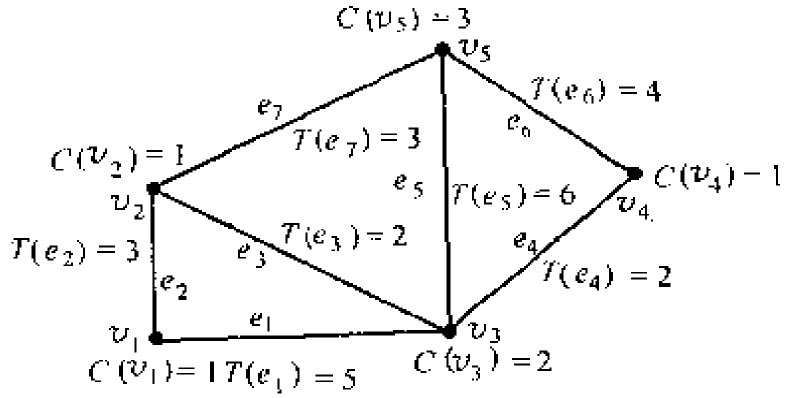
附录 3　数学模型竞赛文章选录

一、信息传递最少用时的数学模型*

原始题目（1994 年美国国际大学生模型竞赛 B 题）：

在你们的公司里，各部门每天都要分享信息。这种信息包括前一天的销售统计和当前的生产指南。尽快公布这些信息是十分重要的。

假设一个网络被用来从一台计算机向另一台计算机传输数据组（文件）。作为例子，考虑下面的图模型



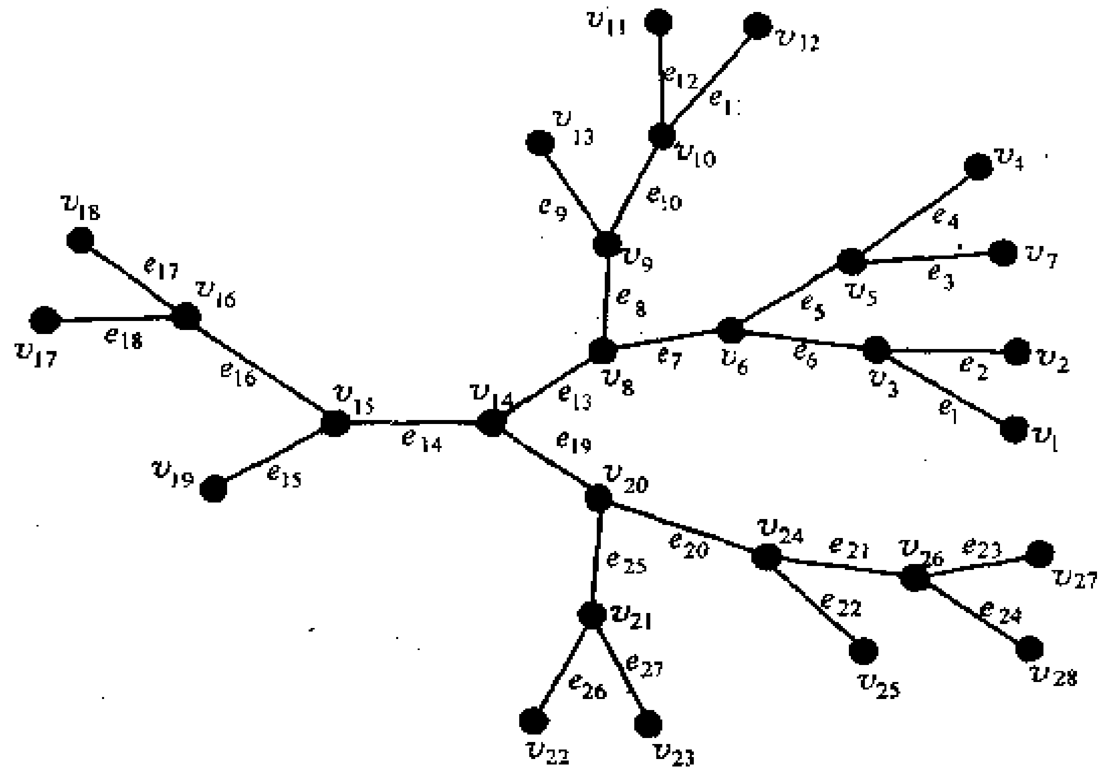
附图 3－1　文件传输网络的例子

顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 表示计算机，边 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 表示（在相连的端点表示的计算机之间）要传输的文件。$T(e_i)$ 表示传输文件 e_i 所需的时间，$C(v_i)$ 表示计算机 v_i 同时能传输多少个文件的容量。文件传输包括占用有关计算机为传输该文件所需的全部时间。$C(v_1)=1$ 表示计算机 v_1 一次只能传输一个文件。

* 本文为我校学生获 1994 年美国国际大学生数学模型竞赛一等奖的文章。

我们感兴趣的是以最优的方式安排传输，即使得传输完所有的文件所用的总时间最小。这个最小总时间称为接通时间(makespan)。请为你们的公司考虑以下三种情形：

情形 A：你们公司有 28 个部门。每个部门有一台计算机。在附图 3-2 中每台计算机用顶点表示。每天必须传输 27 个信息，在附图 3-2 中用连线表示。对于这个网络，对所有的 x、y，有 $T(e_x)=1$，$C(v_y)=1$。试找出该网络最优的安排以及接通时间。你们能向你们的主管人员证明你们对该网络求得的接通时间是尽可能最小的



附图 3－2　情形 A 和 B 的网络

吗？叙述你们求解该问题的方法。你们的方法适用于一般情形吗，即是否适用于 $T(e_x)$、$C(v_y)$ 以及图结构都是任意的情形？

情形 B：假设你们公司改变了传输要求。现在你必须在同样的基本网结构(见附图 3-2)上考虑不同类型和大小的文件。传输这些文件所需时间由附表 3-1 中每条边的 $T(e_x)$ 项表出。对所有 y 仍

有$C(v_y)=1$。试对新网络找出最优安排和接通时间。你们能证明对新网络而言你们求得的最小接通时间是尽可能最小的吗？叙述你们求解该问题的方法。你们的方法适用于一般情形吗？试对任何特异的或出乎意料的结果发表评论。

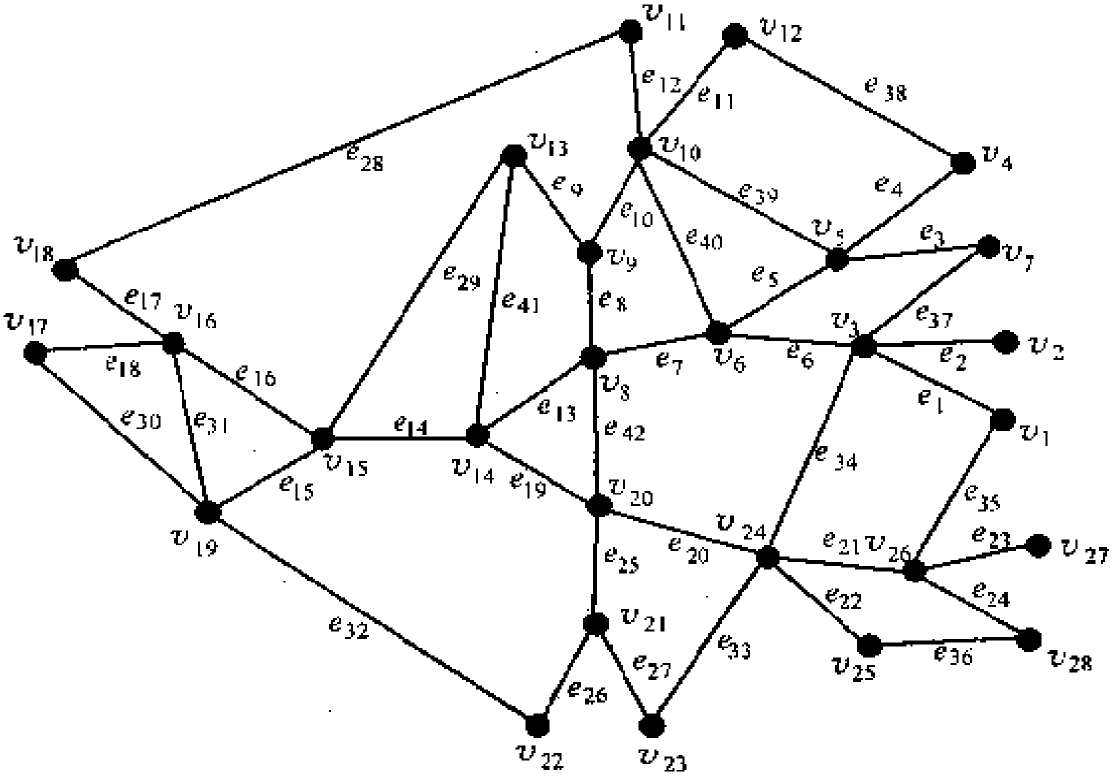
附表 3-1　情形 B 的文件传输时间数据

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
$T(e_x)$	3.0	4.1	4.0	7.0	1.0	8.0	3.2	2.4	5.0	8.0	1.0	4.4	9.0	3.2	
$x=$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27		
$T(e_x)$	2.1	8.0	3.6	4.5	7.0	7.1	9.0	4.2	4.4	5.0	7.0	9.0	1.2		

情形 C：你们公司正在考虑扩展业务。如果公司真的这样做的话，每天有几个新文件(边)要传输。这种业力扩展还包括计算机系统的升级换代。28 个部门中的某些部门将配备新的计算机使之每次能传输不止一个文件。所有这些变化都在下面的附图 3-3 以及附表 3-2、附表 3-3 中表明。你们能找到的最优安排和接通时间是多少？你们能证明对该网络而言这个接通时间是尽可能最小的吗？叙述你们求解该问题的方法。试对任何特异的或者出乎意料的结果发表评论。

附表 3-2　情形 C 的文件传输时间数据

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$T(e_x)$	3.0	4.1	4.0	7.0	1.0	8.0	3.2	2.4	5.0	8.0	1.0	4.4	9.0	3.2
$x=$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$T(e_x)$	2.1	8.0	3.6	4.5	7.0	7.0	9.0	4.2	4.4	5.0	7.0	9.0	1.2	6.0
$x=$	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$T(e_x)$	1.1	5.2	4.1	4.0	7.0	2.4	9.0	3.7	6.3	6.6	5.1	7.1	3.0	6.1



附图 3－3　情形 C 的网络

附表 3-3　情形 C 的计算机容量数据

$y=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
$C(v_y)$	2	2	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1	2	
$y=$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
$C(v_y)$	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	

本文应用边着色理论、加权邻接矩阵、图的最大分配等方法，从不同角度研究给定网络的信息传递最少用时，给出信息传递方案，并推广至任意网络的情况。

1. 引　言

某公司下设若干个部门。为了让各部门间的信息以最快的方式互通共有，需合理安排信息传递的方案。本文将探讨在三种条件

下（原文给出），信息网络中文件块在各部门间传递的问题。本文符号说明如下：v_y 表示需要信息的部门（结点）；e_x 表示被传递文件；$C(v_y)$表示网络中结点 v_y 同时处理文件的个数；$T(e_x)$表示传递文件 e_x 所用的时间。为合理安排文件的传递，得到最优结果，我们提出几点说明及假设：

（1）每文件只在与之相邻接的顶点间传送，不与文件边邻接的部门不需要此文件。

（2）文件以双工方式传递，不考虑其传递方向。

（3）传递文件所需时间与文件长度及类型有关，而与部门间的距离无关。

（4）每部门同时处理文件的个数取决于其拥有计算机的数量，在每传递一个文件过程中必有两台计算机被同时占用。

（5）两部门间如有多个文件需被传递时，可将它们合并为一个，这样，网络简化为单连通图。

（6）各部门不需要向自己传送信息，故网络为无环图。

（7）在模型Ⅱ中，文件传递可被中断，因此，文件可任意分段传送，不需要额外的处理时间。

2. 模型Ⅰ

此模型是针对网络中 $T(e_x)=1, C(v_y)=1, (x=1,2,\cdots,n; y=1,2,\cdots,m)$的情况建立的（见附图 3－2），其中 n 为边数，m 为结点数。对网络进行边着色，按边所着颜色将同色边代表的文件一起传送，这样，网络的边色数即为传递全部文件的最小用时。

由图论中 Vizing 定理知 G 中边色数

$$\psi(G) \leqslant 1 + \Delta(G)$$

其中，$\Delta(G)$为图 G 中结点的最大度数。易知 $\psi(G) \geqslant \Delta(G)$。当 G 为一类图时，$\psi(G)=\Delta(G)$；当 G 为二类图时，$\psi(G)=1+\Delta(G)$，易证树属于二部图，而二部图均为一类图，故树结构网络中传递全部文件的最短用时为网络结点的最大度数$\Delta(G)$。对给定网络（如附图 3

-2)，在 $C(v_y)=1, T(e_x)=1$ 的情况下，我们只需 3 个单位时间即可全部传完文件。

附图 3-2 网络文件的传送安排由附表 3-4 给出，文献[25]给出了边着色的 FORTRAN 子程序，因此，模型 I 可推广到 $C(v_y)=1, T(e_x)=1$ 的所有网络。

附表 3-4 传送安排

批	边
$A0$	$e_3, e_6, e_8, e_{11}, e_{14}, e_{17}, e_{20}, e_{23}, e_{26}$
$A1$	$e_2, e_4, e_7, e_9, e_{12}, e_{15}, e_{18}, e_{19}, e_{21}, e_{27}$
$A2$	$e_1, e_5, e_{10}, e_{13}, e_{15}, e_{22}, e_{24}, e_{25}$

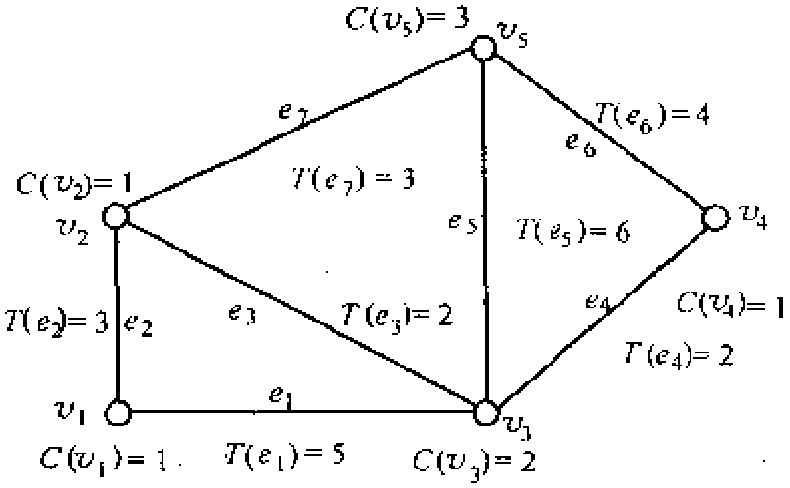
3. 模型 Ⅱ

在假设(7)下，由于各部门处理能力与部门间传递文件所需时间不同，故每个部门的繁忙程度不同。为在最短时间内传完所有文件，我们应尽量使最忙的部门不间断地传递文件。这里，按各部门的剩余工作量(繁忙程度)考虑其对文件传送的优先权 $P_v(y)$，用 $\sum_{x=1}^{m}\overline{T}(e_x)$ 表示某部门 v_y 的剩余文件的传送时间，其中 m 为该顶点的度数。这样，

$$P_v(y)=\frac{\sum_{x=1}^{m}\overline{T}(e_x)}{C(v_y)}$$

为该顶点的优先权，即该部门的剩余工作量。我们采用加权邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示文件传送状态，a_{ij} 表示在第 i 与 j 部门(结点)间传送余下的文件所需的时间，向量 $\overline{C}(v_y)$ 表示各部门的处理能力，以附图 3-4 为例，其初始状态为

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&3&5&0&0\\3&0&2&0&3\\5&2&0&2&6\\0&0&2&0&4\\0&3&6&4&0\end{bmatrix},\quad \overline{C}(v_y)=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\\3\end{bmatrix}$$



附图 3－4　初始网络

我们可由 $A(G)$ 与 $\overline{C}(v_y)$ 的表达式得到 $P_v(y)(y=1,2,\cdots,5)$。然后按各部门 $P_v(y)$ 的大小，尽量多地传送文件。任意文件被传完时，中断文件的传送，记录用时，再重新确定 $P_v(y)$，确定新的传送方案，以此类推，直至全部文件传完为止，即 $A(G)$ 中的所有元素均为 0 时。用"↗"表示箭头指向的两部门间文件被传递，$\boldsymbol{P}_v$ 表示所有 $P_v(y)$ 组成的向量，则附图 3－4 网络文件传送过程如下：

最初

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&3&5&0&0\\3&0&2&0&3\\5&2&0&2&6\\0&0&2&0&4\\0&3&6&4&0\end{bmatrix},\quad \overline{C}(v_y)=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_v=\begin{bmatrix}8\\8\\7.5\\6\\4.3\end{bmatrix}$$

在 0～2 时间段，e_2,e_4,e_5 被传递，当 $t=2$ 时有

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&5&0&0\\1&0&2&0&3\\5&2&0&0&4\\0&0&0&0&4\\0&3&4&4&0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_v=\begin{bmatrix}6\\6\\5.5\\4\\3.6\end{bmatrix}$$

在 2～3 时间段，e_2，e_4，e_5 被传递，当 $t=3$ 时有

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&0&5&0&0\\0&0&2&0&3\\5&2&0&0&3\\0&0&0&0&1\\0&3&3&3&0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_v=\begin{bmatrix}5\\5\\5\\3\\3\end{bmatrix}$$

在 3～5 时间段，e_1，e_3，e_6 被传递，当 $t=5$ 时有

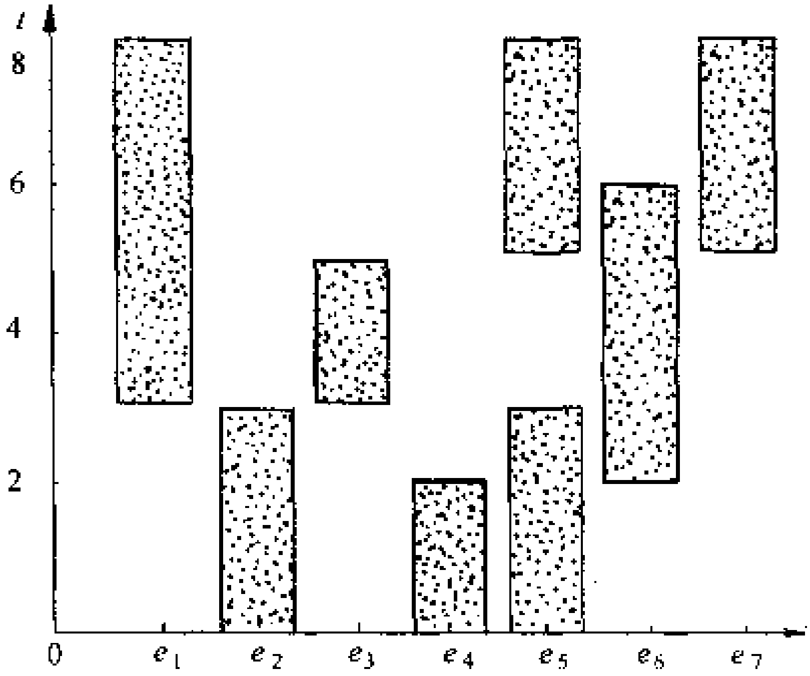
$$A(G)=\begin{bmatrix}0&0&3&0&0\\0&0&0&0&3\\3&0&0&0&3\\0&0&0&0&1\\0&3&3&1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_v=\begin{bmatrix}3\\3\\3\\1\\2.3\end{bmatrix}$$

在 5～6 时间段，e_1，e_5，e_6，e_7 被传递，当 $t=6$ 时有

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2\\2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&2&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_v=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\0\\1.3\end{bmatrix}$$

在 6～8 时间段，e_1，e_7，e_5 被传递。当 $t=8$ 时 $\boldsymbol{A}(G)$中的所有元素变为 0，文件全部传送完毕。上述过程的文件传递计划由附图 3－5 给出。

在 $C(v_y)=1$，$T(e_x)=1$ 的情况下，利用此模型计算网络传递所有文件的最短时间为 3。对于附图 3－2 网络，$C(v_y)=1$，$T(e_x)$按附表 3－5 给出时计算得到文件传递最短用时为 21。对于附图 3－3 网络，其 $T(e_x)$与 $C(v_y)$分别由附表 3－6 和附表 3－7 给出，用此



附图 3-5　文件传递计划

算法得到的最短用时为 29.6。考虑附图 3-2 中顶点 v_{20}，附图 3-3 中顶点 v_{24}，易知此算法解得的 t 已达到最小。

附表 3-5　传递文件所用时间

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$T(e_x)$	3.0	4.1	4.0	7.0	1.0	8.0	3.2	2.4	5.0	8.0	1.0	4.4	9.0	3.2
x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
$T(e_x)$	2.1	8.0	3.6	4.5	7.0	7.0	9.0	4.2	4.4	5.0	7.0	9.0	1.2	

附表 3-6　传递文件所用时间

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$T(e_x)$	3.0	4.1	4.0	7.0	1.0	8.0	3.2	2.4	5.0	8.0	1.0	4.4	9.0	3.2
x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$T(e_x)$	2.1	8.0	3.6	4.5	7.0	7.0	9.0	4.2	4.4	5.0	7.0	9.0	1.2	6.0
x	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$T(e_x)$	1.1	5.2	4.1	4.0	7.0	2.4	9.0	3.7	6.3	6.6	5.1	7.1	3.0	6.1

附表 3－7　处理文件个数

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$C(v_y)$	2	2	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1	2
y	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$C(v_y)$	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1

4. 模型Ⅲ

当文件传送不可间断时，用模型Ⅲ可得到较满意的结果。

只要与文件相邻接的两部门都有剩余处理能力（即每部门都存在未被占用的计算机），就应立即传送文件。在文件传递过程中，同时结束的文件少，有剩余处理能力的部门少，可选择传送方案的机会少。而文件传递开始时，所有计算机均空闲，可选择的方案多，所以如何选择最初的传送方案，对结果的影响最大，应把它作为解决问题的主要矛盾。考虑到各部门的传送能力不同，我们应寻找网络的一个最大匹配，也就是找一个包括最大边数的子图。基于此算法，网络附图 3－3 的初始传送方案由附表 3－8 给出。附图 3－3 中$T(e_x)$与$C(v_y)$由表附 3－6、3－7 给出。附图 3－2 网络中$C(v_y)=1$，$T(e_x)$由附表 3－5 给出时，初始传送方案也由附表 3－8 给出。

附表 3－8　初始传递方案

情况	初始时传送方案
附图 3－2	$e_1, e_4, e_7, e_9, e_{11}, e_{15}, e_{17}, e_{19}, e_{22}, e_{25}, e_{26}$
附图 3－3	$e_2, e_3, e_7, e_9, e_{10}, e_{12}, e_{14}, e_{17}, e_{20}, e_{26}, e_{30}, e_{35}, e_{36}, e_{38}$

在初始传送方案确定后，按原则尽量多地传送文件，可得到附图 3－2 网络的最小用时为 23，附图 3－3 网络的最少用时为 29.6。

二、非线性交调的频率问题的数学模型*

原始题目（1993 年全国大学生数学模型竞赛 A 题）：

* 本文为我校学生获 1993 年全国大学生数学模型竞赛大连赛区一等奖的文章。