Problema de los tres cuerpos

Ximena González Rosas[1]*, Sofía Castro Varona[1], María Fernanda Monzón Salazar[1]

Resumen
Mediante un análisis en diversas fuentes, se realizó una investigación sobre el problema de los tres cuerpos, y a través de Python[1] se codificó una coreografía[2] para su solución. Esta, toma una forma de curva en ocho, exhibiendo patrones inesperados con respecto a las condiciones iniciales dadas.

Palabras clave
1. Lenguaje de programación 2. Solución periódica sincronizada

[1] *Escuela Nacional de Ciencias de la Tierra, UNAM*
***GitHub**: XRGonzalez , ximenagonzalez@encit.unam.mx

Índice

Introducción

El problema de los tres cuerpos es una incertidumbre matemática y física compleja y sin una solución general. Su dificultad radica en que cualquier variación mínima podría deshabilitar las órbitas de los cuerpos por completo; como lo es las posiciones en las que se encuentren, la masa que cada objeto tenga, sus velocidades, entre otras. Por lo que resulta un sistema caótico que colapsa las órbitas de los cuerpos presentes [1]

Con el objetivo de comprender la problemática, así como de analizar sus resultados obtenidos con condiciones ideales; el presente trabajo expone una investigación previa de la problemática, así como una explicación breve del planteamiento de ecuaciones para realizar dicho problema.

En un sistema ideal, se parte de posiciones dadas [2], las cuales son las indicadas en la siguiente tabla. Con las ecuaciones de movimiento, que se demostrarán en el siguiente apartado, resultan 18 ecuaciones en total; por cada componente se tienen 2 ecuaciones, y al ser un sistema tridimensional cada cuerpo tendrá 6 ecuaciones.

Vector	Pocisión	Velocidad
r_1	(0.97000436, 0.24308753)	(0.46620369, 0.43236573)
r_2	(0,0)	(0.93240737, 0.86473146)
r_3	(0.97000436, 0.24308753)	(0.46620369, 0.43236573)

La segunda Ley de Newton establece que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza que experimenta [3]. Dicho de otra manera, la aceleración puede expresarse como la segunda derivada de la posición.

Primer caso: Problema de los dos cuerpos

Se elige un cuerpo A y un cuerpo B los cuales se atraen mutuamente. Una vez obtenidas las coordenadas de ambos cuerpos se analiza la ley de la gravitación universal y la segunda ley de Newton para obtener una ecuación diferencial de segundo orden. Si uno de los cuerpos se encuentra fijo, el otro se mueve en torno al primero siguiendo órbitas en forma de elipses. Como ejemplos de este caso tenemos los sistemas Tierra-luna y Sol-Tierra. [2]

Segundo caso: Problema de los tres cuerpos

Radica en las órbitas de dos cuerpos al agregar un cuerpo C, ¿Qué es lo que pasaría en el sistema Sol-Tierra-Luna? Hasta el momento no existe una solución análitica para un sistema de n cuerpos. A pesar de esto, podemos establecer condiciones ideales para poder darnos una idea de lo que podría ser, como lo es que tengan masas iguales.

1. Metodología

1.1 Ecuaciones diferenciales

Para encontrar la solución al problema, se parte de la ecuación de la ley de gravitación universal de Newton, la cual determina la fuerza con la que se atraen dos cuerpos. Además, la segunda ley de Newton establece que la suma total de las fuerzas externas es directamente proporcional al producto de la masa por la segunda derivada de la posición.

$$\overline{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$\overline{F} = m\ddot{\bar{r}}$$

Por lo tanto, dos cuerpos que se atraen presentan dos fuerzas de atracción. La cual se denota:

$$\overline{F_{12}} + \overline{F_{13}} = m_1\ddot{\bar{r}}_1$$

Se sustituye la fórmula de la ley de gravitación:

$$-\frac{Gm_1m_2}{\|r_{12}\|^2}\hat{r_{12}} - \frac{Gm_1m_3}{\|r_{13}\|^2}\hat{r_{13}} = m_1\ddot{\bar{r}}_1$$

Se divide todo entre la masa 1:

$$-\frac{Gm_2}{\|r_{12}\|^2}\hat{r}_{12} - \frac{Gm_3}{\|r_{13}\|^2}\hat{r}_{13} = \ddot{\bar{r}}_1$$

Con las siguentes propiedades:

$$\hat{x} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$$

$$\bar{r_{12}} = \bar{r_1} - \bar{r_2}$$

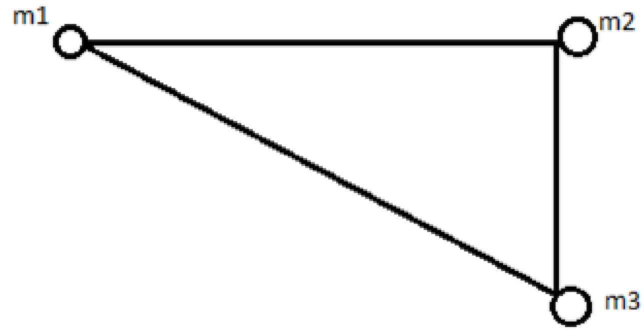

Figura 1. *Representación gráfica de los tres cuerpos atraídos gravitacionalmente*

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$-\frac{Gm_2(\bar{r}_1-\bar{r}_2)}{\|\bar{r}_1-\bar{r}_2\|^3} - \frac{Gm_3(\bar{r}_1-\bar{r}_3)}{\|\bar{r}_1-\bar{r}_3\|^3} = \ddot{\bar{r}}_1 \tag{1}$$

La cual, nos indica la aceleración vectorial de dos cuerpos que se atraen gravitacionalmente. No obstante, se analiza en tres dimensiones, por lo que se descomponen de esta manera quedando 18 ecuaciones:

Masa 1:

$$(\ddot{x}_1,\ddot{y}_1,\ddot{z}_1) = (-\frac{Gm_2(x_1-x_2)}{\|r_{12}\|^3} - \frac{Gm_3(x_1-x_3)}{\|r_{13}\|^3},$$

$$-\frac{Gm_2(y_1-y_2)}{\|r_{12}\|^3} - \frac{Gm_3(y_1-y_3)}{\|r_{13}\|^3},$$

$$-\frac{Gm_2(z_1-z_2)}{\|r_{12}\|^3} - \frac{Gm_3(z_1-z_3)}{\|r_{13}\|^3})$$

Masa 2:

$$(\ddot{x}_2,\ddot{y}_2,\ddot{z}_2) = (-\frac{Gm_1(x_2-x_1)}{\|r_{21}\|^3} - \frac{Gm_3(x_2-x_3)}{\|r_{23}\|^3},$$

$$-\frac{Gm_1(y_2-y_1)}{\|r_{21}\|^3} - \frac{Gm_3(y_2-y_3)}{\|r_{23}\|^3},$$

$$-\frac{Gm_1(z_2-z_1)}{\|r_{21}\|^3} - \frac{Gm_3(z_2-z_3)}{\|r_{23}\|^3})$$

Masa 3:

$$(\ddot{x}_3,\ddot{y}_3,\ddot{z}_3) = (-\frac{Gm_1(x_3-x_1)}{\|r_{31}\|^3} - \frac{Gm_2(x_3-x_2)}{\|r_{32}\|^3},$$

$$-\frac{Gm_1(y_3-y_1)}{\|r_{31}\|^3}-\frac{Gm_2(y_3-y_2)}{\|r_{32}\|^3},$$
$$-\frac{Gm_1(z_3-z_1)}{\|r_{31}\|^3}-\frac{Gm_2(z_3-z_2)}{\|r_{32}\|^3})$$

1.2 Campo vectorial

La definición formal de un campo vectorial es una función F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que asigna a cada vector $\bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^2$ un único vector $F(\bar{x}) \in \mathbb{R}^2$ con

$F(\bar{x}) = P(\bar{x})i + Q(\bar{x})j$ [4]

Para poder llevar a cabo la coreografía en ocho, la ecuación de movimiento (1) dará pauta al campo vectorial de esta manera:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \vec{V}_1$$
$$\dot{\vec{r}}_2 = \vec{V}_2$$
$$\dot{\vec{r}}_3 = \vec{V}_3$$

$$\dot{\vec{V}}_1 = -\left(\frac{Gm_2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{||\vec{r}_1-\vec{r}_2||^3}+\frac{Gm_3(\vec{r}_1-\vec{r}_3)}{||\vec{r}_1-\vec{r}_3||^3}\right)$$

$$\dot{\vec{V}}_2 = -\left(\frac{Gm_1(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{||\vec{r}_2-\vec{r}_1||^3}+\frac{Gm_3(\vec{r}_2-\vec{r}_3)}{||\vec{r}_2-\vec{r}_3||^3}\right)$$

$$\dot{\vec{V}}_3 = -\left(\frac{Gm_1(\vec{r}_3-\vec{r}_1)}{||\vec{r}_3-\vec{r}_1||^3}+\frac{Gm_2(\vec{r}_3-\vec{r}_2)}{||\vec{r}_3-\vec{r}_2||^3}\right)$$

1.3 Herramientas computacionales

Una herramienta importante para desarrollar el problema de los tres cuerpos fue el lenguaje de programación Python.

Seguido a esto, se importó la librería “scipy” y ocupamos de este mismo “odeint” para realizar ecuaciones diferenciales. Se programaría así:

```
import numpy as np

from scipy.integrate import odeint
```

También se utilizó Matplotlib que permite utilizar un paquete de gráficas

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

2. Resultados

En el repositorio escrito al principio del documento se muestra el código realizado para la simulación del problema. Se determinó que los tres cuerpos persiguen una coreografía en forma de ocho como se muestra en la figura 2.

Se demostró que definiendo un campo vectorial, el cual representa la distribución espacial de la magnitud y de la dirección de los vectores, se puede modelar la aceleración y la velocidad de los cuerpos.

Posteriormente se estableció que las condiciones iniciales son importantes para dar una solución estable, ya que el movimiento resultante casi siempre llega a ser caótico, volviéndose casi imposible determinar los caminos que los tres cuerpos puedan seguir.

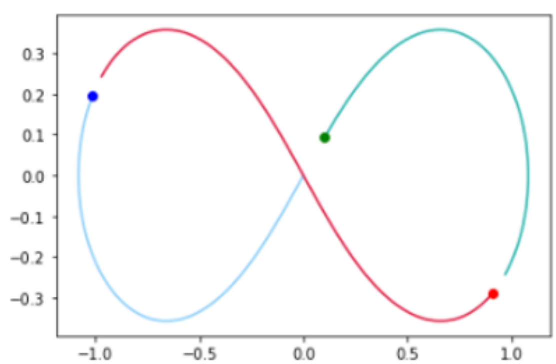

Figura 2. *Solución plana del problema de tres cuerpos, con masas iguales las cuales siguen una misma trayectoria en forma de ocho.*

3. Discusión de resultados

Como se ve en la figura 2, el problema se analizó en dos dimensiones. Cada punto representa la posición inicial y su componente en la velocidad de las tres masas que se han obtenido en [5].

El problema no puede ser resuelto de forma analítica, puesto que a diferencia del problema de los dos cuerpos no existe una solución para el caso general [6] ya que si se le dan tres cuerpos al azar el movimiento resultante casi siempre llega a ser caótico, siendo casi imposible determinar los caminos que seguiran los cuerpos.

A diferencia de otras coreografías, el tema de interés para este trabajo fue la órbita en figura del ocho, puesto que es particular para el caso de que las tres masas sean iguales.

4. Conclusiones

Gracias al cómputo científico, usando el lenguaje de programación Python, fue posible entender y comprobar de forma numérica el trabajo de Chenciner y Montgomery [2] quienes descubrieron la existencia de una solución plana del problema de tres cuerpos, con tres masas iguales.

Al hacer uso de este método, permitió hacer un modelo de poca complejidad, mostrando resultados satisfactorios, ya que presenta sensibilidad a las variables de las funciones.

5. Agradecimientos

Este trabajo fue realizado bajo la supervición del profesor Pedro Porras Flores, a quien deseamos expresesarle nuestro agradecimiento por la dedicación y apoyo que nos ha brindado a lo largo de este trabajo de investigación.

Referencias

[1] MAURIN Lise and ENS Rennes. Análisis y simulación del problema restringido de tres cuerpos plano y circular. 2015.

[2] Ma Carmen Pena and Jesús F Palacián. Simulación en tres dimensiones del problema de n cuerpos.

[3] O Miguel. Análisis comportamental de las leyes de newton. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, pages 51–55, 1986.

[4] Renato Benazic. Singularidades de campos vectoriales holomorfos en el dominio de poincaré. *Pro Mathematica*, 10(19-20):9–33, 1996.

[5] Un integrador exactamente conservador para el problema de n cuerpos. *Journal of Physics A: Mathematical and General*.

[6] Órbitas de n-body novedosas para potenciales restringidos, incluida la inusual figura de ocho órbitas de tres cuerpos.