组合数学第五讲

授课时间: 2024 年 9 月 23 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 许震宇、袁晨圃

1 互相递归数列

例 1 用 1×2 的多米诺骨牌填充 $3\times n$ 的区域有多少种方法?

解 记 A_n 为用 1×2 多米诺骨牌填充 $3\times n$ 区域方法数，B_n 为填充图 2中第一幅图（总列数为 n）的方法数.

因为 1×2 的骨牌无法覆盖 1×3 区域而恰好覆盖 1×2 区域, 故有 $A_1=0, B_1=1$. 类似的，一张骨牌也不放就可以达到 A_0 对应的情况，得到 $A_0=1$，而 B_0 是不合法的（无法在 3×0 的棋盘上去掉一个角)，得 $B_0=0$. 对于 $3\times n$ 的区域，分类讨论最右侧的 3 个方格的覆盖方式，只有可能是图 1的三种情况；对 $3\times n$ 去掉右下一个方格的区域，类似分类讨论最右侧的 2 个方格的覆盖方式，只有可能是图 2的右侧两张图的两种情况. 因此，有如下方程组:

$$\begin{cases} A_n = B_{n-1} + B_{n-1} + A_{n-2}; \\ B_n = B_{n-2} + A_{n-1}; \\ A_1 = 0, B_1 = 1; \\ A_0 = 1, B_0 = 0. \end{cases}$$

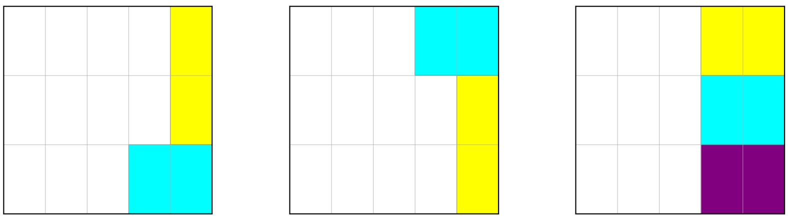

图 1:

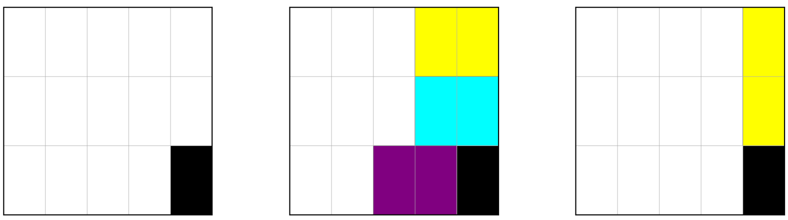

图 2:

我们可以通过第二个等式得到 $A_{n-1}=B_n-B_{n-2}$，即 $A_n=B_{n+1}-B_{n-1}$，再将此式带入第一个等式得到只包含 B 的递推关系，从而解出此题。另一方面，我们也可以采用生成函数的方法：设 $A(x), B(x)$ 为各自对应的生成函数，则

$$\begin{cases} A(x) - 2xB(x) - x^2A(x) = 1; \\ B(x) - x^2B(x) - xA(x) = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1-x^2}{1-4x^2+x^4} \\ &= \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}{1-(2-\sqrt{3})x^2} + \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{1-(2+\sqrt{3})x^2} \\ &= \frac{3-\sqrt{3}}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)x^2\right)^k + \frac{3+\sqrt{3}}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)x^2\right)^k. \end{aligned}$$

观察级数的各项系数，解得

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^n + \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^n, \\ A_{2n+1} &= 0. \end{aligned}$$

2 用矩阵幂处理多数列齐次递归问题

例 2 用 $1,2,3$ 能组成几个模 3 余 1 的 n 位数?

解

定义 A_n 为用 $1,2,3$ 三个数字组成的长度为 n 且模 3 余 0 的数的个数, B_n 为模 3 余 1 的数的个数, C_n 为模 3 余 2 的数的个数.

对于 A_n, B_n, C_n, 分别考虑最后一位数的情况. 以 A_n 为例, 如果最后一位是 1, 那么前面 $n-1$ 位组成的数字模 3 余 2; 如果最后一位是 2, 那么前面 $n-1$ 位组成的数字模 3 余 1; 如果最后一位是 3, 那么前面 $n-1$ 位组成的数字模 3 余 0. 类似讨论 B_n 和 C_n，于是有

$$\begin{cases} A_n = C_{n-1} + B_{n-1} + A_{n-1}; \\ B_n = A_{n-1} + C_{n-1} + B_{n-1}; \\ C_n = B_{n-1} + A_{n-1} + C_{n-1}. \end{cases}$$

注意到：$A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1$ 结合上面的方程组可以得到 $A_0 = 1, B_0 = 0, C_0 = 0$.

解得 $A_n = B_n = C_n = 3^{n-1}$.

例 3 用 $1,2,4$ 能组成几个模 3 余 1 的 n 位数?

解

记号同例 2，可以得到：

$$\begin{cases} A_n = C_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}; \\ B_n = A_{n-1} + C_{n-1} + A_{n-1}; \\ C_n = B_{n-1} + A_{n-1} + B_{n-1}. \end{cases}$$

下面用约旦标准型的方法求解.

上式可以写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \\ C_{n-1} \end{bmatrix}.$$

结合已经确定的初值 $A_0 = 1, B_0 = C_0 = 0$ 可得：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = SJ^nS^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

其中:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3-\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix};$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{6} & \frac{-1-\sqrt{3}i}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{6} & \frac{-1+\sqrt{3}i}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

解得

$$\begin{bmatrix} A(n) \\ B(n) \\ C(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{n-1} + 2\left(\sqrt{3}\right)^{n-2} \cos\frac{5n\pi}{6} \\ 3^{n-1} + 2\left(\sqrt{3}\right)^{n-2} \cos\frac{(5n+8)\pi}{6} \\ 3^{n-1} + 2\left(\sqrt{3}\right)^{n-2} \cos\frac{(5n+4)\pi}{6} \end{bmatrix}.$$

3 指数型生成函数

例 4 用 a, b, c 组成一个 n 位字符串，要求 a 的个数是奇数，b 的个数是偶数. 求满足条件的 n 位字符串有多少个.

解

令 $A_n^{i,j}$ 表示 a 的个数模 2 为 i，b 的个数模 2 为 j 的长度为 n 的字符串的数目，我们可以像上例一样用矩阵求幂获得结果. 这里我们主要介绍指数生成函数的解法.

设答案为 T_n，令 $T(x)$ 为 T_n 的指数型生成函数，则有

$$T_n = \sum_{\substack{0\le i,j,k\le n \\ i+j+k=n \\ 2\nmid i, 2\mid j}} \frac{n!}{i!j!k!} = n! \sum_{\substack{0\le i,j,k\le n \\ i+j+k=n \\ 2\nmid i, 2\mid j}} \frac{1}{i!j!k!},$$

$$T(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{T_n}{n!} x^n.$$

考虑如下的三个函数:

$$A(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2};$$
$$B(x)=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2};$$
$$C(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\mathrm{e}^x.$$

则:

$$\begin{aligned}T(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T_n}{n!}x^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{0\le i,j,k\le n\\ i+j+k=n\\ 2\mid i,2\nmid j}}\frac{x^i}{i!}\frac{x^j}{j!}\frac{x^k}{k!}\\&=A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\\&=\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{4}\right)\mathrm{e}^x\\&=\frac{1}{4}\sum_{n}^{+\infty}\left(\frac{3^nx^n}{n!}-\frac{(-1)^nx^n}{n!}\right).\end{aligned}$$

对比系数可以得到 $T_n=\frac{1}{4}(3^n-(-1)^n)$.

例 5 用 a,b,c 组成一个 n 位字符串，要求 a 的个数模 3 余 1，b 的个数是偶数. 求满足条件的 n 位字符串有多少个.

解

设答案为 T_n，令 $T(x)$ 为 T_n 的指数型生成函数，取三次单位根 ω，并考虑如下三个函数:

$$A(x)=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)=\frac{1}{3}\cdot(1\cdot\mathrm{e}^x+\omega^2\mathrm{e}^{\omega x}+\omega\mathrm{e}^{\omega^2x});$$
$$B(x)=\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2};$$
$$C(x)=\mathrm{e}^x.$$

则:

$$\begin{aligned}T(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T_n}{n!}x^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{0\le i,j,k\le n\\ i+j+k=n\\ i\equiv1\pmod 3\\ j\equiv0\pmod 2}}\frac{x^i}{i!}\frac{x^j}{j!}\frac{x^k}{k!}\\&=A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\\&=\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x+\bar{\omega}\mathrm{e}^{(\omega+2)x}+\omega\mathrm{e}^{(\bar{\omega}+2)x}+\bar{\omega}\mathrm{e}^{\omega x}+\omega\mathrm{e}^{\bar{\omega}x}\right)\\&=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(3^n+1+\bar{\omega}(\omega+2)^n+\omega(\bar{\omega}+2)^n+\bar{\omega}\omega^n+\omega\bar{\omega}^n\right)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

对比系数，可得

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{6}\left(3^n + 1 + \bar{\omega}(\omega+2)^n + \omega(\bar{\omega}+2)^n + \omega^{n-1} + \bar{\omega}^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(3^n + 1 + 2\cos\frac{(2n-2)\pi}{3} + 2(\sqrt{3})^n \cos\frac{(n+8)\pi}{6}\right).
\end{aligned}
$$

4 选做题

1. 用若干块 1×2 的 Domino 骨牌拼成一个完整的 $n\times n$ 正方形，问共有多少种不同的拼法？其中骨牌允许横放或竖放，但不可叠放.