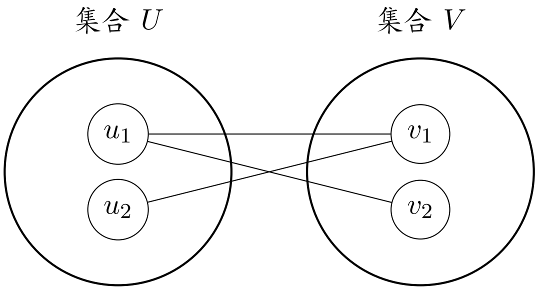
组合数学第 4 讲

授课时间: 2024 年 9 月 14 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 段文辉

1　用二部图证明 Sperner 定理

引理 1 (握手定理)**.** 对一个二部图 $G = (U, V)$,



U, V 中节点的度（*degree*）之和相同，即

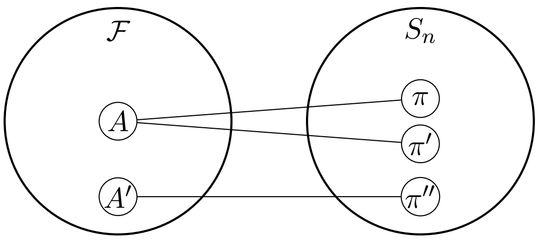
$$\sum_{u \in U} \deg(u) = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

我们可以使用二部图来证明 Sperner 定理.

定理 2 (Sperner, 1928)**.** 对任意的 n,

$$\max_{\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]} \text{是反链}} |\mathcal{F}| = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

证明　我们构造二部图如下，其中集合 S_n 是集合 $[n]$ 中元素的所有置换. $\mathcal{F}$ 中元素 A 与 S_n 中元素 π 相连，当且仅当 A 中元素经过适当排列后是 π 的前缀. 显然 A 可与 S_n 中多个元素相连，但因为 $\mathcal{F}$ 是反链，π 只能与 $\mathcal{F}$ 中一个元素相连.



对 $\forall A \in \mathcal{F}$,

$$\deg(A) = |A|! \cdot (n - |A|)!.$$

对 S_n,

$$\sum_{\pi \in S_n} \deg(s) \leq |S_n| = n!.$$

由握手定理可得,

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} (|A|! \cdot (n - |A|)!) \leq n!.$$

剩余证明过程与之前证明方法相同，不再赘述. □

2 Erdős-Ko-Rado 定理

定理 3 (Erdős-Ko-Rado 定理)**.** $\forall\ n, k$ 且 $1 \leq k \leq n$，若集族 $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ 满足以下条件：

1. 对于 $\forall A \in \mathcal{A}$，$|t| = k$；

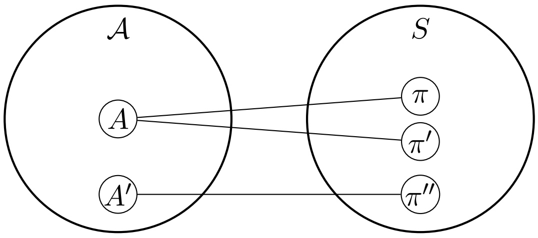
2. 对于 $\forall A, A' \in \mathcal{A}$，$A \cap A' \neq \varnothing$.

则集族 $\mathcal{A}$ 元素个数的最大值为：

$$\max|\mathcal{A}| = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1}, & k \leq \frac{n}{2}; \\ \binom{n}{k}, & k > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

证明 当 $k > \frac{n}{2}$ 时，$2^{[n]}$ 中任意两个大小为 k 的子集都有交集, 易得 $\max|\mathcal{A}| = \binom{n}{k}$.

当 $k \leq \frac{n}{2}$ 时，构造如下二部图：



其中左边为集族 $\mathcal{A}$，右边集合 S 为 $[n]$ 的所有圆排列. $\mathcal{A}$ 中元素 A 与 S 中元素 π 相连，当且仅当 π 把 A 中的元素排列在一起.

则对 $\forall\ A \in \mathcal{A}$,

$$\deg(A) = |A|! \cdot (n - |A|)! = k!(n-k)!.$$

而对 $\forall\ \pi \in S$，设 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 为 π 的所有邻点。不失一般性，我们可以假设 π 就是将 $1, 2, \ldots, n$ 按照顺时针顺序放在圆上的圆排列，且 $A_1 = \{1, 2, \ldots, k\}$. 因为 A_1 和 A_2 相交，注意到 $k \leq \frac{n}{2}$, 所以 A_1 和 A_2 的交集必定是一段位置上连续的整数（这里包括 1 个整数的情况）. 现在考察所有在此圆排列上与 A_1 相交的所有连续 k 个元素构成的集合, 它们分别是 $\{n-k+2, n-k+3, \ldots, n, 1\}$，$\{n-k+3, n-k+2, \ldots, n, 1, 2\}$，...，$\{n, 1, 2, \ldots, k-1\}$ 以及 $\{2, 3, \ldots, k+1\}$，$\{3, 4, \ldots, k+2\}$，...，$\{k, k+1, \ldots, 2k-1\}$，总共有 $2(k-1)$ 个集合与 A_1 相交. 进一步注意到 $2 \leq t \leq k$ 时，$\{n-k+t, n-k+t+1, \ldots, n, t-1\}$ 与 $\{t, t+1, \ldots, t+k-1\}$ 不相交，所以上述 $2(k-1)$ 个集合可以两两分组，共分成 $k-1$ 组，每组中的两个集合均不相交，所以这两个集合最多只有 1 个集合在 $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 中，即除了 A_1，$\{A_2, \ldots, A_m\}$ 中最多有 $k-1$ 个集合，所以 $m \leq k$.

$$\deg(\pi) \leq k.$$

由握手定理,

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} \deg(t) = \sum_{\pi \in S} \deg(s).$$

于是

$$|\mathcal{A}| \cdot k!(n-k)! \leq k(n-1)!,$$

即
$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$
另一方面，令 $\mathcal{A} = \{t \in [n] : |t| = k, 1 \in t\}$，则 $\mathcal{A}$ 中任意两个集合至少拥有公共元素 1，符合条件，此时 $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k-1}$. □

3 递推数列

例 1 对一个二维平面，用 n 条直线进行分割，问最多能将其分割成几个部分?

解 设 n 条直线最多能将平面分割成 $T(n)$ 个部分. 显然，当 $n = 1$ 时，$T(1) = 2$. 若已有 $n-1$ 条直线，再添加一条直线，则最多与已有直线产生 $n-1$ 个交点，因此有
$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + n, n \geq 2; \\ T(1) = 2. \end{cases}$$
进而将下列式子累加
$$\begin{aligned} T(n) - T(n-1) &= n; \\ T(n-1) - T(n-2) &= n-1; \\ &\vdots \\ T(2) - T(1) &= 2; \\ T(1) &= 2. \end{aligned}$$
得到 $T(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

例 2 对一个二维平面，用 n 个圆进行分割，问最多能将其分割成几个部分?

解 设 n 个圆最多能将平面分割成 $T(n)$ 个部分. 显然，当 $n = 1$ 时，$T(1) = 2$. 若已有 $n-1$ 个圆，再添加一个圆，则最多与已有圆产生 $2n-2$ 个交点，因此有
$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + 2n - 2, n \geq 2; \\ T(1) = 2. \end{cases}$$
进而将下列式子累加
$$\begin{aligned} T(n) - T(n-1) &= 2n-2; \\ T(n-1) - T(n-2) &= 2n-4; \\ &\vdots \\ T(2) - T(1) &= 2; \\ T(1) &= 2. \end{aligned}$$
得到 $T(n) = n(n-1) + 2$.

我们可以将上述平面分割问题扩展到高维.

例 3 对一个三维空间，用 n 个球面进行分割，最多能将三维空间分割成几个部分?

解 此例留作作业.

例 4 有一块矩形区域长为 n，宽为 2，现用长为 2，宽为 1，和长为 1，宽为 2 的两种矩形板将其填满，问有多少种不同的填充方式.

解 设将长为 n 的区域填满有 $T(n)$ 种填法，有两种可行的填充路径，一是填满长为 $n-1$ 的区域后再加入长为 1 的板子，二是填满长为 $n-2$ 的区域后再加入两块长为 2 的板子，可知

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + T(n-2), n \geq 3; \\ T(2) = 2; \\ T(1) = 1. \end{cases}$$

$T(n)$ 恰为 Fibonacci 数列.

3.1 生成函数

在求解一个数列的通项公式时，我们可以将该数列看作一个多项式函数各项的系数

$$\begin{aligned} a_0, a_1, a_2, \ldots \longrightarrow A(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k. \end{aligned}$$

我们可以通过求解 $A(x)$ 来得到 $\{a_n\}$ 的通项公式。

例 5 利用生成函数求解 Fibonacci 数列 $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ 的通项公式，其中 $f_0 = f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$.

解 令 $F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 \ldots$，因此可以得到

$$\begin{aligned} F(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots; \\ xF(x) &= f_0 x + f_1 x^2 + f_2 x^3 + \cdots; \\ x^2 F(x) &= f_0 x^2 + f_1 x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

由斐波那契数列的性质，$f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$，用 $F(x)$ 减去 $xF(x)$ 和 $x^2F(x)$ 得

$$\begin{aligned} F(x) - xF(x) - x^2 F(x) &= f_0 + (f_1 - f_0)x; \\ (1 - x - x^2)F(x) &= 1; \\ F(x) &= \frac{1}{1 - x - x^2}. \end{aligned}$$

利用待定系数法，可将 $F(x)$ 分解为 $\dfrac{A}{1-\lambda_1 x} + \dfrac{B}{1-\lambda_2 x}$. 其中 λ_1, λ_2 满足

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1; \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

由 Vieta 定理，λ_1, λ_2 为一元二次方程 $y^2 - y - 1 = 0$ 的两个根. 得

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \\ \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

将其代入到 $F(x)$ 的分解形式中，解得

$$\begin{cases} A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}; \\ B = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}. \end{cases}$$

因此

$$F(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^k x^k + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^k x^k.$$

斐波那契数列的通项公式为

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \right]. \end{aligned}$$

上述过程中出现的一元二次方程 $y^2 - y - 1 = 0$ 称作该递推问题的特征方程.

4 选做题

有 n 块木块，每块长度为 1，不考虑宽度和厚度，每块质量相同。把它们垒在一张桌子上，每层可以放任意数量的木块，如下图所示就是一种可能的垒法。问在所有木块保持稳定的前提下，所有木块的右端，离桌子边缘最远的距离是多少？