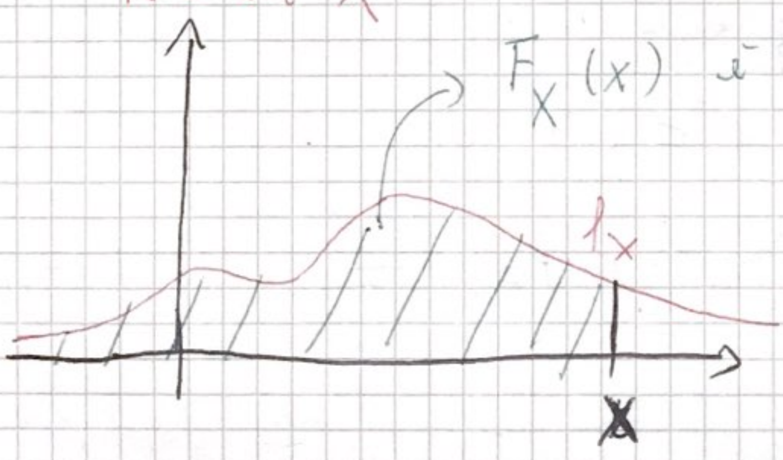
VARIABILI ALEATORIE ASSOLUTAMENTE CONTINUE

Def Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f si dice funzione densità di probabilità (pdf) se

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2) f integrabile e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Def Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sp. di probabilità, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. Si dice che X è assolutamente continua se esiste $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una pdf t.c.

$$\underbrace{F_X(x)}_{\text{FdD di } X} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$



Oss. Da (1) si prova che se X è assolutamente continua, allora $P(X=x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Allora la FdD F_X di X a.c. è continua.

Oss. $\forall a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ a.c.

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

Da (1) segue, in tutti i casi che

$$(2) \int_a^b f(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a) = P(a \leq X \leq b)$$

Posso rendere strette!!!

Oss. Dunque se conosco f_X, da (1) $\to F_X$, cioè la distribuzione.

Se invece conosco F_X e so che è derivabile, allora conosco f_X, tramite $F'_X = f_X$

Cioè (come accade nel caso in cui X è discreto)

Se conosco la pdf di X a.c., automaticamente ho la legge e "viceversa"

Es

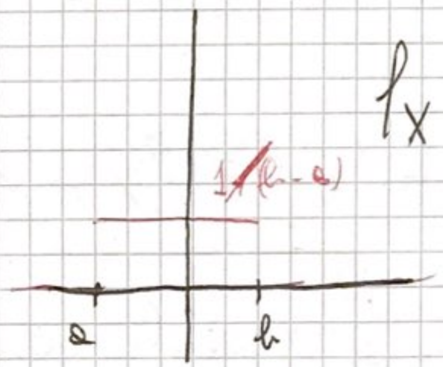
$$F_X(t) := \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$ è FdD di una v.a. assolutamente continua.

Infatti la pdf è $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

ESEMPIO (LEGGE UNIFORME)

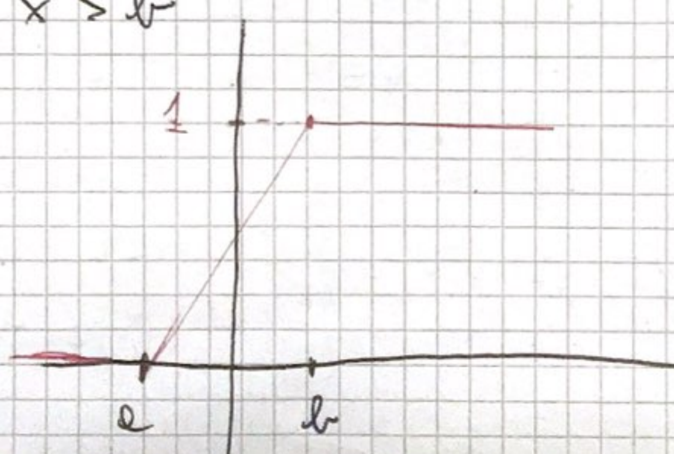
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si dice che una v.a. X ha legge uniforme di parametri a e b, e si scrive $\boxed{X \sim U(a, b)}$ se X è a.c. con pdf

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



La FdD $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt & a \le x \le b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt & x > b \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Oss. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$ t.c.

$$a < c < c+\Delta < b$$

$$X \sim U(a, b)$$

$$P\left(X \in [c, c+\Delta]\right) = P(c \leq X \leq c+\Delta)$$

$$\stackrel{(2)}{=} F_X(c+\Delta) - F_X(c)$$

$$= \frac{c+\Delta-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{\Delta}{b-a}$$

Questo è il motivo per cui X è detto UNIFORME: la probabilità che prenda valori in un dato intervallo dipende solo dalla sua ampiezza, non da dove si "trova" l'intervallo stesso.

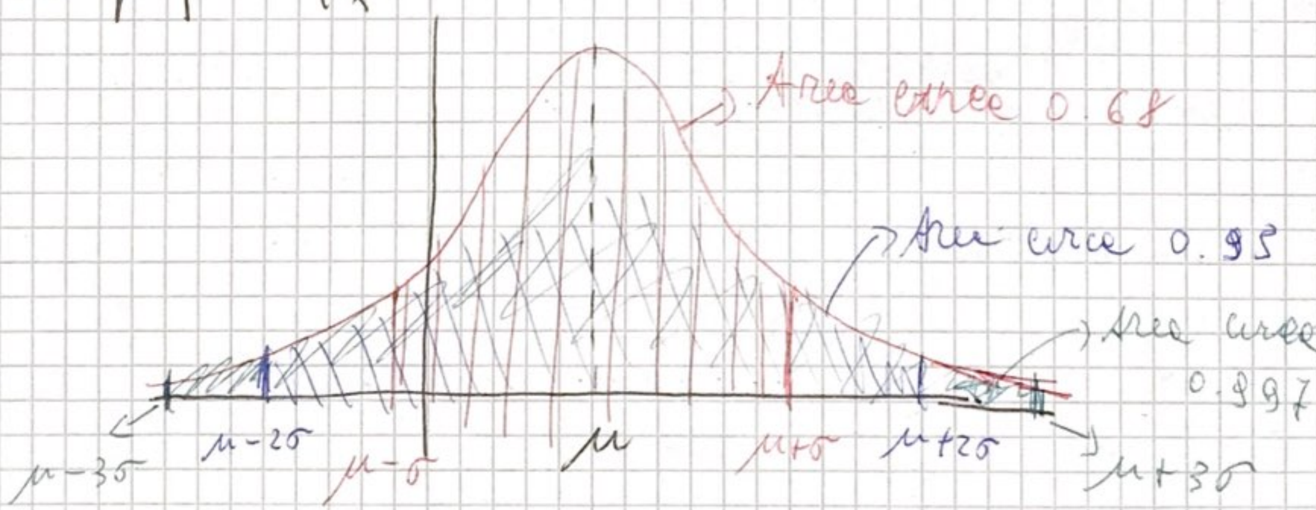
Esempio (Gaussiana)

Siano $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Si dice che una v.a. X ha legge GAUSSIANA (o Normale) se X è assolutamente continua con pdf

$$f_X(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

In tal caso si scrive $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

La pdf f_X:



Cioè se F_X è la FdD, cioè $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$, allora:

$$F_X(\mu+\sigma) - F_X(\mu-\sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f_X(t)\,dt \simeq 0.68$$

$$F_X(\mu+2\sigma) - F_X(\mu-2\sigma) = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f_X(t)\,dt \simeq 0.95$$

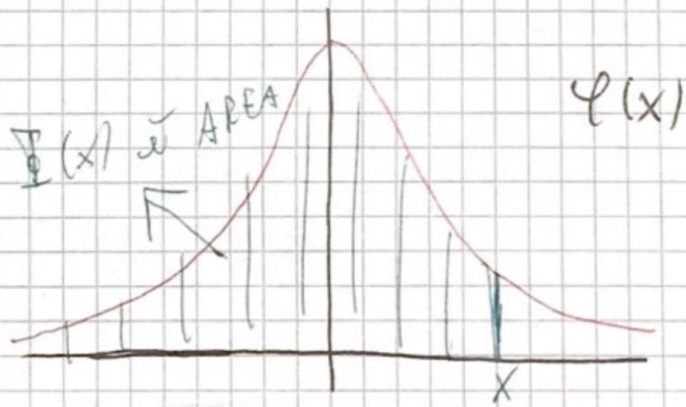
$$F_X(\mu+3\sigma) - F_X(\mu-3\sigma) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f_X(t)\,dt \simeq 0.997$$

Nella famiglia delle leggi gaussiane, sicuramente la più importante è quella per cui $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, cioè $\boxed{X \sim N(0,1)}$

In tal caso, si dice che X ha legge

<u>NORMALE</u> <u>STANDARD</u>

La <u>pdf</u> di $X \sim N(0,1)$ si denota con $\boxed{\varphi(x)}$



È pari, cioè $\boxed{\varphi(-x) = \varphi(x)}$

La <u>FdD</u> di $X \sim N(0,1)$ si denota con $\boxed{\Phi(x)}$

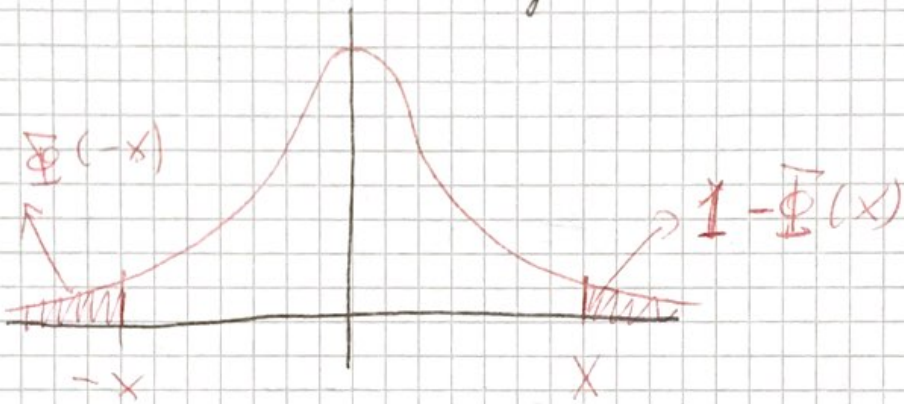
Oss $\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$

Infatti $\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi_X(t)\,dt \overset{u=-t}{=} -\int_{+\infty}^{x} \varphi_X(-u)\,du$

$\overset{\varphi \text{ pari}}{=} -\int_{+\infty}^{x} \varphi_X(u)\,du = \int_{x}^{+\infty} \varphi_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(u)\,du$

$- \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(u)\,du = 1 - \Phi(x)$

Quindi le 2 code sono uguali



Proposizione Siano $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

dim Calcoliamo la pdf di $aX+b$, la vediamo come derivata della FdD.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{aX+b}(x) = P(aX+b \le x) = P\left(X \le \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Allora

$$f_{aX+b}(x) = F'_{aX+b}(x) = \frac{d}{dx}\left[F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\right] = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} \overset{X\sim N(\mu,\sigma^2)}{=} \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)} e^{-\frac{\left(x-(a\mu+b)\right)^2}{2(a^2\sigma^2)}}$$ che è la pdf di $X \sim (a\mu+b, a^2\sigma^2)$ $\square$

Corollario Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Allora $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

dim Applicare il risultato precedente con
$a = \frac{1}{\sigma}$ e $b = -\frac{\mu}{\sigma}$. $\square$

Corollario Se $X \sim N(0,1)$, allora, se $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$:
$\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

dim Applicare il risultato (Proposizione) precedente con $a = \sigma$ e $b = \mu$. $\square$

Oss Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Problema $P(a \leq X \leq b) = ?$

Ricordiamo che i valori della FdD $\boxed{\Phi}$ della NORMALE STANDARD sono tabulati...

Allora

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\underline{\underline{\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)}} \quad \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Quindi se $X \sim N(-1, 3)$, allora

$$P(-2 \leq X \leq 3) = \Phi\left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{-2+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) - 1 + \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(\Phi(-x) = 1 - \Phi(x))$$

Proposizione Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ indipendenti, t.c. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$. Allora, detta $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$, si ha

$$X \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$$

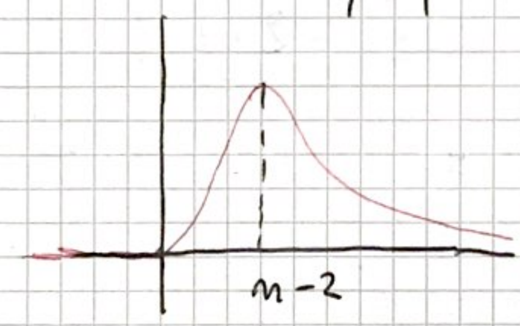
Esempio (Chi quadro - χ^2)

Def Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. indipendenti, $X_i \sim N(0,1)$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Allora, detta $X := X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$, si dice che X ha legge chi-quadro con n gradi di libertà o di parametro n, e si scrive

$$X \sim \chi^2_n$$

$$\left[X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \chi^2_1 \right]$$

Se $n > 2$ la pdf di $X \sim \chi^2_n$:



Esempio (t-student)

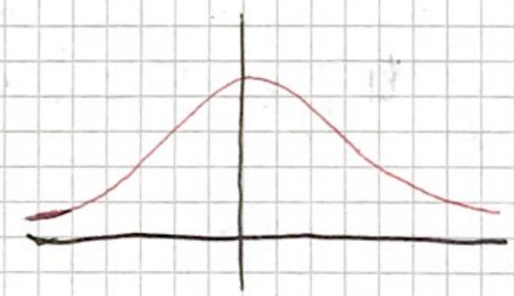
Def Siano $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_n$ indipendenti

La v.a. $T := \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ si dice a legge t-student

con n gradi di libertà, e si scrive $T \sim t_n$

[È surrogato della normale, come vedremo in statistica. Infatti la sua pdf è simile alla funzione di Gauss]

pdf



Esempio (Fisher)

Def. Siano $X \sim \chi^2_n$ e $Y \sim \chi^2_m$ indipendenti

La v.a. $F := \dfrac{X/n}{Y/m}$ si dice a legge di Fisher

con n, m gradi di libertà, e si scrive

$F \sim F_{n,m}$