组合数学作业 1

1. 计算 $\binom{-2}{m}$ 并验证它是 $(1+x)^{-2}$ 展开式的第 m 项系数。

解 根据广义的组合数的定义,$\binom{-2}{m}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-m+1)}{m!}=(-1)^m\frac{(m+1)(m)\cdots(2)}{m!}$,
接下来证明该组合数是 $(1+x)^{-2}$ 展开式的第 m 项系数, 对 $(1+x)^{-2}$ 在 0 处进行泰勒展开, 其中, 第 m 项系数是 $\frac{(-2)(-3)\cdots(-m-1)}{m!}=(-1)^m\frac{(m+1)(m)\cdots(2)}{m!}=\binom{-2}{m}$

更正

根据广义的组合数的定义,$\binom{-2}{m}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-m+1)}{m!}=(-1)^m\frac{(m+1)(m)\cdots(2)}{m!}=(-1)^m(m+1)$
对 $(x+1)^{-2}$ 做泰勒展开, 其中第 m 项系数为 $(-1)^m(m+1)=\binom{-2}{m}$

2. 证明: $(1+x)^\alpha=\sum_{i\geq 0}\binom{\alpha}{i}x^i$, 其中 $|x|<1$ 且 $\alpha\in\mathbb{R}$

证明 我们利用在 0 处的泰勒展开, 将 $(1+x)^\alpha$ 展开成关于 x 的级数形式

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}x^m+\cdots$$

其中, x^i 的系数是 $\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}=\binom{\alpha}{i}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}\quad(i=0,1,\ldots,m,\ldots)$

于是, $(1+x)^\alpha=\sum_{i\geq 0}\binom{\alpha}{i}x^i$ □

3. 计算下列和式: a.$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}\quad\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}$

b.$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}\quad\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

c.$\sum_{k=1}^{n}k^3$

d.$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!/(n+k+1)!$

解 对于 a, 根据二项式定理, $(1+x)^n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^k$, 分别将 $x^3=1$ 的三个单位根 $1,e^{i\frac{2\pi}{3}},e^{i\frac{4\pi}{3}}$, 带入方程, 得到以下三个等式:

$$2^n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k}+\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}+\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}\tag{1}$$

$$(1+e^{i\frac{2\pi}{3}})^n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k}+e^{i\frac{2\pi}{3}}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}+e^{i\frac{4\pi}{3}}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}\tag{2}$$

$$(1+e^{i\frac{4\pi}{3}})^n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k}+e^{i\frac{4\pi}{3}}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}+e^{i\frac{2\pi}{3}}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}\tag{3}$$

此外, 还有 $1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{4\pi}{3}}=0\quad(4)$,$(1)+e^{i\frac{4\pi}{3}}(2)+e^{i\frac{2\pi}{3}}(3)$ 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}&=\frac{1}{3}(2^n+e^{i\frac{4\pi}{3}}(1+e^{i\frac{2\pi}{3}})^n+e^{i\frac{2\pi}{3}}(1+e^{i\frac{4\pi}{3}})^n)\\&=\frac{1}{3}(2^n+e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{i\frac{n\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{-n\pi}{3}})\\&=\frac{1}{3}(2^n+e^{i\frac{(4+n)\pi}{3}}+e^{i\frac{(2-n)\pi}{3}})\end{aligned}$$

同理，可得

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}=\frac{1}{3}(2^n+e^{i\frac{(2+n)\pi}{3}}+e^{i\frac{(4-n)\pi}{3}})$$

对于 b, 根据二项式定理, 有

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

对等号两边同时求导, 有

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

等号两边同乘 x, 再求一次导, 有

$$n(1+x)^{n-2}(nx+1)=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$$

最后, 将 x=1 带入, 有

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$$

更正

对于 b 的另一小问, 考虑二项式定理

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\int_0^x(\binom{n}{k}t^k)dt\\
&=\int_0^x(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k)dt\\
&=\int_0^x(1+t)^n dx\\
&=\frac{1}{n+1}((x+1)^{n+1}-1)
\end{aligned}$$

将 x=1 带入, 得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

对于 c, 我们将 k^3 拆成组合数基底的线性组合, 有

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}[6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1}]$$

根据杨辉三角中的加法运算, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4} \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3} \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2} \tag{6}$$

最后, 综合 4, 5, 6 三式, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$$

对于 d

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!/(n+k+1)!=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(n+k-1)!}$$

观察到, $(n-k)+(n+k+1)=2n+1$, 于是, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!/(n+k+1)! &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(n+k-1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(n-k)!(n+k-1)!(2n+1)^{\underline{(n+1)}}}\\ &= \frac{1}{(2n+1)^{\underline{(n+1)}}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n+k+1}\end{aligned}$$

下面计算 $\frac{1}{(2n+1)^{\underline{(n+1)}}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n+k+1}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n+k+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\\ &= 2^{2n+1}-2^{2n}\\ &= 2^{2n}\end{aligned}$$

将结果代入, 有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!/(n+k+1)!=\frac{2^{2n}}{(2n+1)^{\underline{(n+1)}}}$$

4. 证明: 分母均不为 0 时, $x^{\underline{m}}/(x-n)^{\underline{m}}=x^{\underline{n}}/(x-m)^{\underline{n}}$

证明 要证原等式成立, 只需证明 $x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}=x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}$

$$\begin{aligned}LHS&=x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}\\&=x(x-1)\cdots(x-m+1)(x-m)\cdots(x-m-n+1)\\&=x^{\underline{m+n}}\\RHS&=x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}}\\&=x(x-1)\cdots(x-n+1)(x-n)\cdots(x-m-n+1)\\&=x^{\underline{m+n}}\end{aligned}$$

显然, RHS=LHS □

5. 证明: $\forall 1\le i,j\le n,\sum_{k=0}^{n}\binom{i}{k}\binom{k}{j}(-1)^k=(-1)^i\delta_{i,j}$

证明 若 $i=j$, 设 $i=j=m$, 若 $k<m$, 则 $\binom{k}{m}=0$, 若 $k>m$, 则 $\binom{m}{k}=0$, 于是

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{k}{m}(-1)^k=\binom{m}{m}\binom{m}{m}(-1)^m=(-1)^m$$

反之，若 $i \neq j$, 不妨设 $i > j$, 若 $k < j$, 则 $\binom{k}{j} = 0$, 若 $k > i$, 则 $\binom{i}{k} = 0$, 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{k}{m}(-1)^k &= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}\binom{k}{j}(-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{i!}{k!(i-k)!} \times \frac{k!}{j!(k-j)!}(-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{i!}{j!(i-k)!(k-j)}(-1)^k \\
&= \frac{i!}{(i-j)!j!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(i-j)!}{(i-k)!(k-j)!}(-1)^k \\
&= \frac{i!}{(i-j)!j!} \sum_{k=0}^{n} \binom{i-j}{k-j}(-1)^k \\
&= (-1)^j \frac{i!}{(i-j)!j!} \sum_{k=0}^{n} \binom{i-j}{k-j}(-1)^{(k-j)} \\
&= (-1)^j \frac{i!}{(i-j)!j!} \sum_{k=1}^{i-j} \binom{i-j}{k}(-1)^k \\
&= (-1)^j \frac{i!}{(i-j)!j!}(1+(-1))^{i-j} \\
&= 0
\end{aligned}$$

于是, $\forall 1 \leq i, j \leq n, \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k}\binom{k}{j}(-1)^k = (-1)^i \delta_{i,j}$ □

6. 证明: $(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$, 其中, k 为正整数且 $k \leq n$

证明 由斯特林公式

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} &\sim \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k \sqrt{2\pi(n-k)}(\frac{(n-k)}{e})^{(n-k)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{k^{k+\frac{1}{2}}(n-k)^{(n-k+\frac{1}{2})}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{n^k}{k^{k+\frac{1}{2}}})(\frac{n^{n-k+\frac{1}{2}}}{(n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2k}} e^k \sqrt{\frac{n}{n-k}} \times (\frac{n}{k})^k \\
&\geq (\frac{n}{k})^k
\end{aligned}$$

同时, 因为 $n,k\in\mathbb{Z}^+$, 还有

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &\sim \frac{1}{\sqrt{2k}}\sqrt{\frac{n}{n-k}}\times(\frac{en}{k})^k\\ &= \frac{1}{\sqrt{2k}}\sqrt{1+\frac{k}{n-k}}\times(\frac{en}{k})^k\\ &\le \frac{1}{\sqrt{2k}}\sqrt{k+1}\times(\frac{en}{k})^k\\ &\le (\frac{en}{k})^k\end{aligned}$$

于是,

$$(\frac{n}{k})^k \le \binom{n}{k} \le (\frac{en}{k})^k$$

□

7. 4 名男士和 8 名女士围着一张圆桌就坐, 如果每两名男士之间恰好有两名女士, 一共有多少种就坐方法?

解 首先当作线排列来处理, 4 名男士共有 4! 种顺序, 8 名女士有 8! 种排列, 此外, 围起来满足条件的线排列一共有 3 种, (在从圆排列转化为线排列的过程中, 注意分类, 在圆排列中等价的线排列解开后基本上不等价), 于是设有 N 种就坐方法,

$$N=\frac{1}{12}(3\times4!\times8!)=241920$$

8. 15 个人围着一张圆桌就坐, 如果 B 拒绝坐在 A 旁边, 一共有多少种就坐方法? 如果 B 只拒绝坐在 A 的右边, 一共有多少种就座方法?

解 同样按照线排列处理, 在线排列中, A 与 B 坐在一一共有 A,B

$$\binom{14}{1}\times2\times13!+2\times13!=30\times13!$$

因此, 如果 B 拒绝坐在 A 旁边, 一共有

$$\frac{1}{15}(15!-30\times13!)=12\times13!$$

种就坐方法如果 B 只拒绝坐在 A 的右边, 则一共有

$$\frac{1}{15}(15!-15\times13!)=13\times13!$$

种就坐方法

9. 确定下面多重集合的 10 排列的数目$S=\{a,a,a,b,b,b,b,c,c,c,c,c\}$

解 card (S)=12, 因此, S 共有 6 种不同的 10 元素子集 (少 2 个 a, 少 2 个 b, 少 2 个 c, 少 ab, 少 bc, 少 ac), 设 10 排列的数目为 N,

$$N = 10! \times (\frac{1}{4!5!} + \frac{1}{3!2!5!} + \frac{1}{3!4!3!} + \frac{1}{2!3!5!} + \frac{1}{3!3!4!} + \frac{1}{2!4!4!})$$

10. 考虑大小为 $2n$ 的多重集合 $\{n \cdot a, 1, 2, 3, \ldots, n\}$, 确定它的 n 组合数

解 该问题的关键在于取几个 a, 设取出来的 n 个元素之中有 k 个 a, 则在这组组合下的组合数

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=0}^{n} N_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= 2^n \end{aligned}$$