任意翼型参数化

一、翼型参数化方法

1.1 贝塞尔曲线参数化方法

1.1.1 定义

贝塞尔曲线是通过一组控制点来定义的参数曲线，其形状由这些控制点共同决定。对于给定的$n+1$个控制点$(P_0, P_1, \ldots, P_n)$，(n)阶贝塞尔曲线的参数化定义基于伯恩斯坦（Bernstein）基函数，其表达式为

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

通过改变参数 t 在[0, 1]区间内的取值，就可以计算出曲线上对应的点，将这些点依次连接起来，就能得到完整的贝塞尔曲线 。

1.1.2 原理

（一）线性插值基础

贝塞尔曲线的构造基础是线性插值。线性插值是在两个点之间按照一定比例找到中间点的方法。对于两个点(A)和(B)，线性插值公式为：$C = (1-\alpha)A + \alpha B$，其中$\alpha$是插值系数，取值范围为([0, 1])。当$\alpha = 0$时，C = A；当$\alpha = 1$时，C = B；当$0 < \alpha < 1$时，C 位于 A 和 B 的连线上。

（二）低阶贝塞尔曲线构造

一阶贝塞尔曲线

当(n = 1)时，贝塞尔曲线有两个控制点P_0和P_1，本质上就是在P_0和P_1之间进行线性插值，曲线是连接这两个点的一条线段。随着 t 从 0 变化到 1，曲线上的点从P_0逐渐移动到P_1。

二阶贝塞尔曲线

当 n = 2 时，有三个控制点P_0、P_1和P_2。二阶贝塞尔曲线通过两次线性插值构建。

第一次，在P_0和P_1之间进行线性插值得到点$Q_0(t) = (1-t)P_0 + tP_1$；在P_1和P_2之间进行线性插值得到点$Q_1(t) = (1-t)P_1 + tP_2$。

第二次，在$Q_0(t)$和$Q_1(t)$之间再进行一次线性插值，即$B(t) = (1-t)Q_0(t) + tQ_1(t)$，

二阶贝塞尔曲线不再是直线，而是一条弯曲的曲线，其弯曲程度和方向由三个控制点共同决定。

（三）高阶贝塞尔曲线的递归构造

对于更高阶的贝塞尔曲线，采用递归的方式进行构造。以三阶贝塞尔曲线（四个控制点P_0、P_1、P_2、P_3）为例，它是在二阶贝塞尔曲线的基础上，对新生成的三个中间点（由原四个控制点通过第一次线性插值得到）再进行一次二阶贝塞尔曲线的构造过程，以此类推。每一次递归，都是在前一次得到的中间点之间进行线性插值，不断细化和调整曲线形状，最终得到高阶贝塞尔曲线。

1.2 CST 参数化方法

CST 方法通过类别函数和形状函数相结合的方式来描述翼型几何形状，其中，类别函数描述了翼型的通用形状特征，形状函数则通过一组 Bernstein 多项式系数来对翼型的具体形状进行调整，通过将这两个函数相乘，再加上后缘厚度修正项，就可以得到翼型上下表面的坐标。

在进行参数化时，选取 NACA0012 作为初始翼型，作为常见的圆头尖尾翼型，将其类别函数指数 N1、N2 和后缘厚度修正$delta_{te}$设置为默认值，该数值分别为 0.5、1、0。在空气动力学中，用于描述翼型通用形状特征的表达式为

$$C_i = x_i^{N_1} \times (1 - x_i)^{N_2}$$

在上述类别函数中，假设 X_i为一个向量$X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ ，N1 和 N2 是标量值，Ci 为计算结果向量中的第 i 个元素，通过不同 N1 和 N2 的取值可以得到不同的基础形状。

在计算形状函数时，S(x)由一组 Bernstein 多项式组成。Bernstein 多项式是一种常用的多项式基函数，其表达式为$B = nchoosek(n, i) \times x^i \times (1 - x)^{n-i}$ ，其中 nchoosek(n, i)是组合数，表示从 n 个元素中选择 i 个元素的组合方式。

为了确保翼型的后缘闭合，将上表面和下表面的最后一个坐标值取平均值，作为修正后的后缘坐标。该算法通过 CST 方法，利用类别函数和形状函数的组合，结合后缘厚度修正，生成了翼型的上下表面坐标。通过调整输入的 Bernstein 多项式系数，可以灵活地改变翼型的形状，适用于翼型设计和优化等领域。

二、翼型构型生成与显示

1. 贝塞尔曲线方法

实现过程：

输入前缘、后缘坐标、斜率参数及极值点，生成控制点并绘制贝塞尔曲线。

生成实例：

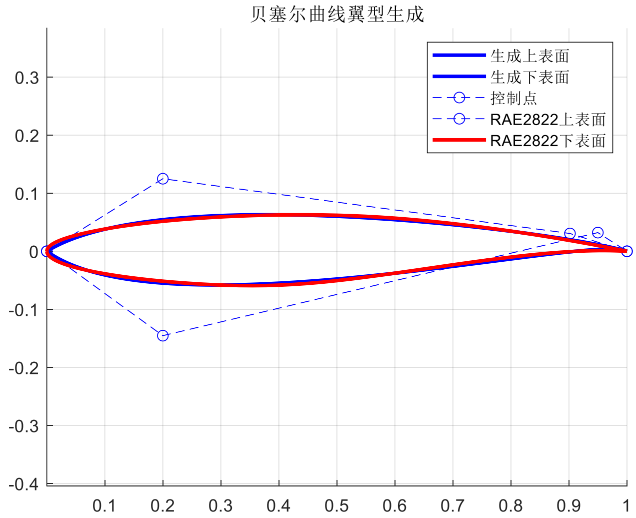

图 1 bezier 曲线生成结果

2. CST 方法

实现过程：

输入弦长坐标数组和多项式系数，调用 CST 函数生成上下表面坐标。

生成实例：

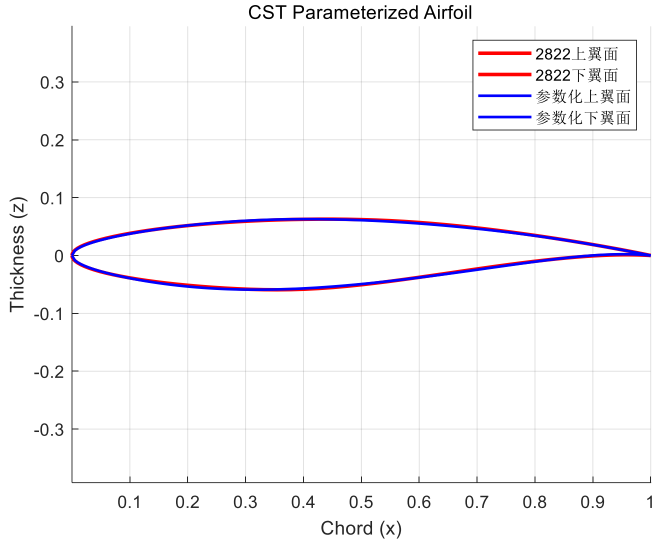

图 2 CST 生成结果

三、RAE2822 翼型近似与误差分析

1. 贝塞尔曲线方法

调参过程：

调整前缘斜率（上表面 32°，下表面-36°），优化极值点位置（上表面[0.38, 0.063]，下表面[0.293, -0.058]）。

误差结果：

上表面：最大误差 0.0012，均方根误差 0.0005；

下表面：最大误差 0.0011，均方根误差 0.0004；

整体精度：误差集中在后缘区域，形状匹配度高。

2. CST 方法

调参过程：

调整 Bernstein 多项式系数，优化厚度分布（如上表面系数增加以匹配 RAE2822 最大厚度）。

误差结果：

上表面：最大误差 0.0021，均方根误差 0.0009；

下表面：最大误差 0.0018，均方根误差 0.0007；

整体精度：前缘区域误差较小，后缘闭合略有偏差。

四、参数化方法对比

对比维度	贝塞尔曲线方法	CST方法
参数意义	直接控制几何特征（如斜率、极值点）	通过系数全局控制厚度分布
调整灵活性	局部调整能力强，适合复杂形状	参数调整简单，适合光滑连续翼型
计算效率	需优化控制点，计算耗时	多项式计算快速，适合迭代优化
误差表现	最大误差更小（0.0012），精度高	误差稍大（0.0021），但参数直观
适用场景	高精度匹配特定翼型	快速生成近似翼型，适合初步设计

五、结论

1.贝塞尔曲线方法：适合需要高精度匹配目标翼型的场景，尤其是复杂几何特征（如前缘曲率、后缘闭合），但调参过程复杂，依赖优化算法。

2. CST 方法：参数意义明确，通过调整系数快速生成近似翼型，适合优化设计中的迭代过程，但后缘闭合需额外修正。

3. 综合建议：使用 CST 方法快速生成翼型，并结合贝塞尔曲线方法提升精度，进行横向对比验证。

附录：完整代码及误差数据见 `E1_CST.m` 和 `E1_bezier.m`