Esempio 1 BERNOULLI

Sia dato un esperimento di tipo Successo - Insuccesso (S-I)

Lo modellizziamo tramite

X che ~~assegna~~ assume 2 valori $\to 0$, $\to 1$, cioè

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se ho } S \\ 0 & \text{se ho } I \end{cases}$$

Allora X v.a. discreta $\quad cod(X) = \{0, 1\}$

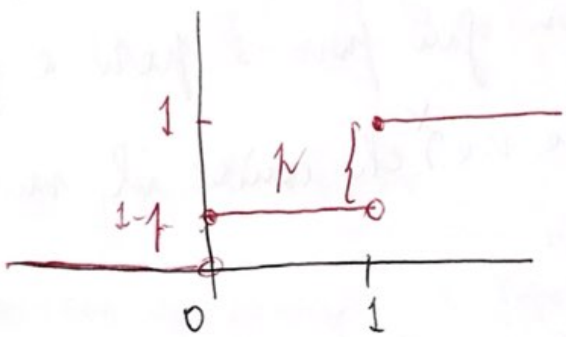
Sia p la probabilità di S, $1-p$ quella di I, $p \in (0,1)$, cioè $\quad P(X=1) = p$

$$P(X=0) = 1-p$$

la pf di X

$$p_X(0) = P(X=0) = 1-p$$
$$p_X(1) = P(X=1) = p$$

la FdD di X



Una v.a. siffatta è detta di Bernoulli con parametro p. Si scrive $X \sim b(1,p)$

Esempio 2 BINOMIALE

Supponiamo di ripetere, in maniera indipendente, per n volte un esperimento S–I, dove la probabilità di S in ogni prova è pari a $p \in (0,1)$.
Voglio determinare la v.a. X che conta il numero di S nelle n prove.

Pertanto $\mathrm{Cod}(X) = \{0, 1, \dots, n\}$

Se $k = 0, \dots, n$ $P(X=k)$ è la probabilità che ci siano esattamente k successi. Quindi

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ne consegue che la pf di X è

$$p_X(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Una X siffatta è detta v.a. a legge binomiale di parametri n, p. Si scrive

$$X \sim b(n, p)$$

Oss $X \sim b(1, p)$ è caso particolare della binomiale, quando $n = 1$.

Proposizione Siano $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilità e $X_1, \dots, X_n$ v.a. indipendenti t.c. $X_i \sim b(1, p)$, $i = 1, \dots, n$. Allora, se $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$, si ha $X \sim b(n, p)$.

Viceversa, se $X \sim b(n, p)$, allora esistono $X_1, \dots, X_n$ v.a. indipendenti, $X_i \sim b(1, p)$ t.c. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Oss Se $X_1 \sim b(n_1, p)$, $X_2 \sim b(n_2, p)$ indipendenti allora $X_1 + X_2 \sim b(n_1 + n_2, p)$

Esempio 3 GEOMETRICA

Supponiamo di ripetere un esperimento di tipo S-I un numero imprecisato di volte, in maniera indipendente. Sia $p \in (0,1)$ la probabilità di S in ogni singola prova.

Ci chiediamo qual è la ~~probabilità~~ v.a. X che descrive la probabilità di primo successo.

Dunque, se $K=1,2,\ldots$ $P(X=K)$ rappresenta la probabilità che il I successo si verifichi esattamente alla K-sima prova.

Pertanto $\mathrm{cod}(X)=\{1,2,3,\ldots\}$

$p_X(K)=P(X=K)=\,?$

Se $P(X=K)$, significa che nei primi $K-1$ esperimenti ho ottenuto sempre Insuccesso. Quindi

$$P(X=K)=P(\underbrace{I,I,\ldots,I}_{K-1},S)\overset{\text{INDIP.}}{=}P(I)^{K-1}P(S)$$

$$=p(1-p)^{K-1}\quad,\ K\geq 1.$$

Una v.a. X siffatta è detta geometrica di parametro p, e si scrive $X\sim Geo(p)$

Si osserva che $P(X > k) = (1-p)^k$, $k \geq 1$

Allora, se $k \geq 1$, $m \geq 0$:

$$P(X > k+m \mid X > k) = \frac{P(X > k+m, X > k)}{P(X > k)} =$$

$$= \frac{P(X > k+m)}{P(X > k)} = \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = (1-p)^m = P(X > m)$$

Ciò significa che, se in k prove non ho mai registrato successo, la probabilità di non registrare successo nelle prove successive è la stessa che si sarebbe avuta se le prime k prove non si fossero realizzate. Tale proprietà è detta di "MANCANZA DI MEMORIA"

Esempio 4 POISSON

Sia $\lambda > 0$. Si dice che una v.a. X ha legge di Poisson di parametro λ, e si scrive $X \sim P(\lambda)$, se X è v.a. discreta con

$Cod(X) = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e pf

$$p_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \ , \quad k \geq 0$$

La v.a. di Poisson è la più importante tra le v.a. discrete. È anche essa legata alla legge binomiale. In maniera rozza, se ho $X \sim b(n, p)$, dove n è "grande" e p "piccolo" e t.c. $np = \lambda$, allora X si può approssimare con una v.a. di Poisson di parametro λ: così se il numero delle prove è "grande" e la probabilità di successo in ogni singola prova è "piccola", allora $X \approx P(\lambda)$, $\lambda = np$.

Tale idea si esplicita, matematicamente, nel Teorema di Poisson.

Teorema (Poisson) Sia $\lambda > 0$ e supponiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, di considerare le v.a. $X_n \sim b\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Allora, se le p.f. rispettive sono $p_{X_n}(k)$, $k \geq 0$, si ha $\lim\limits_{n \to \infty} p_{X_n}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \geq 0$

dim. Per ogni $k \geq 0$

$$p_{X_n}(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\cancel{n^k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\cancel{n^k}} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

Allora $\lim\limits_n p_{X_n}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \lim\limits_n \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\to 1}}$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\square$

Esempio Vogliamo determinare la legge del numero aleatorio X di telefonate che giungono ad un call-center in un intervallo ~~T~~ di ~~tempo~~ lunghezza T fis.

$Cod(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$

Dividiamo intervallo $[0, T]$ in n sottointervalli di lunghezza $\frac{T}{n}$, con n grande in modo che in ognuno di tali intervalli arrivi AL PIÙ una telefonata.

Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. indipendenti t.c.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se in intervallo } i\text{-esimo arriva telefonata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Supponiamo $\exists \lambda > 0$ t.c. $P(X_i = 1) = \frac{\lambda}{n}$. Allora $X_i \sim b(1, \frac{\lambda}{n})$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Allora numero totale telefonate in $[0, T]$ è dato da $X_1 + \dots + X_n$, cioè la X che cerco è $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Ma per teorema precedente so che $X \sim b(n, \frac{\lambda}{n})$

Se $n \to \infty$ (n "grande"), allora $X \sim P(\lambda)$.

Ciò semplifica molto i calcoli!!!

Proposizione Siano $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$ v. a. indipendenti.

Allora, se $X := X_1 + X_2$, si ha $X \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

dim. Sia $K \in \text{codom}(X)$, cioè $K \geq 0$. Allora

$$p_X(K) = P(X = K) = P(X_1 + X_2 = K)$$

$$= P\left(\bigcup_{j=0}^{K} X_1 = j,\ X_2 = K - j\right)$$

$$\underset{\text{disgiunti}}{\overset{2-?}{=}} \sum_{j=0}^{K} P(X_1 = j,\ X_2 = K - j)$$

$$\overset{\text{INDIP.}}{=} \sum_{j=0}^{K} P(X_1 = j)\, P(X_2 = K - j)$$

$$\overset{\text{DEF.}}{=} \sum_{j=0}^{K} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{\,j}}{j!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{\,K-j}}{(K-j)!} \qquad \frac{\text{MOLTIPLICO E DIVIDO}}{\text{PER } K!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{K!} \sum_{j=0}^{K} \binom{K}{j} \cancel{e^{\lambda_1}} \lambda_1^{\,j} \lambda_2^{\,K-j}$$

$$\underset{\text{NEWTON}}{\overset{\text{BINOMIO}}{=}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^K}{K!} \Rightarrow X \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$\square$

Proposizione Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sp. di probabilità, e siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. discrete, con le loro rispettive pf $p_{X_1}, \dots, p_{X_n}$.

Allora

$X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti se e solo se

$$\underbrace{p_{X_1, \dots, X_n}}_{\text{pf della v.a. congiunta}} (k_1, \dots, k_n) = p_{X_1}(k_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(k_n)$$

per ogni $k_i \in \text{codom}(X_i)$, $i = 1, \dots, n$.