

**MCM93 问题一A:加速餐厅剩菜堆肥的生成**

一家注重环境的学校餐厅正用微生物把顾客没吃完的食物再循环生成堆肥。每天餐厅把吃剩的食物和泥浆(粘结剂)混合,再把它们和厨房里容易弄碎的色拉菜以及少量的扯碎的纸片混合,并把混合物喂给一种真菌培养物和土壤细菌,它们把泥浆、绿叶菜、纸片消化形成有用的堆肥。易碎的绿叶菜为真菌培养物提供氧气,而纸片则吸收过量的湿气。但有时真菌培养物显得不能或不肯消化顾客留下的那么多的剩饭菜。餐厅并没有因为真菌培养物没有胃口而责怪厨师长。餐厅收到要大量购买他们生产的堆肥的报价。所以餐厅正在研究增加堆肥产量的方法。由于无力营建一套新的堆肥设备,因此餐厅首先寻求能加速真菌培养物活力的方法,例如,通过优化真菌培养物的环境(眼下大约是在 120°F 和 100% 湿度的环境下生成堆肥的),或通过优化喂给真菌培养物的混合物组成,或同时优化两者(而达到加速真菌培养物的活力)。

试决定在喂给真菌培养物的混合物中泥浆、绿叶菜和纸片的比例与真菌培养物把混合物生成堆肥的速度间是否存在任何关系。若你认为不存在任何关系,试说明理由。否则,试决定什么样的比例会加速真菌培养物的活力。

除了按竞赛规则说明中规定的格式写的技术报告外,请为餐厅经理提供一页长的用非技术术语表示的实施建议。

作为数据,下表列出了分别存放在不同的箱子中用磅表示的混合物组成中各种原料的数量,以及把混合物喂给真菌培养物的日期以及完全生成堆肥的日期(以表示生成堆肥所需的时间)。

泥浆(磅)	绿叶菜(磅)	纸片(磅)	喂入日期	生成堆肥的日期
86	31	0	90,7,13	90,8,10
112	79	0	90,7,17	90,8,13
71	21	0	90,7,24	90,8,20
203	82	0	90,7,27	90,8,22
79	28	0	90,8,10	90,9,12
105	52	0	90,8,13	90,9,18
121	15	0	90,8,20	90,9,24
110	32	0	90,8,22	90,10,8
82	44	9	91,4,30	91,6,18
57	60	6	91,5,2	91,6,20
77	51	7	91,5,7	91,6,25
52	38	6	91,5,10	91,6,28

本题是由位于华盛顿州 Cheney 的东华盛顿大学数学系的 Yves Nievegelt 提供的,本题叙述的情况及数据来自华盛顿州 Medical Lake 地区监狱的餐厅。他还写了一篇评论文章 The outstanding optimal composting papers, The UMAP Journal, v. 14(1993), no. 3, 227—228.

**混合物转化为有机肥的最佳过程****一、问题**

近年来,随着 society 对环境保护重要性的认识的提高,某些自助餐厅设法将顾客吃剩的食物转化成有机肥。每天,餐厅将剩饭菜搅拌成半流体,并将其与不能食用的青菜根及少量的碎报纸相混合,再倒入混有土壤细菌的真菌培养液,经过生化作用,半流体、青菜和碎报纸转化为可

用的有机肥,也称为堆肥。

青菜根为生化反应提供了氧气,碎报纸可以吸收过量的湿度,因为真菌的活动能力是有限的,当餐厅的剩饭菜过多时,培养液不能消化分解过多的剩余物。现在,某餐厅接受了大量购买堆肥的订货,但它我力投资再建新的堆肥设施。因此,餐厅必须改进原有的堆肥方法以提高产量,主要途径是要寻求新方法,提高真菌培养液的生化反应能力。例如,优化真菌生存的环境(通常的环境温度控制 120°F,湿度 100%),或优化混合物的成分。

餐厅需要我们确定在混合物的比例与真菌培养液分解混合物的速度之间是否存在某种关系。如果不存在任何关系,需说明原因,否则要确定混合物中半流体、青菜根和碎报纸的比例,以这种比例构成的混合物可以提高真菌培养液的活动能力。下表给出了 12 组观察数据作为建模参考。

表 1 混合物的各种成分及堆肥时间

半流体(磅)	青菜根(磅)	碎报纸(磅)	堆肥起、止时间
86	31	0	90 年 7 月 13 日~90 年 8 月 10 日
112	79	0	90 年 7 月 17 日~90 年 8 月 13 日
71	21	0	90 年 7 月 24 日~90 年 8 月 20 日
203	82	0	90 年 7 月 27 日~90 年 8 月 22 日
79	28	0	90 年 8 月 10 日~90 年 9 月 12 日
105	52	0	90 年 8 月 13 日~90 年 9 月 18 日
121	15	0	90 年 8 月 20 日~90 年 9 月 24 日
110	32	0	90 年 8 月 22 日~90 年 10 月 8 日
82	44	9	91 年 4 月 30 日~91 年 6 月 8 日
57	60	6	91 年 5 月 2 日~91 年 6 月 20 日
77	51	7	91 年 5 月 7 日~91 年 6 月 25 日
52	38	6	91 年 5 月 10 日~91 年 6 月 28 日

## 二、模型的假设条件

1. 堆肥设施是由四个独立的集装箱组成。第 1~4 次试验,是把混合物分别倒入这四个箱内,当堆肥完全形成后,分别从箱内清除堆肥,再进行第 5~8 次,9~12 次试验。试验结果数据如表 1。

2. 箱内生化反应过程中的温度不受人为限制,但受外界环境温度的影响。餐厅没有和控制环境温度方面投资。

3. 在反应过程开始之前,真菌培养液与混合物是分别贮藏。真菌培养液贮存在温度为 120°F,湿度为 100%的容器中,以利于真菌生存。

4. 操作过程是先把真菌培养液倒入箱内,然后再加入混合物。由于餐厅工作人员缺乏堆肥方面的理论与经验,餐厅不能控制真菌培养液与混合物的适当比例。

5. 当箱内的 99%混合物转化为有机肥时,我们认为堆肥过程全部完成。这时要把箱内所有物质清除。99%的假设是合理的,因为操作者是凭观察而判断堆肥是否完成,混合物是否被“消化”,所以假设存在 1%的观察误差。此外要从堆肥中分离真菌需付出较高的代价,所以我们认为当反应完成时,所有物质应从箱内清除。

6. 从 7 月中旬到 8 月中旬的平均温度要比从 8 月中旬到 9 月底的平均气温要高。这个假设来自于进行堆肥实验的地区的气象观察。

7. 适当的营养和环境,可使真菌培养液中真菌的数量迅速增长。营养是指充足的食物(由

混合物提供,环境是指空间、温度和湿度。迅速增长是指按一定比例增长。

8. 根据所给的问题,可以假设餐厅雇员不具有优化堆肥的知识。

9. 培养液中的真菌与细菌分布均匀,并且充满其所在容器。

10. 真菌培养液的活动能力是与培养液中所含真菌的数量成正比,含微生物较多的培养液消化分解混合物的能力较强。

11. 在一个给定的周期内,环境温度取其平均值,并且是一常量。

### 三、混合成分及其环境分析

首先,我们考虑混合物成分的比例与堆肥所需时间之间的关系。在矩阵(表2)中,我们列出了相关数据,并用统计包对数据进行了相关分析。计算了完成一次堆肥所需时间与混合物各成分的相关系数。

表2 堆肥实验数据、模型预测数据

周期	次数	反应箱	半流体 (磅)	青菜根 (磅)	碎报纸 (磅)	总重 (磅)	C/N	起始日期	天 数		
									数据	模型	误差
1	1	1	86	31	0	117	15.5	90年7月13日	28	27	1
1	2	2	122	79	0	191	15.8	90年7月17日	27	27	0
1	3	3	71	21	0	92	15.5	90年7月24日	27	27	0
1	4	4	203	82	0	285	15.6	90年7月27日	26	28	-2
2	5	1	79	28	0	107	15.5	90年8月10日	33	35	-2
2	6	2	105	52	0	157	15.7	90年8月13日	36	35	1
2	7	3	121	15	0	136	15.2	90年8月20日	35	35	0
2	8	4	110	32	0	142	15.5	90年8月22日	47	35	12
3	9	1	82	44	9	135	26.0	91年4月30日	49	48	1
3	10	2	57	60	6	123	23.5	91年5月2日	49	48	1
3	11	3	77	51	7	135	23.8	91年5月7日	49	48	1
3	12	4	52	38	6	96	25.5	91年5月10日	49	51	-2

每次堆肥所用的混合物的某些成分的比例与完成这次堆肥所需时间相关系数揭示了混合物的成分中除了报纸与全部重量之比和时间相关外,其它成分的含量不会对堆肥时间有重要影响。下面,给出某些相关系数:

$\frac{\text{半流体}}{\text{青菜根}}$  和堆肥时间: -0.27

全部重量和堆肥时间: -0.38

$\frac{\text{报纸}}{\text{全部重量}}$  和堆肥时间: 0.81

某些弱相关性使我们考虑到混合物中只有某些因素影响堆肥时间,即混合物中碳(C)对氮(N)的比率。如果混合物中存在过量的碳,培养液将消耗所有的氮并且从未反应物中分离出来,影响生化反应,反之,若含有过量的氮,将使培养液释放出过量的氨气。

根据[4],我们计算了餐厅混合物中各种成分的 C/N 比例,其结果如下:半流体中 C/N 比例为 15:1,青菜根中为 17:1,而报纸中则是 170:1。用加权平均法计算了 12 组堆肥数据中的 C/N 比率。计算的结果给出前 8 组数据中 C/N 比率是从 15.2 到 15.8,而后 4 组数据中 C/N 比率是从 23.5 到 26.0。这个结果说明前 8 次堆肥所需时间应该是近似相同的,而后四次堆肥时应该是基本一样的。然而在前 8 次堆肥过程中第一周期的四次试验所需时间与第二周期

的四次试验所需时间存在较大的差异,这是因为环境温度的改变影响了堆肥时间。

第一周期内四次制堆肥的日期是从7月13日到8月22日,第二周期的四次制堆肥的日期是从8月10日到10月8日。在第一周期,平均每次堆肥过程需用27天,而在第二周期,平均每次大约需用38天。根据我们的观察,第二周期的平均气温低于第一周期的平均气温。因此,环境温度是影响混合物分解率的重要因素。微生物学家 W. D. Bellamy 博士曾有过如下的评论:“在堆肥过程中,在高温情况下那些细菌进行化学反应的速度要比在低温情况下快得多。通常在低温情况下需要进行几个月的反应,而在高温情况下只需几个星期就可以完成。”[4]

在堆肥箱内提高温度的最好方法是要使混合物中 C/N 的比率达到最优,并在堆肥箱内适当充气。因为在此之前餐厅没有使用有效的堆肥技术,因此环境温度的变化就成为影响堆肥时间的重要因素。

#### 四、模型设计

我们的首要目的是要为堆肥过程建立模型,模型应与所给出的数据相匹配,力求达到高度准确。堆肥速度主要取决于真菌培养液的活动能力,而活动能力又是与培养液中微生物数量成正比,因此我们假设混合物的堆肥速度与培养液中微生物数量成正比。再有,设微生物数量的增长率是由环境温度,混合物中 C/N 比率和混合物的重量决定的。

定义函数及参数如下:

$w(t)$ :混合物的重量,以磅计算。

$k$ :比例常数,表示混合物的分解率。

$f(t)$ :倒入堆肥箱内的培养液中所含微生物的数量,设1单位=10<sup>7</sup>微生物体。

$T$ :环境温度的平均值。

$m(T)$ :每磅混合物中所含培养液中的微生物体数量的上界,依赖于温度  $T$ 。

$R$ :C/N 比率。

$g(T, R)$ :倒入堆肥箱内的培养液中所含微生物的增长或死亡系数,依赖于  $T$  和  $R$ 。

我们构造两个常微方程做为堆肥模型:

$$\begin{cases} w'(t) = -kf(t) & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(t) = g(T, R)f(t)[m(T)w(t) - f(t)] & (2) \end{cases}$$

方程(1)表示混合物分解率  $w'(t)$  与培养液中微生物数量  $f(t)$  之间的关系。方程(2)是修正的 Logistic 模型,描述了培养液中微生物的增长或死亡情况。

由于微分方程系统很难得到精确解,我们采用数值计算,求近似解逼近微分方程的解。为此,构造计算机程序,采用此程序,计算时间大约需要15分钟,并且当仅有1%混合物尚未分解时,计算终止。再有参数  $k$ ,  $g(T, R)$  和  $m(T)$  的值在假设的约束条件内是适用的,以使模型结果与所给数据相吻合。增长系数  $g(T, R)$  在任一个已给的周期内保持常量,在不同周期内可以取不同值,这是因为在不同的周期内,温度和 C/N 比率的改变,对微生物的生存有影响。类似处理  $m(t)$  值。但是  $k$  值,在三个周期内都是同一值。

令  $M = m(T)w(t)$ , 设  $c$  是微生物体的存活时间,修改方程(2)为下面形式:

$$f'(t) = g(T, R)f(t)[M - f(t)] - f(t - c) \quad (3)$$

使用(3)式,可以使系统稳定在某一水平,得到控制。因为较低的温度给出较低的  $g(T, R)$  值,因此在短时间内,死亡率可以超过增长率,这样可以调节整个系统,使微生物数量稳定于低于上界  $M$  的一个水平。而当温度较高时,情况恰好相反。

为简化计算,我们仍采用(2)式,模型并不因删去死亡项  $-f(t - c)$  而改变其基本性质。

$m(T)w(t)$ 描述了培养液受制于环境温度,并连续依赖于剩余混合物的重量。混合物的作用是培养液提供营养,当混合物减少到一定程度时,将影响微生物的活动能力。实际上,(2)式存在一个动态上界。

### 五、模型检验和误差分析

首先,我们利用第二周期的数据,确定参数 $K, g(T, R)$ 和 $m(T)$ ,结果如下:

$$K=0.0012 \text{ 磅} \times \text{单位}^{-1} \times \text{天数}^{-1}$$

$$g=0.00009 \text{ 天数}^{-1} \times \text{单位}^{-1}$$

$$m=80 \text{ 单位} \times \text{磅}^{-1}$$

将这些数值输入模型中,检验模型的准确性。除了8月22日这次试验外,其余的试验数据与预测结果相吻合。根据前面的假设 $K$ 在三个周期内应取同一值。我们推测第一周期的 $g(T, R)$ 和 $m(T)$ 的值需要提高,因为第一周期的平均气温高于第二周期,而第三周期的 $g(T, R)$ 和 $m(T)$ 的值应低于第二周期的值。图1和图2给出了第二周期模型预测结果。

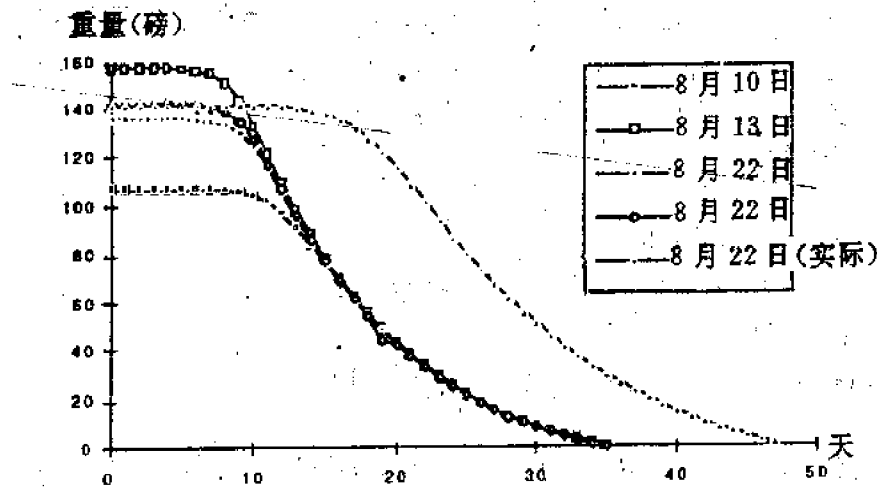


图1 混合物整体重量与反应时间的关系

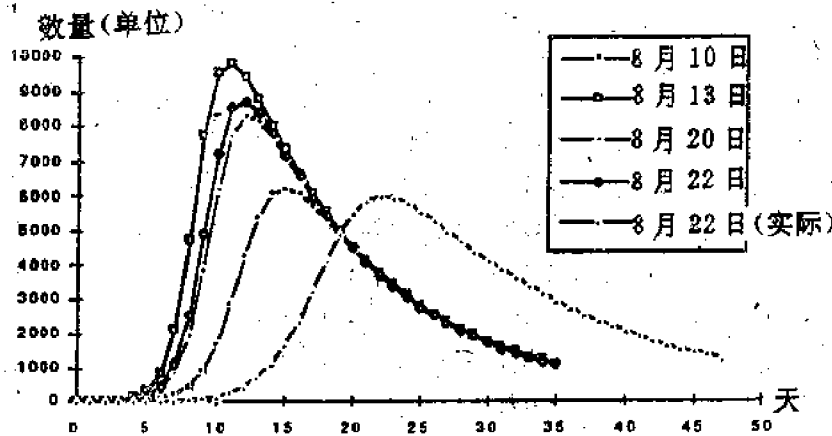


图2 微生物体的数量与反应时间的关系

在确定必要参数 $K, g(T, R)$ 和 $m(T)$ 后,在每一周期内,我们测定不同重量的混合物与反应时间的关系。模型预测结果表明,不同的起始重量,对堆肥时间仅有小的影响,也就是说评价混合成分因素,应注重 $C/N$ 比率。

我们还变化了数值计算中时间间隔的取法以检验模型的灵敏度。开始,时间间隔长度为1

天,但结果不能令人满意,而后,将长度取为 0.01 天,这样对第一周期,我们得出堆肥时间的平均值为 27 天。这个间隔长度也适用于其它周期。为了测定可接受的时间间隔的下界值,我们曾用 0.0005 天为间隔长度进行预测,所得的结果与用 0.01 天为间隔长度近似相同,为减少计算量,0.01 天是最优的间隔长度。

尽管对多数试验模型预测结果与已给数据是高度准确相匹配,但是不可避免地存在某些例外情况的误差,8 月 22 日开始进行反应的混合物,堆肥时间用了 47 天,而模型预测是 35 天,偏差较大。这不能完全归于环境温度及  $C/N$  比率的小波动。一种可能是 9 月份的最后一周到 10 月份的第一周这个期间内,天气变化急剧,下雨或降温。另一种可能是工作人员的操作造成的,延误了清除堆肥的时间。

由于微分方程的解是数值解,时间间隔的取法不可能达到很精确。当混合物仅剩 1% 时,我们认为堆肥过程已经完成。而在实际中,当从反应箱内清除堆肥时,很难准确测定这个数据。

由于 8 月 22 日数据的特殊情况,模型预测与实际反应天数的误差为  $\pm 2$  天(表 2)。如果我们考虑到在一个周期内,两次堆肥起始时间之间的温度波动,我们可能降低这个误差;再有,如果考虑到每一周期内  $C/N$  比率的微小变化,也可以使模型更精确。

#### 六、模型评价

模型预测结果与已给数据的高度准确地相匹配,这是模型最有价值的一点。模型近似模拟出真菌培养液的活动能力与环境温度及  $C/N$  比率的关系,微分方程解的曲线给出了在堆肥箱内已给有限资源和环境条件下,真菌数量是如何增长或死亡(见图 4)。混合物与时间的关系图给出了混合物的分解率在开始是慢的,曲线斜率的绝对值增大,在达到一定时间后,斜率的绝对值逐渐下降,趋于零(见图 5)。

模型的另一特点是指指出改变培养液中真菌的数量,则对堆肥时间的影响有限(见图 6)。当初始真菌数量减少到 1/10 单位时,堆肥时间的长度仅增加 10%,当真菌数量增加到 10 单位时,堆肥时间仅缩短 13%。

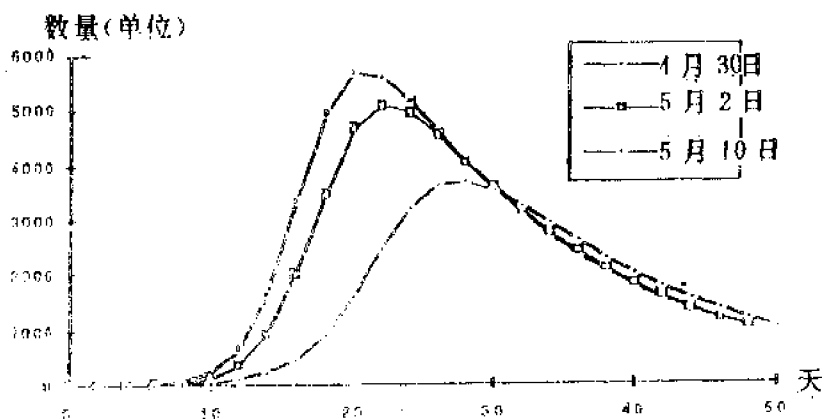


图 4 模型预测第三周期内微生物数量与反应时间的关系。4 月 30 日与 5 月 7 日的曲线相同。

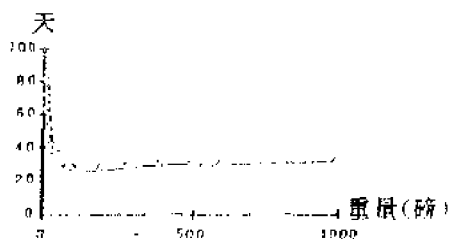


图 3 第一周期内的混合物的初始重量与堆肥时间的关系

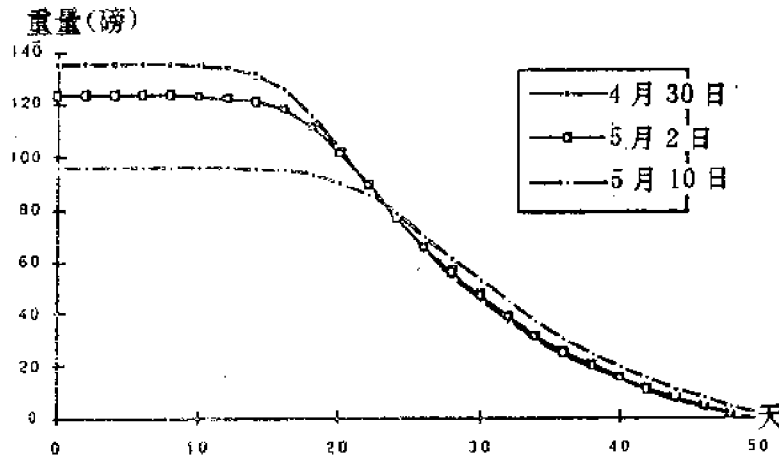


图5 模型预测第三周期内混合物重量与反应时间的关系。4月30日与5月7日的曲线相同。

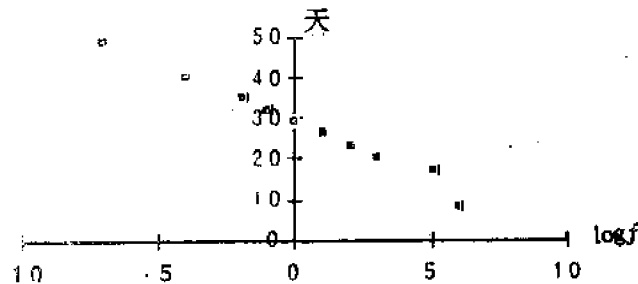


图6 模型预测的反应时间长度与初始微生物体数量的对数值之间的关系

模型具有弹性,如果我们掌握更多的数据(例如,每日测定反应物内的温度),我们可以调整模型中的常量,精确参数。模型对每次参加反应的混合物重量,有下界值。当混合物的重量在100磅以上时,若再增加投放箱内的混合物,对堆肥时间的长度影响并不显著,当然增加较多混合物必须在反应箱容许的条件下。然而,若反应箱内混合物的重量少于80磅时,堆肥时间将增加,这是因为真菌的“营养不足。”

模型存在的缺点是当我们确定常数 $K$ ,  $g(T, R)$ 和 $m(T)$ 时,生物实验数据没有起作用。换言之,建模唯一依赖已给出的实验数据,而这些数据不能更精确确定模型中的参数。再有模型过分强调了气候条件和分解率密切相关。同时,我们设想,为描述堆肥箱内的热量向外界环境的扩散,我们应该增加第三个方程,使模型更完善。

#### 七、提高堆肥率的措施

由于餐厅无力增添新的堆肥设施,且用于堆肥的经费有限,为此,我们对堆肥改进提出以下建议:

1. 增加每批要处理的混合物重量。
2. 控制混合物中报纸含量。
3. 合理保护堆肥箱,避免环境温度大幅度变化而影响到堆肥时间。尽量防止外界与箱内之间的热扩散。
4. 箱内应有充足的氧气,供给微生物的生化反应。

5. 混合、搅拌反应物,有助于提高堆肥速度。至少每隔一天,搅动一次。
6. 反应箱内的最佳温度为 120°F,湿度为 100%。
7. 改变混合物成分。建议投入较多的青菜叶,果皮核,玉米梗等,可加速分解。

### 参 考 文 献

- [1]Johnson, George B. 和 Peter H. Raven. 1992. *Biology*. Boston, MA: Mosby-year Book.
- [2]Koepl, H. H. 1986, *Compost; what it does*. Bio-Dynamics (Bio-Dynamic Farming and Gardening Assoc., Inc) No. 77
- [3]Stewart, James. 1991, *Calculus*, Pacific Grove, CA, Brooks/Cole.
- [4]Sussman, Vic. 1982. *Easy Composting* Emmaus, PA, Rodale Press.
- 边馥萍译自 The UMAP Journal, v. 14(1993), no. 3, 211—222.
- 边馥萍 天津大学数学系, 300072

### MCM93 问题—B:倒煤台的操作方案

Aspen-Boulder 煤矿公司经营一个包括一个单个的大型倒煤台 (coal tipple, 见[注]) 在内的装煤设施。当装煤列车到达时,从倒煤台往上装煤。一列标准列车要用 3 小时装满,而倒煤台的容量是一列半标准列车。每天,铁道部门向这个装煤设施发送三列标准列车。这些列车可在当地时间上午 5 点到下午 8 点的任何时间内到达。每列列车有三辆机车。如果一列车到达后因等待装煤而停滞在那里(即处于等待服务状态)的话,铁道部门要征收一种称为滞期费的特别费用,每小时每辆机车 5000 美元。此外,每周星期四上午 11 点到下午 1 点之间有一列大容量列车到达。这种特殊的列车有五辆机车并能装两列标准列车的煤。一个装煤工作班要用 6 个小时直接从煤矿运煤来把空的倒煤台装满。这个工作班(包括它用的设备)的费用是每小时 9000 美元。可以调用第二个工作班运行一个附加的倒煤台操作系统来提高装煤速度,而费用为每小时 12000 美元,出于安全的原因,当往倒煤台装煤时,不能往列车上装煤。每当由于往倒煤台装煤而中断往列车上装煤时,就要征收滞期费。

煤矿公司的经理部门要请教你们如何决定该倒煤台的装煤操作的年预期开支,你们的分析应包括考虑以下的问题:

- a) 应调用几次第二个工作班?
- b) 预期的月滞期费是多少?
- c) 如果标准列车能按调度在确切的时间到达,什么样的日调度安排能使装煤费用最少?
- d) 调用第三个费用为每小时 12000 美元的倒煤台操作系统工作班,能否降低年操作费用?
- e) 该倒煤台每天能否再装第四辆标准列车的煤?

[注]:《英汉铁路词典》,人民铁道出版社,1977, p. 910 关于 tipple 一字的解释为:倒煤台(煤矿小车将煤翻卸在煤仓内,再从煤仓滑到铁路货车)。

本题是由位于科罗拉多州 Golden 的科罗拉多矿业学院的 Gene Woolsey 根据他在怀俄明州一家煤矿公司做顾问中的问题建议的。位于纽约州的西点军校的 Chris Arney 和 Jack Robertson 据此形成了本问题。

### 煤炭装卸场的最优操作

#### 一、问题

Aspen-Boulder 煤炭公司的装卸设施中包括一个大型的煤炭装卸场。每天运煤的火车将装