7、飞机起飞的最优次序*

1. 问题与假设

(1) 问题

机场通常都用“先来后到”的原则分配飞机跑道。即当飞机准备离开登机口时，驾驶员电告地面控制中心，加入等候跑道的行列。

假设控制塔可以从快速反应数据库中得到每架飞机的如下信息：

1）预定离开登机口的时间；

2）实际离开登机口的时间；

3）机上乘客人数；

4）预定在下一站转机的人数和转机时间；

5）到达下一站的预定时间。

又设共有7种飞机，载客量从100人起以50人递增，最大的飞机载客量为400人。这7种飞机可能分属不同的航空公司。

试开发和建立一种能使乘客和航空公司双方都满意的数学模型，以安排飞机起飞的先后次序。

(2) 假设

1）机场控制塔上有一个快速反应的数据库，该库中存贮着每一架飞机的正点起飞时间，正点抵达目的地的时间，乘客数量，飞行距离等信息，其他一些有用的参数，可以根据数据库中已有数据估

* 本题为1989年美国大学生数学建模竞赛的B题。本文根据[5]的解答编译而成。

更多数学建模资料请关注微店店铺“数学建模学习交流”
https://k.weidian.com/RHO6PSpA

计出来。

2) 所有飞机都在同一个专用跑道上起飞，任何一种飞机在跑道上起飞所需时间相同，这样可以把时间划分成间隔为 Δ 的起飞时段。

3) 标号为 i 的飞机在第 j 个时段起飞所需费用与先前起飞的飞机无关，仅与其安排的次序有关。这一假设使我们可以把总费用作为飞机调度排序的线性函数。

4) 所有飞机从登机口到跑道起点的时间相同。

5) 记 τ 为使飞机尚能正点到达目的地所推迟起飞的最长时间。同时假定，当飞机的误点时间超过 τ 时，则飞机将以最大的安全速度飞行。

6) 如果飞机推迟起飞的时间超过 τ，则机上所有下站转机的乘客都将耽误转机。

7) 因误点而要求改航的赔偿费对每一个乘客都是相同的。

(3) 记号及其意义

Δ——飞机起飞的时间间隔；

t_0——最早起飞的飞机的离港时间；

t_d——正点起飞的时间；

T_A——正点到达目的地的时间；

t——晚点时间；

τ——最大允许晚点起飞的时间；

k——各种类型的飞机因晚点起飞而引起耗油的费用常数；

V_{av}——平均飞行速度；

V_{max}——最大的安全飞行速度；

r——要求改航的乘客的赔偿费；

π ——下站转机的乘客数；

P——乘客总数；

α——由于晚点起飞所引起的乘客不满意（程）度的增长率；

a——全体乘客由于飞机晚点起飞所引起的不满意度折合成美元的折合率；

b——耽误转机的乘客不满意度折合成美元的折合率。

2. 分析与建模

若有 n 架飞机都要求在 t_0 时刻正点起飞，并且认为所有飞机都有直通跑道的通道。我们以总费用最小作为目标来安排飞机起飞的次序。总费用由两部分组成，即航空公司的费用和乘客不满意程度所折合的费用。

设 c_{ij}为标号 i 的飞机在第 j 个起飞时段起飞时的费用，引入状态变量 x_{ij}，其定义为

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当标号为 } i \text{ 的飞机第 } j \text{ 个起飞时}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则总费用为

$$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{7-1}$$

为了保证每一架飞机只安排在一个时段内起飞及每一个时段 Δ 内只有一架飞机起飞，因此对状态变量 x_{ij}增加约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,2,\cdots,n;\qquad \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,n \tag{7-2}$$

由假设条件可知，c_{ij}与 x_{ij}无关，因而总费用 C 是一个线性函数。

问题的实质是在约束条件（7-2）之下求 x_{ij}，使得总费用 C 达到最小，这是一个指派问题。

假定每隔 Δ 时间只有一架飞机离开登机口加入到请求起飞的行列中，这样就保证总有飞机请求起飞。每隔 Δ 时间，执行一次程序，以安排在当前状态下最优的起飞次序。这里需要说明一点，该程序运行时间极短，不到一分钟便可完成，因此，如果数据发生变化时，如飞机晚点进港等，几乎可以立即决策。

下面来分析费用系数的确定。

总费用应包括航空公司的费用和乘客的不满意度所折合的费用。首先把基本费用视为零，即设飞机在正点起飞时的费用为零，仅考虑由于飞机晚点起飞所导致的额外费用。

航空公司的费用主要由两部分组成。一部分为额外的汽油费，这个费用主要是由于飞机晚点起飞时，要在空中快速飞行所额外消耗的汽油费；另一部分为耽误了转机的乘客需改航时的赔偿费。若飞机晚点起飞，为了正点抵达目的地，它必须在空中以更快的速度飞行，这样由于风阻力的增大和其它因素，就要增加汽油的消耗。我们不太清楚速度的增加如何引起耗油费的增加，但当飞机加速过程结束，在空中以最大安全速度飞行时，额外的耗油费将是一个常数。为简单起见，选用线性函数来表示额外的油耗费，其公式是

$$F(t)=\begin{cases}kt, & t<\tau\\ k\tau, & t\geqslant\tau\end{cases}\tag{7-3}$$

其中，t 为飞机晚点起飞的时间，显然当飞机正点起飞时，$t=0$，若 t_0 为首架起飞的时刻，t_d 为正点起飞的时刻，Δ 为起飞的时间间隔，则第 j 个起飞的飞机晚点起飞的时间为

$$t=t_0-t_d+(j-1)\Delta$$

由于 τ 为最长的晚点起飞时间，即当晚点起飞的时间超过 τ 以后，即使在空中以最大速度飞行，也不能正点抵达目的地，因此

$$\tau=T_A-t_d-\frac{d}{V_{max}}\ ^*$$

其中 T_A 为正点抵达目的地的时刻，d 为飞行距离，V_{max} 为最大的安全飞行速度。d 可用公式来表示

$$d=(T_A-t_d)V_{av}$$

其中 t_d 为正点起飞时刻，V_{av} 为正点起飞时平均飞行速度。

---

* 原文为 $\tau=T_A-\frac{d}{v_{max}}$

式（7-3）中的常数 k 与油价、单位晚点时间油耗的增加率及最大安全飞行速度有关，同时还应与飞行距离有关，当然飞行距离越长，额外的油耗就越大。由于飞行距离为 $T_A-t_d-\tau$，乘以最大安全飞行速度，因此式（7-3）可以改写为

$$F(t) \doteq \begin{cases} k(T_A - t_d - \tau)t, & t < \tau \\ k(T_A - t_d - \tau)\tau, & t \geqslant \tau \end{cases} \tag{7-4}$$

下面再计算改航旅客的赔偿费。为简单起见，由假设条件，记每一个改航旅客的赔偿费用为一个常数 r（若赔偿费不同，则令 r 为赔偿费的期望值）。由于当飞机晚点起飞时，所有下站转机的乘客都将改航，则改航的赔偿费为

$$R(t) = r\pi u(t - \tau) \tag{7-5}$$

π 为转机旅客总数，$u(t)$ 为单位阶梯函数，即

$$u(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ 1, & s \geqslant 0 \end{cases}$$

费用系数中还应考虑乘客的不满意程度。一般地，飞机晚点起飞的时间越长，旅客就越抱怨，其不满意度就越大。如果晚点时间只有 1～2min，旅客就不会太不满意。但是，随着晚点时间的增加。旅客会非常生气，而不满意度将急骤增加，因此我们选用指数函数描述旅客的不满意度。这个不满意度对机上每一个旅客都是如此，但对下站要转机的乘客，还需追加另外的不满意度，用$D(t)$表示总的不满意度所折合的费用，则

$$D(t) = ap(e^{\alpha t} - 1) + b\pi u(t - \tau)$$

p 为机上乘客总数，π 为下站转机的乘客总数，为了保证在正点起飞时乘客的不满意度为零，因而采用了（$e^{\alpha t}-1$）的形式，显然$t=0$时，$D(0)=0$。α 为乘客不满意度的增长率，a，b 为折合率。$ap(e^{\alpha t}-1)$ 代表全体乘客不满意度所折合的费用，$b\pi u(t-\tau)$ 为下站转机乘客追加的不满意度所折合的费用，这一项只有当 $t\geqslant\tau$ 才起作用。

综上所述，费用系数 c_{ij}应为额外油耗费、赔偿费、及不满意度

所折合的费用之和

$$c_{ij}=F(t)+R(t)+D(t)$$

为了使 c_{ij}对所有 t 都有意义，也为了同时考虑还未离开登机口的飞机，当 $t<t_d$ 时，定义 $c_{ij}=\infty$。由于模型中考虑总费用的最小值，当加入未离开登机口的飞机时总费用 C 变为∞，当然不能达到最小，因而自然不会影响排队的最优次序，扩充定义后的 c_{ij}为

$$c_{ij}=\begin{cases}\infty, & t<t_d\\ k(T_A-t_d-\tau)t+ap(e^{at}-1), & t_d\leqslant t<\tau\\ k(T_A-t_d-\tau)\tau+ap(e^{a\tau}-1)+r\pi+b\pi, & t\geqslant\tau\end{cases}$$

t 和 τ 可由下式给出

$$t=t_0-t_d+(j-1)\Delta \tag{7-6}$$

$$\tau=T_A-t_d-\frac{(T_A-t_d)V_{av}}{V_{max}} \tag{7-7}$$

α，a，b 为自由参数，其它参数 t_d，T_A，π，p，r，Δ，k，V_{av}，V_{max} 均可从快速数据库中查到，t_0 可由计算机的系统时钟给出，因此除 3 个自由参数外，其它参数都可以进行计算。

3. 模型的检验

(1) 稳定性分析

为了使模型有意义，必须进行检验。我们用线性规划的单纯形法编制了程序，在几种简单的情形下显示了模型的性态，下面的计算实例所得的结果与我们所期望的完全一致。模型是否成功的标志就是看是否为航空公司节约开支，同时又保持乘客的满意程度在可接受的水平内。

然而在对模型检验前，必须分析模型对参数扰动的稳定性，也就是说，必须保证在有些参数与真值有微小差别的情况下，所得到的解与最优解相差也不大。另外还需辩认哪一个参数对结果影响最为敏感，而对这个参数必须由更多的方面来确定，以使模型能够真实地被执行。

我们所建立的模型不是一个严格的线性规划问题，其原因就是状态变量 x_{ij}不是连续变量，而只能取 0 或 1，这给稳定性分析带来不便。为此把 x_{ij}的取值放宽到非负实数范围内，即

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

用 $Z=-C$ 代替，则原问题转化为：

$$\max Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-c_{ij}x_{ij}) \tag{7-8}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,n\\ &\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n\\ &\qquad\qquad x_{ij}\geqslant 0\end{aligned} \tag{7-9}$$

熟悉线性规划问题的读者知道，如果问题（7-8），（7-9）有可行解，则必然有最优解，且最优解中的状态变量仅取整数值，即只能取 0 或 1，因而问题（7-8），（7-9）与原问题（7-1），（7-2）是等价的。

把式（7-8）和式（7-9）用向量形式写出来将更加简洁，而且更容易进行稳定性分析和误差估计，令

$$C=-(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n},c_{21},c_{22},\cdots,c_{2n},\cdots,c_{n1},c_{n2},\cdots,c_{nn})$$

$$X^t=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n},x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n},\cdots,x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nn})$$

$$b^t=(1,1,\cdots,1)$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} n\text{ 列} & 2n\text{ 列} & & n^2\text{ 列}\end{array}\\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1\,1\cdots 1 & 0\,0\cdots 0 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & 0\,0\cdots 0\\ 0\,0\cdots 0 & 1\,1\cdots 1 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & 0\,0\cdots 0\\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\\ 0\,0\cdots 0 & 0\,0\cdots 0 & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & 1\,1\cdots 1\\ \hdashline E_n & E_n & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & E_n \end{array}\right]_{(2n\times n^2)}\end{array}$$

其中，E_n 是 n 阶单位矩阵。

C 和 X 均为 n^2 维的向量，b 为 $2n$ 维的向量，上标 t 表示转置，这样问题（7-8），（7-9）转化为

$$\max Z = CX$$

$$\text{s.t.} \quad AX = b \text{ 和 } X \geqslant 0 (\text{指各分量非负})$$

显然 A 和 b 不会改变，而引起误差的原因来自于 C。若 X^* 为最优解，C 的扰动为 ΔC，即 $C' = C + \Delta C$，由于 $AX = b$ 不受 C 的影响，因而 X^* 仍然为可行解，但此时未必为最优解。新的目标函数值 Z' 为：

$$\begin{aligned} Z' &= Z'X^* = (C + \Delta C)X^* \\ &= CX^* + (\Delta C)X^* \\ &= Z + (\Delta C)X^* \end{aligned}$$

目标函数的改变量为 $(\Delta C)X^*$，它是 ΔC 的线性函数，当然，当 $|\Delta C|$ 很小时，$|Z' - Z|$ 也很小，因此模型是稳定的。

C 产生误差的原因有两个，其一是忽略掉一些耗费，如快速飞行时，引起飞机额外的消耗；其二是来自于旅客不满意度中的参数 a，b，α，这些参数很难得到真值，因而是 C 产生误差的主要原因。顺便指出，在这 3 个参数中 α 最敏感，因为 α 为指数，它对最优解的影响与 a，b 对最优解的影响有量级的差别。

现在来分析参数 a，b，α 有扰动时的误差。设

$$a = \hat{a} + \sigma_a, \quad b = \hat{b} + \sigma_b, \quad \alpha = \hat{\alpha} + \sigma_\alpha$$

即 3 个参数的扰动分别为 σ_a，σ_b，σ_α。c_{ij} 对 a，b，α 的偏导数为

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial a} = p(e^\alpha - 1)$$

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial b} = \pi$$

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial \alpha} = apte^\alpha$$

如果我们设扰动误差是相互独立的，则c_{ij}的误差$\sigma_{c_{ij}}$为

$$\begin{aligned}\sigma_{c_{ij}}^2 &= \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial a}\right)^2\sigma_a^2 + \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial b}\right)^2\sigma_b^2 + \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial \alpha}\right)^2\sigma_\alpha^2 \\ &= \sigma_a^2[(e^{\alpha t} - 1)p]^2 + \sigma_b^2\pi^2 + \sigma_\alpha^2 t^2a^2p^2e^{2\alpha t}\end{aligned}$$

因为

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

因此

$$\frac{\partial Z}{\partial c_{ij}} = x_{ij}$$

所以目标函数 Z 的误差 σ_Z^2 可表示为

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Z}{\partial c_{ij}}\right)^2\sigma_{c_{ij}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2\sigma_{c_{ij}}^2\end{aligned}$$

（2）计算实例

用我们编写的程序，通过以下几个例子，显示了模型的一些性质，这些例子说明模型是合理的。

为了执行简单，再作一些假设。

1）至多有三架飞机等候起飞（即 $n\leqslant3$），如果不足三架，在模型中增加一架或两架虚拟的飞机，只需要把虚拟飞机的费用系数视为零即可。在此之下，可以调用国际数学统计库（IMSL）的子程序 ZX4LP 来求解线性规划问题。

2）通过直觉来确定参数 a, b, α，在实践中这三个参数应由经验和调查来确定。

i）Δ=1min，即任何飞机起飞时间至多 1 min，其间，其它飞机不能占用跑道。

ii）跑道上没有飞机降落。

iii）每一个改航旅客的赔偿费用为 350 美元。

iv）一个要改航乘客的不满意度是误点 15min 的乘客的 2 倍。

例 1 乘客多的飞机先起飞。

让我们考虑一个简单的例子，有 A，B，C 三架飞机都已离开了登机口，要求在上午 6 点钟正点起飞，这三架飞机将飞往三个不同城市，但空中飞行距离都相同，正点抵达目的地的时间均为上午 7 点 20 分。另外，其乘客数量分别为 350，100，400，且每架飞机上都有 100 名乘客将在下一站转机。

表 7-1 给出了执行程序的结果。

表 7-1

标号	乘客数/转机乘客数	费用系数 c_{ij}			解 x_{ij}		
A	350/100	0	0.48	0.97	0	1	0
B	100/100	0	0.41	0.83	0	0	1
C	400/100	0	0.5	1	1	0	0

其最小费用为 1.31，起飞的次序为 C，A，B。这一结果与我们的直觉完全一致，即在其它条件相同的情况下，乘客数量多的飞机优先起飞。

例 2 误点时间最长的飞机优先起飞。

接着例 1 的问题，飞机 C 正在起飞的同时，飞机 D 已离开了登机口请求起飞。已知飞机 D 载有 200 名乘客，其中 150 名将在下站转机，这架飞机已经晚点 18min，要使飞机 D 正点抵达目的地，必须在 2min 内起飞（即必须在 6 点 02 分或 6 点 03 分两个起飞时段内起飞）。程序运行结果由表 7-2 给出。

表 7-2

标号	乘客数/转机乘客数	已晚点时间(min)	费用系数 c_{ij}			解 x_{ij}		
D	200/150	18	0.82	0.91	1	1	0	0
A	100/100	1	0.07	0.15	0.22	0	0	1
B	350/100	1	0.09	0.17	0.26	0	1	0

这个例子中的总费用为 1.22，最优的起飞次序为 D，A，B。这一结果与直觉相符，即晚点时间最长的飞机优先起飞。

例 3 优先权相差不明显的情形。

当系统时钟指向 6 点 03 分，此时 C、D，A 三架飞机已先后起飞，飞机 B 已晚点 3min，而又有一架飞机 E 离开登机口，请求起飞。对飞机 E，我们知道如下信息：总乘客数 122 名，其中 89 名乘客在下站转机；晚点 1min 的费用为 450 美元；最长的晚点时间为 45min。

用我们的程序求解这个问题，须增加一架虚拟飞机 X，对应于飞机 X 的所有参数为零，表 7-3 给出了例 3 的结果。

表 7-3

标号	乘客数/转机乘客数	已晚点时间(min)	费用系数 c_{ij}			解 X_{ij}		
B	100/100	3	0.6	0.8	1	0	1	0
E	122/89	0	0	0.28	0.56	1	0	0
X	0/0	0	0	0	0	0	0	0

从表 7-3 可以看出，总费用之差 $0.88-0.8=0.08$，这个数目不太大，因而究竟哪一架飞机应先起飞不甚明显。事实上，由于飞机 E 有较多的富裕时间，因而应先安排飞机 B 起飞。但是，由于飞机 E 在飞行时费用较大，以及有更多的乘客，因而飞机 E 应先起飞，这与模型的结果一致。总体上来讲，这个例子与我们的直觉有差异。

4、模型的优缺点

本模型有两个缺点：其一，a，b，α 三个参数很难精确地确定，只能凭经验给出；其二，在建模时仅考虑了飞机起飞的情形，而忽略了在跑道上有飞机降落的情形。

该模型适合于有两个以上跑道的机场。

虽然如此，这个数学模型的优点还是明显的。首先，执行简单，利用当前的计算机技术和快速数据库，可在几秒钟内得到最优解，甚至对飞机数量较大时也是如此；第二，模型具有广泛性，对于飞机数量的多少，机上乘客数和下站转机乘客数等，都可以在一般的情形下给出最优解；第三，模型是稳定的，其可靠性可以信赖。

因此，利用该模型既可为航空公司节约费用，又能使乘客得到足够的满意。

参考文献

[1] Bevington, Philip R.: *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science*, New York, McGraw Hill, 1969

[2] Cooper, Leon, David Steinberg: *Methods and Applications of Linear Programming*, Philadephia, PA: Saunders, 1974

[3] Hiller, Frederik and Gerald Lieberman: *Introduction to Operations Research*, Oakland, CA: Holden — Day, 1986

[4] Spivey, W. Allen, Robert M. Thrall: *Linear Optimization*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1970

[5] R. Ngo, M. Overley, J. Pilliod: Controlling Departing Airport Traffic: *The UMAP Journal* Vol. 10 No. 4, 1989