# Definizioni utili

## Estremo superiore, inferiore, massimo e minimo (insiemi)

Siano $X, E$ insiemi, $X \neq \emptyset, E \subseteq X$.

$E$ si dice limitato **superiormente** se $\exists M\, t.c.\ x \leq M\, \forall x \in E$.
$E$ si dice limitato **inferiormente** se $\exists m\, t.c.\ x \geq m\, \forall x \in E$.
$E$ si dice **limitato** se è limitato inferiormente e superiormente:

$$\exists M, m\ \ t.c.\ m \leq x \leq M\, \forall x \in E$$

$\bar{x}$ è **massimo** per $E$ se:

1. $\forall x \in E : x \leq \bar{x}\ (\max \mathrm{E})$
2. $\bar{x} \in E$

$\underline{x}$ è **minimo** per $E$ se:

1. $\forall x \in E : x \geq \underline{x}\ (\min \mathrm{E})$
2. $\underline{x} \in E$

**Ricorda: sia il massimo che il minimo $\in E$.**

sia $k \in X$ (**non necessariamente in** $E$, questa è la differenza con massimo e minimo).
$k$ è detto **maggiorante** di $E$ se $x \leq k\, \forall x \in E$.
$k$ è detto **minorante** di $E$ se $x \geq k\, \forall x \in E$.

Chiameremo **estremo superiore** di $E$ ($sup\ E$) il più piccolo tra tutti i maggioranti.
Chiameremo **estremo inferiore** di $E$ ($inf\ E$) il più grande tra tutti i minoranti.

### Assioma di completezza (o continuità)

Sia $A$ insieme, $A \subset \mathbb{R}$:

- se $A$ è limitato superiormente ammette $sup\ A$;
- se $A$ è limitato inferiormente ammette $inf\ A$;

## Valore assoluto

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = max\{x, -x\}$
Oss: $|x| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Sia $a \geq 0$:

- $|x| = a \iff x = a \vee x = -a$
- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \iff x \leq -a \vee x \geq a$

Disuguaglianza triangolare:

$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
Dim: somma membro a membro

Proprietà:
$\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$

## Intorni

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si definiscono intorni di $x_0$ gli intervalli del tipo

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

dove $\varepsilon > 0$ e piccolo.

Siano $A \subset \mathbb{R}, x_0, y_0 \in \mathcal{R}$

1. Il punto $x_0$ si dice **interno** ad $A$ se esiste un intorno di $x_0$ tutto contenuto in $A$
$$\exists I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 \; t.c. \; I \subset A$$
2. Il punto $y_0$ si dice **esterno** ad $A$ se esiste un intorno di $y_0$ tutto contenuto nel complementare di $A$
$$\exists I = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 \; t.c. \; I \subset A^c$$
3. I punti che non sono né interni né esterni sono detti di frontiera

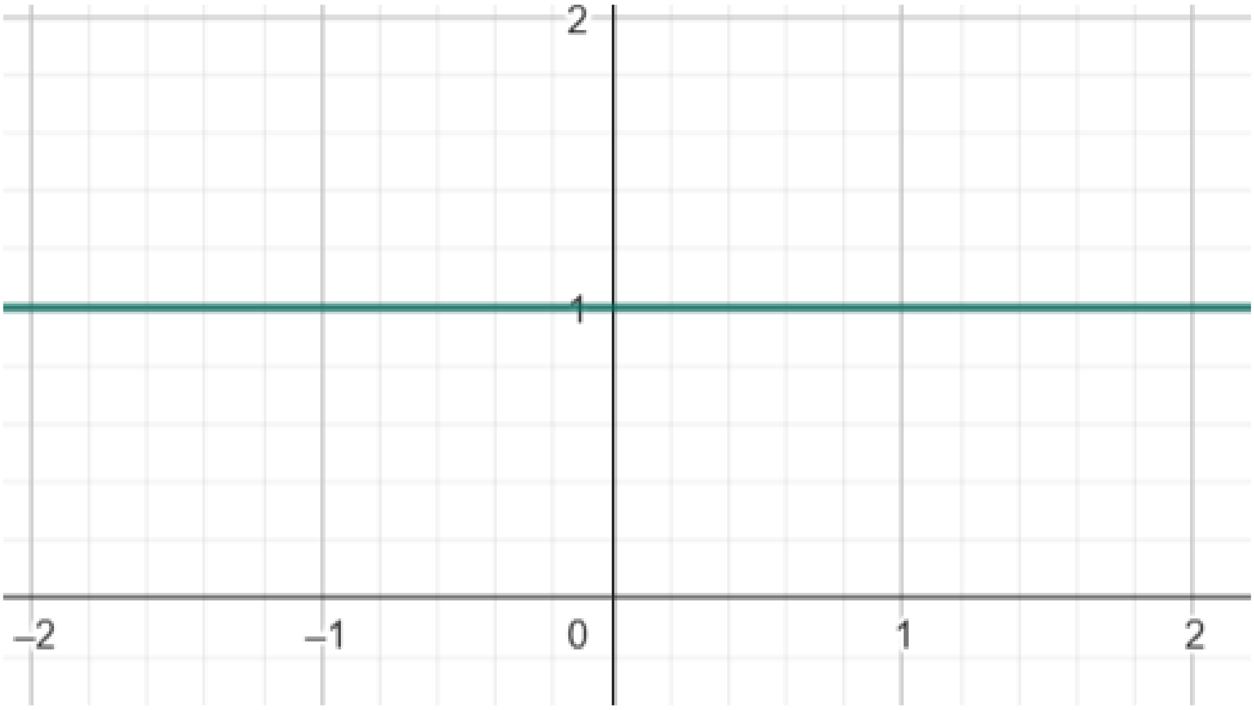
## Funzioni

Siano $A, B$ due insiemi. Una funzione $f : A \to B$ di dominio $A$ e codominio $B$ è una qualsiasi legge che associa ad ogni elemento di $A$ uno e un solo elemento di $B$.

$$f : x \in A \to f(x) \in B$$

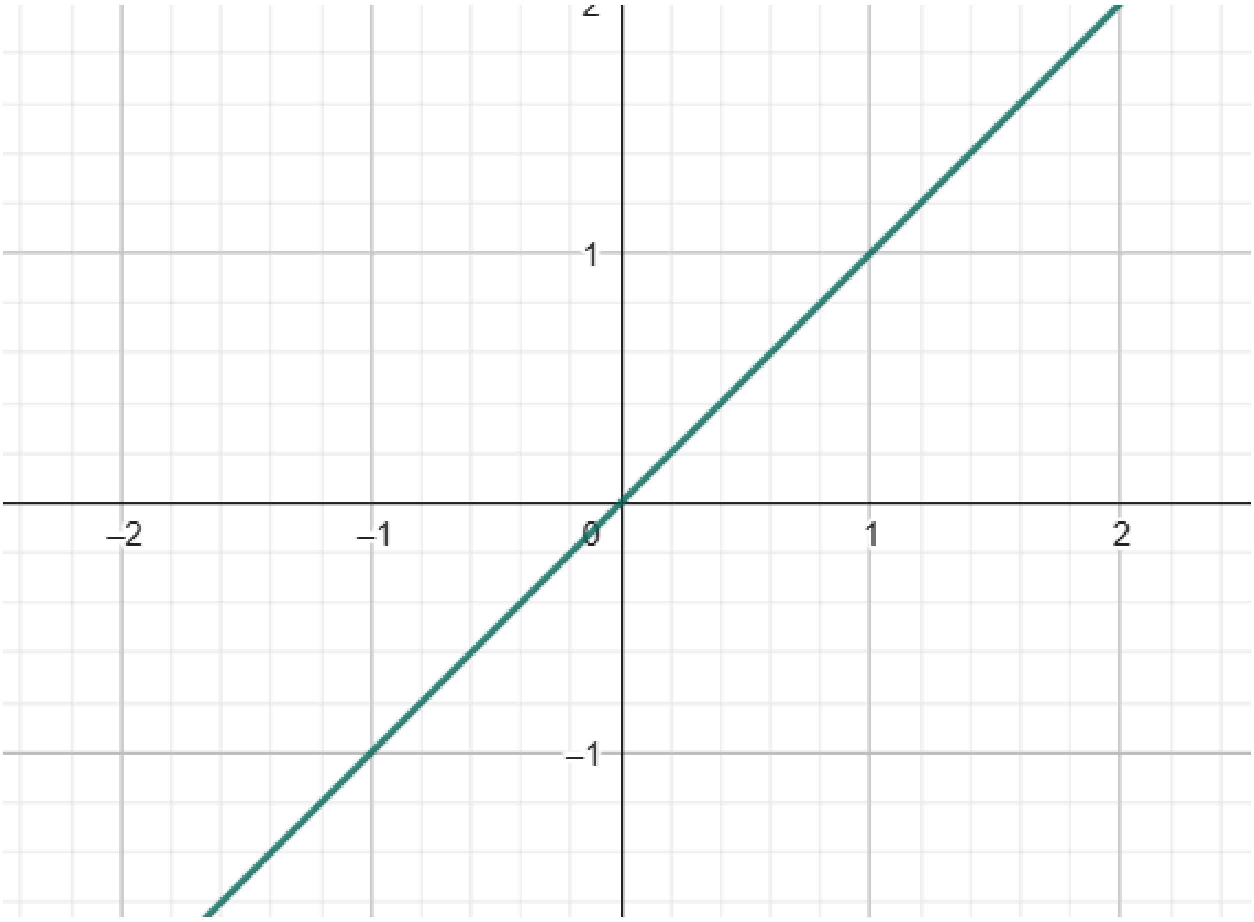
- Si dice insieme **immagine** di $f$ $Im\ f = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.
- L'insieme delle coppie $(x, f(x))$ al variare di $x \in A$ prende il nome di **grafico** di $f$.

Funzione costante:
$f(x) = c$



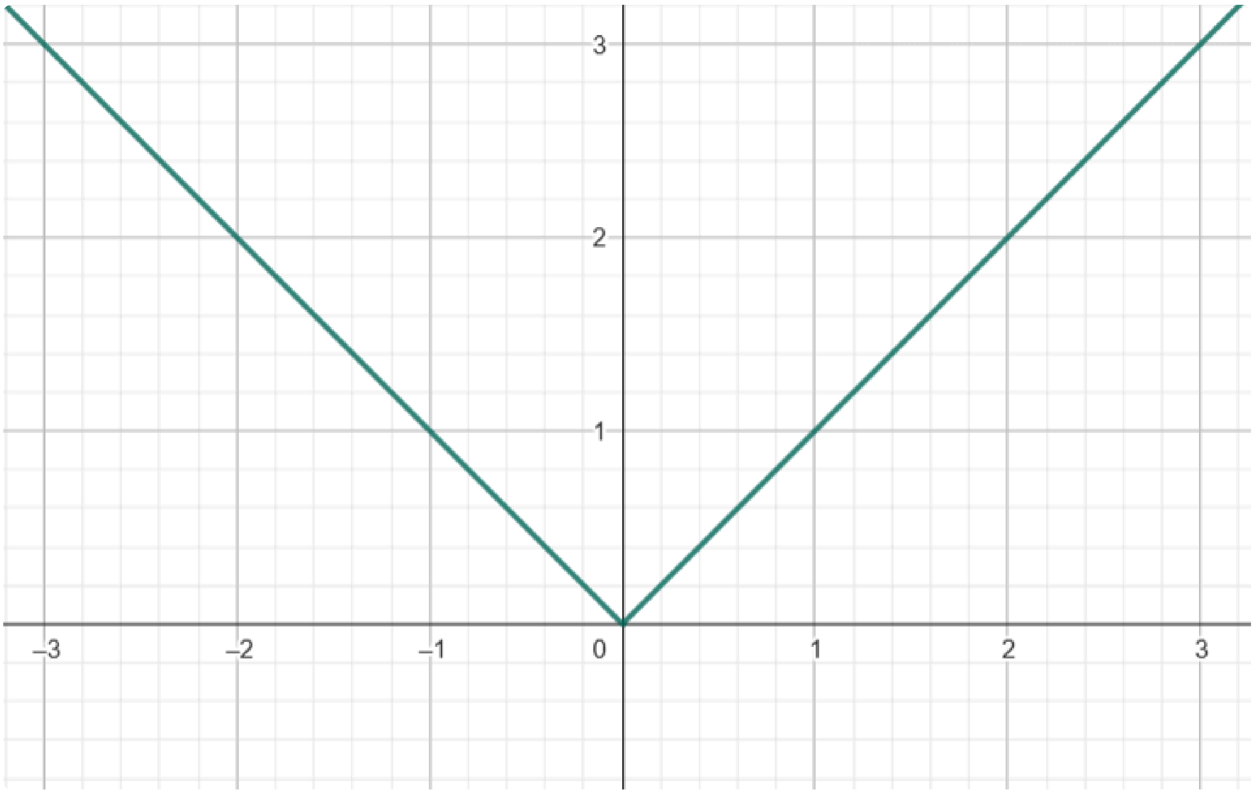

Oss: $Dom f = \mathbb{R}, Im f = c$
Funzione identica

$f(x) = x$



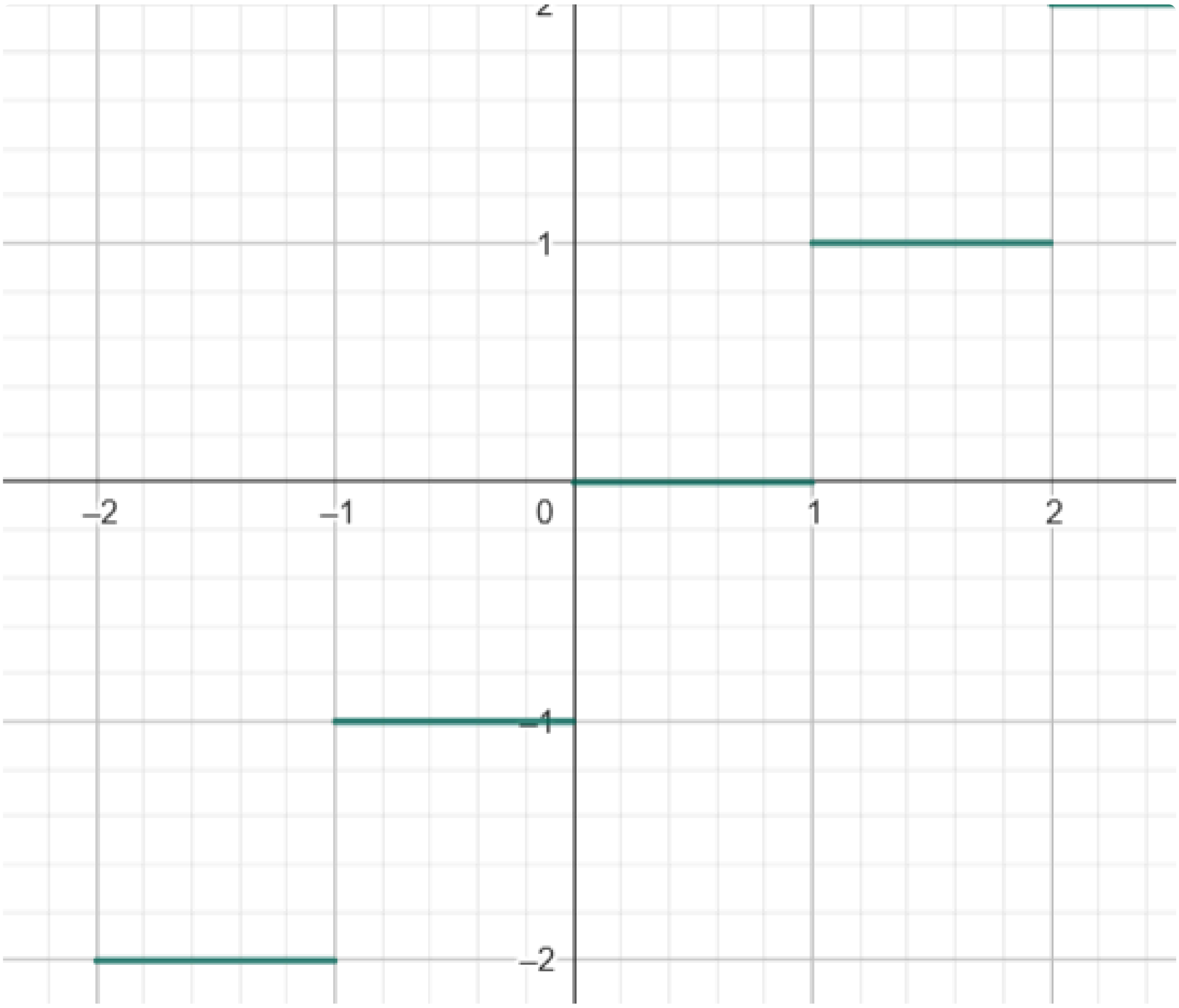

Funzione valore assoluto

$f(x) = |x|$




Oss: $Dom f = \mathbb{R}, Im f = [0, +\infty)$

Funzione parte intera
$f(x) = [x]$




Oss: $Dom f = \mathbb{R}, Im f = \mathbb{Z}$

### Simmetrie

Una funzione si dice:

- pari se $f(-x) = f(x) \ \forall x \in A$
- dispari se $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in A$

### Funzioni periodiche

$A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che $A$ sia periodico di periodo $T > 0$, ovvero

$$x \in A \to x + T \in A$$

La funzione $f$ si dice **periodica** di periodo $T > 0$ se $\forall x \in A : f(x) = f(x+T)$
Oss: una funzione periodica si ripete su ogni intervallo di ampiezza $T$.

**Funzioni iniettive e suriettive**

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $f$ si dice **iniettiva** se $\forall x_1, x_2 \in A \, t.c. \; x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ (a valori diversi di x corrispondono immagini diverse)
- $f$ si dice **suriettiva** se $\forall y \in \mathbb{R}, \; \exists x \in A \, t.c. \; f(x) = y$ (per ogni elemento del codominio esiste almeno un elemento del dominio collegato ad esso)
- $f$ si dice **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Se una funzione è biettiva allora è **invertibile**.
  Oss: le funzioni pari e periodiche non sono **mai** iniettive.

**Monotonia**

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f$ si dice:

1. Monotona **crescente**: se
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \; allora \; f(x_1) \leq f(x_2)$$
2. Monotona **decrescente**: se
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \; allora \; f(x_1) \geq f(x_2)$$
3. **Strettamente** monotona **crescente**: se
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \; allora \; f(x_1) < f(x_2)$$
4. **Strettamente** monotona **decrescente**: se
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \; allora \; f(x_1) > f(x_2)$$
   Oss: attenzione ai $\geq$ / $\leq$ della monotona e ai $>$ / $<$ della strettamente monotona!

Teorema: **ogni funzione strettamente monotona è iniettiva**.
Dim: se una funzione è strettamente monotona crescente, avremo che
$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2, \text{ allora (per ipotesi) } f(x_1) < f(x_2), \; ovvero \; f(x_1) \neq f(x_2)$.
Stesso ragionamento vale per le funzioni strettamente monotone decrescenti.

Utile da ricordare:

- La monotonia della funzione è determinata dal segno della derivata prima in un determinato intervallo.
- Se nell'intervallo ci sono alcuni punti in cui la derivata si annulla $\to$ monotona (attenzione nel caso di funzioni costanti!);

- Se nell'intervallo la derivata non si annulla $\rightarrow$ strettamente monotona;

## Estremi e limitatezza

### Massimi e minimi assoluti e relativi

Sia $f : A \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

- $x_0$ si dice **punto di minimo assoluto** (o globale) se

$$\forall x \in A : f(x) \geq f(x_0)$$

- $x_0$ si dice **punto di massimo assoluto** (o globale) se

$$\forall x \in A : f(x) \leq f(x_0)$$

  il valore $f(x_0)$ si dice **minimo** (o **massimo**) **assoluto** di $f$.
  Oss: non confondere **punto di massimo/minimo** con **massimo/minimo**!
- $x_0$ punto di massimo/minimo
- $f(x_0)$ massimo/minimo

Oss: se il minimo o il massimo assoluto esiste esso è unico, ma i punti in cui si realizza possono non essere unici.

Oss: il minimo di $f$ si indica con

$$min\ f(x) \quad x \in A \quad = \text{minimo dell'insieme immagine } Im(f)$$

Oss: il massimo di $f$ si indica con

$$max\ f(x) \quad x \in A \quad = \text{massimo dell'insieme immagine } Im(f)$$

Sia $f : A \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

- $x_0$ si dice **punto di minimo relativo** (o locale) se $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 :$

$$f(x) \geq f(x_0)$$

- $x_0$ si dice **punto di massimo relativo** (o locale) se $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 :$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

  Oss: i minimi o massimi locali (se esistono) possono **non essere** unici.

### Limitatezza

Sia $f : A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- $f$ si dice **limitata inferiormente** se

$$\exists m \in \mathbb{R}\, t.\, c.\ \forall x \in A : f(x) \geq m$$

- $f$ si dice **limitata superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R}\, t.\, c.\ \forall x \in A : f(x) \leq M$$

- $f$ si dice **limitata** se è limitata sia superiormente sia inferiormente

Notazione: se $f$ non è limitata inferiormente si pone $\inf f(x) = -\infty$.
Notazione: se $f$ non è limitata superiormente si pone $\sup f(x) = +\infty$.

## Convessità

- Una funzione $f$ si dice **convessa** in $I$ se $\forall a, b \in \mathbb{R}\, t.\, c.\ [a, b] \subseteq I$:

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

  $\forall x \in [a, b]$.
- Una funzione $f$ si dice **concava** se non è convessa.

Oss. per ricordare:

- concava faccina **triste**
- convessa faccina **felice**