# 组合数学第 9 讲

授课时间: 2024 年 10 月 21 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 薛翼舟

## 1 第一、第二类 Stirling 数的关系

**定理 1.**

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} S_1(n,k) x^k,$$
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_2(n,k) x^{\underline{k}}.$$

证明过程可见上一讲笔记.

由此可以写出 $(x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ 与 $(x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{n}})$ 这两组基之间相互的变换矩阵.

**定理 2.**

$$\begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ \vdots \\ x^{\underline{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(0,0) & & & & \\ -S_1(1,0) & S_1(1,1) & & & \\ S_1(2,0) & -S_1(2,1) & S_1(2,2) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ (-1)^n S_1(n,0) & (-1)^{n-1} S_1(n,1) & (-1)^{n-2} S_1(n,2) & \cdots & S_1(n,n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2(0,0) & & & \\ S_2(1,0) & S_2(1,1) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ S_2(n,0) & S_2(n,1) & \cdots & S_2(n,n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\underline{0}} \\ x^{\underline{1}} \\ \vdots \\ x^{\underline{n}} \end{pmatrix}.$$

为方便表述，我们将上述含有第一类 Stirling 数的矩阵记为 $A$，将上述含有第二类 Stirling 数的矩阵记为 $B$. 根据两类 Stirling 数的定义，这两个矩阵都是下三角矩阵.

**定理 3.** $AB = BA = I$.

**证明**　对于线性空间 $\{f(x) \mid f\text{为多项式函数且}\deg(f) \le n\}$，$\{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ 和 $\{x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, \ldots, x^{\underline{n}}\}$ 分别构成此空间的一组基，所以这两组基之间的变换矩阵 $A$ 和 $B$ 互为逆矩阵. □

另一方面，我们可以直接通过矩阵乘法来计算 $AB$ 中的每一项，于是有

**推论 4.** 对于任意的 $i, j \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i+k} S_1(i,k) S_2(k,j) = \delta_{ij}$.

## 2 分拆数

**定义 5** (分拆数)**.** 把一个正整数 $n$ 分拆成若干个正整数之和的方法数称作分拆数，记为 $P(n)$，在这里，仅仅求和顺序上不同的两种分拆方式视作为同一种分拆. 例如 $7 = 3 + 4$ 和 $7 = 4 + 3$ 即为 7 的同一种分拆.

**定义 6** ($k$ 部分拆). *把一个正整数 $n$ 分拆成 $k$ 个正整数之和的方法数称作 $n$ 的 $k$ 部分拆数，记为 $P(n,k)$，在这里，仅仅求和顺序上不同的两种分拆方式视作为同一种分拆. 例如 $7=3+4$ 和 $7=4+3$ 即为 7 的同一种 2 部分拆.*

**例 1** $P(n,1)=1, P(n,2)=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, P(n,n-1)=1, P(n,n)=1.$

**定理 7** (分拆数和 $k$ 部分拆的关系).

$$P(n)=\sum_{k=0}^{n} P(n,k).$$

**证明** 一个正整数 $n$，至少被拆成 1 部分（即它本身），最多被拆成 $n$ 个部分（即 $n$ 个 1 相加），由加法原理立得上式. □

**定义 8** (Ferrers 图). *Ferrers 图是一种用于描述分拆的图，它由若干行点列构成，并且上层的点的数量不小于下层的点的数量. Ferres 图中每一行的点的数量对应分拆中的一项和数.*

**例 2** $7=4+2+1$ 和 $7=5+1+1$ 所对应的 Ferrers 图分别是

```
• • • •        • • • • •
• •            •
•              •
```

**定理 9.** *设 $Q(n,k)$ 为将正整数 $n$ 分拆成若干个正整数之和且最大的正整数为 $k$ 的方法数，此处仍然不计顺序，则 $P(n,k)=Q(n,k)$.*

**证明** 考虑在二者之间构建一一对应关系，利用 Ferrers 图来解决这个问题，将 Ferrers 图的行、列交换，同样得到一个 Ferrers 图，例如

```
• • • •        • • •
• • •          • •
•              • •
               •
```

对于 $P(n,k)$ 中每一个拆分对应的 Ferrers 图，一共有 $k$ 行，经过这一步翻转，第一列成为第一行，所以翻转后的 Ferrers 图的第一行有 $k$ 个点，即这种拆分中最大的和数为 $k$，于是该 Ferrers 图对应 $Q(n,k)$ 中的一个拆分. 反之，对于 $Q(n,k)$ 中的每一个拆分的 Ferrers 图的第一行有 $k$ 个点，经过翻转，变成有 $k$ 行的 Ferrers 图，对应 $P(n,k)$ 中的一个拆分，于是 $P(n,k)=Q(n,k)$. □

**定理 10** ($k$ 部分拆的递推公式). $P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k)$.

**证明** $P(n,k)$ 相当于方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 且 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k$ 的解的个数，考虑 $x_k$ 的取值，有如下两种情况.

$x_k=1$ 时，考虑此时的 Ferrers 图，则最后一行只有一个点，如果我们忽略掉这一个点，我们会得到一个 $k-1$ 行的关于 $n-1$ 的分拆的 Ferrers 图，所以此时对应的方法数是 $P(n-1,k-1)$；$x_k \geq 2$

时，同样考虑此时的 Ferrers 图，则每一行都有至少 2 个点，此时如果将第 1 列删去，我们会得到一个 $k$ 行的关于 $n-k$ 的分拆的 Ferrers 图，所以此时对应的方法数是 $P(n-k,k)$. 于是我们可以得到

$$P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k).$$

□

**定理 11** ($P(n)$ 的下界估计)**.** 对充分大的整数 $n$，$P(n)\geq 2^{c\sqrt{n}}$，其中 $c>0$ 为与 $n$ 无关的常数.

**证明** 根据分拆数与部分拆的关系，我们有

$$P(n)=\sum_{k=0}^{n}P(n,k)\geq\sum_{k=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}P(n,k).$$

因为

$$1+2+\cdots+\lfloor\sqrt{n}\rfloor\leq\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{2}\leq n,$$

所以可以在 $1+2+\cdots+\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 的基础上再加上一个正整数 $M$，使得

$$n=M+1+2+\cdots+\lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

$n>1$ 时，$M\geq\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. 通过取 $T=\{1,2,\ldots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ 中的一个子集 $S$，通过选取合适的 $M'$，则

$$n=M'+\sum_{x\in S}x$$

是一个 $n$ 的分拆，且 $T$ 中各个子集对应的分拆互不相同，所以 $\sum_{k=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}P(n,k)$ 一定不小于 $T$ 的子集数量，即

$$P(n)\geq\sum_{k=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}P(n,k)\geq 2^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sim 2^{\sqrt{n}}.$$

□

**定理 12** ($P(n)$ 的上界估计)**.** 对充分大的整数 $n$，$P(n)\leq 2^{c\sqrt{n}\log_2 n}$，其中 $c>0$ 为与 $n$ 无关的常数.

**证明** 对于 $n$ 的一种分拆，$n=x_1+x_2+\cdots+x_s,(x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_s)$，将 $x_i$ 分为大于和小于 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 的两部分，分别将两部分记为 $A$ 和 $B$. 设 $A$ 中所有元素之和为 $m$，则 $B$ 中所有元素之和为 $n-m$. 对于 $B$，因为 $B$ 的元素大小不超过 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，再由定理 9，$B$ 中的分拆方案数为

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}Q(n-m,k)=\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}P(n-m,k)\leq\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}P(n,k).$$

对于 $A$，因为 $A$ 中的元素不小于 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，因此 $|A|\leq\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，$A$ 中的分拆方案数不大于

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}P(m,k)\leq\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}P(n,k).$$

综合对二者的讨论，由加法原理和乘法原理

$$P(n) \le \sum_{m=0}^{n} (\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} P(m,k) \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} P(n-m,k)) \le (n+1)(\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} P(n,k))^2.$$

考虑不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = n, \tag{1}$$

$n$ 的一个项数不超过 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 的分拆可视作方程 (1) 的一个非负整数解. 因此 $\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} P(n,k)$ 不超过方程 (1) 的非负整数解个数，即

$$\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} P(n,k) \le \binom{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1} \le \left(e\frac{n+\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}\right)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1} \le e^{\sqrt{n}}(\sqrt{n}+1)^{\sqrt{n}},$$

这里用到了 $\binom{n}{k} \le (\frac{en}{k})^k$. 所以

$$P(n) \le (n+1)(\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} P(n,k))^2 \le (n+1)e^{2\sqrt{n}}(\sqrt{n}+1)^{2\sqrt{n}} \le 2^{c\sqrt{n}\log_2 n}.$$

$\square$

下面来计算分拆数的生成函数. 对于 $n$ 的分拆数，可以表示为 $n = k_1\cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \cdots + k_n \cdot n$，这表示 $n$ 被拆分成 $k_1$ 个 1，$k_2$ 个 2，…，$k_n$ 个 $n$. 于是我们可以得到 $P(n)$ 的生成函数.

**性质 13** ($P(n)$ 的生成函数)**.**

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n\ge 0} P(n)x^n \\ &= (1+x^1+x^2+\cdots+x^{k_1\cdot 1}+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{k_2\cdot 2}+\cdots)\cdots \\ &= \prod_{k\ge 1}\frac{1}{1-x^k}. \end{aligned}$$

借助生成函数，我们可以给出一个有关分拆数上界更紧的计算.

**定理 14** ($P(n)$ 更强的上界估计)**.** 对充分大的整数 $n$，$P(n) \le 2^{c\sqrt{n}}$，其中 $c > 0$ 为与 $n$ 无关的常数.

**证明** 根据生成函数，$0 < x < 1$ 时，我们有

$$P(n)x^n \le P(x) = \prod_{k\ge 1}\frac{1}{1-x^k}$$

同时取对数，得

$$\ln P(n) + n\ln x \le -\sum_{k\ge 1}\ln(1-x^k).$$

把泰勒展开 $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k\geq 1} -\frac{x^k}{k!}$ 代入上式，

$$\begin{aligned}
\ln P(n) + n\ln x &\leq -\sum_{k\geq 1} \ln(1-x^k) \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} \frac{x^{kj}}{j} = \sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}\sum_{k\geq 1} x^{kj} \\
&= \sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}\times\frac{x^j}{1-x^j} \\
&= \sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}\times\frac{x^j}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{j-1})}
\end{aligned}$$

$0<x<1$ 时，$1+x+x^2+\cdots+x^{j-1} \geq jx^{j-1}$，故

$$\begin{aligned}
\ln P(n) + n\ln x &\leq \sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}\times\frac{x^j}{(1-x)jx^{j-1}} \\
&= \sum_{j\geq 1}\frac{x}{j^2(1-x)} \\
&= \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x}{1-x}.
\end{aligned}$$

于是我们可以得到

$$\ln P(n) \leq \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x}{1-x} - n\ln x.$$

取 $x = 1-\frac{1}{\sqrt{n}}$，代入原式，得

$$\begin{aligned}
\ln P(n) &\leq \frac{\pi^2}{6}(\sqrt{n}-1) - n\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}}) \\
&= \frac{\pi^2}{6}\sqrt{n} - n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \Theta(\sqrt{n}).
\end{aligned}$$

即

$$P(n) \leq e^{c\sqrt{n}}.$$

□

## 3 选做题

对给定的 $n$，

1. 分拆数 $P(n,k)$ 在 $k$ 为多少时最大？
2. 证明分拆数 $P(n,k)$ 作为 $k$ 的函数是单峰的.（即存在 $0\leq i\leq n$ 满足 $P(n,0)\leq P(n,1)\leq\cdots\leq P(n,i-1)\leq P(n,i)\geq P(n,i+1)\geq\cdots\geq P(n,n-1)\geq P(n,n)$）
3. 证明两类 Stirling 数 $S_1(n,k), S_2(n,k)$ 作为 $k$ 的函数也是单峰的.