COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
03 Settembre 2021
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio N.1

1. Data
$$f(x) = \frac{\log\left(e^{2x} - 3e^x + 2\right) + \log|x-1|}{3 + \cos\sqrt{5 - e^x}}$$
determinare il dominio di $f(x)$.

2. Data
$$g(x) = x - |x^2 - 1| + 2$$
determinare il massimo di g in $[0, 2]$.

3. Data
$$h(x) := \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta & \text{se } x > 1 \end{cases}$$
Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $h(x)$ é continua e derivabile nel suo dominio.

Esercizio N. 2 Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + x^{2n}}{n^3 + 1}$$
risulta convergente.

Esercizio N.3 Calcolare
$$\int_0^1 \frac{x^3 - 3}{x^2 - 2x - 3}\, dx.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema di regolaritá delle successioni monotone.

2. Dare la definizione di estremo superiore e inferiore di un insieme e stabilire le differenze con il massimo e minimo di un insieme. Calcolare inoltre
$$\inf\left\{x = n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

3. Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e di $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ell$ illustrando anche graficamente il significato di tale operazione.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
03 Luglio 2023
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := \log(x^2 - 9)$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione;
- (1.5 pt) calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla funzione f e dall'asse x nell'intervallo $[4, 5]$;

Esercizio N. 2 (5pt) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n + 5n^2 + 1}\right)^{\sqrt{e}n^2}.$$

Esercizio N.3 (4pt) Si provi che la funzione $f(x) = \frac{2x^2+e^{-2x}-2}{x}$ ammette almeno due zeri.

Esercizio N.4 (5pt) Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri di f estesi agli intervalli $(-2, -1]$ e $(0, +\infty)$;

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Definizione di serie convergente, divergente e irregolare. Fornire un esempio di serie convergente, divergente e irregolare giustificando la risposta.
2. **(3pt)** Enunciare il teorema di Fermat
3. **(4pt)** Dare la definizione di estremo superiore di un insieme A e deteminare $\sup A$ dove $A := \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
03 Luglio 2023
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := \log\left(x^2 - 25\right)$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione;
- (1.5 pt) calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla funzione f e dall'asse x nell'intervallo $[6, 7]$.

Esercizio N. 2 (5pt) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{7}{2n + n^2 + 3}\right)^{en^2}.$$

Esercizio N.3 (4pt) Si provi che l'equazione

$$\frac{1 - x^4}{x^3} = \arctan x$$

ha in $(0, +\infty)$ esattamente una soluzione.

Esercizio N.4 (5pt) Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri di f estesi agli intervalli $[-1, 0)$ e $(-2, +\infty)$;

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Dare la definizione di successione convergente, divergente e irregolare. Le successioni divergenti sono sempre non limitate? E il viceversa?
2. **(3pt)** Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
3. **(4pt)** Dare la definizione di insieme limitato inferiormente e superiormente. Dato l'insieme $A := \{(-1)^n n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ dire se l'insieme è limitato inferiormente e superiormente.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
03 Luglio 2023
PROVA C
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := \log(x^2 - 16)$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione;
- (1.5 pt) calcolare l'area della regione di piano delimitata dalla funzione f e dall'asse x nell'intervallo $[5, 6]$;

Esercizio N. 2 (5pt) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{5}{3n + n^2 + 1}\right)^{e^2 n^2}.$$

Esercizio N.3 (4pt) Si provi che l'equazione

$$x^2 + 1 = \frac{1}{x} - \arctan x$$

ha per $x > 0$, una e una sola soluzione reale.

Esercizio N.4 (5pt) Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$, dire se sono convergenti o divergenti gli integrali impropri di f estesi agli intervalli $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Dare la definizione di successione convergente, divergente e irregolare. Le successioni convergenti sono sempre limitate? Giustificare la risposta.
2. **(3pt)** Enunciare il teorema della media integrale.
3. **(4pt)** Dare la definizione di estremo inferiore di un insieme e determinare $\inf A$ dove $A := \{\frac{2n}{n^2+1} \;\; n \in \mathbb{Z}\}$.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
17 Luglio 2023
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := x\sqrt{|x-1|}$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di non derivabilità e loro classificazione;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 (4pt) Calcolare, usando la definizione,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Esercizio N.3 (5pt) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} x^{4n}.$$

Esercizio N.4 (5pt) Data la funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 5x + \sin 2x + 5x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(1+\alpha x) + \beta & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ di modo che f risulti continua e derivabile.

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
2. **(3pt)** Enunciare il teorema di Weierstrass.
3. **(4pt)** Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ limitata e monotona. Allora
   (a) f è derivabile;
   (b) f è dispari;
   (c) f è continua;
   (d) f è integrabile.

   Giustificare opportunamente la risposta.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
17 Luglio 2023
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := x\sqrt{|2x-1|}$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di non derivabilità e loro classificazione;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 (4pt) Calcolare, usando la definizione,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 3e^x + 2}\, dx.$$

Esercizio N.3 (5pt) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)^n n!}{(2n)!} x^n.$$

Esercizio N.4 (5pt) Data la funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \beta(x-3) + 2(x-3)^2 & \text{se } x < 3 \\ \dfrac{\alpha}{1-2x} & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ di modo che f risulti continua e derivabile.

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.
2. **(3pt)** Enunciare il teorema di Lagrange.
3. **(4pt)** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora
   (a) Esiste $m > 0$ tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in [a,b]$;

(b) f è monotona;

(c) Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$;

(d) Esiste $m < 0$ tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in [a, b]$.

Giustificare opportunamente la risposta.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
17 Luglio 2023
PROVA C
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := x\sqrt{|3x-1|}$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di non derivabilità e loro classificazione;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 (4pt) Calcolare, usando la definizione,

$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Esercizio N.3 (5pt) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+3^n)^2+5^n}{(1+5^n)^2+9^n} x^n.$$

Esercizio N.4 (5pt) Data la funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{x-2} + \beta & \text{se } x > 2 \\ (\alpha+1)\sqrt{3-x} & \text{se } x \leq 2. \end{cases}$$

Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ di modo che f risulti continua e derivabile.

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \in \mathbb{R}$.
2. **(3pt)** Enunciare il teorema di Bolzano.
3. **(4pt)** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e sia $I = \int_a^b f(t)\, dt$. Allora
   (a) se $I > 0$ allora $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$;
   (b) se $I < 0$ allora $f(x) < 0$ per ogni $x \in [a,b]$;
   (c) se $f(b) < 0$ allora $I < 0$;
   (d) se $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$ allora $I > 0$.

   Giustificare opportunamente la risposta.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
19 Giugno 2023
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := \log\left(\frac{1+|x-1|}{x^2}\right)$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) la derivata prima, il suo dominio e classificare gli eventuali punti di non derivabilitá;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 (5pt) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+x^2}-\sin x}{(1+x^2)^x-\sqrt{1+x^3}}.$$

Esercizio N.3 (4pt) Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{2x+1}\,dx.$$

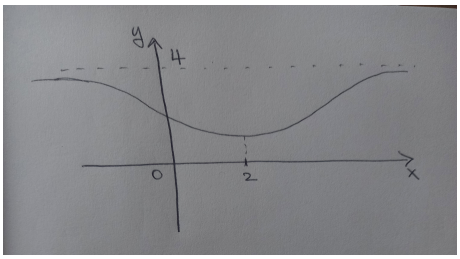
Esercizio N.4 (5pt) Determinare il carattere della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+2)^n}{n}.$$

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto e stabilire (anche con esempi) il legame tra la continuità e la derivabilità.
2. **(3pt)** Enunciare il teorema di regolarità delle successioni monotone.

3. **(4pt)** Dato il seguente grafico dire se:



a) f ha un asintoto verticale in $x = 1$;

b) f derivabile in $x = 2$ e $f'(2) = 0$;

c) f è limitata superiormente e $\sup_{x \in D_f} f(x) = 5$.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
19 Giugno 2023
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := \log\left(1 + \sqrt{|x-1|}\right)$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) la derivata prima, il suo dominio e classificare gli eventuali punti di non derivabilitá;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 (5pt) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\sqrt{1+x}}{1-\cos x}.$$

Esercizio N.3 (4pt) Calcolare il seguente integrale

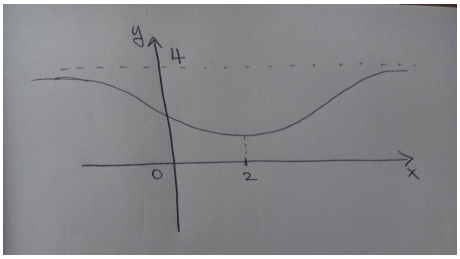
$$\int \frac{\sqrt{3x+1} - x}{x+1}\, dx.$$

Esercizio N.4 (5pt) Determinare il carattere della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!}.$$

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Definizione di funzione iniettiva e suriettiva. Definizione di funzione invertibile.
2. **(3pt)** Enunciare il teorema del confronto per successioni.
3. **(4pt)** Dato il seguente grafico dire se:



a) f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 4$;

b) f presenta un punto angoloso in $x = 2$;

c) f è positiva.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
19 Giugno 2023
PROVA C
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 (6pt) Data la funzione

$$f(x) := \log\left(x^2 + x + 1\right) - |x|$$

determinare

- (1 pt) il dominio della funzione;
- (1 pt) gli eventuali asintoti;
- (1.5 pt) la derivata prima, il suo dominio e classificare gli eventuali punti di non derivabilitá;
- (1.5 pt) gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e assoluto;
- (1 pt) tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 (5pt) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2(1-\cos x)} - xe^{x^2}}{x - \sin x}.$$

Esercizio N.3 (4pt) Calcolare il seguente integrale

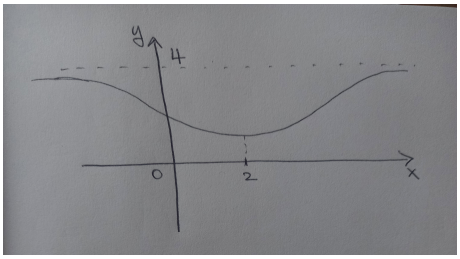
$$\int \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{3x - 1}\, dx.$$

Esercizio N.4 (5pt) Determinare il carattere della seguente serie al variare di $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{2^n} (\log x)^n.$$

PARTE TEORICA:

1. **(3pt)** Definizione di funzione strettamente monotona (crescente e decrescente) e descrivere le relazioni (anche con esempi) con l'iniettività.
2. **(3pt)** Enunciare il teorema della radice
3. **(4pt)** Dato il seguente grafico dire se:



a) f ha un asintoto obliquo di equazione $y = 4x + 1$;

b) f presenta un punto di minimo in $x = 2$;

c) f è negativa.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
04 Luglio 2022
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 Data la funzione

$$f(x) := \frac{x - 2 + |x|}{e^{\frac{1}{x}}}$$

determinare

- il dominio della funzione;
- gli eventuali asintoti;
- la derivata prima della funzione, classificando eventuali punti di non derivabilitá;
- i punti di estremo relativo e assoluto;
- tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n + 1} \left(\frac{x-3}{2} \right)^n.$$

Esercizio N.3 Stabilire se il seguente integrale converge e, in caso affermativo, calcolarlo

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x \arctan(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2 + 1}\, dx.$$

Esercizio N.4 Usando sviluppi di Taylor calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}.$$

PARTE TEORICA:

1. Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ con x_0 ed ℓ finiti. Scrivere l'espressione di una funzione non definita in $x_0 = 0$ ma tale che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
2. Enunciare il Teorema di Fermat.
   Il teorema determina una condizione necessaria e sufficiente? Solo necessaria? Solo sufficiente? Argomentare la risposta usando anche degli esempi.
3. Dare la definizione di estremo superiore e di massimo di un insieme E. Quale é la differenza?

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
04 Luglio 2022
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 Data la funzione

$$f(x) := \sqrt{|x-1|} - 3\log(1+\sqrt{|x-1|})$$

determinare

- il dominio della funzione;
- gli eventuali asintoti;
- la derivata prima della funzione, classificando eventuali punti di non derivabilitá;
- i punti di estremo relativo e assoluto;
- tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n+2}\left(\frac{x-4}{3}\right)^n.$$

Esercizio N.3 Stabilire se il seguente integrale converge e, in caso affermativo, calcolarlo

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x \arctan(e^x+1)}{(e^x+1)^2+1}\,dx.$$

Esercizio N.4 Usando sviluppi di Taylor calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2\log\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)\right).$$

PARTE TEORICA:

1. Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ con x_0 ed ℓ finiti. Scrivere l'espressione di una funzione non definita in $x_0 = 0$ ma tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
2. Enunciare il Teorema della media integrale.
   Il teorema determina una condizione necessaria e sufficiente? Solo necessaria? Solo sufficiente? Argomentare la risposta usando anche degli esempi.
3. Dare la definizione di estremo inferiore e di minimo di un insieme E. Quale é la differenza?

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
17 Giugno 2022
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 Data la funzione

$$f(x) := \frac{5\log x}{1+\log^2 x} + 3\arctan(\log x)$$

determinare

- il dominio della funzione;
- gli eventuali asintoti;
- i punti di estremo relativo e assoluto;
- tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{(n+5)! + 7^n + \cos n}{(n+7)!}\right).$$

Esercizio N.3 Calcolare

$$\int \frac{\cos x}{4\sin x - 3\cos x}\, dx.$$

Esercizio N.4 Data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} & x \le 1 \\ (x-1)^\alpha \sin\sqrt[3]{x-1} \quad \text{se} & x > 1 \end{cases}$$

Studiare al variare di $\alpha \ge 0$ la continuitá e la derivabilitá di g.

PARTE TEORICA:

1. Dare la definizione di successione limitata.
   Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell < +\infty$ allora la successione é limitata? E il viceversa é vero? Illustrare con esempi.

2. Enunciare il Teorema di Bolzano o degli zeri. Illustrare graficamente il risultato e fornire un esempio di funzione che pur non soddisfando un'ipotesi del teorema la tesi è vera.

3. Dare la definizione di serie assolutamente convergente e stabilire la relazione tra assoluta convergenza e convergenza semplice con esempi.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
17 Giugno 2022
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.

Esercizio N.1 Data la funzione

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$$

determinare

- il dominio della funzione;
- gli eventuali asintoti;
- i punti di estremo relativo e assoluto;
- tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio N. 2 Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{(n+5)! + 7^n + \cos n}{(n+7)!}\right).$$

Esercizio N.3 Calcolare

$$\int \frac{1}{\sin 2x + \cos^2 x}\, dx.$$

Esercizio N.4 Data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^{x+1} + \dfrac{\alpha - 1}{x+1} & \text{se} \quad x > -1 \\ 1 \quad \text{se} & x \leq -1 \end{cases}$$

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuitá e la derivabilitá di g.

PARTE TEORICA:

1. Dare la definizione di successione non limitata.
   Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora la successione é non limitata? E il viceversa é vero? Illustrare con esempi.

2. Enunciare il Teorema di Lagrange. Illustrare graficamente il risultato e fornire un esempio di funzione che pur non soddisfando un'ipotesi del teorema la tesi è vera.

3. Dare la definizione di serie assolutamente convergente e stabilire la relazione tra assoluta convergenza e convergenza semplice con esempi.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
14 Giugno 2021
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio N.1

1. Data
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \frac{\log(x^2+1)}{\arcsin\sqrt{x^2-1}}$$
determinare il dominio di $f(x)$.

2. Data
$$g(x) = \sqrt{x - |2 - x^2|}$$
determinare gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e gli eventuali punti di non derivabilitá e classificarli.

Esercizio N. 2

1. Dire se la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^3 + \log n - \arctan n)\sin\frac{2}{n^4}}{e^{4n}(\log n)^2}$$
risulta convergente.

2. Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^n.$$
Stabile per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente e, per tali x, calcolare la somma della serie.

Esercizio N.3

1. Calcolare
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sin x - 2}{(\sin x - 1)\tan x}\, dx.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema della media integrale e calcolare la media di $f(x) = 2x^4 - x$ nell'intervallo $[-1, 2]$.

2. Dare la definizione di serie assolutamente convergente e stabilire la sua relazione con la convergenza semplice illustrando con esempi.

3. Dato
$$\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{\log x - 1}\, dx.$$
Il suddetto integrale é da ritenersi in senso improprio o di Riemann? Perché?

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
14 Giugno 2021
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio N.1

1. Data
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} + \frac{\log(3x^2 + 5)}{\arccos\sqrt{x^2 - 4}}$$
determinare il dominio di $f(x)$.

2. Data
$$g(x) = \sqrt{x - |2 - x^2|}$$
determinare gli eventuali punti di massimo/minimo relativo e gli eventuali punti di non derivabilitá e classificarli.

Esercizio N. 2

1. Dire se la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^4 + n\log n - \arctan n)\sin\frac{2}{n^5}}{e^{5n}(\log n)^7}$$
risulta convergente.

2. Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^n.$$
Stabile per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente e, per tali x, calcolare la somma della serie.

Esercizio N.3

1. Calcolare
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\cos x - 3)\tan x}{\cos x + 1}\, dx.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema della media integrale e calcolare la media di $f(x) = 2x^4 - x$ nell'intervallo $[-1, 2]$.

2. Dare la definizione di serie assolutamente convergente e stabilire la sua relazione con la convergenza semplice illustrando con esempi.

3. Dato
$$\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{\log x - 1}\, dx.$$
Il suddetto integrale é da ritenersi in senso improprio o di Riemann? Perché?

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
20 Settembre 2021
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio N.1

1. Data
$$f(x) = 2\log|\log(x+2)| + \log(x+2)$$
determinare il dominio di $f(x)$ e gli eventuali asintoti.

2. Trovare il massimo e il minimo assoluto di
$$h(x) := \begin{cases} e^{-x^2-2x} & \text{se } x < 0 \\ \log\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio N. 2 Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!(x-1)^n}{(2n)^n}$$
risulta convergente.

Esercizio N.3 Calcolare
$$\int_{-1}^{0} \frac{2x^3-1}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.

2. Dare la definizione di funzione monotona e dare una sua caratterizzazione.
Stabilire, usando la definizione, che la funzione $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ é decrescente sul proprio insieme di definizione.

3. Cosa vuol dire che una funzione ha una discontinuitá di tipo salto? Illustrare anche con esempi.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
20 Settembre 2021
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio N.1

1. Data
$$f(x) = 2\log|\log(x+3)| + \log(x+3)$$
determinare il dominio di $f(x)$ e gli eventuali asintoti.

2. Trovare il massimo e il minimo assoluto di
$$h(x) := \begin{cases} e^{-x^2-2x} & \text{se } x < 0 \\ \log\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio N. 2 Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!(x-2)^n}{(3n)^n}$$
risulta convergente.

Esercizio N.3 Calcolare
$$\int_{-1}^{0} \frac{4+x^3}{x^3+3x}\,dx.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.

2. Dare la definizione di funzione monotona e dare una sua caratterizzazione.
Stabilire, usando la definizione, che la funzione $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ é decrescente sul proprio insieme di definizione.

3. Cosa vuol dire che una funzione ha una discontinuitá di tipo salto? Illustrare anche con esempi.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
27 Luglio 2021
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = 2\ln|3-2x| - 3x$$

determinare:

- il dominio;
- massimi e minimi relativi e assoluti;
- eventuali punti di non derivabilitá.

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2-x)^n}{4n^2 + \ln(3n^3+1)}$$

risulta convergente.

Esercizio 3. Usando la definizione calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3x}(6x+1)}\, dx.$$

Esercizio 4. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni di

$$\frac{x^3}{2x-1} = \alpha.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema di Fermat. Il viceversa del teorema é ancora vero? Illustrare con esempi.
2. Dare la definizione di serie convergente, divergente e irregolare e fare un esempio di serie convergente, di serie divergente e di serie irregolare.
3. Dare la definizione di primitiva di una funzione e di integrale indefinito di una funzione.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
27 Luglio 2021
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = 2\ln|5-3x| - 2x$$

determinare:

- il dominio;
- massimi e minimi relativi e assoluti;
- eventuali punti di non derivabilitá.

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n^2 - \ln(3n^4+1)}$$

risulta convergente.

Esercizio 3. Usando la definizione calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5x}(2x+1)}\, dx.$$

Esercizio 4. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni di

$$\frac{x^3}{3x-2} = \alpha.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema di Fermat. Il viceversa del teorema é ancora vero? Illustrare con esempi.
2. Dare la definizione di serie convergente, divergente e irregolare e fare un esempio di serie convergente, di serie divergente e di serie irregolare.
3. Dare la definizione di primitiva di una funzione e di integrale indefinito di una funzione.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
27 Luglio 2021
PROVA C
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = 2\ln|4-6x| - x$$

determinare:

- il dominio;
- massimi e minimi relativi e assoluti;
- eventuali punti di non derivabilitá.

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+x)^n}{2n^5 + \ln(n^4+1)}$$

risulta convergente.

Esercizio 3. Usando la definizione calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(5x+6)}\, dx.$$

Esercizio 4. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni di

$$\frac{2x^3}{4x-5} = \alpha.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema di Fermat. Il viceversa del teorema é ancora vero? Illustrare con esempi.
2. Dare la definizione di serie convergente, divergente e irregolare e fare un esempio di serie convergente, di serie divergente e di serie irregolare.
3. Dare la definizione di primitiva di una funzione e di integrale indefinito di una funzione.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
27 Luglio 2021
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = 2\ln|7-4x| - 2x$$

determinare:

- il dominio;
- massimi e minimi relativi e assoluti;
- eventuali punti di non derivabilitá.

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+1)^n}{n^2 + \ln(2n^4+1)}$$

risulta convergente.

Esercizio 3. Usando la definizione calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x}(5x+6)}\, dx.$$

Esercizio 4. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni di

$$\frac{x^3}{6x-1} = \alpha.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema di Fermat. Il viceversa del teorema é ancora vero? Illustrare con esempi.
2. Dare la definizione di serie convergente, divergente e irregolare e fare un esempio di serie convergente, di serie divergente e di serie irregolare.
3. Dare la definizione di primitiva di una funzione e di integrale indefinito di una funzione.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
28 Giugno 2021
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio N.1
Data la funzione

$$f(x) := \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}$$

determinare:

1. il dominio di $f(x)$;
2. i limiti alla frontiera del dominio ed eventuali asintoti;
3. la derivata prima di f, eventuali punti di massimo/minimo relativo per f ed eventuali punti di non derivabilitá classificandoli;
4. il grafico qualitativo di f.

Esercizio N. 2
Usando la definizione di integrale improprio calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+9)}\, dx.$$

Esercizio N.3
Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^3}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1}.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema di Lagrange e illustrare il suo significato geometrico.
2. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto, di funzione continua in un punto e discutere la relazione tra derivabilitá e continuitá anche con esempi.
3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte:
   - La serie
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{3}{7}\right)^n$$
     a) converge a $1+\frac{7}{4}$;

b) é indeterminata;

c) converge a 1;

d) diverge.

- Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a termini positivi convergente a 0. Allora:

a) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ é convergente;

b) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge se (a_n) é decrescente;

c) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge;

d) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se (a_n) é decrescente.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
28 Giugno 2021
PROVA B
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio N.1
Data la funzione

$$f(x) := \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}$$

determinare:

1. il dominio di $f(x)$;
2. i limiti alla frontiera del dominio ed eventuali asintoti;
3. la derivata prima di f, eventuali punti di massimo/minimo relativo per f ed eventuali punti di non derivabilitá classificandoli;
4. il grafico qualitativo di f.

Esercizio N. 2
Usando la definizione di integrale improprio calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{7x+4}{(x+4)(x^2+16)}\, dx.$$

Esercizio N.3
Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^4}} - 1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^\alpha}} - 1}.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema di Lagrange e illustrare il suo significato geometrico.
2. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto, di funzione continua in un punto e discutere la relazione tra derivabilitá e continuitá anche con esempi.
3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte:
   - La serie
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{3}{7}\right)^n$$
     a) converge a $1+\frac{7}{4}$;

b) é indeterminata;

c) converge a 1;

d) diverge.

- Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a termini positivi convergente a 0. Allora:

a) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ é convergente;

b) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge se (a_n) é decrescente;

c) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge;

d) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se (a_n) é decrescente.

COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA.....

ANALISI MATEMATICA

Prof.ssa Giusi Vaira
03 Settembre 2021
PROVA A
Regole: non si possono utilizzare appunti, calcolatrice etc... la prova non puó prescindere dalla parte teorica.
Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti..

Esercizio N.1

1. Data
$$f(x) = \frac{\arctan\sqrt{e^x - 2} + \log|x-1|}{\sqrt{5e^x - 4 - e^{2x}}}$$
determinare il dominio di $f(x)$.

2. Data
$$g(x) = x - |x^2 - 1| + 2$$
determinare il massimo di g in $[0, 2]$.

3. Data
$$h(x) := \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta & \text{se } x > 1 \end{cases}$$
Dire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $h(x)$ é continua e derivabile nel suo dominio.

Esercizio N. 2 Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n + x^{2n}}{n^3 + 1}$$
risulta convergente.

Esercizio N.3 Calcolare
$$\int_2^3 \frac{3x^3 + 1}{x^2 + x - 2}\, dx.$$

Parte Teorica:

1. Enunciare il Teorema di regolaritá delle successioni monotone.

2. Dare la definizione di estremo superiore e inferiore di un insieme e stabilire le differenze con il massimo e minimo di un insieme. Calcolare inoltre
$$\sup\left\{x = n - \frac{1}{n} \ : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}.$$

3. Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ illustrando anche graficamente il significato di tale operazione.