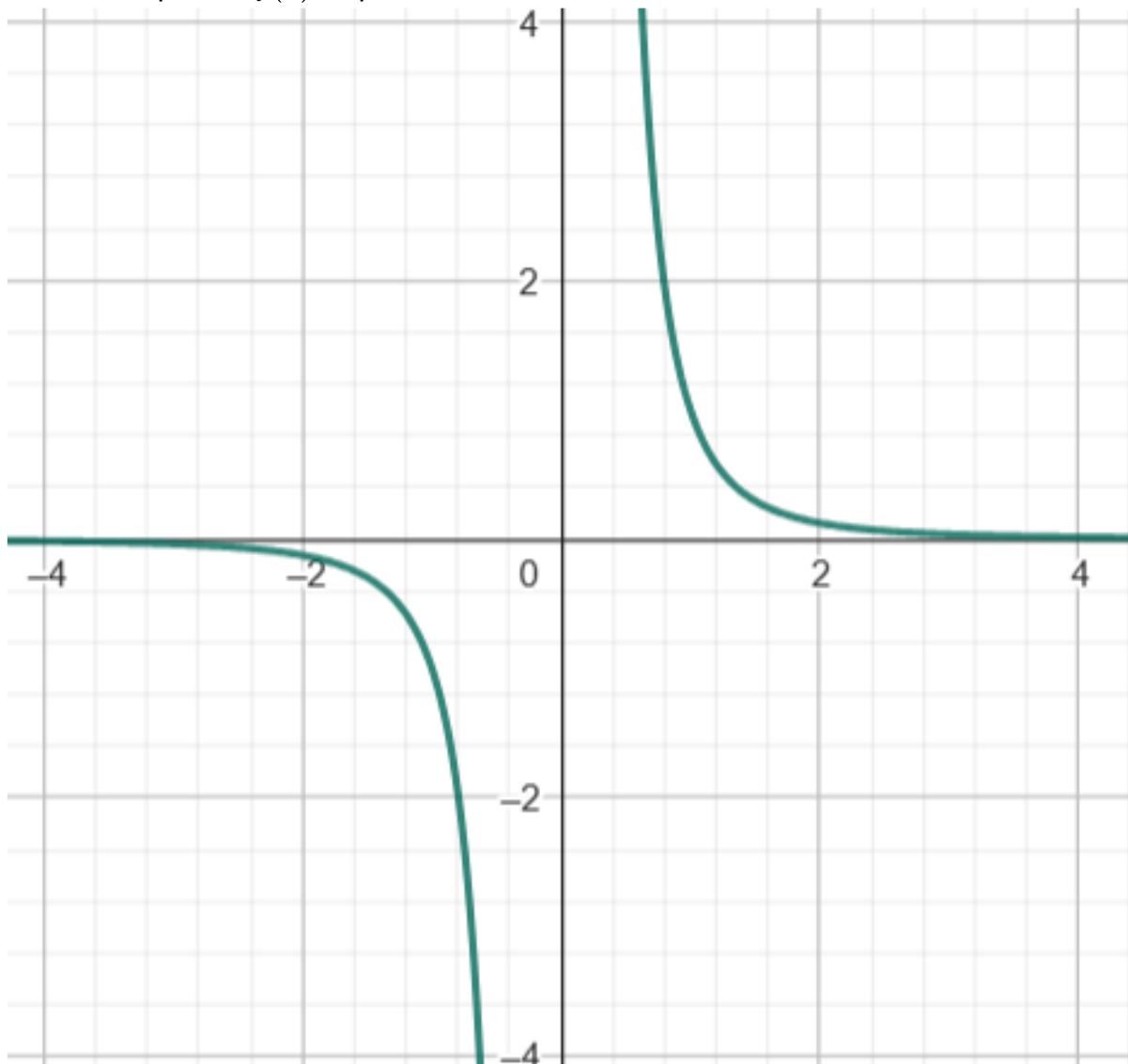
$$k \in \mathbb{Z}, f(x) = x^k$$

- se $k \geq 0$ allora $f(x)$ è la funzione potenza già vista
- se $k < 0$ allora $f(x) = (\frac{1}{x})^{-k}, -k > 0$
- $Df = \mathbb{R} - \{0\}$

- se $-k$ è pari $\Rightarrow f(x)$ pari e positiva



- se $-k$ è dispari $\Rightarrow f(x)$ dispari



4. Potenze ad esponente razionale

Sia $q \in \mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \neq 0$

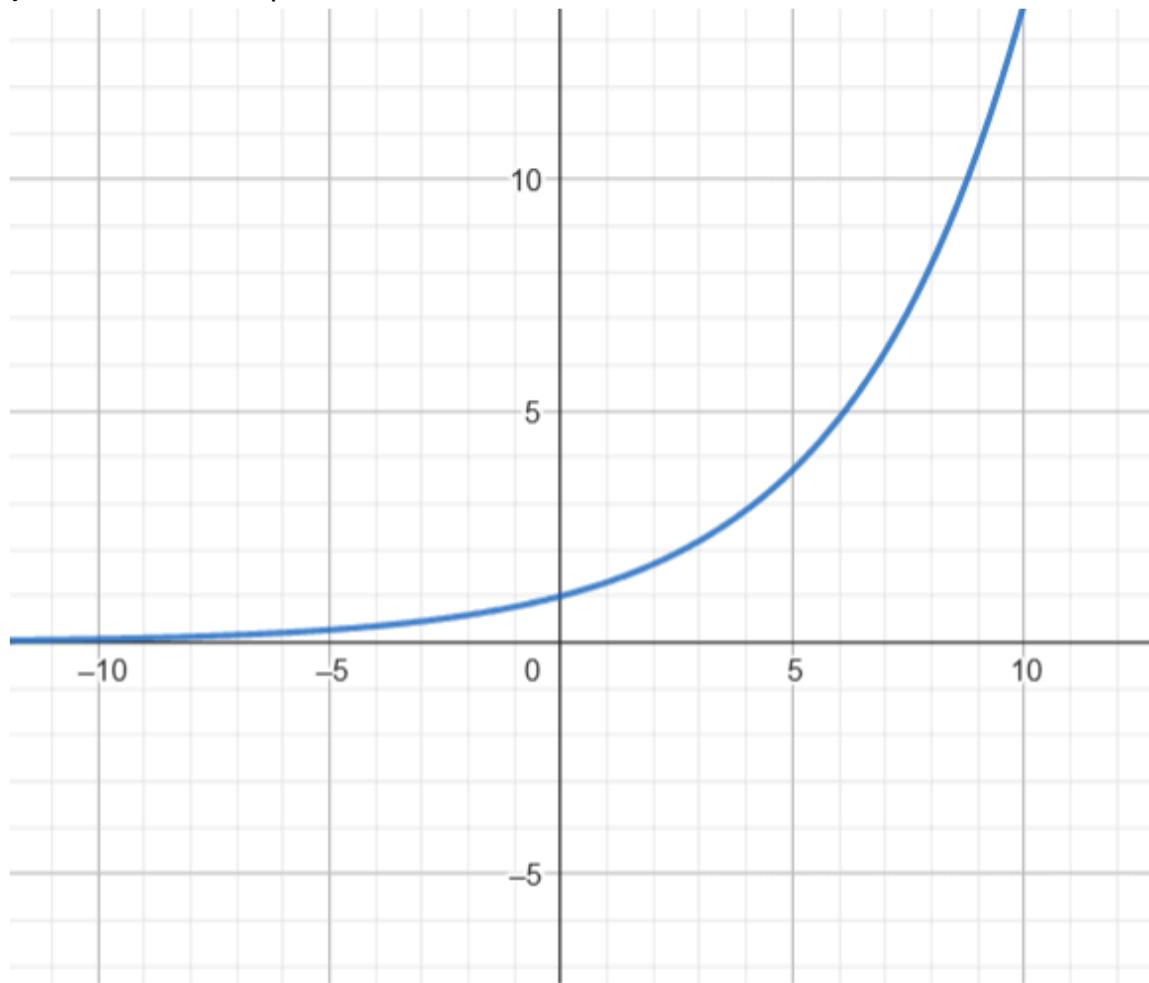
- se $q \geq 0$ poniamo $f(x) = x^q = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
- se $q < 0$ poniamo $f(x) = x^q = (\frac{1}{x})^{-q} = \sqrt[n]{(\frac{1}{x})^{-m}}$

5. Funzione esponenziale

$$f(x) = a^x, a > 0$$

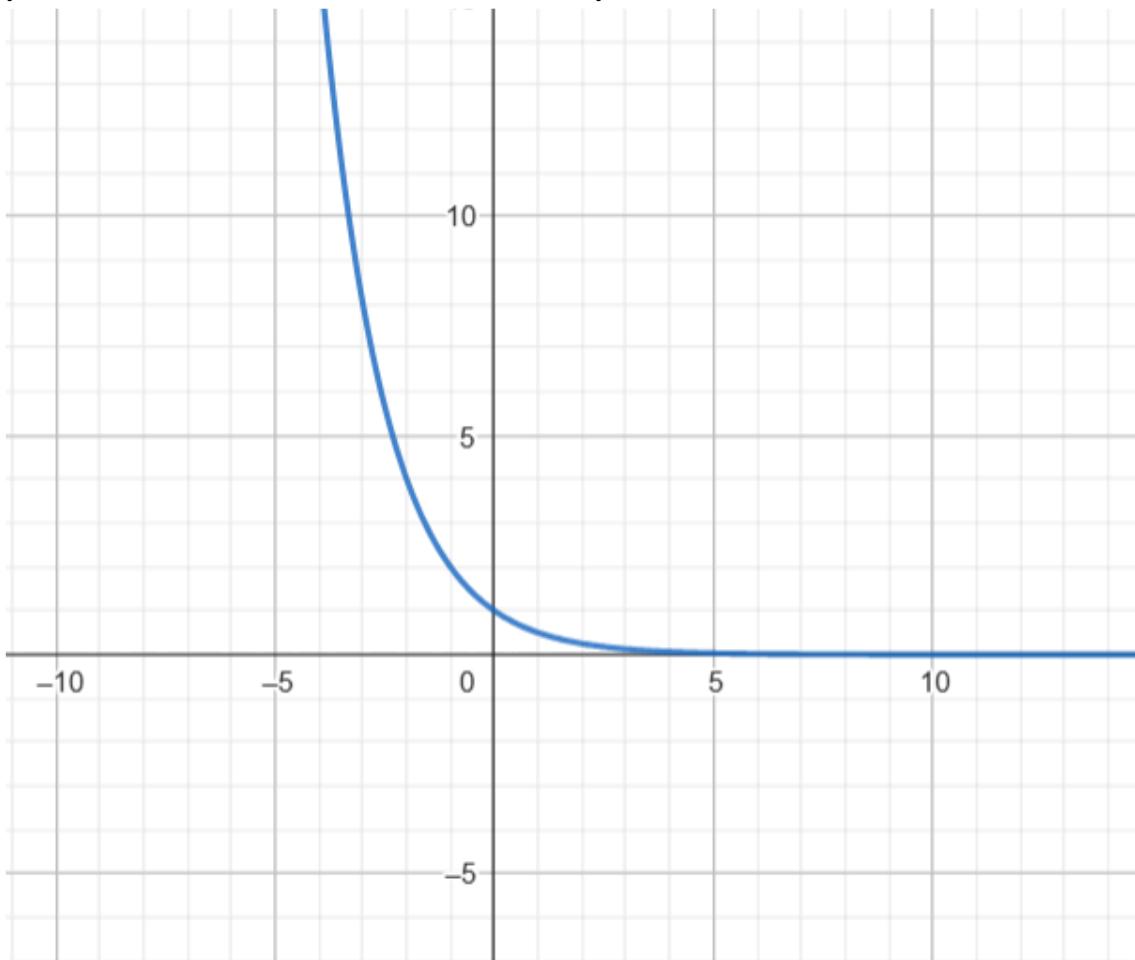
- se $a > 1$:
- $a^x > 0 \Rightarrow \text{Im } f = (0, +\infty) \Rightarrow \inf f(x) = 0$
- $a^x > 1 \forall x > 0$
- $a^x < 1 \forall x < 0$
- f è strettamente monotona, quindi iniettiva

- f non è limitata superiormente



- se $0 < a < 1$:
 - $a^x > 0 \Rightarrow Im f = (0, +\infty)$, $\inf f(x) = 0 \Rightarrow f$ limitata inferiormente ma non superiormente
 - $a^x < 1 \forall x > 0$
 - $a^x < 1 \forall x < 0$

- f strettamente monotona decrescente $\Rightarrow f$ iniettiva



5. Funzione logaritmo

Teorema: sia $a > 0, a \neq 1, y > 0$. Allora $\exists! x \in \mathbb{R}$ t.c $a^x = y$. Tale numero prende il nome di **logaritmo** in base a di y e si indica con:

$$x = \log_a y$$

Oss: dal teorema segue che $a^{\log_a y} = y$

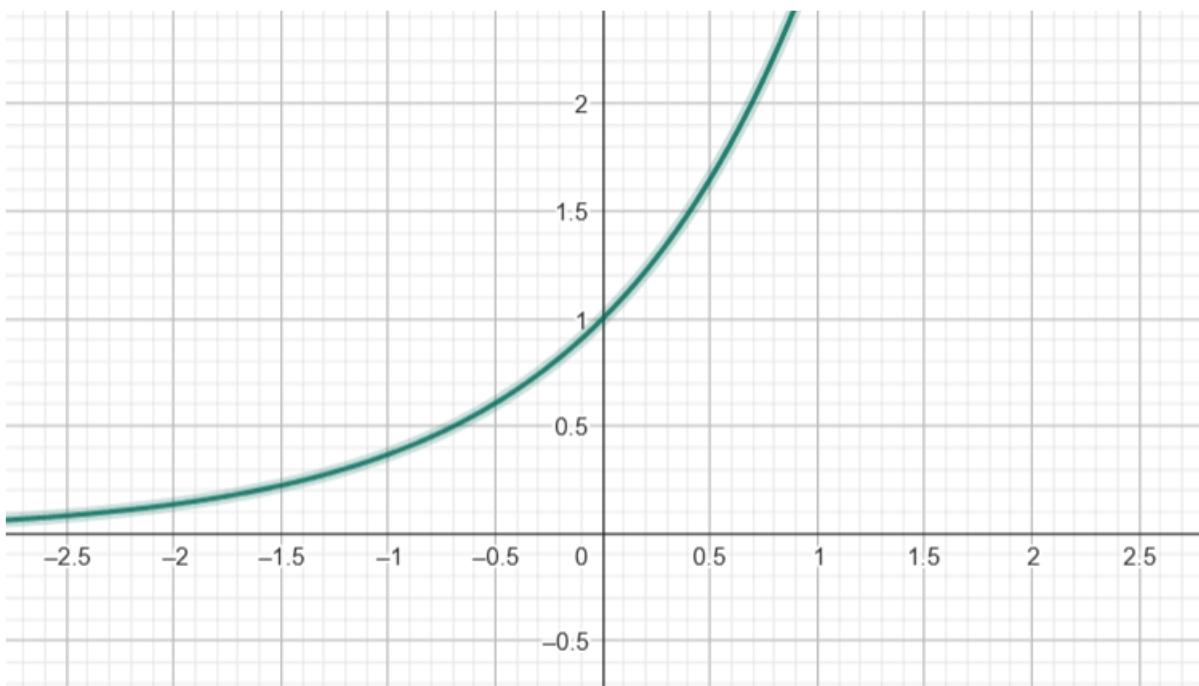
Proprietà:

- 1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- 2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- 3) $\log_a x^p = p \log_a x \quad \forall p \in \mathbb{R}$
- 4) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad b > 0, b \neq 1$ (cambio di base)

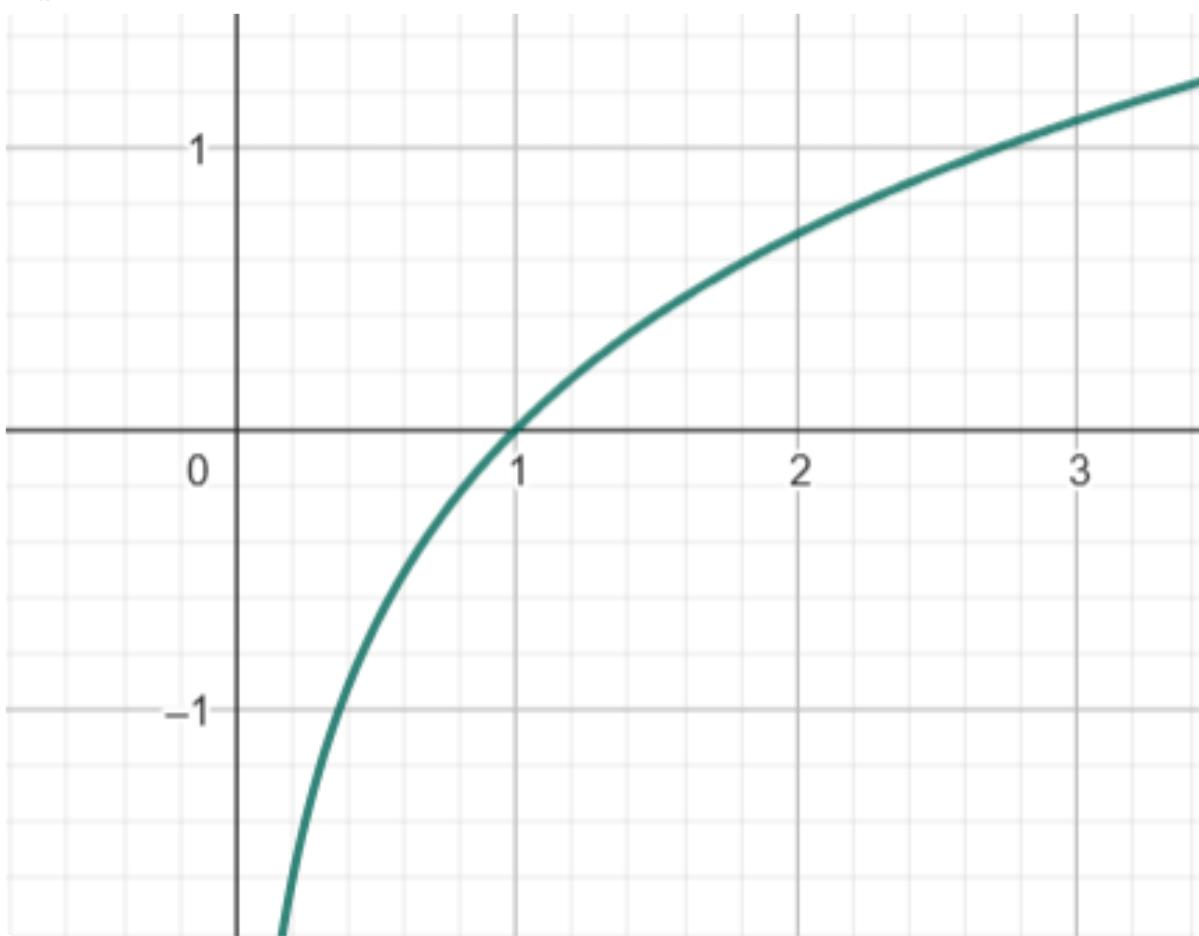
6. Base naturale

$$f(x) = e^x \text{ e } f(x) = \ln x$$

e^x :



$\ln x$



Funzioni circolari

Funzione seno

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \rightarrow \sin x$$

- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ovvero **periodica** di periodo $T = 2\pi$
- f limitata e $\min f(x) = -1, \max f(x) = 1$
- f è dispari

Funzione coseno

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \rightarrow \cos x$$

- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ ovvero **periodica** di periodo $T = 2\pi$
- f limitata e $\min f(x) = -1, \max f(x) = 1$
- f pari

Relazioni fondamentali

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

Ricorda: nelle regole col **seno permane** il segno, col **coseno si inverte**.

Valori noti

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Funzione arcoseno

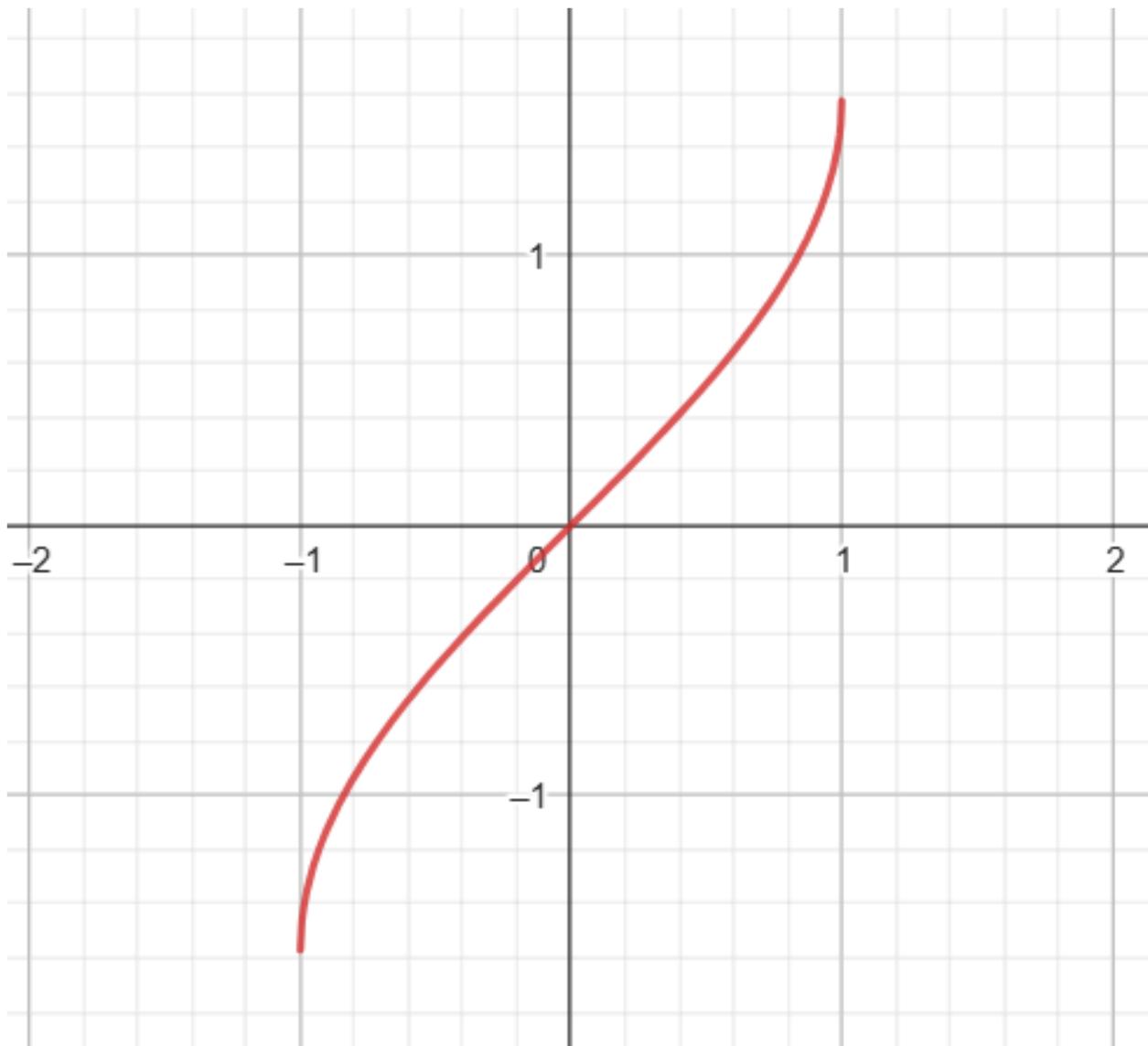
Oss. iniziale: siccome $\sin x$ non è iniettiva, non è invertibile per tutto il dominio, quindi lo restringiamo a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$x \rightarrow \arcsin x$$

- non periodica
- strettamente monotona crescente

x	$\arcsin x$
-1	$-\frac{\pi}{2}$
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$



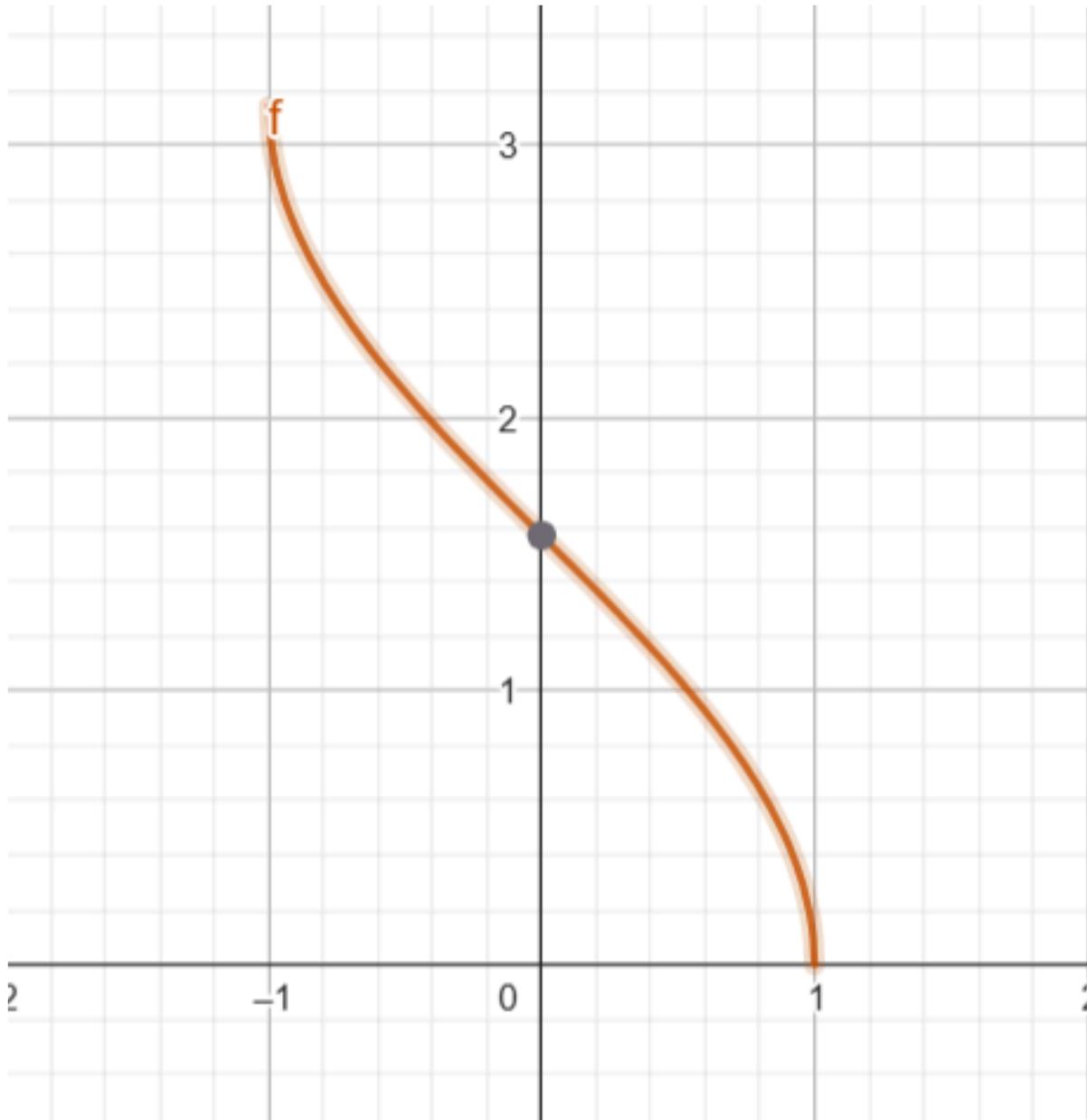
Funzione arcocoseno

Oss. iniziale: siccome $\cos x$ non è iniettiva, non è invertibile per tutto il dominio, quindi lo restringiamo a $[0, \pi]$.

$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$x \rightarrow \arccos x$$

- non periodica
- strettamente monotona decrescente



Funzione tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

- $Df = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

- periodica di periodo $T = \pi$
- f dispari
- non limitata, non invertibile

Funzione arcotangente

Oss. iniziale: siccome $\tan x$ non è invertibile per tutto il dominio, lo restringiamo a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dove $\tan x$ è strettamente monotona crescente.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$x \rightarrow \arctan x$$

- non ha massimo e minimo
- è limitata, $\inf \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\sup \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Formule parametriche

- $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
- $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

Altre formule utili

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$