组合数学第 2 讲

授课时间: 2024 年 9 月 2 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 刘昌赫、苏泊硕

1　二项式定理的应用

定理 1 (二项式定理)**.** 对 $n \in \mathbb{N}$，有

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

特别地，令 $y=1$，可以得到

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k. \tag{1}$$

例 1　求 $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k}$.

解　对于 (1) 式，分别令 $x = 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$, 可得

$$2^n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k} + \sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1} + \sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2};$$

$$(1+e^{i\frac{2\pi}{3}})^n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k} + e^{i\frac{2\pi}{3}}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1} + e^{i\frac{4\pi}{3}}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2};$$

$$(1+e^{i\frac{4\pi}{3}})^n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k} + e^{i\frac{4\pi}{3}}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1} + e^{i\frac{2\pi}{3}}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}.$$

因为 $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 0$，将以上三式相加可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k} &= \frac{1}{3}\left[2^n + \left(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n + \left(1+e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2^n + \left(-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n + \left(-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2^n + e^{i\frac{n\pi}{3}} + e^{i(-\frac{n\pi}{3})}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right] \\
&= \begin{cases} \frac{2^n+2}{3}, \text{ if } n \equiv 0 \pmod 6; \\ \frac{2^n+1}{3}, \text{ if } n \equiv \pm 1 \pmod 6; \\ \frac{2^n-1}{3}, \text{ if } n \equiv \pm 2 \pmod 6; \\ \frac{2^n-2}{3}, \text{ if } n \equiv 3 \pmod 6. \end{cases}
\end{aligned}$$

类似的，通过将三式分别乘合适的系数相加，就可以得到 $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}$、$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}$ 的值. □

例 2　求 $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{4k}$.

解　对于 (1) 式，分别令 $x = 1, i, -1, -i$, 可得

$$2^n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{4k} + \sum_{k\geq 0}\binom{n}{4k+1} + \sum_{k\geq 0}\binom{n}{4k+2} + \sum_{k\geq 0}\binom{n}{4k+3};$$

$$
\begin{aligned}
(1+i)^n &= \sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k} + i\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+1} + (-1)\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+2} + (-i)\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+3};\\
0^n &= \sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k} + (-1)\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+1} + \sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+2} + (-1)\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+3};\\
(1-i)^n &= \sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k} + (-i)\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+1} + (-1)\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+2} + i\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k+3}.
\end{aligned}
$$

将以上四式相加可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\ge 0}\binom{n}{4k} &= \frac{1}{4}\left[2^n + (1+i)^n + (1-i)^n\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[2^n + (\sqrt{2})^n\cdot 2\cos\frac{n\pi}{4}\right]\\
&= \begin{cases}
2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}},\ \text{if } n\equiv 0 \pmod 8;\\
2^{n-2}+2^{\frac{n-3}{2}},\ \text{if } n\equiv \pm 1 \pmod 8;\\
2^{n-2},\ \text{if } n\equiv \pm 2 \pmod 8;\\
2^{n-2}-2^{\frac{n-3}{2}},\ \text{if } n\equiv \pm 3 \pmod 8;\\
2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}},\ \text{if } n\equiv 4 \pmod 8.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

□

例 3 求 $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

解 (1) 式两边对 x 求导，可得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

令 $x=1$，便可得到

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}. \tag{2}$$

□

例 4 从集合 $S=\{1,2,\dots,n\}$ 中均匀随机取若干个元素（即选取每个元素的概率均为 $\frac{1}{2}$）组成子集 T，求 T 中元素个数 $|T|$ 的期望.

解 1 由期望的定义，可以得到

$$\mathbb{E}(|T|) = \frac{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}{2^n}.$$

由 (2) 式立即得到

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(|T|) &= \frac{n2^{n-1}}{2^n}\\
&= \frac{n}{2}.
\end{aligned}
$$

□

解 2 定义随机变量 $x_i, i\in\{1,2,\dots,n\}$，其满足

$$x_i = \begin{cases} 1,\ \text{if } i\in T;\\ 0,\ \text{otherwise.}\end{cases}$$

对 S 中每个元素 i，其等可能地出现或不出现在 T 中，所以 $\mathbb{E}\left(x_i\right)=\frac{1}{2}$. 由期望的可加性，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|T\right|\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(x_i\right)\\ &= \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

□

例 5 求 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

解 对 (1) 式两边从 0 到 t 求积分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^t (1+x)^n \mathrm{d}x &= \int_0^t \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^t \binom{n}{k}x^k \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\frac{(1+t)^{n+1}-1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}t^{k+1},$$

令 $t=1$，便可得到

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \tag{3}$$

□

定理 2 (Vandermonde 恒等式)**.**

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}. \tag{4}$$

证明

$$(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n,$$

将式中的 $(1+x)^m,(1+x)^n$ 和 $(1+x)^{m+n}$ 分别用二项式定理展开，得到

$$\sum_{k=0}^{n}x^k\binom{m+n}{k}=\sum_{k=0}^{n}x^k\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}.$$

比较两边 x^k 前的系数即证

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}.$$

□

推论 3.

$$\binom{2k}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{k}{j}.$$

证明　在 (4) 中，令 $m=n=k$ 即证. □

推论 4 (杨辉恒等式).

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}. \tag{5}$$

它描述了在杨辉三角形中，一个数等于它左上角与右上角的两数之和.

证明　在 (4) 中，令 $m=1$ 即证

$$\binom{n+1}{k}=\sum_{j=k-1}^{k}\binom{n}{j}\binom{1}{k-j}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}.$$

□

推论 5 (朱世杰恒等式).

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}, \tag{6}$$

证明　先将 $\binom{m}{m}$ 变为 $\binom{m+1}{m+1}$，再反复使用杨辉恒等式 (5)，

$$\begin{aligned}
&\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{n}{m}\\
=&\binom{m+1}{m+1}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\binom{m+3}{m}+\cdots+\binom{n}{m}\\
=&\binom{m+2}{m+1}+\binom{m+2}{m}+\binom{m+3}{m}+\cdots+\binom{n}{m}\\
=&\binom{m+3}{m+1}+\binom{m+3}{m}+\binom{m+4}{m}+\cdots+\binom{n}{m}\\
=&\cdots\\
=&\binom{n}{m+1}+\binom{n}{m}\\
=&\binom{n+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

□

例 6　求 $\sum_{k=1}^{n}k^2,\sum_{k=1}^{n}k^3$.

解　先将 k^2 表示成 $\binom{k}{1}$ 和 $\binom{k}{2}$ 的线性组合，再运用朱世杰恒等式 (6)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^2&=\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(k-1\right)+k\right]\\
&=2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}\\
&=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\
&=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}.
\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} [k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k] \\ &= 3! \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{3} + 3 \times 2! \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} \\ &= 3! \binom{n+1}{4} + 3 \times 2! \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.\end{aligned}$$

□

2 圆排列与可重线排列

定义 6 (圆排列)**.** *将若干个元素排成一个圆，这种排列方式称作对这些元素的一个圆排列，经过合适旋转后重合的两个或多个圆排列视为同一种圆排列.*

例 7 从 n 个不同元素中任选 k 个元素进行圆排列，请问有多少种不同的圆排列?

解 从 n 个不同元素中任选 k 个元素进行线排列的种数为 $\binom{n}{k}k!$. 对于一种 k 个元素的圆排列，将该圆周从任何两个相邻元素间间断，可以得到一种 k 个元素的线排列. 于是可以得出，任何一种圆排列会对应 k 种不同的线排列，所以圆排列的种数为 $\binom{n}{k}k!/k = \binom{n}{k}(k-1)!$.

定义 7 (可重线排列)**.** *若某个线排列允许包含相同元素，这种排列方式称作可重线排列.*

例 8 包含 k_1 个 1，k_2 个 2，…，k_n 个 n 的可重线排列的种数是多少?

解 先将所有元素当作互不相同的元素看待，则有 $(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ 种线排列. 对于元素 i，在其他元素位置不变的情况下，这 k_i 个 i 总共有 $i!$ 种线排列（若将它们视作不同元素），所以由于这些相同的元素 i，有 $i!$ 种线排列其实是同一个可重线排列. 当我们同时考虑 $1, 2, \ldots, n$ 的影响，可以得到可重线排列的种数为

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} k_i)!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!}. \tag{7}$$

此数被称作广义组合数，它可以被记作 $\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}}$.

定理 8 (多项式定理)**.**

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \right)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \left[\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \prod_{i=1}^{m} x_i^{k_i} \right] \tag{8}$$

证明 由展开过程以及广义组合数的定义自明. □

3 Stirling 公式

定理 9 (Stirling 公式)**.** *$n \to \infty$ 时，*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n,$$

或更精确地,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1.$$

例 9 扔 $2n$ 次硬币,每次扔硬币正面朝上和反面朝上的概率均为 $\frac{1}{2}$,估计其中恰好有 n 次正面朝上的概率。

解 此概率的表达式为

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}.$$

由 Stirling 公式,

$$\begin{aligned}\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}&=\frac{2n!}{n!n!2^n}\\&\approx\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}2^{2n}}\\&\approx\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.\end{aligned}$$

□

4 整值多项式

定义 10 (整值多项式)**.** 对于一个多项式 $P(x)$,如果其满足 $\forall\ x\in\mathbb{Z},P(x)\in\mathbb{Z}$,则 $P(x)$ 称作整值多项式.

在这里需要注意,整值多项式和整系数多项式不是同一个概念:整系数多项式一定是整值多项式,但整值多项式不一定是整系数多项式,例如 $\frac{n(n+1)}{2}$.

定理 11. 对于 d 次多项式 $P(x)$,它是整值多项式的充要条件是存在 $(d+1)$ 个整数 $C_k\in\mathbb{Z},k\in\{0,1,\dots,d\}$,使得 $P(x)$ 可以表示为

$$P(x)=\sum_{k=0}^{d}C_k\binom{x}{k}.$$

证明

充分条件部分:因为 x 是整数时,$\binom{x}{k}$ 亦为整数,所以

$$P(x)=\sum_{k=0}^{d}C_k\binom{x}{k}$$

必为整数,即 $P(x)$ 是整值多项式.

必要条件部分:对于多项式线性空间 $\{f(x):\deg(f(x))\le d\}$,$\{\binom{x}{0},\binom{x}{1},\binom{x}{2},\dots,\binom{x}{d-1},\binom{x}{d}\}$ 构成此线性空间的一组基,所以 $P(x)$ 一定可以表示为

$$P(x)=\sum_{k=0}^{d}C_k\binom{x}{k}.$$

以下归纳证明 $C_k \in \mathbb{Z}$. 首先因为 $P(x)$ 是整值多项式，令 $x=0$ 有

$$P(0)=\sum_{k=0}^{d} C_k\binom{0}{k}=C_0\binom{0}{0}=C_0\in\mathbb{Z}.$$

而若对 $k<m\le d$ 有 $C_k\in\mathbb{Z}$，令 $x=m$ 有

$$P(m)=\sum_{k=0}^{m} C_k\binom{m}{k}=C_m\binom{m}{m}+\sum_{k=0}^{m-1} C_k\binom{m}{k}\in\mathbb{Z},$$

注意到 C_m 的系数 $\binom{m}{m}=1$，且 $\sum_{k=0}^{m-1}C_k\binom{m}{k}\in\mathbb{Z}$, 所以 $C_m\in\mathbb{Z}$. □

5 选做题

一个多项式 $P(x)$ 被称作整值多项式，如果其满足 $\forall\, x\in\mathbb{Z}, P(x)\in\mathbb{Z}$.

1. 证明：对于一个 d 次多项式 $P(x)$，若 $\exists\, x\in\mathbb{Z}$，使得 $P(x), P(x+1), \cdots, P(x+d)$ 均为整数，则 $P(x)$ 为整值多项式.

2. 对于一个 d 次多项式 $P(x)$，请问 $x_0, x_1, \cdots, x_d\in\mathbb{Z}$ 满足什么条件时，由 $P(x_i)\in\mathbb{Z}, \forall\, i\in\{0,1,\cdots,d\}$ 可以推出 $P(x)$ 为整值多项式?