Definizioni utili

Estremo superiore, inferiore, massimo e minimo (insiemi)

Siano X, E insiemi, $X \neq \emptyset, E \subseteq X$.

- E si dice limitato **superiormente** se $\exists M \; t.c. \; x \leq M \; \forall x \in E$.
- E si dice limitato **inferiormente** se $\exists m \; t.c. \; x \geq m \; \forall x \in E$.
- E si dice **limitato** se è limitato inferiormente e superiormente:

$$\exists M, m \;\; t.c. \; m \leq x \leq M \; \forall x \in E$$

  $\bar{x}$ è **massimo** per E se:

1. $\forall x \in E : x \leq \bar{x} \; (\max \mathrm{E})$
2. $\bar{x} \in E$

$\underline{x}$ è **minimo** per E se:

1. $\forall x \in E : x \geq \underline{x} \; (\min \mathrm{E})$
2. $\underline{x} \in E$

Ricorda: sia il massimo che il minimo $\in E$.

sia $k \in X$ (**non necessariamente in** E, questa è la differenza con massimo e minimo).

- k è detto **maggiorante** di E se $x \leq k \; \forall x \in E$.
- k è detto **minorante** di E se $x \geq k \; \forall x \in E$.

Chiameremo **estremo superiore** di E ($sup \; E$) il più piccolo tra tutti i maggioranti.
Chiameremo **estremo inferiore** di E ($inf \; E$) il più grande tra tutti i minoranti.

Assioma di completezza (o continuità)

Sia A insieme, $A \subset \mathbb{R}$:

- se A è limitato superiormente ammette $sup \; A$;
- se A è limitato inferiormente ammette $inf \; A$;

Valore assoluto

$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = max\{x, -x\}$
Oss: $|x| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Sia $a \geq 0$:

- $|x| = a \iff x = a \vee x = -a$
- $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \iff x \leq -a \vee x \geq a$

Disuguaglianza triangolare:

$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
Dim: somma membro a membro

Proprietà:
$\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$

Intorni

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si definiscono intorni di x_0 gli intervalli del tipo

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

dove $\varepsilon > 0$ e piccolo.

Siano $A \subset \mathbb{R}, x_0, y_0 \in \mathcal{R}$

1. Il punto x_0 si dice **interno** ad A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A
$$\exists I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 \; t.c. \; I \subset A$$
2. Il punto y_0 si dice **esterno** ad A se esiste un intorno di y_0 tutto contenuto nel complementare di A
$$\exists I = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 \; t.c. \; I \subset A^c$$
3. I punti che non sono né interni né esterni sono detti di frontiera

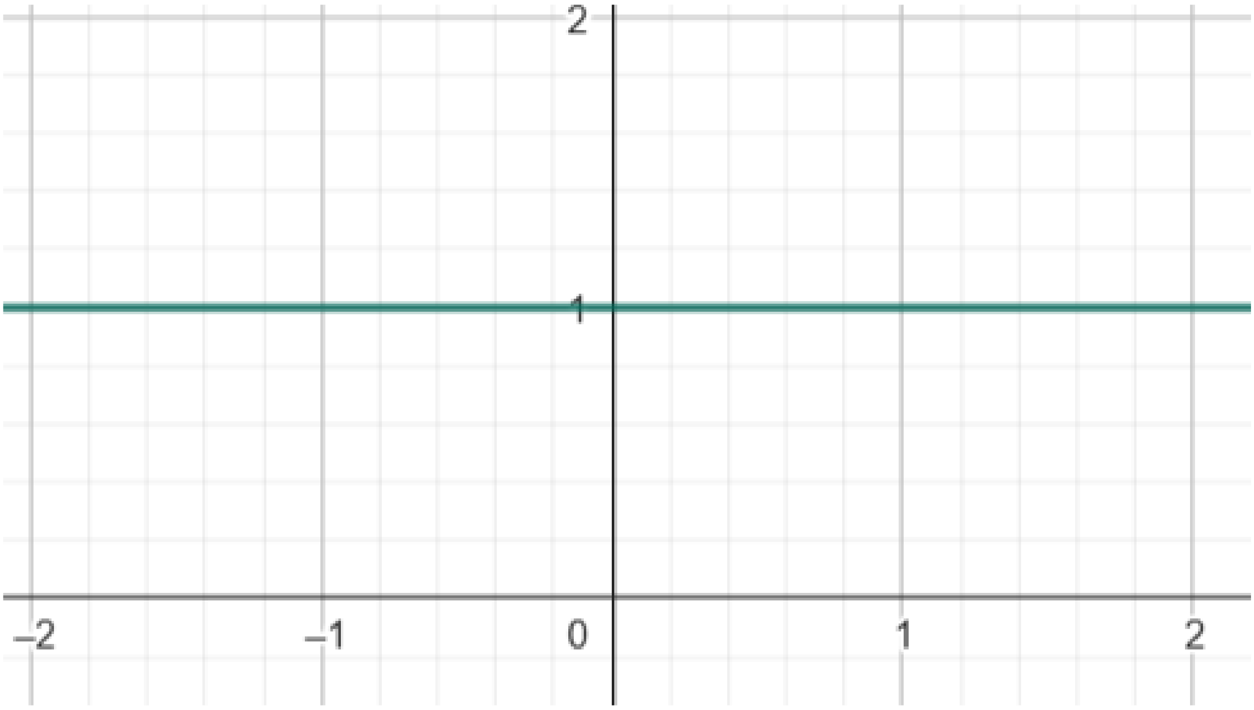
Funzioni

Siano A, B due insiemi. Una funzione $f : A \to B$ di dominio A e codominio B è una qualsiasi legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

$$f : x \in A \to f(x) \in B$$

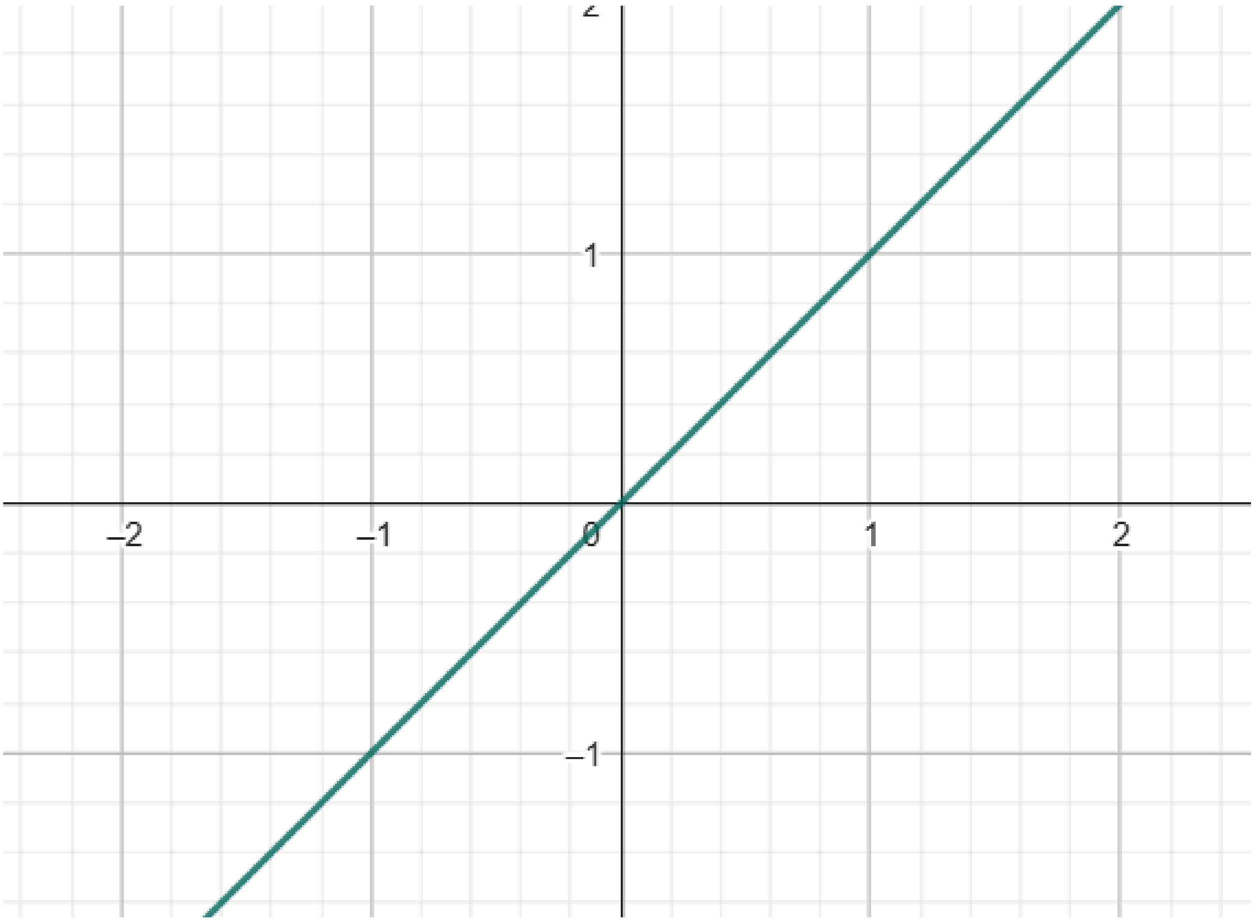
- Si dice insieme **immagine** di f $Im\ f = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.
- L'insieme delle coppie $(x, f(x))$ al variare di $x \in A$ prende il nome di **grafico** di f.

Funzione costante:
$f(x) = c$



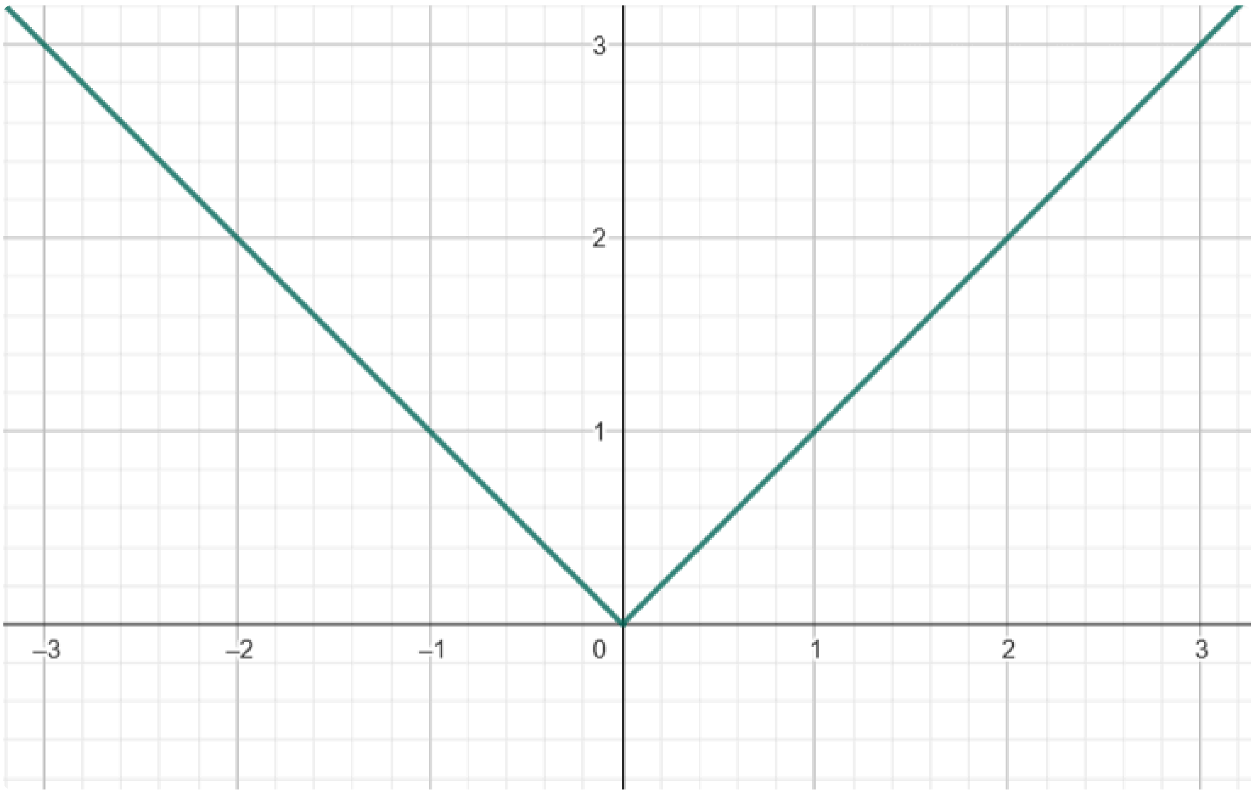
Oss: $Dom f = \mathbb{R}, Im f = c$
Funzione identica

$f(x) = x$



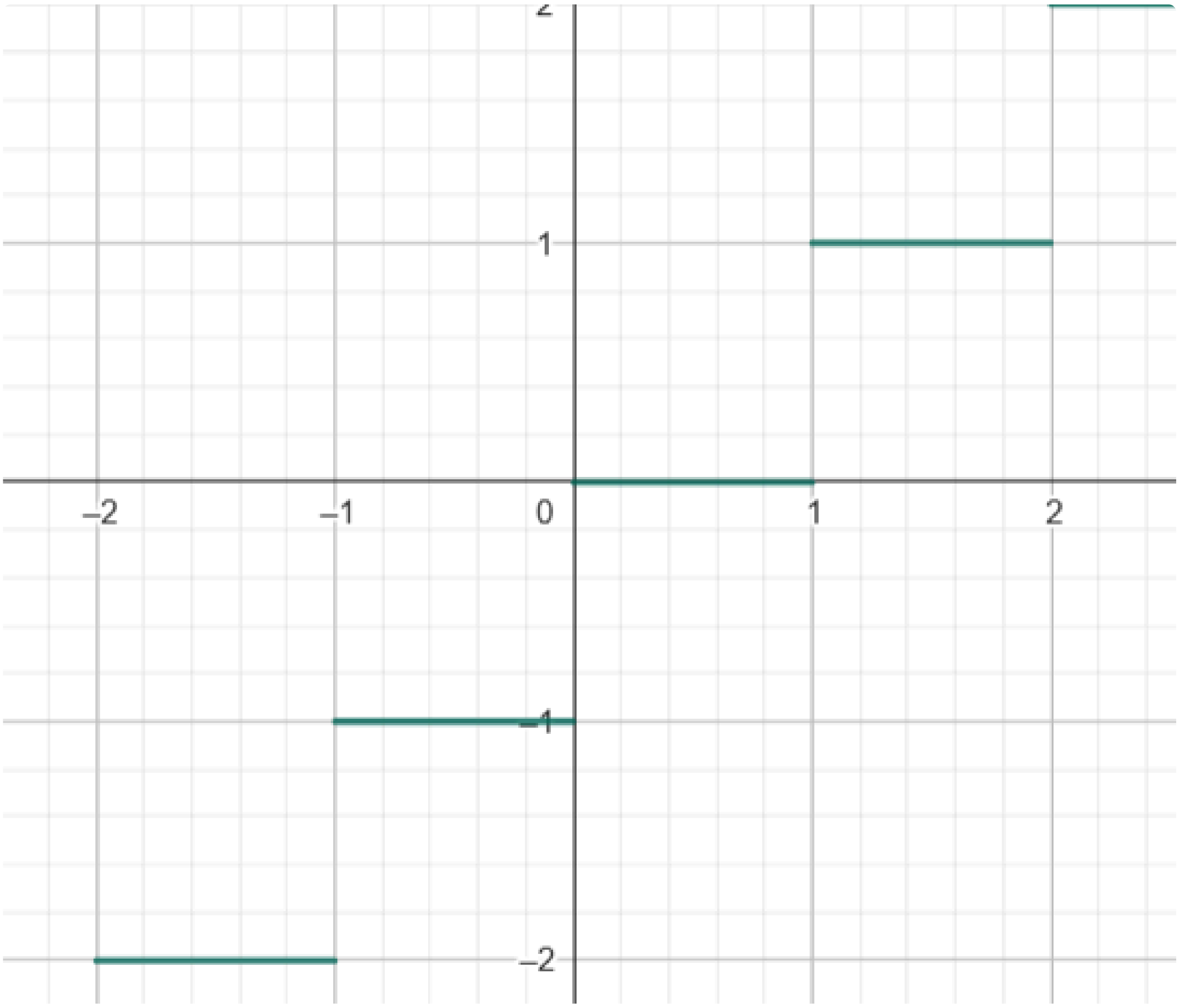
Funzione valore assoluto

$f(x) = |x|$



Oss: $Dom f = \mathbb{R}, Im f = [0, +\infty)$

Funzione parte intera
$f(x) = [x]$



Oss: $Dom f = \mathbb{R}, Im f = \mathbb{Z}$

Simmetrie

Una funzione si dice:

- pari se $f(-x) = f(x) \; \forall x \in A$
- dispari se $f(-x) = -f(x) \; \forall x \in A$

Funzioni periodiche

$A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che A sia periodico di periodo $T > 0$, ovvero

$$x \in A \to x + T \in A$$

La funzione f si dice **periodica** di periodo $T > 0$ se $\forall x \in A : f(x) = f(x + T)$
Oss: una funzione periodica si ripete su ogni intervallo di ampiezza T.

Funzioni iniettive e suriettive

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f si dice **iniettiva** se $\forall x_1, x_2 \in A\, t.c.\; x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ (a valori diversi di x corrispondono immagini diverse)
- f si dice **suriettiva** se $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A\, t.c.\; f(x) = y$ (per ogni elemento del codominio esiste almeno un elemento del dominio collegato ad esso)
- f si dice **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Se una funzione è biettiva allora è **invertibile**.
  Oss: le funzioni pari e periodiche non sono **mai** iniettive.

Monotonia

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f si dice:

1. Monotona **crescente**: se
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2\; allora\; f(x_1) \leq f(x_2)$$
2. Monotona **decrescente**: se
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2\; allora\; f(x_1) \geq f(x_2)$$
3. **Strettamente** monotona **crescente**: se
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2\; allora\; f(x_1) < f(x_2)$$
4. **Strettamente** monotona **decrescente**: se
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2\; allora\; f(x_1) > f(x_2)$$
   Oss: attenzione ai $\geq$ / $\leq$ della monotona e ai $>$ / $<$ della strettamente monotona!

Teorema: **ogni funzione strettamente monotona è iniettiva**.
Dim: se una funzione è strettamente monotona crescente, avremo che
$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2,$ allora (per ipotesi) $f(x_1) < f(x_2),\; ovvero\; f(x_1) \neq f(x_2)$.
Stesso ragionamento vale per le funzioni strettamente monotone decrescenti.

Utile da ricordare:

- La monotonia della funzione è determinata dal segno della derivata prima in un determinato intervallo.
- Se nell'intervallo ci sono alcuni punti in cui la derivata si annulla $\to$ monotona (attenzione nel caso di funzioni costanti!);

- Se nell'intervallo la derivata non si annulla $\rightarrow$ strettamente monotona;

Estremi e limitatezza

Massimi e minimi assoluti e relativi

Sia $f : A \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

- x_0 si dice **punto di minimo assoluto** (o globale) se

$$\forall x \in A : f(x) \geq f(x_0)$$

- x_0 si dice **punto di massimo assoluto** (o globale) se

$$\forall x \in A : f(x) \leq f(x_0)$$

  il valore $f(x_0)$ si dice **minimo** (o **massimo**) **assoluto** di f.
  Oss: non confondere **punto di massimo/minimo** con **massimo/minimo**!
- x_0 punto di massimo/minimo
- $f(x_0)$ massimo/minimo

Oss: se il minimo o il massimo assoluto esiste esso è unico, ma i punti in cui si realizza possono non essere unici.

Oss: il minimo di f si indica con

$$min\ f(x) \quad x \in A \quad = \text{minimo dell'insieme immagine } Im(f)$$

Oss: il massimo di f si indica con

$$max\ f(x) \quad x \in A \quad = \text{massimo dell'insieme immagine } Im(f)$$

Sia $f : A \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

- x_0 si dice **punto di minimo relativo** (o locale) se $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 :$

$$f(x) \geq f(x_0)$$

- x_0 si dice **punto di massimo relativo** (o locale) se $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon > 0 :$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

  Oss: i minimi o massimi locali (se esistono) possono **non essere** unici.

Limitatezza

Sia $f : A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f si dice **limitata inferiormente** se

$$\exists m \in \mathbb{R}\, t.\, c.\ \forall x \in A : f(x) \geq m$$

- f si dice **limitata superiormente** se

$$\exists M \in \mathbb{R}\, t.\, c.\ \forall x \in A : f(x) \leq M$$

- f si dice **limitata** se è limitata sia superiormente sia inferiormente

Notazione: se f non è limitata inferiormente si pone $\inf f(x) = -\infty$.
Notazione: se f non è limitata superiormente si pone $\sup f(x) = +\infty$.

Convessità

- Una funzione f si dice **convessa** in I se $\forall a, b \in \mathbb{R}\, t.\, c.\ [a, b] \subseteq I$:

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

  $\forall x \in [a, b]$.
- Una funzione f si dice **concava** se non è convessa.

Oss. per ricordare:

- concava faccina **triste**
- convessa faccina **felice**

Algebra delle funzioni

Siano $f : A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo $A \cap B \neq \emptyset$.
Allora possiamo definire:

- $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ (funzione somma)

$$x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- $f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R}$ (funzione prodotto)

$$x \to (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

  Proprietà:

- La **somma di due funzioni pari** (risp. **dispari**) è una **funzione pari** (risp. **dispari**). Infatti

$$f, g\, pari \;\; (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

- Il **prodotto di due funzioni aventi la stessa parità è pari**, il prodotto di due funzioni aventi **diversa parità è dispari**
- Sia f periodica di periodo $T_1 > 0$ e sia g periodica di periodo $T_2 > 0$. Supponiamo che $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}\,\{0\}$ t.c.

$$m_1 T_1 = m_2 T_2$$

  allora $f+g$ e $f \cdot g$ sono periodiche di periodo $T = m_1 T_1 = m_2 T_2$
- La **somma di due funzioni monotone** con **stesso tono** è essa stessa **monotona**, ovvero:
  - f, g monotone crescenti $\Rightarrow$ $f+g$ monotona crescente
  - f, g monotone decrescenti $\Rightarrow$ $f+g$ monotona decrescente
    Oss: per il prodotto non vi è equivalente.
- La **somma di due funzioni convesse** (risp. **concave**) è essa stessa **convessa** (risp. **concava**)
- La **somma di due funzioni limitate** (inferiormente e/o superiormente) è essa stessa **limitata** (inferiormente e/o superiormente)

Funzione composta

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni t.c. $f(A) \subseteq B$. (le immagini di f devono essere contenute in B).
Allora possiamo definire:

$$g\; o\; f : A \to \mathbb{R}$$

$$x \to (g\; o\; f)(x) = g(f(x))$$

Oss: non è detto che esistano sia $g\; o\; f$ sia $f\; o\; g$.
Possiamo definire $f\; o\; g$ come:

$$f\; o\; g : B \to \mathbb{R}$$

$$x \to (f\; o\; g)(x) = f(g(x))$$

Ricorda! In generale:

$$(f\; o\; g)(x) \neq (g\; o\; f)(x)$$

Funzione inversa

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biettiva. Allora f è **invertibile**, ovvero

$$\exists f^{-1} : Im\ f \to A$$

t.c. $f\ o\ f^{-1} = f^{-1}\ o\ f = id$ (identità)
Proposizione: $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è **strettamente monotona** $\Rightarrow$ f è **invertibile** e f^{-1} **conserva la stessa monotonia**.

Funzioni elementari

1. Funzione **potenza ad esponente intero positivo**
   Fissiamo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Definiamo la funzione potenza n-esima:

   $$f : x \in \mathbb{R} \to x^n \in \mathbb{R}$$

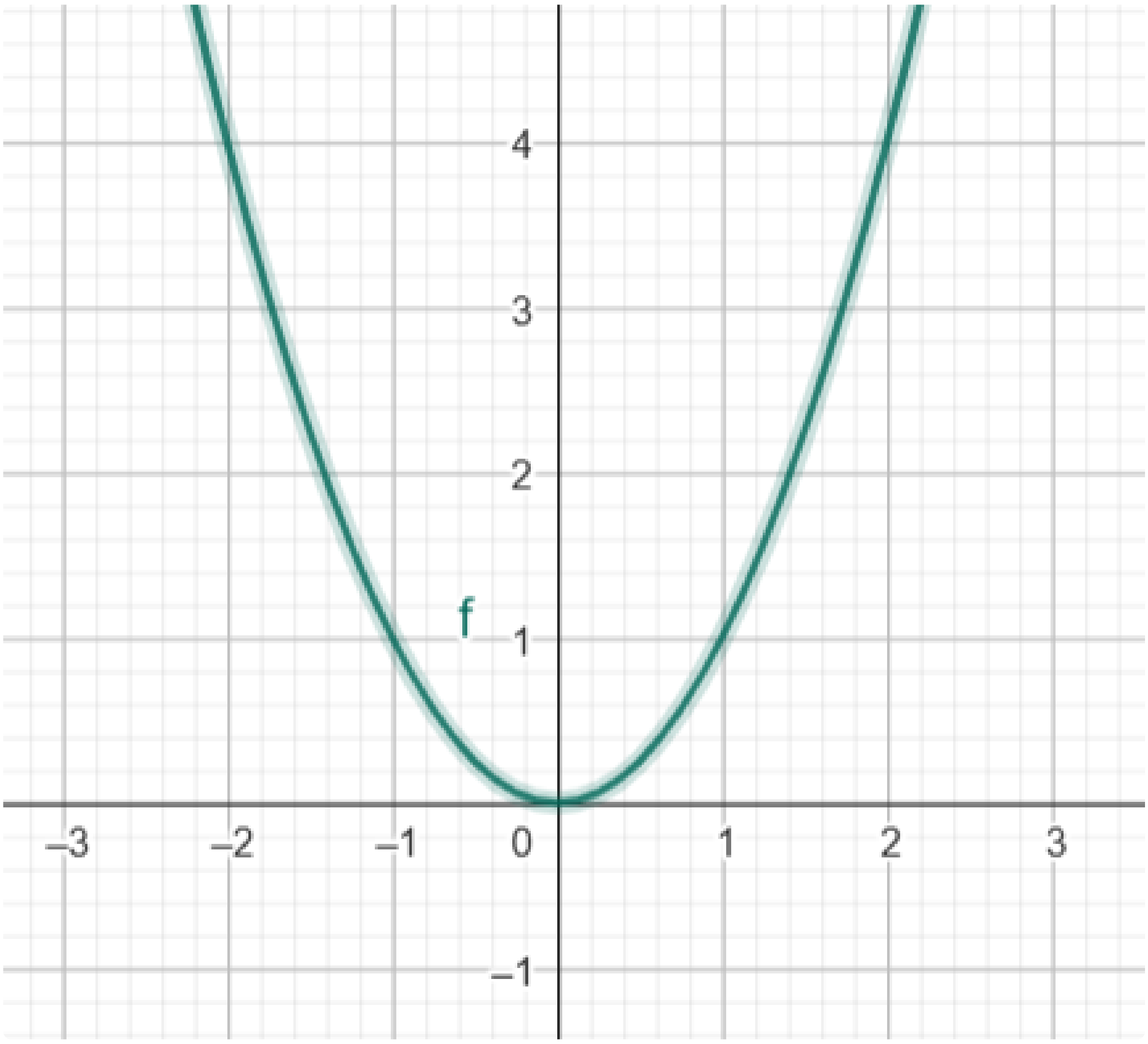
   Oss: per $n = 1, f(x) = x \text{ (f identica)}.$
   Attenzione:

   - per n **pari**: $f(x) = x^n$ è una **funzione pari** (grafico simmetrico rispetto all'asse y) e **non iniettiva**
   - per n **dispari** $f(x) = x^n$ è una **funzione dispari** (grafico simmetrico rispetto all'origine) e **iniettiva**

   Per n pari:

   - $Im\ f = [0, +\infty)$
   - se x è negativa $\Rightarrow$ $f(x)$ strettamente monotona decrescente
   - se x è positiva $\Rightarrow$ $f(x)$ strettamente monotona crescente
   - non limitata superiormente ($sup f(x) = +\infty$)
   - ha minimo assoluto $f(0) = 0$

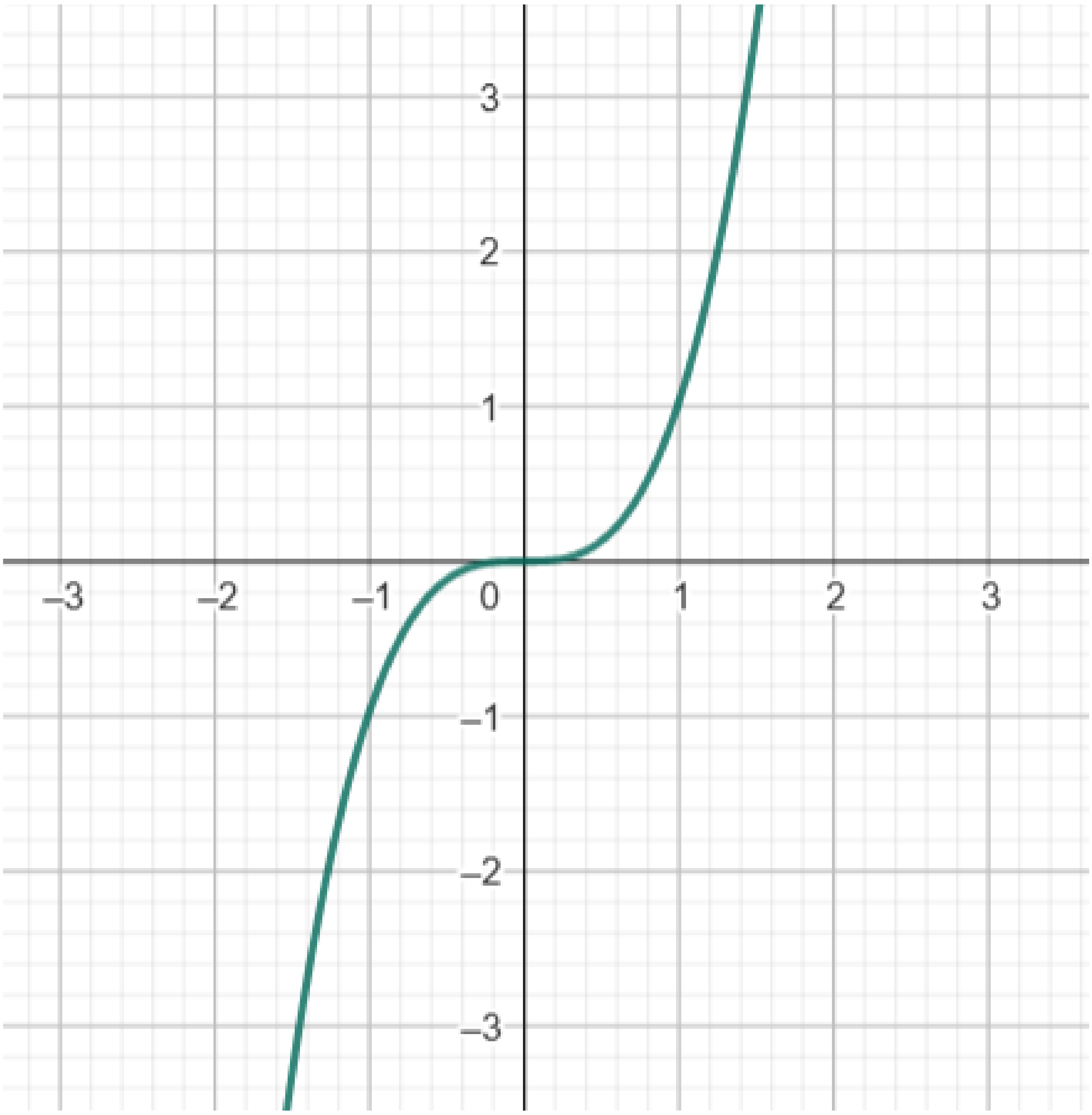
- f non invertibile



Per n dispari:

- $Im\ f = \mathbb{R}$
- Non è limitata
- f strettamente monotona crescente

- f invertibile



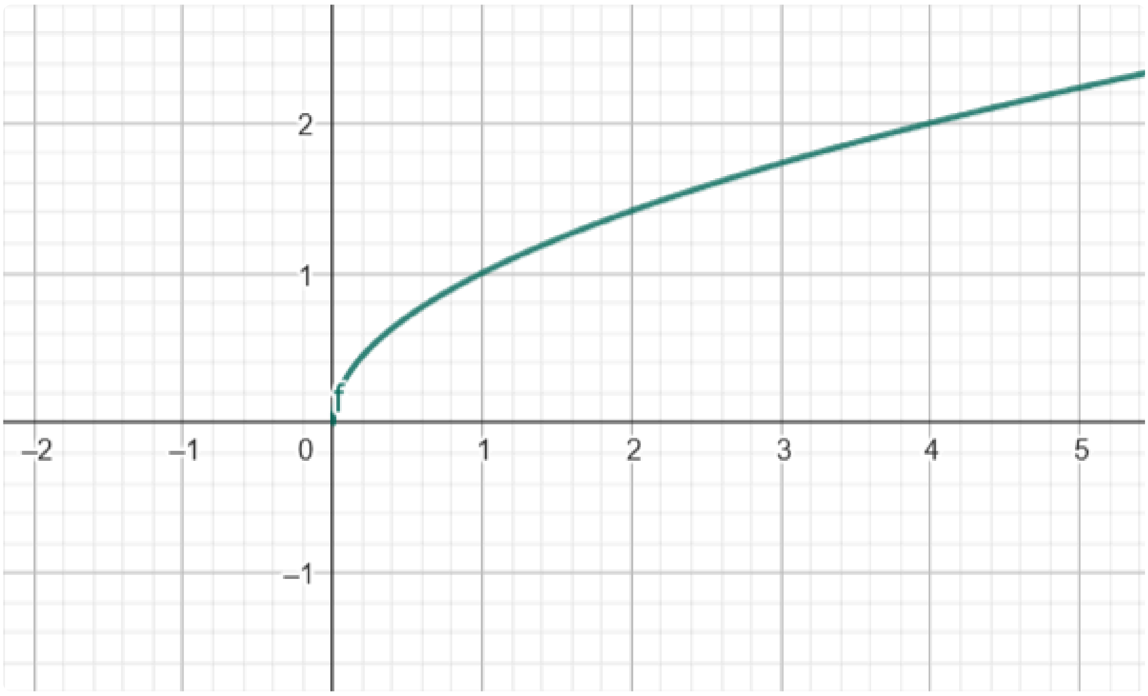
2. Funzione radice n-esima

$$f : x \in \mathbb{R} \to \sqrt[n]{x}$$

Per n pari:

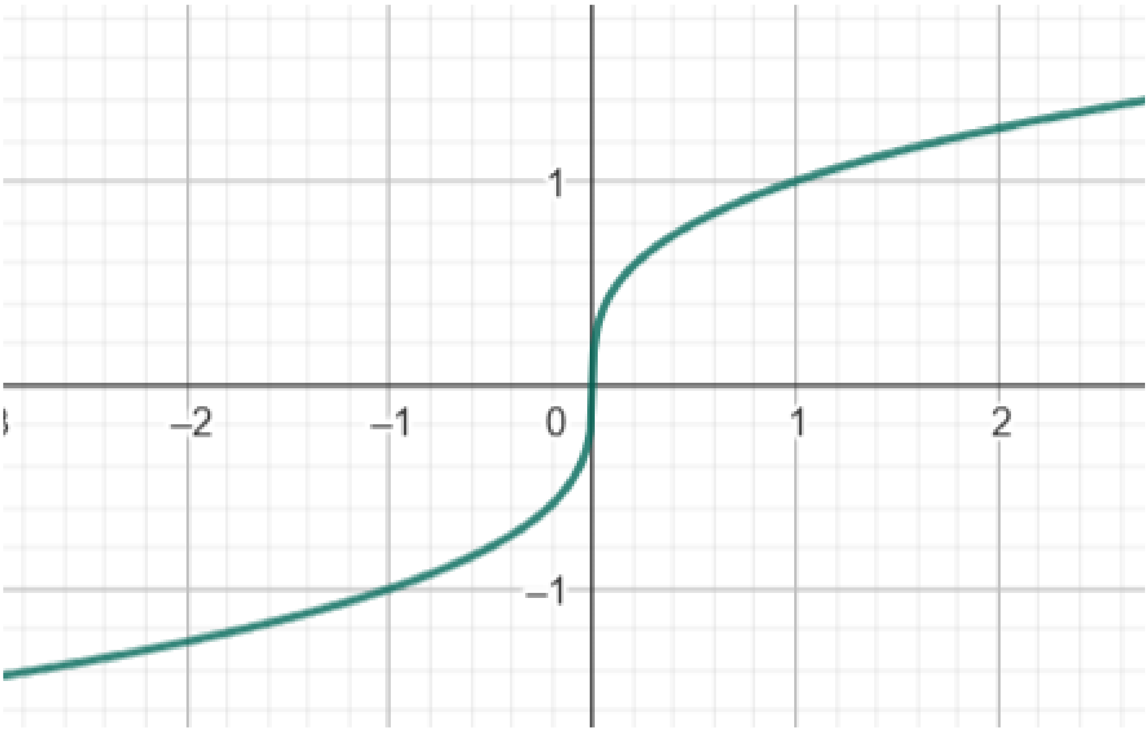
- $f : x \in [0, +\infty) \to x^n \in [0, +\infty)$

- f invertibile $\Rightarrow \exists f^{-1} : x \in [0, +\infty) \rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty)$



Per n dispari:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- f invertibile $\Rightarrow \exists f^{-1} : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$

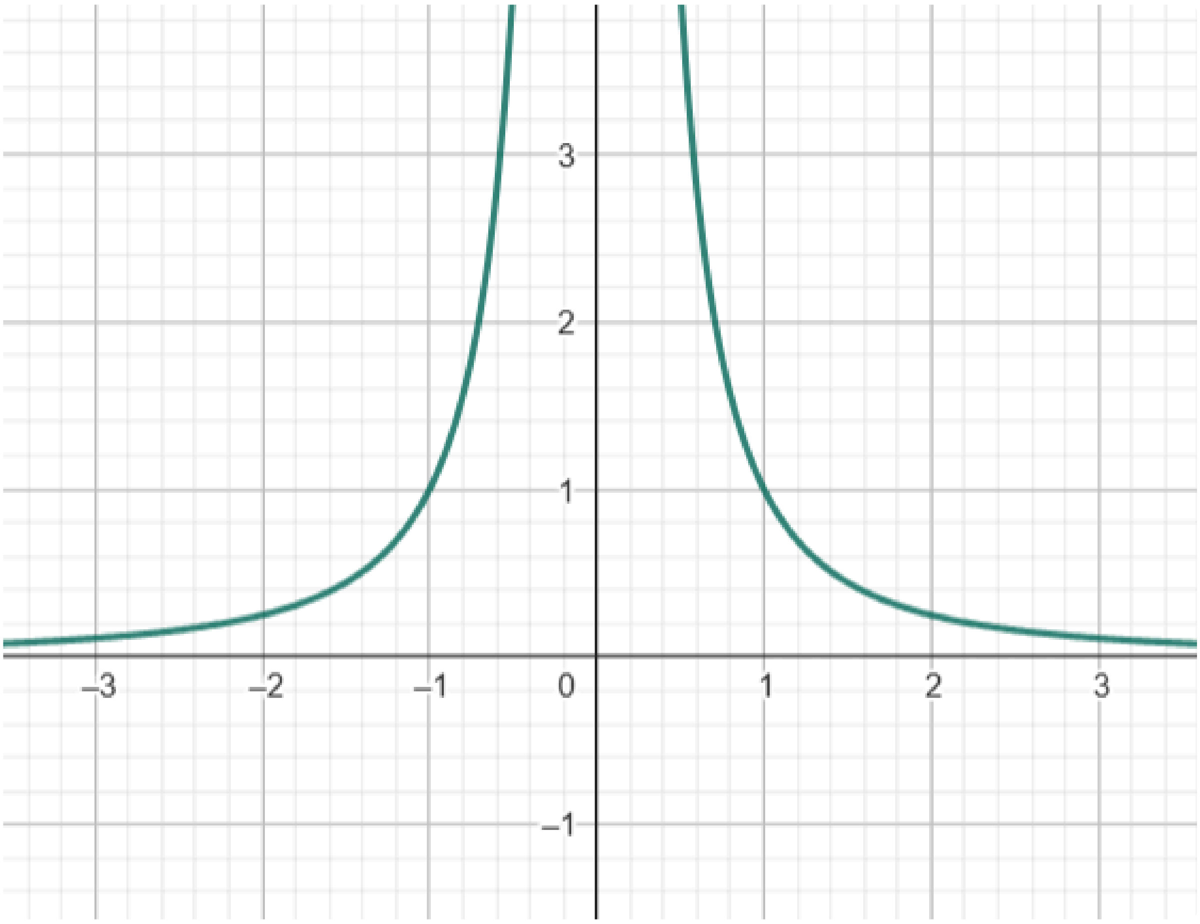


3. Potenze ad esponente intero

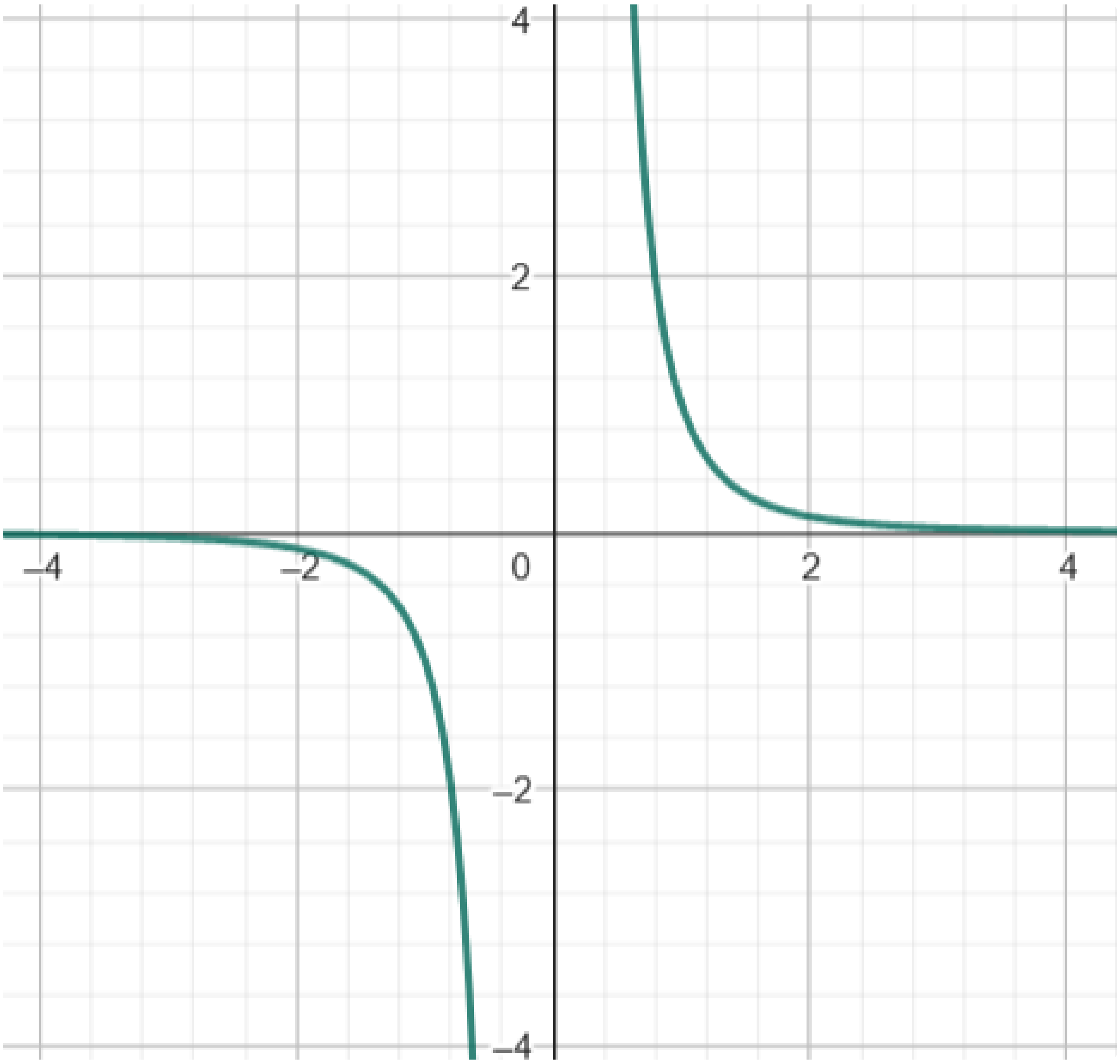
$$k \in \mathbb{Z}, f(x) = x^k$$

- se $k \geq 0$ allora $f(x)$ è la funzione potenza già vista
- se $k < 0$ allora $f(x) = (\frac{1}{x})^{-k}, -k > 0$
- $Df = \mathbb{R} - \{0\}$

- se $-k$ è pari $\Rightarrow f(x)$ pari e positiva

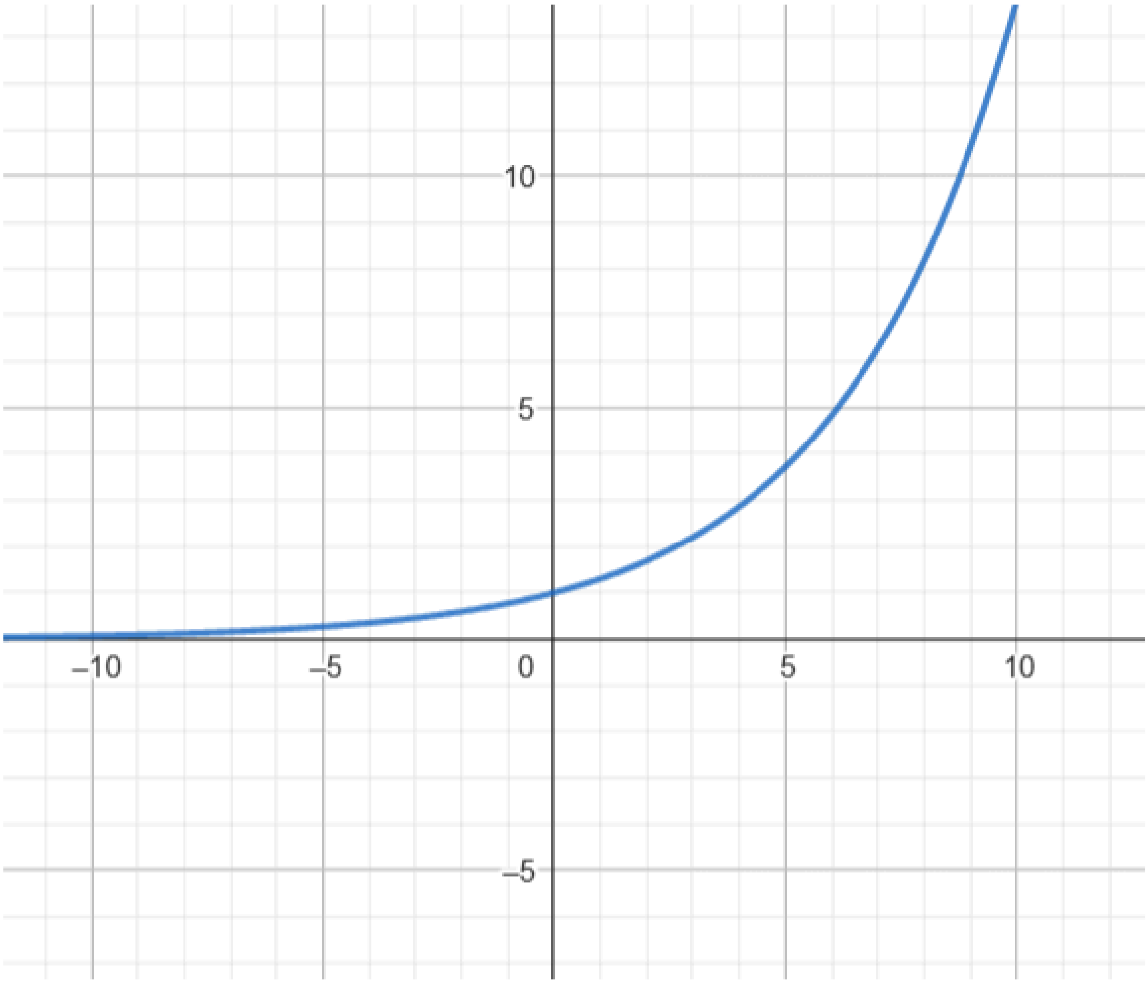


- se $-k$ è dispari $\Rightarrow f(x)$ dispari



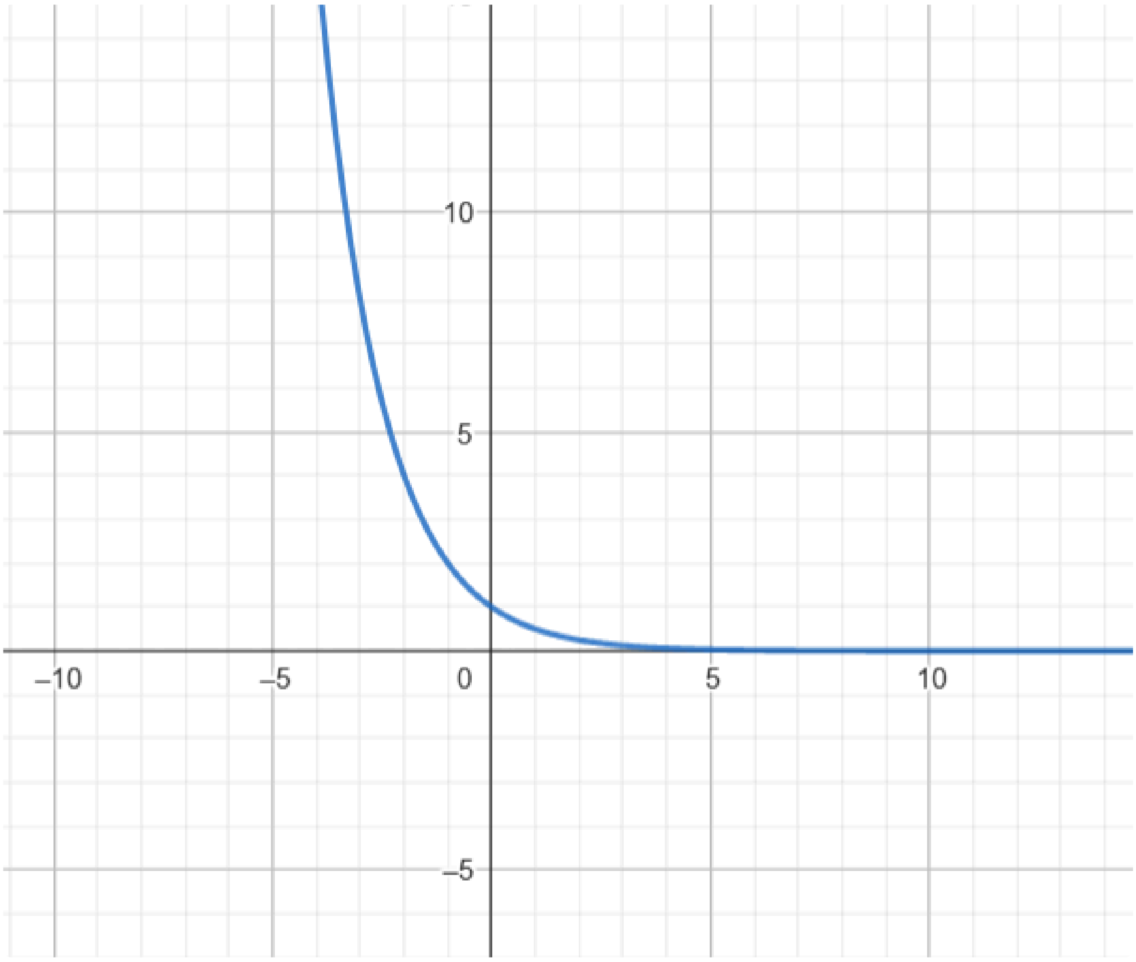
4. Potenze ad esponente razionale
   Sia $q \in \mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \neq 0$
   - se $q \geq 0$ poniamo $f(x) = x^q = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
   - se $q < 0$ poniamo $f(x) = x^q = (\frac{1}{x})^{-q} = \sqrt[n]{(\frac{1}{x})^{-m}}$
5. Funzione esponenziale
   $f(x) = a^x, a > 0$
   - se $a > 1$:
   - $a^x > 0 \Rightarrow Im\ f = (0, +\infty) \Rightarrow \inf f(x) = 0$
   - $a^x > 1\ \forall x > 0$
   - $a^x < 1\ \forall x < 0$
   - f è strettamente monotona, quindi iniettiva

- f non è limitata superiormente



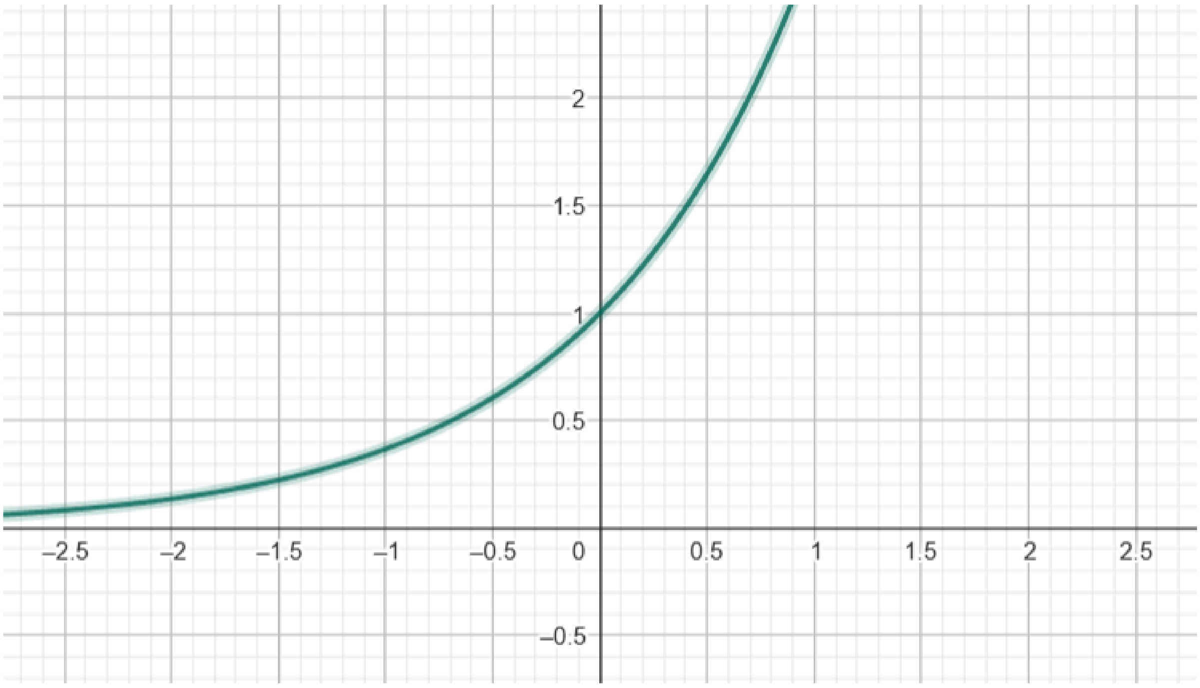
- se $0 < a < 1$:
    - $a^x > 0 \Rightarrow Im\ f = (0, +\infty), \inf f(x) = 0 \Rightarrow f$ limitata inferiormente ma non superiormente
    - $a^x < 1\ \forall x > 0$
    - $a^x < 1\ \forall x < 0$

- f strettamente monotona decrescente $\Rightarrow f$ iniettiva

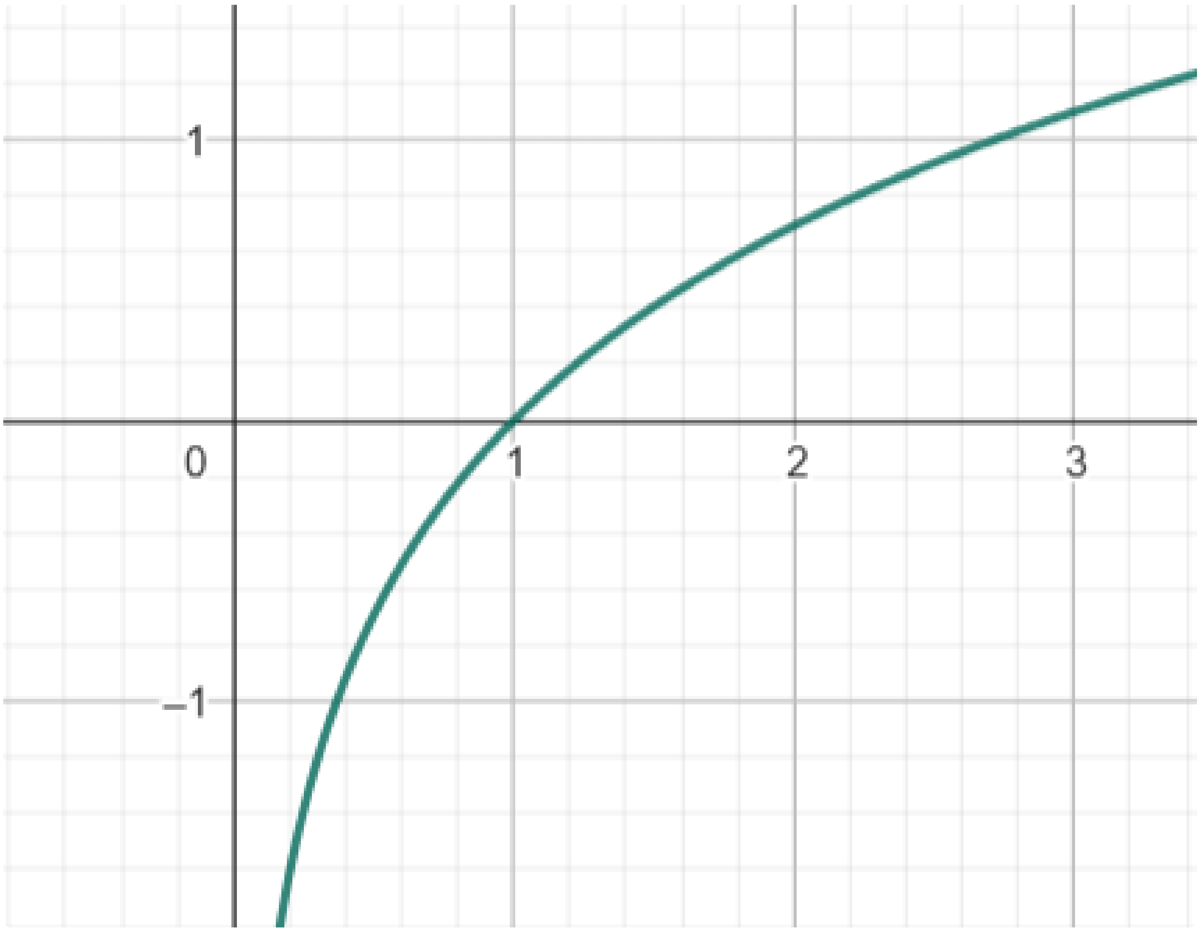


5. Funzione logaritmo
   Teorema: sia $a > 0, a \neq 1, y > 0$. Allora $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ t.c $a^x = y$. Tale numero prende il nome di **logaritmo** in base a di y e si indica con:
   $$x = \log_a y$$
   Oss: dal teorema segue che $a^{\log_a y} = y$
   Proprietà:
   1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
   2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
   3) $\log_a x^p = p \log_a x \ \ \forall p \in \mathbb{R}$
   4) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \ \ b > 0, b \neq 1$ (cambio di base)
6. Base naturale
   $f(x) = e^x$ e $f(x) = \ln x$

e^x:



$\ln x$



Funzioni circolari

Funzione seno

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$$x \to \sin x$$

- $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ ovvero **periodica** di periodo $T = 2\pi$
- f limitata e $\min f(x) = -1, \max f(x) = 1$
- f è dispari

Funzione coseno

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \to \cos x$$

- $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ ovvero **periodica** di periodo $T = 2\pi$
- f limitata e $\min f(x) = -1, \max f(x) = 1$
- f pari

Relazioni fondamentali

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
  Ricorda: nelle regole col **seno permane** il segno, col **coseno** si **inverte**.

Valori noti

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Funzione arcoseno

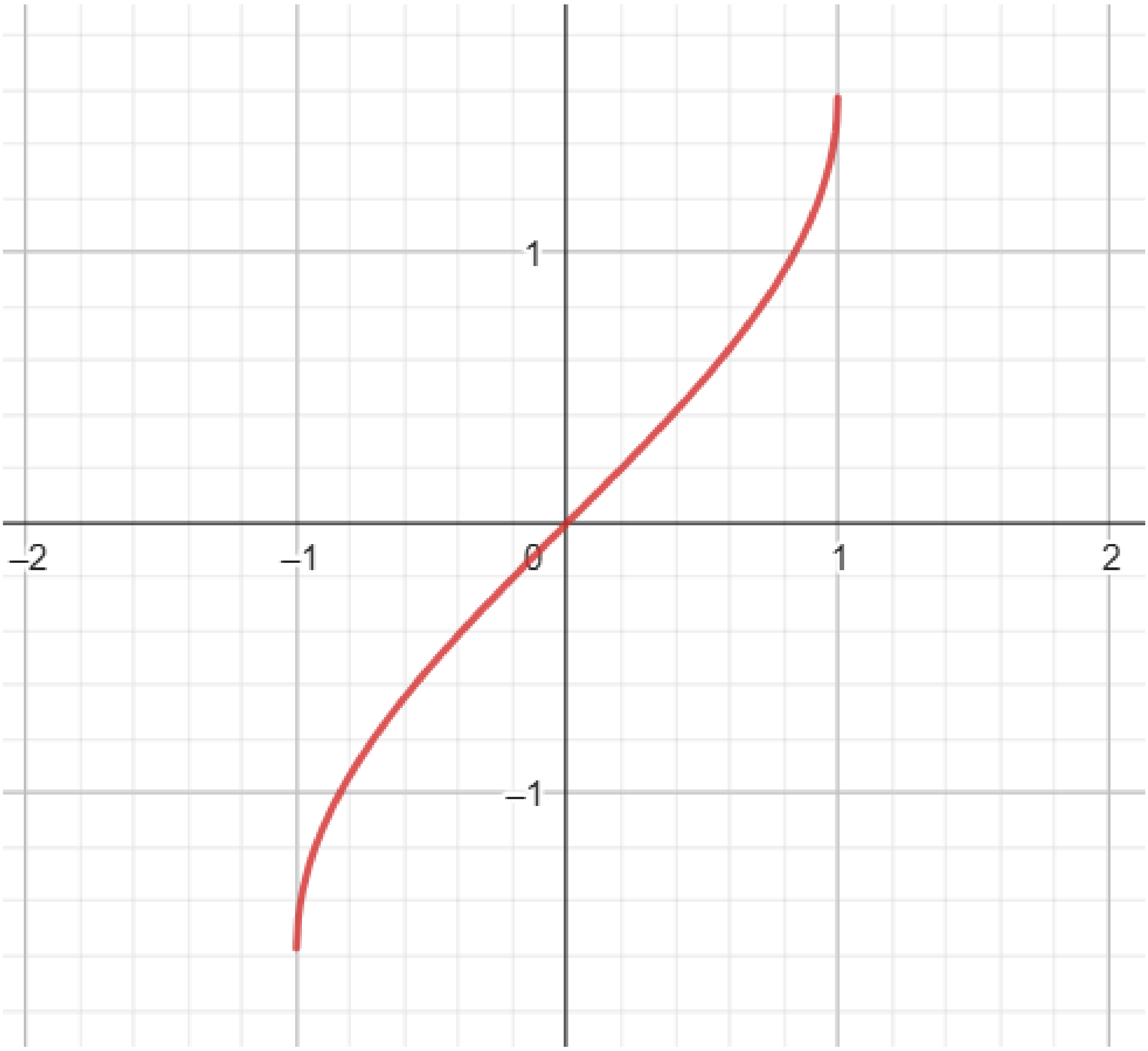
Oss. iniziale: siccome $\sin x$ non è iniettiva, non è invertibile per tutto il dominio, quindi lo restringiamo a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$f^{-1}:[-1,1]\rightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

$$x\rightarrow \arcsin x$$

- non periodica
- strettamente monotona crescente

x	$\arcsin x$
-1	-$\frac{\pi}{2}$
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$

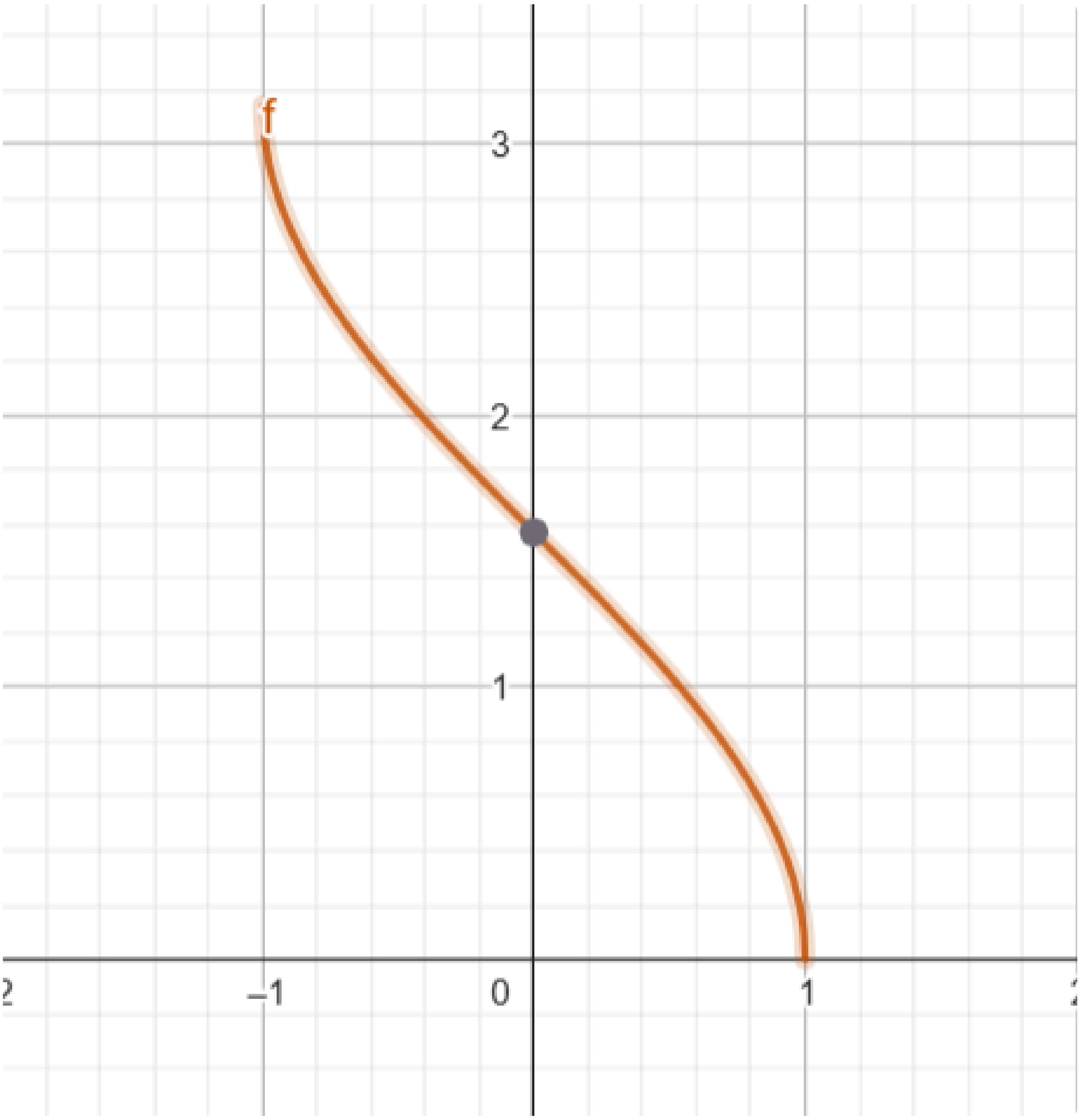


Funzione arcocoseno

Oss. iniziale: siccome $\cos x$ non è iniettiva, non è invertibile per tutto il dominio, quindi lo restringiamo a $[0, \pi]$.

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$
$$x \to \arccos x$$

- non periodica
- strettamente monotona decrescente



Funzione tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

- $Df = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

- periodica di periodo $T = \pi$
- f dispari
- non limitata, non invertibile

Funzione arcotangente

Oss. iniziale: siccome $\tan x$ non è invertibile per tutto il dominio, lo restringiamo a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dove $\tan x$ è strettamente monotona crescente.

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$
$$x \to \arctan x$$

- non ha massimo e minimo
- è limitata, $\inf \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \sup \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Formule parametriche

- $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$
- $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

Altre formule utili

- $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Successioni numeriche

Una **successione numerica** è una funzione

$$a : A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to a(n) = a_n$$

Oss: il dominio di una successione è $\mathbb{N}$.
Notazione: in generale una successione si indica con $(a_n)_n$ oppure $\{a_n\}_n$

Una successione $(a_n)_n$ si dice:

- **Limitata inferiormente** se $\exists m \in \mathbb{R}\, t.c.\ a_n \geq m\ \forall n \in A \subseteq \mathbb{N}$
- **Limitata superiormente** se $\exists M \in \mathbb{R}\, t.c.\ a_n \leq M\ \forall n \in A \subseteq \mathbb{N}$
- **Limitata** se è sia limitata superiormente che inferiormente

Una successione $(a_n)_n$ possiede **definitivamente** una certa proprietà se $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, t.c.\; (a_n)_n$ soddisfa tale proprietà $\forall n \geq n_0$.

Una successione $(a_n)_n$ si dice:

- **Convergente** se $\exists\, l \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, t.c.\; |a_n - l| < \varepsilon\, \forall n \geq n_0$$

  questo $L \in \mathbb{R}$ si chiama limite della successione $(a_n)_n$ e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \text{ oppure } a_n \to l\; per\; n \to +\infty$$

- **Divergente positivamente** se

$$\forall M \in \mathbb{R}\, \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}\, t.c.\, a_n > M\, \forall n \geq n_0$$

  in tal caso si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \text{ oppure } a_n \to +\infty\; per\; n \to +\infty$$

- **Divergente negativamente** se

$$\forall M \in \mathbb{R}\, \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}\, t.c.\, a_n < M\, \forall n \geq n_0$$

  in tal caso si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \text{ oppure } a_n \to -\infty\; per\; n \to +\infty$$

- **Irregolare** se non è né convergente, né divergente

Teorema di unicità del limite

Sia $(a_n)_n$ una successione numerica. Se esiste

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

allora esso è **unico**.
Dim: per assurdo usando la disuguaglianza triangolare.

Sottosuccessioni

Una **sottosuccessione** di $(a_n)_n$ che si indica con $(a_{nk})_k$ ed è una successione che ha gli **stessi elementi** di $(a_n)_n$ a cui vengono **tolti** degli elementi.

Proprietà: Una successione ha limite $l \in \mathbb{R}$ se ogni sua sottosuccessione ha limite l.

Sia data una successione $(a_n)_n$ e sia $l \in \mathbb{R}$. Si dice che:

- $(a_n)_n$ tende a l per **eccesso** e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l^+$$

 se $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, t.c. \; 0 < a_n - l < \varepsilon \, \forall n \geq n_0$ (si avvicina ad l solo dall'**alto**)
- $(a_n)_n$ tende a l per **difetto** e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l^-$$

 se $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, t.c. \; -\varepsilon < a_n - l < 0 \, \forall n \geq n_0$ (si avvicina ad l solo dal **basso**)

Una successione numerica $(a_n)_n$ si dirà:

- monotona **crescente** se $a_n \leq a_{n+1} \, \forall n$
- **strettamente** monotona **crescente** se $a_n < a_{n+1} \, \forall n$
- monotona **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1} \, \forall n$
- **strettamente** monotona **decrescente** se $a_n > a_{n+1} \, \forall n$

Teorema di monotonia

Sia $(a_n)_n$ una successione:

- monotona **crescente** e **superiormente limitata**, allora

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \{\sup a_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

- monotona **decrescente** e **inferiormente limitata**, allora

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \{\inf a_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

Corollario

Sia $(a_n)_n$ una **successione monotona** (crescente o decrescente). allora

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Proposizioni

Sia data $(a_n)_n$ una successione:

- $(a_n)_n$ convergente $\Rightarrow (a_n)_n$ è limitata
- $(a_n)_n$ diverge positivamente $\Rightarrow (a_n)_n$ **non** è limitata **superiormente** ed è limitata **inferiormente**
- $(a_n)_n$ diverge negativamente $\Rightarrow (a_n)_n$ **non** è limitata **inferiormente** ed è limitata **superiormente**
  Oss: non valgono al contrario!

Infinito e infinitesimo

Sia $(a_n)_n$ una successione:

- si dice **infinitesima** se:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

- si dice **infinita** se:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \ \vee \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

Successione geometrica

$$(q^n)_n, q \in \mathbb{R}$$

Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} q^n :$$

- $= +\infty \ se \ q > 1$
- $= 1 \ se \ q = 1$
- $= 0 \ se \ |q| < 1$
- $\nexists \ se \ q \leq -1$

Successione potenza

$$(n^\alpha)_n, \alpha \in \mathbb{R}$$

Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha :$$

- $= +\infty \ se \ \alpha > 0$
- $= 1 \ se \ \alpha = 0$

- $= 0 \; se \; \alpha < 0$

Calcolo dei limiti

Teorema dell'algebra dei limiti

Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ per $n \to +\infty$

- $a_n \pm b_n \to a \pm b$
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ (se $b_n, b \neq 0$)
- $a_n^{b_n} \to a^b$

Teorema della permanenza del segno

- se $a_n \to a$ per $n \to +\infty$ e $a > 0 \; oppure \; (a < 0)$
  allora $a_n > 0$ definitivamente (risp. $a_n < 0$ definitivamente)
- se $a_n \to a$ per $n \to +\infty$ e $a \geq 0 \; oppure \; (a \leq 0)$
  allora $a_n \geq 0$ definitivamente (risp. $a_n \geq 0$ definitivamente)

Teorema del confronto

Se $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ sono tre successioni t.c. $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e sia a_n che c_n tendono ad uno stesso l per $n \to +\infty$, allora anche:

$$b_n \to l, n \to +\infty$$

Corollario

- se $|b_n| \leq c_n$ definitivamente e $c_n \to 0, n \to +\infty$ allora $b_n \to 0, n \to +\infty$
- se $c_n \to 0, n \to +\infty$ e $(b_n)_n$ limitata allora $b_n \cdot c_n \to 0, n \to +\infty$
  Oss:
  se $a_n \to a$ per $n \to +\infty \vee b_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$:
- $a_n + b_n \to +\infty$
- $a_n - b_n \to -\infty$
- $a_n \cdot b_n \to +\infty$
- $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ ($a \neq 0, b_n \neq 0$)
  per $n \to +\infty$.

Forme indeterminate

- $[+\infty - \infty]$
- $[\frac{\infty}{\infty}]$
- $[\frac{0}{0}]$
- $[0 \cdot \infty]$
- $[0^0]$
- $[\infty^0]$
- $[1^\infty]$

Confronti e stime asintotiche

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni **infinite**.
Consideriamo il limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- 0 (i)
- $l \in \mathbb{R}$ (ii)
- $\pm\infty$ (iii)
- $\nexists$ (iv)

i) $(a_n)_n$ è un infinito di **ordine inferiore** a $(b_n)_n$
ii) $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sono infiniti dello **stesso ordine**
iii) $(a_n)_n$ è un infinito di **ordine superiore** a $(b_n)_n$
iv) $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ **non** sono **confrontabili**

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni **infinitesime**.
Consideriamo il limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- 0 (i)
- $l \in \mathbb{R}$ (ii)
- $\pm\infty$ (iii)
- $\nexists$ (iv)

i) $(a_n)_n$ è un infinitesimo di **ordine superiore** a $(b_n)_n$
ii) $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sono infinitesimi dello **stesso ordine**
iii) $(a_n)_n$ è un infinitesimo di **ordine inferiore** a $(b_n)_n$
iv) $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ **non** sono **confrontabili**

Asintoticità

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni. Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

allora si dice che $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sono **asintotiche** e si scrive

$$a_n \sim b_n$$

(hanno lo **stesso comportamento all'infinito**)

- vale la proprietà transitiva (se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$)

Gerarchia degli infiniti

$$\log_a n < n^\alpha < a^n < n! < n^n$$

Limiti (e asintoticità) notevoli

Sia $(a_n)_n$ una successione infinitesima. Per $n \to +\infty$:

- $\sin a_n \sim a_n$
- $1 - \cos a_n \sim \frac{1}{2} a_n^2$
- $\log(1 + a_n) \sim a_n$
- $\log_a(1 + a_n) \sim \frac{a_n}{\log a}$
- $e^{a_n} - 1 \sim a_n$
- $a^{a_n} - 1 \sim (\log a) \cdot a_n$
- $\tan a_n \sim a_n$
- $\arctan a_n \sim a_n$
- $\arcsin a_n \sim a_n$
- $(1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot a_n$
- $(1 + \frac{a}{n})^n = e^a$
- $(1 + \frac{1}{b_n})^{b_n} = e^a$, $(b_n \to +\infty)$
- $(1 + a \cdot a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e^a$
- $(1 + \frac{1}{n})^n = e$

Criterio del rapporto per le successioni

Sia $(a_n)_n$ una successione positiva. Se

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

allora:

- se $l < 1$: $a_n \to 0$
- se $l > 1$ (anche $+\infty$): $a_n \to +\infty$
  Oss: non si può dire nulla se $l = 1$.

Limiti di funzioni, continuità e asintoti

Sia $f : Df \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Si dice che $\lim_{x\to c} f(x) = l$ $(c, l \in \bar{\mathbb{R}})$
se per ogni successione $(x_n)_n \subset Df, x_n \neq c$ t.c. $x_n \to c$ per $n \to +\infty : f(x_n) \to l$ per $n \to +\infty$.

Una funzione ha una certa proprietà **definitivamente** per $x \to c$ se $\exists\, \mathcal{U}$ intorno di c t.c. tale proprietà vale per $f(x)\ \forall x \in \mathcal{U}, x \neq c$.

Si dice che $\lim_{x\to c} f(x) = l$ se:

1. limite **finito** al **finito** $(c, l \in \mathbb{R})$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \neq c : |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. limite **infinito** al finito ($c \in \mathbb{R}, l = +\infty \vee l = -\infty$****)
   1) $l = +\infty$

$$\forall k > 0\ \exists\, \delta(k) > 0 : \forall x \neq c\ |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > k$$

```
2)  $l = -\infty$
```

$$\forall k > 0\ \exists\, \delta(k) > 0 : \forall x \neq c\ |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$$

3. limite **finito** all'**infinito** ($l \in \mathbb{R}, c = +\infty \vee c = -\infty$)
   1) $c = +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0\ t.c.\ \forall x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

```
2) $c = -\infty$
```

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0\ t.c.\ \forall x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

4. limite **infinito** all'**infinito**
   1) $c = +\infty, l = +\infty$

$$\forall k > 0 \; \exists \; M = M(k) > 0 \; t.c. \; \forall x > M \Rightarrow f(x) > k$$

```
2) $c = +\infty, l = -\infty$
```

$$\forall k > 0 \; \exists \; M = M(k) > 0 \; t.c. \; \forall x > M \Rightarrow f(x) < -k$$

```
3) $c = -\infty, l = +\infty$
```

$$\forall k > 0 \; \exists \; M = M(k) > 0 \; t.c. \; \forall x < -M \Rightarrow f(x) > k$$

```
4) $c = -\infty, l = -\infty$
```

$$\forall k > 0 \; \exists \; M = M(k) > 0 \; t.c. \; \forall x < -M \Rightarrow f(x) < -k$$

- Una funzione $f(x)$ si dice **infinitesima** se

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

- Una funzione $f(x)$ si dice **infinita** se

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Teorema di unicità del limite

Se **esiste**

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

allora esso è **unico**.

Asintoti

Asintoto orizzontale

Si dice che la funzione $f(x)$ ha un asintoto **orizzontale** di equazione $y = l$ ($l \in \mathbb{R}$) per $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \;\vee\; \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Asintoto destro e sinistro

Se $c \in \mathbb{R}, l \in \bar{\mathbb{R}}$. Si dice che

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l \text{ (rispettivamente } \lim_{x \to c^-} f(x) = l)$$

Se per ogni intorno di l esiste un **intorno destro** (rispettivamente **sinistro**) di c $(c, c+\delta)$, $\delta > 0$ tale che per $x \in (c, c+\delta)$ si ha che $f(x)$ è nell'**intorno** di l. Questo limite è detto **limite destro** (rispettivamente **sinistro**).

Asintoto verticale

Si dice che la funzione $f(x)$ ha un asintoto **verticale** di equazione $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$) se

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

oppure:

- $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ allora $x = c$ è detto **asintoto verticale destro**
- $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ allora $x = c$ è detto **asintoto verticale sinistro**

Asintoto obliquo

Si dice che la funzione $f(x)$ ha un asintoto **obliquo** di equazione $y = mx + q$ se

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Una funzione ammette asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ se valgono le seguenti proprietà:

- $\exists \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ ($m \in \mathbb{R}$)
- $\exists \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$
  Oss: se vi è asintoto orizzontale non c'è asintoto obliquo.
  Oss. operative: