Экзамен ТВиМС

Экзамен ТВиМС

1. Дать определения случайного события, пространства элементарных событий. Привести примеры.

Определение. *Элементарным исходом* (или *элементарным событием*) называют любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов будем называть *пространством элементарных исходов*.

Определение. Любой набор элементарных исходов (произвольное подмножество пространства элементарных исходов) называют *событием*.

TODO: написать примеры

2. Дать классическое определение вероятности, сформулировать основные свойства вероятности.

Определение. *Вероятностью события* A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов, т.е.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Свойства вероятности:

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$, где Ω — достоверное событие(т.е. содержащее все возможные элементарные исходы)
- $P(A + B) = P(A) + P(B)$, для несовместных событий A и B ($AB = \emptyset$)

3. Сформулировать аксиомы теории вероятности. Сформулировать и доказать основные свойства вероятности.

Определение. Пусть каждому событию A (т.е. подмножеству A пространства элементарных исходов , принадлежащему σ-алгебре $\mathscr{A}$) поставлено в соответствие число $P(A)$. Числовую функцию P (заданную на σ-алгебре $\mathscr{A}$) называют *вероятностью* (или *вероятностной мерой*), если она удовлетворяет следующим аксиомам:

- *Аксиома неотрицательности:* $P(A) \geq 0$
- *Аксиома нормированности:* $P(\Omega) = 1$
- *Расширенная аксиома сложения:* для любых попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ справедливо равенство

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

- *Аксиома непрерывности:* Если последовательность событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ такова, что $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, и $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$

Основные свойства вероятности

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$
4. $0 \le P(A) \le 1$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = (P(A_1) + \ldots + P(A_n)) - (P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + \ldots + P(A_{n-1}A_n)) + \ldots + (-1)^{n+1}$

Док-ва

1. $\Omega = A \cup \overline{A}$, тогда по аксиоме сложения и аксиоме нормированности $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $A = A \cup \emptyset$, тогда по аксиоме сложения $P(A) = P(A) + P(\emptyset) \implies P(\emptyset) = P(A) - P(A) = 0$
3. Пусть $A \subset B$, тогда $B = A \cup (B \setminus A) \implies P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. По аксиоме неотрицательности $P(B \setminus A) \ge 0 \implies P(B) \ge P(A)$
4. $A \subset \Omega$, значит, по аксиоме неотрицательности и свойству 3 $0 \le P(A) \le P(\Omega) \implies 0 \le P(A) \le 1$
5. Так как $B = AB \cup (B \setminus A)$ и $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, то $P(B) = P(AB) + P(B \setminus A)$ и $P(A \cup B) = P(AB) + P(B \setminus A)$. Тогда $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
6. **TODO: доказательство по индукции**

4. Вывести формулу полной вероятности и формулу Байеса.

Теорема (Формула полной вероятности). Пусть для некоторого события A и гипотез $H_1, \ldots H_n$ известны $P(H_1), \ldots P(H_n)$, которые положительны, и $P(A|H_1), \ldots, P(A|H_n)$. Тогда безусловную вероятность P(A) определяют по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)$$

, которую называют *формулой полной вероятности*.

Док-во: Представим событие A в виде

$$A = A\Omega = A(H_1 + \ldots + H_n) = AH_1 + \ldots + AH_n.$$

С учётом того, что события $AH_i, i = \overline{1,n}$ несовместны (так как $H_i, i = \overline{1,n}$ несовместны по определению гипотезы), имеем

$$P(A) = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n).$$

В соответствии с формулой умножения вероятностей получим

$$P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i).$$

Поэтому

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)\blacktriangle$$

Теорема (Формула Байеса). Пусть для некоторого события $A, P(A) > 0$, и гипотез $H_1, \ldots H_n$ известны $P(H_1), \ldots P(H_n)$, которые положительны, и $P(A|H_1), \ldots, P(A|H_n)$. Тогда условная вероятность $P(H_i|A)$ гипотезы H_i при условии события A определяется *формулой Байеса*.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)}$$

Док-во: По формуле условной вероятности $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)}$. Теперь выразим $P(AH_i)$ по формуле умножения вероятности, получим $P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)$, а $P(A)$ — по формуле полной вероятности. Подставив полученные выражения получим

$$P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)}\blacktriangle$$

5. Дать определение условной вероятности. Доказать теорему умножения. Дать определение независимых событий.

Определение. *Условной вероятностью* события A при условии (наступлении) события B называют отношение вероятности пересечения событий A и B к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

При этом предполагают, что $P(B) \neq 0$.

Теорема (теорема умножения вероятностей). Пусть событие $A = A_1A_2 \ldots A_n$ и $P(A) > 0$. Тогда справедливо равенство

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

, называемое *формулой умножения вероятностей*.

Док-во: Поскольку $P(A) = P(A_1A_2 \ldots A_n) > 0$ и $A_1A_2 \ldots A_k \subset A_1A_2 \ldots A_n, k = \overline{1, n-1}$, то $P(A_1A_2 \ldots A_k) > 0, k = \overline{1, n-1}$. Тогда, согласно определению условной вероятности, имеем

$$P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}) = \frac{P(A_1A_2 \ldots A_n)}{P(A_1A_2 \ldots A_{n-1})}.$$

Умножая обе части равенства на $P(A_1A_2 \ldots A_{n-1})$ получим

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1A_2 \ldots A_{n-1})P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Аналогично выразим

$$P(A_1A_2 \ldots A_{n-1}) = P(A_1A_2 \ldots A_{n-2})P(A_{n-1}|A_1A_2 \ldots A_{n-2}).$$

Тогда

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1A_2 \ldots A_{n-2})P(A_{n-1}|A_1A_2 \ldots A_{n-2})P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Продолжая по аналогии выражать $P(A_1A_2\dots A_{n-2}), P(A_1A_2\dots A_{n-3}), \dots P(A_1A_2)$ получим

$$P(A) = P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1})\blacktriangle$$

Определение. События A и B называют *независимыми*, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей.

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

6. Изложить схему Бернулли, вывести формулу о вероятности успехов в схеме Бернулли и следствия из неё.

Определение. *Схемой Бернулли* (или *последовательностью независимых одинаковых испытаний*, или *биномиальной схемой испытаний*) называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

- при каждом испытании различают лишь два исхода: появление некоторого события A, называемого “успехом”, либо появление его дополнения $\overline{A}$, называемого “неудачей”
- испытания являются независимыми, т.е. вероятность успеха в k-м испытании не зависит от исходов всех испытаний до k-го
- вероятность успеха во всех испытаниях постоянна и равна $P(A) = p$

Вероятность неудачи в каждом испытании Бернулли равна $P(\overline{A}) = 1 - p = q$

Теорема. Вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях по схеме Бернулли произойдёт ровно k успехов определяется *формулой Бернулли* (или *биномиальной формулой*)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = \overline{0, n}$$

Док-во: Результат каждого опыта по схеме Бернулли можно записать в виде последовательности из букв $У$ и H. При такой записи буква $У$, стоящая на i-й позиции будет означать успех в i-м испытании, а буква H — неудачу. Тогда пространство элементарных исходов Ω будет состоять из 2^n элементов, каждый из которых отождествляется с одной из возможных строк.
Каждому элементарному исходу ω можно поставить в соответсвие вероятность $P(\omega)$. Так как испытания независимы, по формуле умножения вероятностей, $P(\omega) = p^i q^{n-i}, i = \overline{0, n}$, где i — количество успехов, $(n - i)$ — количество неудач.
Обозначим A_k событие настпупления k успехов, т.е. реализация исхода ω с $i = k; P(\omega) = p^k q^{n-k}$.
Количество таких элементарных исходов совпадает с количеством способов расставить k букв $У$ на n местах, то есть $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Так как событие A_k является объединением указанных элементарных исходов, то его вероятность равна $P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k} = P_n(k)\blacktriangle$

Следствия

- Вероятность появления успеха A в n испытаниях не более k_1 раз и не менее k_2 раз равна $P\{k_1 \le k \le k_2\} = \sum\limits_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$. Это следует из несовместности событий A_k.

- В частном случае при $k_1 = 1$ и $k_2 = n$ получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n испытаниях $P\{k \geq 1\} = 1 - q^n$.

7. Дать определение функции распределения вероятности случайной величины. Сформулировать и доказать её свойства.

Определение. *Функцией распределения (вероятностей)* случайной величины ξ называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{\xi < x\}$, т.е. события, состоящего из тех и только тех элементарных исходов ω, для которых $\xi(\omega) < x$

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

Свойства ф-ции распределения:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(x_1) \leq F(x_2), x_1 < x_2$, т.е. $F(x)$ — неубывающая функция.
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4. $P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$
5. $F(x) = F(x - 0)$, где $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$, т.е. $F(x)$ — непрерывная слева функция.

Док-ва:

1. Так как функция распределения в любой точке является вероятностью, то по свойствам вероятностей: $0 \leq P(A) \leq 1 \implies 0 \leq F(x) \leq 1$.
2. Если $x_1 < x_2$, то событие $\{\xi < x_1\}$ включено в событие $\{\xi < x_2\}$. Тогда по свойству вероятностей: $P\{\xi < x_1\} \leq P\{\xi < x_2\} \implies F(x_1) \leq F(x_2)$.
3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — любая возрастающая последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$. Тогда последовательность событий $\{\xi < x_1\}, \ldots, \{\xi < x_n\}, \ldots$ удовлетворяет условию аксиомы непрерывности. При этом событие $\{\xi < +\infty\}$ является объединением этих событий, а также достоверным событием. Значит, по аксиоме непрерывности, $\lim\limits_{n \to \infty} P\{\xi < x_n\} = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$. Аналогично доказывается, что $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
4. Событие $\{\xi < x_2\}$ при $x_1 < x_2$ можно представить как объединение двух непересекающихся событий: $\{\xi < x_1\}$ и $\{x_1 \leq \xi < x_2\}$. Тогда по теореме сложения вероятностей: $P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \leq \xi < x_2\}$. Значит $P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = P\{\xi < x_2\} - P\{\xi < x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$.
5. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — любая возрастающая последовательность чисел, стремящаяся к x. Тогда последовательность событий $\{\xi < x_1\}, \ldots, \{\xi < x_n\}, \ldots$ удовлетворяет условию аксиомы непрерывности. При этом событие $\{\xi < x\}$ является объединением этих событий. Значит, по аксиоме непрерывности, $\lim\limits_{n \to \infty} P\{\xi < x_n\} = \lim\limits_{y \to x-0} F(y) = F(x-0) = F(x)$, т.е. $F(x)$ — непрерывная слева функция.

8. Дать определение дискретной случайной величины, обосновать вид её функции распределения.

Определение. Случайную величину ξ называют *дискретной*, если множество её возможных значений конечно или счётно.

Определение. *Рядом распределения (вероятностей) дискретной случайной величины* ξ называют таблицу, состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней — вероятности $p_n = P\{\xi = x_n\}, n = 1, 2, \ldots$ того, что случайная величина примет эти значения.

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Вид функции распределения:
Пусть ξ — дискретная случайная величина, заданная рядом распределения, причём значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ расположены в порядке возрастания.
Тогда для $x \leq x_1$ событие $\xi < x$ является невозможным, поэтому $F(x) = 0, x \leq x_1$.
При $x_n < x \leq x_{n+1}$ событие $\xi < x$ состоит из элементарных исходов $\omega : \xi(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, т.е. $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} P\{\xi = x_i\} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i, x \in (x_n, x_{n+1}]$
Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-постоянной функцией, принимающей на промежутке $(-\infty, x_1]$ значение 0, а на промежутках $(x_n, x_{n+1}]$ — значение $p_1 + \ldots + p_n, n = 1, 2, \ldots$

9. Дать определения биномиального закона распределения и закона распределения Пуассона, найти их математические ожидания.

Определение. Дискретную случайную величину ξ называют *биномиальной* с параметрами $p \in (0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$, если она принимает значения $0, 1, \ldots, n$ с вероятностями, заданными формулой

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, q = 1 - p, k = \overline{0, n}$$

Говорят, что эта случайная величина *распределена по биномиальному закону* или имеет *биномиальное распределение*.

Определение. Дискретную случайную величину ξ называют *пуассоновской* с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения $0, 1, \ldots, n, \ldots$ с вероятностями, заданными формулой

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, \ldots$$

Говорят, что эта случайная величина *распределена по пуассоновскому закону* или имеет *пуассоновское распределение*.

Мат. ожидания

- *биномиальное распределение*
  Пусть случайная величина ξ распределена по биномиальному закону с параметрами p и n.
  По определению математического ожидания:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} np \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j p^j q^{n-1-j} = np(p+q)^{n-1} = np$$

Пояснение: бином Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

- *пуассоновское распределение*
  Пусть случайная величина ξ распределена по пуассоновскому закону с параметром λ. По определению математического ожидания:

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Пояснение: разложение e^x в ряд Тейлора $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

10. Дать определение плотности распределения вероятности случайной величины. Сформулировать и доказать её свойства.

Определение. Случайную величину ξ называют *непрерывной*, если её функция распределения представима в виде сходящегося несобственного интеграла

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Функцию $f(x)$ называют *плотностью распределения (вероятностей)* случайной величины ξ.

Св-ва плотности распределения:

1. $f(x) \geq 0$
2. $P\{a \leq \xi < b\} = P\{\xi \in [a, b)\} = \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
4. $P\{x \leq \xi < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$ *в точках непрерывности плотности распределения*
5. $P\{\xi = x\} = 0$

Док-ва:

1. По св-ву функции распределения, $F(x)$ — неубывающая функция. $f(x) = F'(x)$, значит $f(x) \geq 0$

2. По св-ву функции распределения и формуле Ньютона-Лейбница, $P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$
3. Из св-ва 2: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P\{-\infty < \xi < +\infty\}$. Событие $\{-\infty < \xi < +\infty\}$ является достоверным, значит $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
4. По св-ву функции распределения $P\{x \le \xi < x + \Delta x\} = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x)$. Если Δx мало́, то $\Delta F(x) \approx dF(x) = F'(x)dx \approx f(x)\Delta x$
5. Используя св-во 4 выразим $P\{\xi = x\}$ как $P\{\xi = x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} P\{x \le \xi < x + \Delta x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} f(x)\Delta x = 0$

11. Дать определения равномерного, экспоненциального и нормального законов распределения, найти их математические ожидания и дисперсии.

Определение. Случайная величина ξ называется *равномерно распределённой* на отрезке $[a, b]$ (или на интервале (a, b)), если её плотность $f(x)$ и функция расределения $F(x)$ имеют вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x < a \text{ или } x > b \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Говорят, что эта случайная величина *распределена по равномерному закону* или имеет *равномерное распределение*.

Определение. Случайная величина ξ называется *экспоненциальной* (или *показательной*) с параметром $\lambda > 0$, если её плотность $f(x)$ и функция расределения $F(x)$ имеют вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & a \le x \le b \end{cases}$$

Говорят, что эта случайная величина *распределена по экспоненциальному (показательному) закону* или имеет *экспоненциальное (показательное) распределение*.

Определение. Случайная величина ξ называется *нормальной* (или *гауссовой*) с параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 (\sigma > 0)$, если её плотность имеет вид:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$$

Говорят, что эта случайная величина *распределена по экспоненциальному (показательному) закону* или имеет *экспоненциальное (показательное) распределение*.

Мат. ожидания

- *равномерное распределение*
  Пусть случайная величина ξ распределена на отрезке $[a, b]$ по равномерному закону. По определению математического ожидания:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx + \int\limits_{b}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= 0 + \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx + 0 = \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

- *экспоненциальное распределение*
  Пусть случайная величина ξ распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$. По определению математического ожидания:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= 0 + \int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \Big|t = \lambda x\Big| =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int\limits_{0}^{+\infty} te^{-t}dt = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_{0}^{+\infty} td(e^{-t}) = -\frac{1}{\lambda}\left(te^{-t}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}e^{-t}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}(0-1) = \frac{1}{\lambda}$$

- *нормальное распределение*
  Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметраи $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 (\sigma > 0)$. По определению математического ожидания:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_{\mu,\sigma}(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \Big|t = \frac{x-\mu}{\sigma}\Big| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma t + \mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}(\sigma dt) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \mu\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

$$= 0 + \mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \mu$$

Пояснения: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0$ в силу нечётности функции $te^{-\frac{t^2}{2}}$. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dt = 1$ по условию нормировки. $\varphi(x)$ — плотность стандартной нормальной случайной величины.

Дисперсии

- *равномерное распределение*
  Пусть случайная величина ξ распределена на отрезке $[a, b]$ по равномерному закону. По определению дисперсии:

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx = \frac{(x - \frac{a+b}{2})^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{(\frac{b-a}{2})^3}{3(b-a)} - \frac{(\frac{a-b}{2})^3}{3(b-a)} = \frac{2(b-a)^3}{24(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- *экспоненциальное распределение*
  Пусть случайная величина ξ распределена по экспоненциальному закону с параметром $\lambda > 0$. По определению дисперсии:

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_0^{+\infty} (\lambda x - 1)^2 e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \left|t = \lambda x\right| =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_0^{+\infty} (t-1)^2 e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left(\int\limits_0^{+\infty} t^2 e^{-t}dt - 2\int\limits_0^{+\infty} te^{-t}dt + \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}(2 - 2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Пояснение: $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$

TODO: док-во пояснения (по индукции)

- *нормальное распределение*
  Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметраи $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 (\sigma > 0)$. По определению дисперсии:

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \varphi_{\mu,\sigma} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| t = \frac{x-\mu}{\sigma} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 t^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} (\sigma dt) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= -\sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} d\Big(-\frac{t^2}{2}\Big) = -\sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} d\Big(e^{-\frac{t^2}{2}}\Big) =$$

$$= -\sigma^2 \left(\frac{te^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} d\Big(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\Big) \right) =$$

$$= \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \sigma^2$$

Пояснение: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$ из условия нормировки. $\varphi(x)$ — плотность стандартной нормальной случайной величины.

12. Сформулировать и доказать теорему о виде плотности распределения вероятности функции $\varphi(\xi)$ от случайной величины ξ , если φ — монотонная функция.

Теорема. Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(x)$. Пусть функция $y = \varphi(x)$ является монотонной и дифференцируемой. Обозначим $x = \psi(y)$ функцию, обратную к $y = \varphi(x)$. Тогда плотность случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ есть

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)|$$

Док-во: Обозначим через $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ функции распределения случайных величин ξ и η соответственно. Если функция $\varphi(x)$ монотонна, то событие $\{\varphi(\xi(\omega)) < y\}$ эквивалентно событию $\{\xi(\omega) < \psi(y)\}$ (в случае возрастающей $\varphi(x)$) или $\{\xi(\omega) > \psi(y)\}$ (в случае убывающей $\varphi(x)$). Значит,

$$P\{\varphi(\xi(\omega)) < y\} = P\{\xi(\omega) < \psi(y)\}, \quad \text{для возрастающей } \varphi(x)$$
$$P\{\varphi(\xi(\omega)) < y\} = P\{\xi(\omega) > \psi(y)\}, \quad \text{для убывающей } \varphi(x)$$

Поскольку

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\varphi(\xi) < y\}$$

и

$$P\{\xi(\omega) < \psi(y)\} = F_\xi(\psi(y))$$
$$P\{\xi(\omega) > \psi(y)\} = 1 - F_\xi(\psi(y))$$

то получим

$$F_\eta(y) = F_\xi(\psi(y)), \quad \text{для возрастающей } \varphi(x)$$

$$F_\eta(y) = 1 - F_\xi(\psi(y)), \quad \text{для убывающей } \varphi(x)$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \Big(F_\xi(x)\Big)'\psi'(y) = f_\xi(\psi(y))\psi'(y)$$

для возрастающей $\varphi(x)$

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = -\Big(F_\xi(x)\Big)'\psi'(y) = -f_\xi(\psi(y))\psi'(y)$$

для убывающей $\varphi(x)$.

Оба этих случая можно записать в виде

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y))|\psi'(y)| \blacktriangle$$

13. Дать определение математического ожидания, сформулировать и доказать его свойства.

Определение. *Математическим ожиданием $M\xi$ дискретной случайной величины ξ* называют сумму произведений значений x_n случайной величины и вероятностей $p_n = P\{\xi = x_n\}$, с которыми случайная величина принимает эти значения.

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$$

При этом предполагается, что ряд, определяющий математическое ожидание сходится абсолютно, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| p_n < +\infty$. В противном случае говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Определение. *Математическим ожиданием $M\xi$ непрерывной случайной величины ξ* называют несобственный интеграл

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

При этом предполагается, что несобственный интеграл, определяющий математическое ожидание сходится абсолютно, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty$. В противном случае говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует.

Свойства мат. ожидания

1. Если случайная величина ξ принимает только одно значение C (с вероятностью $p = 1$), то $M\xi = MC = C$
2. $M(a\xi + b) = aM\xi + b; \quad a, b = const$
3. $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

4. $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$

Док-ва

1. По определению мат. ожидания:

$$M\xi = C \cdot p = C \cdot 1 = C$$

2. По определению мат. ожидания:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f_\xi(x) dx =$$

$$= a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx + b \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = aM\xi + b \cdot 1$$

3. Пусть $f_{\xi\eta}(x, y)$ — функция плотности случайного вектора (ξ, η). Тогда по определению мат. ожидания:

$$M(\xi + \eta) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} (x + y) f_{\xi\eta}(x, y) dx dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dy + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y) dy = M\xi + M\eta$$

4. Пусть $f_{\xi\eta}(x, y)$ — функция плотности случайного вектора (ξ, η). Тогда по определению мат. ожидания:

$$M(\xi\eta) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy f_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy f_\xi(x) f_\eta(y) dx dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y) dy = M\xi \cdot M\eta$$

14. Дать определение дисперсии, сформулировать и доказать её свойства.

Определение. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины ξ от её среднего значения.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

Свойства дисперсии

1. Если сл.вел. ξ принимает только одно значение C (с вероятностью $p = 1$), то $D\xi = DC = 0$
2. $D(a\xi + b) = a^2 D\xi; \quad a, b = const$

3. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$
4. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta;$ для независимых ξ и η
5. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2cov(\xi, \eta);$ для произвольных ξ и η

Док-ва

1. По определению дисперсии:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(C - MC)^2 = 0$$

2. По определению дисперсии:

$$D(a\xi + b) = M\big((a\xi + b) - M(a\xi + b)\big)^2 =$$

$$= M(a\xi + b - aM\xi - b)^2 = M\big(a(\xi - M\xi)\big)^2 =$$

$$= M\big(a^2(\xi - M\xi)^2\big) = a^2M(\xi - M\xi)^2 = a^2D\xi$$

3. По определению дисперсии:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\big(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2\big) =$$

$$= M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

4. По св-ву 3:

$$D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta)^2 - \big(M(\xi + \eta)\big)^2 =$$

$$= M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - \big((M\xi)^2 + 2M\xi M\eta + (M\eta)^2\big) =$$

$$= \big(M\xi^2 - (M\xi)^2\big) + \big(2M(\xi\eta) - 2M\xi M\eta\big) + \big(M\eta^2 - (M\eta)^2\big) =$$

$$= D\xi + 0 + D\eta = D\xi + D\eta$$

Пояснение: $M(\xi\eta) = M\xi M\eta$, т.к. ξ и η независимые случайные величины.

5. По св-ву 3:

$$D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta)^2 - \big(M(\xi + \eta)\big)^2 =$$

$$= M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - \big((M\xi)^2 + 2M\xi M\eta + (M\eta)^2\big) =$$

$$= \big(M\xi^2 - (M\xi)^2\big) + \big(2M(\xi\eta) - 2M\xi M\eta\big) + \big(M\eta^2 - (M\eta)^2\big) =$$

$$= D\xi + 2M(\xi\eta - \xi M\eta - \eta M\xi + M\xi M\eta) + D\eta =$$

$$= D\xi + 2M\big((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\big) + D\eta = D\xi + D\eta + 2cov(\xi, \eta)$$

15. Дать определения квантили, начальных и центральных моментов.

Определение. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. *Квантилью уровня p (p-квантилью)*, $0 < p < 1$, случайной величины ξ называют максимальное значение x, при котором $F(x) \leq p$.

$$Q_p = max\{x : F(x) \leq p\}$$

Определение. *Начальным моментом k-го порядка μ_k (k-м начальным моментом)* случайной величины ξ называют называют число $M\xi^k$ — математическое ожидание k-й степени случайной величины ξ, т.е.

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i, \quad \text{для дискретных случ. вел.}$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \quad \text{для непрерывных случ. вел.}$$

Определение. *Центральным моментом k-го порядка ν_k (k-м центральным моментом)* случайной величины ξ называют называют число $M(\xi - M\xi)^k$ — математическое ожидание k-й степени случайной величины ξ, т.е.

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M\xi)^k p_i, \quad \text{для дискретных случ. вел.}$$

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k f(x) dx, \quad \text{для непрерывных случ. вел.}$$

16. Дать определение функции распределения вероятности двумерного случайного вектора. Сформулировать и доказать её свойства.

Определение. *Функцией распределения (вероятностей) n-мерного случайного вектора* $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ называют функцию $F(x_1, \dots, x_n)$ значение которой в точке $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{\xi_1 < x_1\}, \dots, \{\xi_n < x_n\}$.

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1 \; \dots, \xi_n < x_n\}$$

Свойства ф-ции распределения двумерного вектора (ξ, η)

1. $0 \le F(x, y) \le 1$
2. $F(x, y)$ — неубывающая функция по каждому из аргументов x, y
3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$
4. $F(+\infty, +\infty) = 1$
5. $P\{a \le \xi < b, c \le \eta < d\} = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$
6. $F(x, y)$ непрерывна слева в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ по каждому из аргументов x, y
7. $F(x, +\infty) = F_\xi(x), \quad F(+\infty, y) = F_\eta(y)$

Док-ва

1. По определению, функция распределения случайного вектора является вероятностью $F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$. Тогда, по свойству вероятностей, $0 \le F(x, y) \le 1$
2. Зафиксируем один из аргументов, например y, и рассмотрим два значения $x_1 < x_2$ аргумента x. Событие $\{\xi < x_1\}$ включено в событие $\{\xi < x_2\}$. Значит, событие $\{\xi < x_1, \eta < y\}$ включено в событие $\{\xi < x_2, \eta < y\}$. Тогда, по свойству вероятностей, $P\{\xi < x_1, \eta < y\} < P\{\xi < x_2, \eta < y\} \implies F(x_1, y) < F(x_2, y)$. Аналогично можно показать, что

$F(x, y_1) < F(x, y_2)$ при $y_1 < y_2$. Значит, $F(x, y)$ — неубывающая функция по каждому из аргументов x, y.

3. По определению $F(-\infty, y) = P\{\xi < -\infty, \eta < y\}$. Событие $\{\xi < -\infty\}$ является невозможным, значит, событие $\{\xi < -\infty, \eta < y\}$ также является невозможным. Тогда по свойству вероятностей $F(-\infty, y) = P\{\xi < -\infty, \eta < y\} = 0$. Аналогично рассматривается случай $F(x, -\infty)$.
4. По определению $F(+\infty, +\infty) = P\{\xi < +\infty, \eta < +\infty\}$. События $\{\xi < +\infty\}$ и $\{\eta < +\infty\}$ являются достоверными, значит, событие $\{\xi < +\infty, \eta < +\infty\}$ также является достоверным. Тогда по свойству вероятностей $F(+\infty, +\infty) = P\{\xi < +\infty, \eta < +\infty\} = 1$
5.
6. Зафиксируем один из аргументов, например y. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — любая возрастающая последовательность чисел, стремящаяся к x. Тогда последовательность событий $\{\xi < x_1\}, \dots, \{\xi < x_n\}, \dots$ удовлетворяет условию аксиомы непрерывности. При этом событие $\{\xi < x\}$ является объединением этих событий. Значит, по аксиоме непрерывности, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi < x_n, \eta < y\} = P\{\xi < x, \eta < y\} = F(x, y)$, т.е. $F(x, y)$ — непрерывная слева функция по аргументу x. Аналогично доказывается непрерывность по аргументу y.
7. По определению $F(x, +\infty) = P\{\xi < x, \eta < +\infty\}$. Событие $\{\eta < +\infty\}$ является достоверными, значит $\{\xi < x, \eta < +\infty\} = \{\xi < x\} \cap \{\eta < +\infty\} = \{\xi < x\}$. Тогда $F(x, +\infty) = F_\xi(x)$. Аналогично рассматривается случай $F(+\infty, y) = F_\eta(y)$

TODO: дописать 5 доказательство (не придумал как написать без картинки)

17. Дать определение плотности двумерного случайного вектора, сформулировать и доказать её свойства.

Определение. Двумерный случайный вектор (ξ, η) называют *непрерывным*, если его функция распределения можно представить в виде:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(s, t) ds dt$$

Функцию $f(x, y)$ называют *плотностью распределения вероятностей случайного вектора* (ξ, η) .

Свойства плотности случ.вектора

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $P\{a < \xi < b, c < \eta < d\} = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y) dy$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$
4. $P\{x < \xi < x + \Delta x, y < \eta < y + \Delta y\} \approx f(x, y) \Delta x \Delta y$
5. $P\{\xi = x, \eta = y\} = 0$
6. $P\{(\xi, \eta) \in D\} = \iint\limits_D f(x, y) dx dy$
7. $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

Док-ва

1. По св-ву функции распределения случайного вектора, $F(x,y)$ — неубывающая функция по каждому из аргументов. $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$, значит $f(x,y) \geq 0$
2. По св-ву функции распределения случайного вектора

$$P\{a < \xi < b, c < \eta < d\} = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{b} dx \int\limits_{-\infty}^{d} f(x,y)dy - \int\limits_{-\infty}^{b} dx \int\limits_{-\infty}^{c} f(x,y)dy - \int\limits_{-\infty}^{a} dx \int\limits_{-\infty}^{d} f(x,y)dy + \int\limits_{-\infty}^{a} dx \int\limits_{-\infty}^{c} f(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy - \int\limits_{-\infty}^{a} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy =$$

3. По определению и св-ву функции распределения случайного вектора $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = F(+\infty, +\infty) = 1$
4. По св-ву функции распределения случайного вектора $P\{x < \xi < x + \Delta x, y < \eta < y + \Delta y\} = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x,y)$. Если Δx и Δy малы, то

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) \approx \frac{\partial F(x + \Delta x, y)}{\partial y} \Delta y$$

$$F(x, y + \Delta y) - F(x,y) \approx \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \Delta y$$

Тогда

$$P\{x < \xi < x + \Delta x, y < \eta < y + \Delta y\} \approx$$

$$\approx \frac{\partial F(x + \Delta x, y)}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \Delta y \approx$$

$$\approx \frac{\partial F(x,y)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y = f(x,y) \Delta x \Delta y$$

5. **TODO: придумать какое-то норм док-во**
6. Обобщение св-ва 2 (без доказательства)
7. По св-ву функции распределения случайного вектора $F_\xi(x) = F(x, +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)dsdt.$ Тогда $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)dt$. Аналогично доказывается, что $f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)ds$

18. Дать определение независимых случайных величин. Доказать необходимое и достаточное условие независимости непрерывных случайных величин.

Определение. Случайные величины ξ и η называют *независимыми*, если события $\{\xi < x\}$ и $\{\eta < y\}$ являются независимыми при любых действительных значениях x и y. Иначе случайные величины называют *зависимыми*.

Теорема. Обозначим через $F(x, y), F_\xi(x), F_\eta(y)$ функции распределения случайного вектора (ξ, η) и случайных величин ξ и η соответственно. Для того, чтобы ξ и η были независимы, необходимо и достаточно, чтобы для любых x и y выполнялось равенство

$$F(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y)$$

Док-во: По определению независимых случайных величин и независимых событий, независимость ξ и η эквивалентна равенству

$$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\}$$

Тогда, по определению функции распределения случайной величины и случайного вектора

$$F(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y) \blacktriangle$$

Теорема. Обозначим через $f(x, y), f_\xi(x), f_\eta(y)$ плотности распределения непрерывного случайного вектора (ξ, η) и непрерывных случайных величин ξ и η соответственно. Для того, чтобы ξ и η были независимы, необходимо и достаточно, чтобы для любых x и y выполнялось равенство

$$f(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$$

Док-во: По критерию независимости случайных величин, независимость ξ и η эквивалентна равенству

$$F(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y)$$

Тогда

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y} = \left(\frac{dF_\xi(x)}{dx}\right)\left(\frac{dF_\eta(y)}{dy}\right) = f_\xi(x) f_\eta(y) \blacktriangle$$

19. Сформулировать и доказать теорему о свертке.

Теорема. Пусть ξ, η - непрерываные независимые случайные величины с плотностями f_ξ, f_η. Тогда плотность распределения случайной величины $\zeta = (\xi + \eta)$ есть:

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta(z - x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(z - y) f_\eta(y)\, dy$$

Док-во: Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) есть $f(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y) \implies F_{\xi+\eta}(z) = P\{\xi + \eta < z\} = P\{(\xi, \eta) \in D_z\}$, где $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < z\}$

По свойству функции распределения случайного вектора

$$F_{\xi+\eta}(z) = \iint\limits_{D_z} f_\xi(x) f_\eta(y)\, dx dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_\xi(x) f_\eta(y)\, dy \implies$$

$$\implies \frac{dF_{\xi+\eta}(z)}{dz} = f_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx \frac{d}{dz} \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_\eta(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx \frac{dF_\eta(z-x)}{dz} \cdot \frac{d(z-x)}{dz} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\, dx_\blacktriangle$$

20. Сформулировать и доказать теорему о свойствах ковариации.

Опр. Пусть (ξ, η) - случайный вектор. Ковариацией ξ и η называют число

$$cov(\xi, \eta) = M\big((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\big)$$

1. Если (ξ, η) - дискретный вектор, то

$$cov(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i - M\xi)(y_j - M\eta) p_{ij}$$

2. Если (ξ, η) - непрерывный вектор, то

$$cov(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta) f(x, y)\, dy$$

Свойства ковариации.

1. $cov(\xi, \xi) = D\xi$
2. $cov(\xi, \eta) = 0$ для независимых ξ и η
3. $cov(a_1\xi_1 + b_1, a_2\xi_2 + b_2) = a_1 a_2 cov(\xi_1, \xi_2)$
4. $|cov(\xi, \eta)| \le \sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}$, причём $|cov(\xi, \eta)| = \sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta} \iff \xi, \eta$ - линейно зависимы (т.е. $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \eta = a\xi - b$)
5. $cov(\xi, \eta) = M(\xi, \eta) - M\xi \cdot M\eta$

Док-ва

1. По определению ковариации $cov(\xi, \xi) = M\big((\xi - M\xi)(\xi - M\xi)\big) = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$
2. По св-ву 5: $cov(\xi, \eta) = M(\xi, \eta) - M\xi \cdot M\eta$. Для независимых ξ и η, по свойству мат. ожидания: $M(\xi\eta) = M\xi M\eta \implies cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M(\xi\eta) = 0$
3. Пусть $\eta_1 = a_1\xi_1 + b_1; \eta_2 = a_2\xi_2 + b_2$. Тогда, по определению ковариации

$$cov(\eta_1, \eta_2) = M\big((\eta_1 - M\eta_1)(\eta_2 - M\eta_2)\big) =$$

$$= M\big((a_1\xi_1 + b_1 - a_1 M\xi_1 - b_1))(a_2\xi_2 + b_2 - a_2 M\xi_2 - b_2\big) =$$

$$= M\big(a_1 a_2 (\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)\big) =$$

$$= a_1 a_2 M\big((\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)\big) = a_1 a_2 cov(\xi_1, \xi_2)$$

4. Рассмотрим дисперсию случайной величины $\eta_x = x\xi - \eta$, где x — произвольное число.

$$D\eta_x = D(x\xi) + 2cov(x\xi, -\eta) + D(-\eta) =$$

$$= x^2 D\xi + 2x cov(\xi, \eta) + D\eta$$

Получили, что дисперсия η_x представляется в виде квадратного трёхчлена относительно x.

По св-ву дисперсии $D\eta_x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, значит дискриминант $\big(2cov(\xi,\eta)\big)^2 - 4D\xi D\eta \leq 0$. Значит

$$\big|cov(\xi,\eta)\big| \leq \sqrt{D\xi D\eta}$$

Пусть выполнено равенство $\big|cov(\xi,\eta)\big| = \sqrt{D\xi D\eta}$, тогда дискриминант $\big(2cov(\xi,\eta)\big)^2 - 4D\xi D\eta = 0 \implies D\eta_x = 0$, т.е. существует $x = a \in \mathbb{R}$ — решение уравнения $D\eta_x = 0$. Значит, по свойству дисперсии, случайная величина η_x принимает только одно значение, назовём его b. Итого получаем:

$$b = a\xi - \eta$$

$$\eta = a\xi - b$$

Аналогично наоборот: если выполняется равенство $\eta = a\xi - b$, то случайная величина η_x принимает единственное значение b, значит

$$D\eta_x = 0 \implies \big(2cov(\xi,\eta)\big)^2 - 4D\xi D\eta = 0 \implies$$

$$\implies \big|cov(\xi,\eta)\big| = \sqrt{D\xi D\eta}$$

5. Из определения ковариации

$$cov(\xi,\eta) = M\big((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\big) =$$

$$= M\big(\xi\eta - \eta M\xi - \xi M\eta + M\xi M\eta\big) =$$

$$= M(\xi\eta) - M\eta M\xi - M\xi M\eta + M\xi M\eta =$$

$$= M(\xi\eta) - M\xi M\eta$$

21. Дать определение ковариационной матрицы случайного вектора. Сформулировать и доказать свойства коэффициента корреляции.

Определение. *Матрицей ковариаций (ковариационной матрицей)* случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называют матрицу $\Sigma = (\sigma_{ij}) = \big(cov(\xi_i, \xi_j)\big)$, состоящую из ковариаций случайных величин ξ_i и ξ_j.

Определение. Пусть (ξ, η) - сл. вектор и $\exists D\xi > 0, D\eta > 0$. Число $\rho_{\xi\eta} = \rho(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$ называют *коэффициентом корреляции* (между) ξ и η.

Свойства коэффициента корреляции

1. $\rho_{\xi\xi} = 1$
2. Если ξ, η независимы, то $\rho_{\xi\eta} = 0$
3. $\rho(a_1\xi_1 + b_1, a_2\xi_2 + b_2) = \frac{a_1 a_2}{|a_1 a_2|}\rho_{\xi\eta} = \pm\rho_{\xi\eta}$
4. $|\rho_{\xi\eta}| \leq 1$, причём $|\rho_{\xi\eta}| = 1 \iff \xi, \eta$ линейно зависимы

Док-ва

1. По определению коэффициента корреляции и св-ву ковариации $\rho_{\xi\xi} = \frac{cov(\xi,\xi)}{\sqrt{D\xi D\xi}} = \frac{D\xi}{D\xi} = 1$

2. По определению коэффициента корреляции и св-ву ковариации $\rho_{\xi\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{0}{\sqrt{D\xi D\eta}} = 0$
3. По определению коэффициента корреляции и св-ву ковариации $\rho(a_1\xi_1 + b_1, a_2\xi_2 + b_2) = \frac{cov(a_1\xi_1+b_1, a_2\xi_2+b_2)}{\sqrt{D(a_1\xi_1+b_1)D(a_2\xi_2+b_2)}} = \frac{a_1a_2 cov(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{a_1^2a_2^2 D\xi D\eta}} = \frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{\xi\eta} = \pm\rho_{\xi\eta}$
4. По св-ву ковариации $|cov(\xi,\eta)| \leq \sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}$, причём $|cov(\xi,\eta)| = \sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta} \iff \xi, \eta$ - линейно зависимы. Разделив обе части неравенства и равенства на $\sqrt{D\xi D\eta} > 0$ получим $|\rho(\xi,\eta)| \leq 1$ для произвольных ξ и η. $|\rho(\xi,\eta)| = 1$ для линейно зависимых ξ и η.

22. Дать определение двумерного нормального вектора. Указать вид плотностей его координат.

Определение. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) называют *двумерным нормальным вектором (или случайным вектором, имеющим невырожденное нормальное распределение)* с вектором мат. ожиданий $m = (m_1, m_2) = (M\xi_1, M\xi_2)$, если его плотность имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-0.5Q(x_1-m_1, x_2-m_2)}$$

где

$$\sigma_i = \sqrt{D\xi_i}$$

$$\rho = \rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$Q(s,t) = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{s^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho st}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{t^2}{\sigma_2^2}\right)$$

Теорема. Закон распределения каждой координаты ξ_i n-мерного нормального вектора является нормальным с параметрами m_i и σ_i

Док-во: Доказательство будем проводить на примере двумерного нормального вектора (ξ_1, ξ_2). По свойству плотности случайного вектора

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\widetilde{Q}(x_1,x_2)}dx_2,$$

где

$$\widetilde{Q}(x_1, x_2) = \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)^2 - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \Big(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\Big)^2\right]$$

Сделаем замену $t = \frac{\frac{x_2-m_2}{\sigma_2} - \frac{\rho(x_1-m_1)}{\sigma_1}}{\sqrt{1-\rho^2}}$, получим:

$$\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\Big(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\Big)^2 - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)^2\right] =$$

$$= \widetilde{Q}(x_1, x_2) + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\rho^2\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)^2 - \Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)^2\right) =$$

$$= \widetilde{Q}(x_1, x_2) - \frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2};$$

$$\widetilde{Q}(x_1, x_2) = \frac{t^2}{2} + \frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2};$$

$$dt = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} dx_2;$$

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{t^2}{2} - \frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} dt$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ (*Гауссов интеграл* или *интеграл Пуассона*), то

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} dt$$

Получили, что ξ_1 распределена по нормальному закону с параметрами m_1 и σ_1. Аналогично можно показать, что

$$f_{\xi_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dt \blacktriangle$$

23. Сформулировать и доказать первое и второе неравенства Чебышёва.

Теорема (I неравенство Чебышёва).
Пусть $\xi \geq 0$ и $\exists M\xi$. Тогда для $\forall C > 0$:

$$P\{\xi \geq C\} \leq \frac{M\xi}{C}$$

Док-во: Доказательство проведём для непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f(x)$. Поскольку $\xi \geq 0$

$$M\xi = \int\limits_{0}^{+\infty} xf(x)dx$$

Так как $C \geq 0$, заменяя нижний предел интегрирования с 0 на C, значение интеграла уменьшится

$$M\xi = \int\limits_{0}^{C} xf(x)dx + \int\limits_{C}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int\limits_{C}^{+\infty} xf(x)dx$$

Заменив в полученном интеграле x на C, получим еще меньший интеграл

$$M\xi \geq \int\limits_{C}^{+\infty} xf(x)dx \geq C\int\limits_{C}^{+\infty} f(x)dx = CP\{\xi \geq C\}$$

$$P\{\xi \geq C\} \leq \frac{M\xi}{C}, \quad \forall C \geq 0 \blacktriangle$$

Теорема (II неравенство Чебышёва).
Пусть $\xi \geq 0$ и $\exists D\xi$. Тогда для $\forall C > 0$:

$$P\big\{|\xi - M\xi| \geq C\big\} \leq \frac{D\xi}{C^2}$$

или

$$P\big\{|\xi - M\xi| < C\big\} > 1 - \frac{D\xi}{C^2}$$

Док-во: Применим I нер-во Чебышёва к случайной величине $\eta = (\xi - M\xi)^2$:

$$P\{\eta \geq C^2\} \leq \frac{M\eta}{C^2}$$

$$P\big\{(\xi - M\xi)^2 \geq C^2\big\} \leq \frac{M(\xi - M\xi)^2}{C^2}$$

$$P\big\{|\xi - M\xi| \geq C\big\} \leq \frac{D\xi}{C^2}$$

или (что то же самое)

$$P\big\{|\xi - M\xi| < C\big\} > 1 - \frac{D\xi}{C^2}\blacktriangle$$

24. Сформулировать и доказать закон больших чисел в форме Чебышёва.

Теорема (Закон больших чисел в форме Чебышёва).
Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ - посл-ть независимых сл.вел. таких, что $D\xi_n \leq C, n = 1, 2, \ldots$
Тогда $\forall \varepsilon > 0$:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| \geq \varepsilon\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

,
то есть

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

Док-во: Рассмотрим случайную величину $\eta = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, найдём ей математическое ожидание и дисперсию:

$$M\eta = M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k$$

$$D\eta = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k \leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}$$

Применим к η II неравенство Чебышёва

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

то есть

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0\blacktriangle$$

25. Доказать следствие закона больших чисел в форме Чебышёва для схемы Бернулли.

Следствие 1 (вспомогательное).
Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ являются одинаково распределёнными с общим математическим ожиданием m, до для них выполняется закон больших чисел в следующей форме:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$$

Док-во: По закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m = m\blacktriangle$$

Следствие 2 (збч в форме Бернулли). Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюденная частота успехов

$$\widehat{p} = \frac{Y_n}{n}$$

сходится по вероятности к вероятности успеха в одном испытании p

$$\widehat{p} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$$

Док-во: Рассмотрим последовательность одинаково распределённых случайных величин $\xi_i,\ i = \overline{1,n}$ — число успехов в i-м испытании Бернулли. ξ_i принимает значения $\{0,1\}$, причём $M\xi_i = p$, $\forall i = \overline{1,n}$. Тогда по *следствию 1*

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} p\blacktriangle$$

26. Сформулировать центральную предельную теорему и вывести (как следствие) теорему Муавра—Лапласа.

Теорема (Центральная предельная теорема).
Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, и $\exists\mu = M\xi_k, \exists\sigma^2 = D\xi_k, k = 1, 2, \ldots$

Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Теорема (Муавра-Лапласа).
Пусть Y_n - число успехов в n испытаниях Бернулли с вер. успеха $p, q = 1 - p$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x)$$

Док-во: Рассмотрим последовательность одинаково распределённых случайных величин $\xi_i,\ i = \overline{1, n}$ — числе успехов в i-м испытании Бернулли. ξ_i принимает значения $\{0, 1\}$, причём $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ и $\mu = M\xi_i = p,\ \sigma^2 = D\xi_i = pq,\ \forall i = \overline{1, n}$. Тогда по *сцентральной предельной теореме*

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} = P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x) \blacktriangle$$

27. Дать определение выборочной функции распределения. Доказать её сходимость к теоретической функции распределения.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых наблюдений случайной величины X с функцией распределения $F(x)$. Обозначим через $n(x; \vec{X}_n)$ случайную величину, которая для каждого $x \in \mathbb{R}$ и реализации $\vec{x_n} = (x_1, \ldots, x_n)$ выборки $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ принимает значение $n(x; \vec{x_n})$,равное числу элементов среди $x_1, \ldots x_n$ меньших x.

Определение. *Выборочной функцией распределения* называют функцию

$$\widehat{F}(x; \vec{x_n}) = \frac{n(x; \vec{x_n})}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Теорема. Для любого фиксированного x выборочная функция распределения $\widehat{F}(x; \vec{x_n})$ сходится по вероятности при $n \to \infty$ к значению $F(x)$ функции распределения случайной величины X.

Док-во: При любом фиксированном x случайная величина $n(x; \vec{X}_n)$ является биномиальной с вероятностью успеха $P\{X < x\} = F(x)$, а $\widehat{F}(x; \vec{x_n})$ является частотой события $\{X < x\}$. Значит, по закону больших чисел в форме Бернулли

$$\widehat{F}(x; \vec{x_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{P} P\{X < x\} = F(x) \blacktriangle$$

28. Дать определения точечной оценки, несмещённости и состоятельности. Показать, что среднее арифметическое независимых наблюдений случайной величины является

несмещённой и состоятельной оценкой её математического ожидания.

Определение. *Точечной оценкой* параметра $\theta \in \Theta$ называют любую функцию от наблюдений $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$.

Определение. Оценку $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ называют *несмещённой*, если её математическое ожидание совпадает с оцениваемым параметром θ.

$$M\hat{\theta}(\vec{X}_n) = \theta, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Определение. Оценку $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ называют *состоятельной*, если с увеличением объёма выброки n, она сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ.

$$\hat{\theta}(\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$$

Теорема. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых наблюдений случайной величины X и $\exists DX$. Тогда $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ является несмещённой состоятельной оценкой математического ожидания MX случайной величины X.

Док-во: Несмещённость: Найдём математическое ожидание оценки

$$M\overline{X} = M\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k = \frac{1}{n}nMX = MX$$

Состоятельность: Поскольку последовательность $X_1, \ldots, X_n$ состоит из одинаково распределённых случайных величин с конечной дисперсией, то по следствию из закона больших чисел в форме Чебышёва

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} MX$$

Получили, что $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ является несмещённой состоятельной оценкой математического ожидания MX случайной величины X▲

29. Дать определения выборочных начальных и центральных моментов.

Определение. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых наблюдений случайной величины ξ. *Выборочным начальным моментом k-го порядка* называют

$$\widehat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Определение. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых наблюдений случайной величины ξ. *Выборочным центральным моментом k-го порядка* называют

$$\widehat{\nu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$$

30. Дать определение метода моментов. Оценить методом моментов параметры равномерно распределённой случайной величины.

Определение. *Оценкой* $\hat{\theta}(\vec{X}_n) = (\hat{\theta}_1(\vec{X}_n), \ldots, \hat{\theta}_r(\vec{X}_n))$ *параметра* θ *методом моментов* называют решение любой системы из r уравнений

$$\begin{cases} \mu_{i_\alpha}(\vec{X}_n) = \mu_{i_\alpha}(\theta), & \alpha = \overline{1,k} \\ \nu_{j_\beta}(\vec{X}_n) = \nu_{j_\beta}(\theta), & \beta = \overline{1,l} \end{cases}, \quad k + l = r$$

относительное неизвестных $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Индексы i_α и j_β выбирают таким образом, чтобы эта система уравнений решалась как можно проще.

Пример (оценка параметров равномерного распределения).
Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые наблюдения случайной величины X, равномерно распределённой на интервале (a, b), с неизвестными a и b.
Для оценки параметром a и b составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu_1(\vec{X}_n) = \mu_1(\theta) \\ \nu_2(\vec{X}_n) = \nu_2(\theta) \end{cases}$$

По определению начального и центрального моментов и свойствам равномерного распределения

$$\mu_1(\theta) = MX = \frac{a+b}{2}$$

$$\nu_2(\theta) = DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

По определению выборочных начального и центрального моментов:

$$\mu_1(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

$$\nu_2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sigma^2(\vec{X}_n)$$

Тогда система уравнений приобретает вид:

$$\begin{cases} \overline{X} = \frac{a+b}{2} \\ \sigma^2(\vec{X}_n) = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$

Решая систему получим решения:

$$\begin{cases} a(\vec{X}_n) = \overline{X} - \sqrt{3}\sigma(\vec{X}_n) \\ b(\vec{X}_n) = \overline{X} + \sqrt{3}\sigma(\vec{X}_n) \end{cases}$$

31. Дать определение метода максимального правдоподобия. Оценить методом максимального

правдоподобия параметры биномиального, экспоненциального и нормального распределений.

Пусть $\vec{X}_n$ — независимые наблюдения случайной величины X. Введём функцию $P(x,\theta)$:

$$P(x,\theta)=\begin{cases} f(x,\theta), & \text{если } X \text{ — непрерывная сл. вел.} \\ P\{X=x\}, & \text{если } X \text{ — дискретная сл. вел.} \end{cases}$$

Определение. *Функцией правдоподобия* называют функцию $L(\vec{X}_n;\theta)$, определяемую равенством:

$$L(\vec{X}_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} P(X_i,\theta)$$

и рассматриваемую как функцию от θ при зафиксированных $X_1,\dots,X_n$.
Функцию $l(\vec{X}_n;\theta)=\ln L(\vec{X}_n;\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln P(X_i,\theta)$ называют *логарифмической функцией правдоподобия*.

Определение. *Оценкой максимального правдоподобия* $\hat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра θ называют точку максимума функции правдоподобия $L(\vec{X}_n;\theta)$ или (что то же самое, т.к. $\ln$ — монотонно возрастающая функция) логарифмической функции правдоподобия $l(\vec{X}_n;\theta)$.

Пример (оценка параметров биномиального распределения).
Пусть $X_1,\dots,X_n$ — независимые наблюдения случайной величины ξ, распределённой по биномиальному закону с известным параметром n и неизвестными параметрами p и $q=1-p$. Обозначим за θ вектор (n,p,q).

Функция правдоподобия имеет вид

$$L(\vec{X}_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} P\{\xi=X_i\}=\prod_{i=1}^{n} C_n^{X_i}p^{X_i}q^{n-X_i}$$

а логарифмическая функция правдоподобия

$$l(\vec{X}_n;\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln(C_n^{X_i}p^{X_i}q^{n-X_i})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ln C_n^{X_i}+\ln p\sum_{i=1}^{n}X_i+\ln q\sum_{i=1}^{n}(n-X_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ln C_n^{X_i}+n\overline{X}\ln p+(n^2-n\overline{X})\ln(1-p)$$

Найдём точку максимума функции $l(\vec{X}_n;\theta)$ как функции от p.

$$l'(p_0)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\ln C_n^{X_i}+n\overline{X}\ln p+(n^2-n\overline{X})\ln(1-p)\Big)'=$$

$$=\frac{n\overline{X}}{p_0}-\frac{n^2-n\overline{X}}{1-p_0}=\frac{n\overline{X}-n\overline{X}p_0-n^2p_0+n\overline{X}p_0}{p_0(1-p_0)}=$$

$$= \frac{n\overline{X} - n^2 p_o}{p_0(1-p_0)} = 0;$$

$$p_0 = \frac{\overline{X}}{n}$$

$l''(p_0) = -\frac{n\overline{X}}{p_0^2} - \frac{n^2 - n\overline{X}}{(1-p_0)^2} < 0$, значит $p = p_o = \frac{\overline{X}}{n}$ — точка максимума логарифмической функции максимального правдоподобия. Получили оценки $\widehat{p} = \frac{\overline{X}}{n}; \quad \hat{q} = 1 - \frac{\overline{X}}{n}$.

Пример (оценка параметра экспоненциального распределения).
Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые наблюдения случайной величины ξ, распределённой по экспоненциальному закону с неизвестным параметром λ.

Функция правдоподобия имеет вид

$$L(\vec{X}_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i}$$

а логарифмическая функция правдоподобия

$$l(\vec{X}_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(X_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} (\ln \lambda - \lambda X_i) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Найдём точку максимума функции $l(\vec{X}_n; \lambda)$ как функции от λ.

$$l'(\lambda_0) = \left(n \ln \lambda_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \right)' = \frac{n}{\lambda_0} - n\overline{X} = 0;$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\overline{X}}$$

$l''(\lambda_0) = -\frac{n}{\lambda_0^2} < 0$, значит $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{\overline{X}}$ — точка максимума логарифмической функции максимального правдоподобия. Получили оценку $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$.

Пример (оценка параметром нормального распределения).
Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые наблюдения случайной величины ξ, распределённой по нормальному закону с неизвестными параметрами μ и σ^2. Обозначим за θ вектор (μ, σ^2).

Функция правдоподобия имеет вид

$$L(\vec{X}_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

а логарифмическая функция правдоподобия

$$l(\vec{X}_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) =$$

$$= n \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) + \sum_{i=1}^{n} \ln(e^{-\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n \ln(\sigma) - \frac{n}{2} \ln(2\pi)$$

Найдём точку максимума функции $l(\vec{X}_n;\theta)$ как функции от μ.

$$l'(\mu_0) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0) = \frac{1}{\sigma^2}(n\overline{X} - n\mu_0) = 0$$

$$\mu_0 = \overline{X}$$

$l''(\mu_0) = -\frac{n}{2\sigma^2} < 0$, значит $\mu = \mu_0 = \overline{X}$ — точка максимума логарифмической функции максимального правдоподобия. Получили оценку $\widehat{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X}$.

Найдём точку максимума функции $l(\vec{X}_n;\theta)$ как функции от σ.

$$l'(\sigma_0) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^3} - \frac{n}{\sigma_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \sigma_0^2 n}{\sigma_0^3} = 0$$

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

$l''(\mu_0) = \frac{n}{\sigma_0^2} - \frac{3\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^4} = \frac{n\sigma_0^2 - 3\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^4} = -\frac{2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^4} < 0$, значит $\sigma^2 = \sigma_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ — точка максимума логарифмической функции максимального правдоподобия. Получили оценку $\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

32. Дать определение доверительного интервала. Вывести вид доверительного интервала для математического ожидания нормально распределённой случайной величины при известной дисперсии.

Определение. Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины или случайного вектора X с функцией распределения $F(x;\theta)$, зависящей от скалярного параметра θ, значение которого неизвестно. Предположим, что для θ построен интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n))$, где $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ — такие функции, что для некоторого $\gamma \in (0,1)$ выполняется равенство

$$P\Big\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\Big\} = \gamma$$

В этом случае интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n))$ называют *доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия* γ или γ*-доверительным интервалом*, а случайные величины $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ — *нижней* и *верхней границами* соответственно.

Доверительный интервал для мат. ожидания нормальной сл. вел. при известной дисперсии

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с известной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием μ. Рассмотрим случайную величину

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

Она имеет *стандартное нормальное распределение*.
Обозначим через u_p квантиль уровня p стандартного нормального распределения. Построим для этой случайной величины доверительный интервал с уровнем доверия γ.

$$P\left\{-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} = \Phi(u_{\frac{1+\gamma}{2}}) - \Phi(-u_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$$

Преобразуем двойное неравенство так, чтобы получить доверительный интервал для μ

$$P\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{1+\gamma}{2}} < \overline{X}-\mu < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} = \gamma$$

$$P\left\{\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{1+\gamma}{2}} > \mu > \overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} = \gamma$$

Получили доверительный интервал с уровнем доверия γ:

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{1+\gamma}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)$$

33. Дать определение доверительного интервала. Вывести выражение для доверительного интервала математического ожидания нормально распределённой случайной величины при неизвестной дисперсии.

Определение. Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины или случайного вектора X с функцией распределения $F(x;\theta)$, зависящей от скалярного параметра θ, значение которого неизвестно. Предположим, что для θ построен интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n))$, где $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ — такие функции, что для некоторого $\gamma \in (0,1)$ выполняется равенство

$$P\left\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\right\} = \gamma$$

В этом случае интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n))$ называют *доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия γ* или *γ-доверительным интервалом*, а случайные величины $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ — *нижней* и *верхней границами* соответственно.

Доверительный интервал для мат. ожидания нормальной сл. вел. при неизвестной дисперсии.
Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с неизвестной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием μ. Рассмотрим случайную величину

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}, \text{ где}$$

$$S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \text{ — исправленная выборочная дисперсия}$$

Она имеет *распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы*.

Обозначим через $t_p(k)$ квантиль уровня p распределения Стьюдента с k степенями свободы. Построим для этой случайной величины доверительный интервал с уровнем доверия γ.

$$P\left\{-t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right\} = \gamma$$

Преобразуем двойное неравенство так, чтобы получить доверительный интервал для μ

$$P\left\{-\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) < \overline{X}-\mu < \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right\} = \gamma$$

$$P\left\{\overline{X}+\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) > \mu > \overline{X}-\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right\} = \gamma$$

Получили доверительный интервал с уровнем доверия γ:

$$\left(\overline{X}-\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1), \overline{X}+\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right)$$

34. Дать определение доверительного интервала. Вывести выражение для доверительного интервала дисперсии нормально распределённой случайной величины.

Определение. Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины или случайного вектора X с функцией распределения $F(x;\theta)$, зависящей от скалярного параметра θ, значение которого неизвестно. Предположим, что для θ построен интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n))$, где $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ — такие функции, что для некоторого $\gamma \in (0,1)$ выполняется равенство

$$P\left\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\right\} = \gamma$$

В этом случае интервал $(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n))$ называют *доверительным интервалом для параметра* θ *с коэффициентом доверия* γ или γ*-доверительным интервалом*, а случайные величины $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ — *нижней* и *верхней границами* соответственно.

Доверительный интервал для дисперсии нормальной случайной величины.
Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с неизвестной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием μ. Рассмотрим случайную величину

$$\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2}, \text{где}$$

$$S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \text{ — исправленная выборочная дисперсия}$$

Она имеет χ^2*-распределение с* $n-1$ *степенью свободы*.
Обозначим через $\chi^2_p(k)$ квантиль уровня p распределения χ^2 с k степенями свободы. Построим

для этой случайной величины доверительный интервал с уровнем доверия γ.

$$P\left\{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\right\} = \gamma$$

Преобразуем двойное неравенство так, чтобы получить доверительный интервал для σ^2

$$P\left\{\frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}{(n-1)S^2(\vec{X}_n)} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}\right\} = \gamma$$

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} > \sigma^2 > \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}\right\} = \gamma$$

Получили доверительный интервал для σ^2 с уровнем доверия γ:

$$\left(\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}\right)$$

Извлекая корень, получим доверительный интервал для σ:

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}}\right)$$

35. Дать определения статистической гипотезы, критерия проверки гипотез, критической и доверительной областей, ошибок 1-го и 2-го рода, уровня значимости.

Определение. Пусть X — случаная одномерная или многомерная случайная величина. *Статистической гипотезой* называют любое утверждение о функции распределения случайной величины X.

Определение. *Статистическим критерием* проверки гипотез называют правило, по которому по данным выборки $\vec{X}_n$ принимается решение о справедливости либо основной, либо альтернативной гипотезы.

Определение. Критерий задают с помощью *критического множества* $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Решение принимают следующим образом:

- Если выборка $\vec{X}_n$ принадлежит критическому множеству W, то отвергают основную гипотезу H_0 и принимают альтернативную гипотезу H_A.
- Если выборка $\vec{X}_n$ не принадлежит критическому множеству W, то отвергают альтернативную гипотезу H_1 принимают основную гипотезу H_0. Дополнение к критическому множеству $\overline{W}$ называют доверительным множеством.

При использовании любого критерия возможны ошибки двух видов:

- *ошибка 1-го рода* — принять гипотезу H_A, когда верна H_0
- *ошибка 2-го рода* — принять гипотезу H_0, когда верна H_A
  Вероятности ошибок обозначают α и β

$$\alpha = P\{\vec{X}_n \in W | H_0\}$$

$$\beta = P\{\vec{X}_n \in \overline{W} | H_A\}$$

α называют *уровнем значимости критерия*, $1 - \beta$ называют *мощностью критерия*.

36. Изложить критерий проверки гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины с известной дисперсией.

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией σ^2.

Построим критерий уровня значимости α проверки гипотезы $H_0 : \mu = \mu_0$ против альтернативы $H_1 : \mu < \mu_0$, где μ_0 - некоторое известное число.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ - независимые наблюдения случайной величины X. Рассмотрим случайную величину

$$\xi = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

Эта случайная величина имеет математическое ожидание $M\xi = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ и дисперсию $D\xi = 1$. Значит, при гипотезе H_0 типичные значения ξ будут вблизи нуля, а при гипотезе H_1 — меньше нуля. Тогда логично отклонить гипотезу H_0, если $\xi < C$, где $C = const$.
При гипотезе H_0 случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Значит, уровень значимости кртерия вычисляется слудующим образом:

$$\alpha = P\{\xi < C | H_0\} = P\{\xi < C | \xi \sim \mathcal{N}(0, 1)\} = \Phi(C)$$

Гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_1 на уровне значимости α, если $\xi < C = u_\alpha$, где u_α - квантиль уровня α стандартного нормального распределения. В противном случае, т.е. если $\xi \geq C = u_\alpha$, гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Проверка гипотезы $H_0 : \mu = \mu_0$ против альтернативы $H_2 : \mu > \mu_0$: Рассуждения аналогичны, но теперь типичные значения статистики ξ при альтернативе H_2 будут положительными. Тогда логично отклонить гипотезу H_0, если $\xi > C$, где $C = const$.

$$\alpha = P\{\xi > C | H_0\} = 1 - P\{\xi < C | \xi \sim \mathcal{N}(0, 1)\} = 1 - \Phi(C)$$

Гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_2, если $\xi > C = u_{1-\alpha}$

Проверка гипотезы $H_0 : \mu = \mu_0$ против альтернативы $H_3 : \mu \neq \mu_0$: В этом случае типичные значения статистики ξ при альтернативе H_3 будут большими по модулю. Тогда логично отклонить гипотезу H_0, если $|\xi| > C$, где $C = const$.

$$\alpha = P\{|\xi| > C | H_0\} = 1 - P\{-C < \xi < C | \xi \sim \mathcal{N}(0, 1)\} =$$

$$= 1 - (\Phi(C) - \Phi(-C)) = 1 - (2\Phi(C) - 1) = 2 - 2\Phi(C)$$

Гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_3, если $|\xi| > C = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

37. Изложить критерий проверки гипотезы о математическом ожидании нормальной случайной величины с неизвестной дисперсией.

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2.

Построим критерий уровня значимости α проверки гипотезы $H_0 : \mu = \mu_0$ против альтернативы $H_1 : \mu < \mu_0$, где μ_0 - некоторое известное число.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ - независимые наблюдения случайной величины X. Рассмотрим случайную величину

$$\xi = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S(\vec{X}_n)} \sqrt{n}$$

$$S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

Эта случайная величина имеет математическое ожидание $M\xi = M\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}\right) = M\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}\right) + M\left(\frac{\mu-\mu_0}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}\right) = M\left(\frac{\mu-\mu_0}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}\right)$. Значит, при гипотезе H_0 типичные значения ξ будут вблизи нуля, а при гипотезе H_1 — меньше нуля. Тогда логично отклонить гипотезу H_0, если $\xi < C$, где $C = const$.
При гипотезе H_0 случайная величина ξ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Значит, уровень значимости кртерия вычисляется слудующим образом:

$$\alpha = P\{\xi < C | H_0\} = P\{\xi < t_\alpha(n-1) | H_0\}$$

Гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_1 на уровне значимости α, если $\xi < C = t_\alpha(n-1)$, где $t_\alpha(n-1)$ - квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. В противном случае, т.е. если $\xi \geq C = t_\alpha(n-1)$, гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

Проверка гипотезы $H_0 : \mu = \mu_0$ против альтернативы $H_2 : \mu > \mu_0$: Рассуждения аналогичны, но теперь типичные значения статистики ξ при альтернативе H_2 будут положительными. Тогда логично отклонить гипотезу H_0, если $\xi > C$, где $C = const$.

$$\alpha = P\{\xi < C | H_0\} = P\{\xi < t_{1-\alpha}(n-1) | H_0\}$$

Гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_2, если $\xi > C = t_{1-\alpha}(n-1)$

Проверка гипотезы $H_0 : \mu = \mu_0$ против альтернативы $H_3 : \mu \neq \mu_0$: В этом случае типичные значения статистики ξ при альтернативе H_3 будут большими по модулю. Тогда логично отклонить гипотезу H_0, если $|\xi| > C$, где $C = const$.

$$\alpha = P\{\xi < C | H_0\} = P\{\xi < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) | H_0\}$$

Гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_3, если $|\xi| > C = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

38. Изложить критерий проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормальных случайных

величин с известными и неизвестными дисперсиями.

Известные дисперсии

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

Построим три критерия уровня значимости α проверки гипотезы $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ против каждой из трёх альтернатив:

- $H_1 : \mu_1 < \mu_2$
- $H_2 : \mu_1 > \mu_2,$
- $H_3 : \mu_1 \neq \mu_2.$

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathscr{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathscr{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
Обозначим:

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\xi = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$$

Согласно свойствам математического ожидания, случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M(\xi) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$ В частности $M(\xi) = 0$ при гипотезе H_0.

Случайная величина ξ при гипотезе H_0 имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому, рассуждая так же, как при проверке гипотезы о математическом ожидании случайной величины с известной дисперсией (билет 36), получим, что три критерия проверки H_0 против альтернатив H_1 , H_2 и H_3 имеют следующий вид:

Обозначим через u_α, $u_{1-\alpha}$ и $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ соответственно квантили уровней α, $1 - \alpha$ и $1 - \frac{\alpha}{2}$ стандартного нормального распределения. Гипотеза H_0 отклоняется:

- в пользу H_1, если $\xi < u_\alpha$;
- в пользу H_2, если $\xi > u_{1-\alpha}$;
- в пользу H_3, если $|\xi| > u_{1-\alpha/2}$.

В противном случае говорят, что гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α, или, что нет основания отклонить H_0, или, что H_0 не противоречит экспериментальным данным $\vec{X}_m$.

Неизвестные, но равные дисперсии

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и неизвестными, но равными дисперсиями σ^2.

Построим три критерия уровня значимости α проверки гипотезы $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ против каждой из трёх альтернатив:

- $H_1: \mu_1 < \mu_2$,
- $H_2: \mu_1 > \mu_2$,
- $H_3: \mu_1 \neq \mu_2$.

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathscr{N}(\mu_1, \sigma^2)$ и $\mathscr{N}(\mu_2, \sigma^2)$. Обозначим:

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$S^2(\vec{X}_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \vec{X})^2, \quad S^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \vec{Y})^2$$

$$S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n) = \sqrt{\frac{(m-1)S^2(\vec{X}_m) + (n-1)S^2(\vec{Y}_n)}{m+n-2}}$$

$$\tau = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

Случайная величина τ имеет распределение Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы. Таким образом, три критерия проверки H_0 против альтернатив H_1, H_2, H_3 имеют следующий вид.

Обозначим через $t_\alpha(m+n-2)$, $t_{1-\alpha}(m+n-2)$ и $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы.

Гипотеза H_0 отклоняется:

- в пользу H_1, если $\tau < t_\alpha(m+n-2)$;
- в пользу H_2, если $\tau > t_{1-\alpha}(m+n-2)$;
- в пользу H_3, если $|\tau| > t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$.

В противном случае говорят, что гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α, или, что нет основания отклонить H_0, или, что H_0 не противоречит экспериментальным данным $\vec{X}_m$.

39. Изложить критерий проверки гипотезы о величине дисперсии нормальной случайной величины. Привести пример.

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2.

Построим критерий уровня значимости α проверки гипотезы $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ против альтернативы $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$, где σ_0^2 — некоторое известное число.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины X. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2(\bar{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\eta = \frac{(n-1)S^2(\bar{X}_n)}{\sigma_0^2}.$$

Опираясь на закон больших чисел можно показать, что $S^2(\vec{X}_n)$ — состоятельная несмещённая оценка σ^2, т.е. $S^2(\vec{X}_n) \approx \sigma^2$. Поэтому при альтернативе H_1 случайная величина η принимает преимущественно меньшие значения, чем при гипотезе H_0. Следовательно, разумно отклонить H_0 в пользу H_1, если $\eta < C$ и принять H_0, если $\eta \geq C$, где C — некоторая постоянная.

Случайная величина $\frac{(n-1)S^2(\bar{X}_n)}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенью свободы. Поэтому случайная величина η при гипотезе H_0 имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенью свободы.

По определению уровня значимости:

$$P\{\eta < C | H_0\} = \alpha$$

Это равенство верно только если $C = \chi^2_\alpha(n-1)$, где $\chi^2_\alpha(n-1)$ — квантиль уровня α χ^2 -распределения с $n-1$ степенью свободы.

Гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_1 на уровне α, если $\eta < \chi^2_\alpha(n-1)$ и принимается, если $\eta \geq \chi^2_\alpha(n-1)$.

40. Изложить критерий проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин. Привести пример.

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и неизвестными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

Построим три критерия уровня значимости α проверки гипотезы $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против каждой из трех альтернатив

- $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$
- $H_2 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$
- $H_3 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Пусть $\vec{X_m} = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y_n} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathscr{N}(\mu_1, \sigma^2)$ и $\mathscr{N}(\mu_2, \sigma^2)$. Обозначим:

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$S^2(\vec{X_m}) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \vec{X})^2, \quad S^2(\vec{Y_n}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \vec{Y})^2$$

$$F = \frac{S^2(\vec{X_m})}{S^2(\vec{Y_n})}$$

При гипотезе H_0 значения случайной величины F будут близки к единице, большие и малые значения F неправдоподобны. При альтернативе H_2 более вероятны большие значения F, а при альтернативе H_1 — малые. Поэтому разумно отклонять H_0 в пользу H_1, если $F < C_1$ и принимать в противном случае. Аналогично, следует отклонять H_0 в пользу H_2, если $F > C_2$ и

принимать в противном случае. Также нужно отклонять H_0 в пользу H_3, если $F < C_3$ или $F > C_4$ и принимать в случае $C_3 \leq F \leq C_4$. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — некоторые постоянные.
Так как случайная величина F имеет распределение Фишера с $m-1$ и $n-1$ степенями свободы при справедливости H_0, то постоянные $C_1, C_2, C_3 и C_4$ будут квантилями распределения Фишера с числом степеней свободы $m-1$, $n-1$.

Потому, рассуждая так же как и в предыдущих разделах, получим, что три критерия проверки $H_0\$соответственнопротивальтернатив\$H_1, H_2, H_3$ имеют следующий вид.

Обозначим через $f_p(m-1, n-1)$ квантиль уровня p распределения Фишера с числом степеней свободы $m-1$ и $n-1$. Тогда H_0 отклоняется:

- в пользу H_1, если $F < f_\alpha(m-1, n-1)$
- в пользу H_2, если $F > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$
- в пользу H_3, если $F < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ или $F > f_{1+\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$.

В противном случае гипотеза H_0 не отвергается на уровне значимости α или, что то же самое, гипотеза H_0 не противоречит экспериментальным данным $\vec{X}_m, \vec{Y}_n$.

41. Сформулировать критерий согласия Пирсона. Привести пример.

Пусть наблюдается дискретная случайная величина X, принимающая r различных значений $u_1, \ldots, u_r$ с положительными вероятностями $p_1, \ldots, p_r$:

$$P\{X = u_k\} = p_k, \quad k = \overline{1, r} \quad \sum_{k=1}^{r} p_k = 1$$

Допустим, что в выборке $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ число u_k встретилось $n_k(\vec{X}_n)$ раз, $k = \overline{1, r}$. Отметим, что $\sum\limits_{k=1}^{r} u_k(\vec{X}_n) = n$, т.е. случайные величины $n_1(\vec{X}_n), \ldots, n_r(\vec{X}_n)$ зависимы.

Теорема (теорема Пирсона). Распределение случайной величины

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k(\vec{X}_n) - np_k)^2}{np_k}$$

при $n \to \infty$ сходится к χ^2-распределению с $r-1$ степенями свободы.

Этой теоремой можно воспользоваться для проверки простой гипотезы

$$H_0 : p_1 = p_{10}, \ldots, p_r = p_{r0}$$

где $p_{10}, \ldots, p_{r0}$ — известные величины, против альтернативной гипотезы

$$H_1 : \exists k : p_k \neq p_{k0}, \quad k = \overline{1, r}$$

Если истинной является гипотеза H_0, то по закону больших чисел

$$\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n} - p_{k0} \to 0, \quad k = \overline{1, r}$$

а если верна H_1, то

$$\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n} - p_{k0} = p_k - p_{k0} \neq 0, \quad \text{для некоторых } k = \overline{1, r}$$

Поэтому при H_1 случайная величина

$$\chi^2(\vec{X}_n) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k(\vec{X}_n) - np_{k0})^2}{np_k} = n \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(\frac{n_k(\vec{X}_n)}{n} - p_{k0}\right)^2}{p_k} \to \infty$$

следовательно, в эксперименте, как правило, принимает большие значения, чем при H_0, когда ее распределение стремится к распределению χ^2 с $r-1$ степенями свободы.

Таким образом, становится естественным следующее определение *критерия согласия* χ^2. Этот критерий при больших n на уровне значимости α отклоняет гипотезу H_0 в пользу альтернативной гипотезы H_1, если

$$\chi^2(\vec{X}_n) > \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$$

где $\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ — квантиль уровня $1-\alpha$ χ^2-распределения с $r-1$ степенями свободы, а $\chi^2(\vec{X}_n)$ — реализация случайной величины.

Если же

$$\chi^2(\vec{X}_n) \leq \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$$

то делается вывод о том, что гипотеза H_0 не противоречит статистическим данным и ее следует принять.

Критерием χ^2 при небольших объемах выборки пользоваться нельзя. На практике при небольших r необходимо, чтобы выполнялись условия $np_k \geq 10, k = \overline{1, r}$, а если r велико ($r \geq 20$), достаточно, чтобы было $np_k \geq 5, k = \overline{1, r}$.

Пример При 4040 бросаниях монеты французский испытатель получил 2048 выпадений "орла" и 1992 выпадений "решки". Совместимо ли это с гипотезой о том, что вероятность выпадения “орла” при одном бросании равна 0.5?

Здесь $n = 4040, r = 2, n_1(\vec{X}_n) = 2048, n_2(\vec{X}_n) = 1992, p_{10} = p_{20} = 0.5$, число степеней свободы $r - 1 = 1$, и при $\alpha = 0.05$, квантиль $\chi^2_{0.95}(1) = 3.841$.

Проверим гипотезу H_0 о том, что вероятности p_1 и p_2 выпадений “орла” и “решки” равны 0.5.

$$\chi^2(\vec{x}_n) = \frac{(2048 - 4040 \cdot 0.5)^2}{4040 \cdot 0.5} + \frac{(1992 - 4040 \cdot 0.5)^2}{4040 \cdot 0.5} = 0.776$$

Так как $0.776 < 3.841$, т.е. $\chi^2(\vec{X}_n) < \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ то статистические данные не противоречат гипотезе H_0.

42. Найти методом наименьших квадратов оценки параметров линейной регрессионной модели.

Рассмотрим задачу о подборе функции одного переменного — подборе по неточным наблюдениям (измерениям). Предположим, что переменные y и $x_1, \dots, x_p$ связаны линейным соотношением

$$y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_p x_p$$

где коэффициенты $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ неизвестны. При некоторых значениях $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}, i = \overline{1,n}$, переменных $x_1, \dots, x_p$ (называемых обычно факторами) были произведены измерения переменной y (называемой откликом) со случайной ошибкой ε_i, так что вместо неслучайных величин

$$y_i = \theta_1 x_{i1} + \theta_2 x_{i2} + \ldots + \theta_p x_{ip}, \quad i = \overline{1,n}$$

наблюдались случайные величины

$$Y_i = \theta_1 x_{i1} + \theta_2 x_{i2} + \ldots + \theta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}$$

Возникает задача оценивания неизвестных коэффициентов $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ по наблюдениям $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ и элементам x_{ij} матрицы X размера $n \times p$.

Основное предположение об ошибках состоит в том, что случайные величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ считаются независимыми и $M\varepsilon_i = 0$, т.е. систематических ошибок при изменении отклика нет. Менее важные предположения заключаются в том, что ε_i распределены одинаково и по нормальному закону $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Величина σ^2 обычно считается неизвестной. Она численно выражает неточность (изменчивость) измерений, т.е. масштаб случайных ошибок.

Запишем систему в матричном виде

$$\vec{Y} = X\vec{\theta} + \vec{\varepsilon}$$

Один из способов оценивания коэффициентов $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, называемый методом наименьших квадратов состоит в следующем.

Определение. Оценкой $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$ параметров $(\theta_1, \dots, \theta_p)$ по методу наименьших квадратов называется минимум функции

$$S(\theta) = ||\vec{Y} - X\vec{\theta}||^2 = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \theta_1 x_{i1} - \theta_2 x_{i2} - \ldots - \theta_p x_{ip})^2$$

Теорема. Предположим, что ранг матрицы X равен r. Тогда оценка наименьших квадратов имеет вид

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Теорема. Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\varepsilon_i = 0$ и конечной дисперсией $D\varepsilon_i = \sigma^2$. Тогда оценка наименьших квадратов

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

является несмещенной и состоятельной оценкой параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$.

Обозначим $(d_1, d_2, \dots, d_p)$ — диагональные элементы матрицы $(X^T X)^{-1}$.

Теорема. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — независимые одинаково распределенные *нормальные* случайные величины с $M\varepsilon_i = 0$ и конечной дисперсией $D\varepsilon_i = \sigma^2$. Тогда оценка наименьших квадратов

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

является несмещенной, состоятельной оценкой параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ и *нормальным* случайным вектором с математическим ожиданием $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ и ковариационной матрицей $\sigma^2 (X^T X)^{-1}$. Интервальная оценка для θ_j уровня доверия $1 - \alpha$ имеет вид $(\hat{\theta}_j - \Delta, \hat{\theta}_j + \Delta)$, где

$$\Delta = t_{1-\alpha}(n-p) \sqrt{\frac{d_j}{n-p} S(\hat{\theta})}$$

а $t_{1-\alpha}(n-p)$ — квантиль распределения Стьюдента уровня $1-\alpha$ с $n-p$ степенями свободы.

Рассмотрим теперь задачу оценивания зависимости

$$y = \theta_1 \varphi_1(t) + \ldots + \theta_p \varphi_p(t)$$

считая функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ известными, по измерениям $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ величины y в неслучайных точках $t_1, \ldots, t_n$ со случайными ошибками $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$:

$$Y_i = \theta_1 \varphi_1(t_i) + \theta_2 \varphi_2(t_i) + \ldots + \theta_p \varphi_p(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначив

$$x_{ij} = \varphi_j(t_i), \quad i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, p},$$

сведем эту модель к прошлой модели

$$\vec{Y} = X\vec{\theta} + \vec{\varepsilon}$$

Пример. В "Основах химии" Д. И. Менделеев приводит следующие данные о количестве в азотнатриевой соли $NaNO_3$, которое можно растворить в 100г воды в зависимости от температуры t. Построим, опираясь на эти экспериментальные данные, наилучшую линейную аппроксимацию этой зависимости. Другими словами, найдём приближенную эмпирическую формулу вида

$$y = \theta_1 + \theta_2 t$$

описывающую зависимость между рассматриваемыми величинами.

Оценим коэффициенты $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ по $n = 9$ наблюдениям $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ случайных величин $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Используя формулу $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, получим для $p = 2$

$$y^T = (66.7, 71.0, 76.3, 80.6, 85.7, 92.9, 99.4, 113.6, 125.1)$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 15 & 21 & 29 & 36 & 51 & 68 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 9 & 234 \\ 234 & 10144 \end{pmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2776 & -0.006404 \\ -0.006404 & 0.0002463 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T y = (67.5077941981390, 0.870640394088670)$$

Таким образом, приближение $\hat{y}(t)$ зависимости y от t имеет вид

$$\hat{y}(t) = 67.5077941981390 + 0.870640394088670t$$