组合数学第 14 讲

授课时间: 2024 年 12 月 2 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 南子哲

1 抽屉原理的应用

例 1　证明: 对于任意元素互不相同、长度为 101 的数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$，存在长度不小于 11 的单调子序列.

证明　设以 a_i 为结尾的最长单调递增子序列长度为 n_i，则所有 $n_i \geq 1$. 若其中 $\exists n_i \geq 11$，则我们已找到长度不小于 11 的单调递增子序列.

若所有 n_i 均不超过 10，则 $n_1, n_2, \ldots, n_{101}$ 这 101 个数的取值在 $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 中，由抽屉原理，$n_1, n_2, \ldots, n_{101}$ 中至少有 $\lceil \frac{101}{10} \rceil = 11$ 个数取值相同，即 $\exists i_1 < i_2 < \ldots < i_{11}$，使得 $n_{i_1} = n_{i_2} = \cdots = n_{i_{11}}$. 若其中存在某两项 a_{i_s}, a_{i_t} 使得 $s < t$ 且 $a_{i_s} < a_{i_t}$，则对于以 a_{i_s} 结尾，且长度为 n_{i_s} 的单调递增子序列来说，可以在其尾部再添加一项 a_{i_t}，这个新子序列仍然是单调递增序列，且以 a_{i_t} 结尾，长度为 $n_{i_s} + 1$，所以 $n_{i_t} \geq n_{i_s} + 1 > n_{i_s}$，矛盾. 这说明 $a_{i_1} > a_{i_2} > \cdots > a_{i_{11}}$，即它们构成了长度为 11 的单调递减序列. □

注　如果数列的长度为 100，可以构造出数列使得不存在长度为 11 的单调子序列，如:

$$91, 92, \ldots, 100; 81, 82, \ldots, 90; 71, 72, \ldots, 80; \ldots; 1, 2, \ldots, 10.$$

更一般地，对于任意元素互不相同，长度为 $mn + 1$ 的数列，一定存在长度不小于 m 的单调增子序列或长度不小于 n 的单调减子序列.

例 2　证明: 在平面直角坐标系上对格点进行二染色，则必存在一个长方形，它的四个顶点颜色相同.

证明　考虑 3 行 9 列的点阵. 对每一列内部的 3 个点，由于二染色，由抽屉原理可知必存在两个同色的点；而对于每一列，共有 $2^3 = 8$ 种染法，同样由抽屉原理可知 9 列中必有两列染色模式相同. 于是这两列中同色的四个点即可构成顶点颜色相同的长方形. □

注　以此类推，如果对格点三染色，则考虑 $(3+1) \times (3^4+1) = 4 \times 82$ 的点阵，其中仍然有四个顶点同色的长方形；如果 n 染色，考虑 $(n+1) \times (n^{n+1}+1)$ 的点阵即可. 但这样的点阵规模过大，为了保证在 n 染色时必能找到顶点同色的长方形，我们至少需要多大的点阵？此问题留作思考.

例 3　证明: 对 3 行 7 列的点阵进行任意 2 染色，必存在一个长方形，它的四个顶点颜色相同.

证明　对于 3 行 6 列的点阵，则按照如下方案染色时，不存在四个顶点同色的长方形（0 表示一种颜色，1 表示另一种颜色）.

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

对于 3 行 7 列的点阵，则若这 7 列中同时包含全 0 和全 1 这两种染色模式，由于剩下 5 列每一列都必有两个点同色，因此一定可以找到四个顶点同色的长方形；若这 7 列中只包含全 0 和全 1 中的一种，则如果剩余 6 列中有相同的染色模式，立刻可以找到同色长方形；如果剩余 6 列的染色模式各不相同，则只有可能是上图中的 6 列染色方案（顺序忽略不计），其中必然含有 2 个 0 的染色模式和 2 个 1 的染色模式，它会与全 0 或全 1 那一列构成所求长方形；若这 7 列中不包含全 0 或全 1 中的

任何一种，则由抽屉原理，剩余 6 种染色模式染 7 列时必然有两列染色方式相同，其中存在顶点同色的长方形. □

2 Erdős–Ginzburg–Ziv 定理

Erdős–Ginzburg–Ziv 定理, 简写作 EGZ 定理, 是加性数论中的重要定理, 它刻画了有限循环群 $\mathbb{Z}_m$ 中至少多长的数列才能保证其中存在 m 个元素和为 0.

例 4 证明：$m=2$ 时，此时任给 3 个整数，其中必存在两个整数，它们的和能被 2 整除.

证明 由抽屉原理知 3 个整数中必有两个整数奇偶性相同，它们的和能被 2 整除. □

注 任给两个整数无法满足要求，例如 $1, 2$.

例 5 证明：$m=3$ 时，此时任给 5 个整数，其中必存 3 个整数，它们的和能被 3 整除.

解 按照模 3 的剩余类构造抽屉. 如果所有的抽屉非空，那么从每个抽屉中取一个元素可以使得它们的和被 3 整除；如果存在一个空抽屉，那么 5 个数放在剩余 2 个抽屉中必有 3 个数在同一个抽屉中，即它们模 3 同余，那么它们的和可以被 3 整除.

注 任给 4 个整数无法满足要求，例如 $1, 2, 4, 5$.

例 6 证明：$m=4$ 时，此时任给 7 个整数，其中必存 4 个整数，它们的和能被 4 整除.

解 任给 7 个整数 $\{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$，在其子集 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 中，存在两个整数的和是 2 的倍数，不妨设为 $\{a_1, a_2\}$；$\{a_3, a_4, a_5\}$ 中同样存在两个整数的和是 2 的倍数，不妨设为 $\{a_3, a_4\}$；$\{a_5, a_6, a_7\}$ 中同样存在两个整数的和是 2 的倍数，不妨设为 $\{a_5, a_6\}$；于是，$\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_3+a_4}{2}, \frac{a_5+a_6}{2}$ 为 3 个整数，所以其中存在两个整数的和可以被 2 整除，不妨设 $\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}$ 可以被 2 整除，即 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 可以被 4 整除. 所以至少任意 7 个整数可保证其中存在 4 个整数的和能被 4 整除.

注 任给 6 个整数无法满足要求，例如 $0, 1, 4, 5, 8, 9$.

定理 1 (Erdős–Ginzburg–Ziv)**.** *$m>1$ 为一个正整数，则任给 $2m-1$ 个整数，其中必存在 m 个整数的和能被 m 整除.*

如果只有 $2m-2$ 个整数，取 $m-1$ 个 0 和 $m-1$ 个 1，则其中任意 m 个整数的和不能被 m 整除. 以下任给 $2m-1$ 个整数满足要求. 我们先证明 $m=p$ 为素数的情形. 这里提供两种方法.

证明 1 使用反证法. 假设存在 $2p-1$ 个整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$，使得其中任何 p 个整数之和都不能被 p 整除，由 Fermat's little theorem，

$$(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p})^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

对下标 $i_1, \ldots, i_p$ 求和，共有 $\binom{2p-1}{p}$ 个式子，相加得到

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le 2p-1} (a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p})^{p-1} \equiv \binom{2p-1}{p} \pmod p.$$

由于 $\binom{2p-1}{p} = \frac{(2p-1)!}{p!(p-1)!}$，分母和分子分别只包含一个 p 因子，故 $p \nmid \binom{2p-1}{p}$，则

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le 2p-1} (a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p})^{p-1} \not\equiv 0 \pmod p. \tag{1}$$

由多项式定理展开知

$$(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_p})^{p-1}=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=p-1}\frac{(p-1)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_p!}a_{i_1}^{\alpha_1}a_{i_2}^{\alpha_2}\cdots a_{i_p}^{\alpha_p},$$

带入(1)式并交换求和顺序得

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=p-1}\quad\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le 2p-1}\frac{(p-1)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_p!}a_{i_1}^{\alpha_1}a_{i_2}^{\alpha_2}\cdots a_{i_p}^{\alpha_p}\not\equiv 0 \pmod p. \tag{2}$$

考虑内侧的求和项

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le 2p-1}\frac{(p-1)!}{\alpha_{i_1}!\cdots\alpha_{i_p}!}a_{i_1}^{\alpha_1}\cdots a_{i_p}^{\alpha_p}, \tag{3}$$

由于 $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ 的和为 $p-1$，故其中存在 0 (但不可能全部为 0), 因此求和时会出现重复，下面我们通过论证重复次数是 p 的倍数来得到矛盾。设其中有 r 个变量的次数为 $\alpha_j=0$，则重复次数等于这 r 个变量的可能取法。这 r 个变量在 $1,\ldots,2p-1$ 中且不能与 $p-r$ 个次数不为 0 的变量重复，即有 $\binom{(2p-1)-(p-r)}{r}=\binom{p+r-1}{r}$ 种.

$$\binom{p+r-1}{r}=\frac{(p+r-1)(p+r-2)\cdots(p+1)p}{r!}$$

$1\le r\le p-1$ 时，分母不含 p 因子，而分子含有 p 因子，所以 $\binom{p+r-1}{r}$ 始终为 p 的倍数，则(3)式为 p 的倍数，这与(2)式矛盾，故假设不成立，命题得证. □

另一种证法需要用的如下引理，该引理的证明见下一讲笔记.

引理 2 (Cauchy-Davenport)**.** *设 p 是一个质数，A,B 是 $\mathbb{Z}_p$ 的子集，定义 $A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\}$，其中 $a+b$ 是在 $\mathbb{Z}_p$ 中的加法。则有*

$$|A+B|\ge\min\{|A|+|B|-1,p\}.$$

证明 2 我们会用到上述引理在 $|B|\le 2$ 时的情形. 不妨设 $a_1\le\cdots\le a_{2p-1}\le p-1 \pmod p$。若 $a_i=a_{i+1}=\cdots=a_{i+p-1}$，则 $p|a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+p-1}$。否则有 $a_1<a_p,a_2<a_{p+1},\ldots,a_{p-1}<a_{2p-2}$。

设 $A_1:=\{a_1,a_p\},B_1:=\{a_2,a_{p+1}\}$，根据引理，有 $|A_1+B_1|\ge 2+2-1=3$；

设 $A_2:=A_1+B_1,B_2:=\{a_3,a_{p+2}\}$，根据引理，有 $|A_2+B_2|\ge 3+2-1=4$；

...

设 $A_{p-2}:=A_{p-3}+B_{p-3},B_{p-2}:=\{a_{p-1},a_{2p-2}\}$，根据引理，有 $|A_{p-2}+B_{p-2}|\ge p$。

注意到 $|\mathbb{Z}_p|=p$，故有 $A_{p-2}+B_{p-2}=\mathbb{Z}_p$。因此存在 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_{p-1}}\in A_{p-2}+B_{p-2}$，使得

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_{p-1}}\equiv -a_{2p-1} \pmod p$$

即 $p|a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_{p-1}}+a_{2p-1}$. □

以上证明过程解决了 m 为素数的情形，对于合数 m，我们证明以下结论.

引理 3. *若定理 1 在 $m=s$ 和 $m=t$ 时成立，则定理 1 在 $m=st$ 时成立.*

证明 这里的操作过程与例题中讨论 $m=4$ 时的过程类似.

任给包含 $2st-1$ 个数的集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{2st-1}\}$,由命题中的假设,我们可以在 $\{a_1,a_2,\ldots,a_{2s-1}\}$ 中找到 s 个数，它们的和为 s 的倍数，不妨设是前 s 个数，则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_s}{s}$ 为整数，我们将这个整数记为 b_1.

在剩下的数中，$\{a_{s+1},a_{s+2},\ldots,a_{3s-1}\}$ 中可以找到 s 个数，它们的和为 s 的倍数，仍然不妨设是前 s 个数，则 $\frac{a_{s+1}+a_{s+2}+\cdots+a_{2s}}{s}$ 为整数, 我们将这个整数记为 b_2.

按照这个思路继续操作，只要剩余的数的个数不少于 $2s-1$，我们总能在其中找到 s 个数，它们的和为 s 的倍数. 注意到每次操作会让剩余的数的个数减少 s，在总共进行 $2t-2$ 次操作之后，我们还剩下 $2st-1-(2t-2)s=2s-1$ 个数，这些整数刚好满足我们执行最后一次操作. 我们由此得到了 $b_1,b_2,\ldots,b_{2t-1}$ 这 $2t-1$ 个整数，由命题中的假设，我们可以从中找到 t 个数，它们的和为 t 的倍数，而这个和是 A 中不同的 st 个整数之和的 $\frac{1}{s}$ 倍，进而 A 中这 st 个整数之和能被 st 整除，所以定理 1 在 $m=st$ 时成立，证明完毕. $\square$

因为每个合数都可以进行素因子分解，所以定理 1 对合数 m 同样成立. 至此我们完成了对所有 m 的讨论.

3 选做题

对 $k\times k$ 网格用 r 种颜色染色，确定最小的 k，使得对于任意的染色，网格中都存在一个顶点同色的长方形。

将问题推广到 d 维网格中的 d 维长方体，此时最小的 k 是多少?