定义 1 设 X 为一离散型随机变量，其分布列为 $P(X=x_i)=p_i,(i=1,2,\dots)$，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 绝对收敛，则称这级数为 X 的数学期望，简称期望或均值，记为 $E(X)$ ，即

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$$

否则，称 X 的数学期望不存在。

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2p_i=\sigma^2$$

为 X 的方差，就是 X 的函数 $[X-E(X)]^2$ 的数学期望。

在定义 **1** 中，要求 $\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 绝对收敛是必须的，因为 X 的数学期望是一确定的量，不受 x_ip_i 在级数中排列次序的影响，这在数学上就要求级数绝对收敛。X 的数学期望也称为数 x_i 以概率 p_i 为权的加权平均。

定义 2 设 X 为一连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$ ，若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)<+\infty$ 时，则称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\mu$$

为 X 的数学期望，否则称 X 的数学期望不存在。

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx=\sigma^2$$

计算方差时常用简化公式：

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

常见分布的数学期望

1．两点分布

设 $X\sim B(1,p)$ ，即 $P(X=0)=q,P(X=1)=p,\quad 0<p<1,p+q=1$，则

$$E(X)=0\cdot q+1\cdot p=p$$

$$D(X)=pq$$

2．二项分布

设 $X\sim B(k;n,p)$ ，即 $P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k},k=0,1,2,\dots,n,\quad 0<p<1,p+q=1$，则

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot C_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{np\cdot(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!}p^iq^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np(p+q)^{n-1}=np$$

$D(X)=npq$ ，证明较复杂，略。

在二项分布中，当$n \to \infty, p \to 0$ 时，概率是服从泊松分布的：

$$\lim_{n\to\infty,p\to 0} C_n^k p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty,p\to 0} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k q^{\frac{np}{p}-k} = \lim_{n\to\infty,p\to 0} \frac{n^k}{k!} p^k q^{\frac{np}{p}-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty,p\to 0} \frac{(np)^k}{k!} \left((1-p)^{\frac{1}{-p}}\right)^{-np} (1-p)^{-k} = \lim_{n\to\infty,p\to 0} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\left(1+\frac{-p}{n}\right)^{\frac{n}{-p}}\right)^{-\lambda}$$

$$= \lim_{n\to\infty,p\to 0} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

其中， λ 是泊松分布的期望。

3．泊松分布

设 $X \sim P(k;\lambda)$ ，即 $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0,1,2,\dots$ ，$\lambda > 0$，则

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

其中用到泰勒级数展开式 $e^{\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

这说明，泊松分布的参数 λ 就是服从泊松分布的随机变量的均值。

$$D(X) = \lambda$$

4．均匀分布

设 $X \sim U[a,b]$ ，即 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, \textit{其他} \end{cases}$，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{\mathrm{a}}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

恰好是 $[a,b]$ 的中点，这与均值意义相符。

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5．指数分布

设 $X \sim E(\lambda)$ ，即 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$ ，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -x d e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

6．正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，即 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty, \sigma > 0$ ，则

$$E(X) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \text{令 } a = \frac{x-\mu}{\sigma}, \text{则}$$

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + a \cdot \sigma)\, e^{-\frac{a^2}{2}} da = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{2}} da + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-\frac{a^2}{2}} da = \mu$$

这说明正太分布的参数 μ 是正态随机变量的均值。

$$D(X) = \sigma^2$$

数学期望的性质

定理： （1） $E(c) = c$ ；

（2） $E(cX) = cE(X)$；

（3） $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ；

（4）设 X Y 相互独立 $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ ；

其中 c 为常数，且数学期望都存在。由此定理可推论：

推论 1 $E(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n + b) = c_1 E(X_1) + c_2 E(X_2) + \cdots + c_n E(X_n) + b$

其中 c, b 均是常数，特别有 $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$

推论 2 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立，则 $E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \ldots \cdot E(X_n)$