组合数学第 3 讲

授课时间: 2024 年 9 月 9 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 潘宇轩、林俊杰

1 斯特林公式

定理 1 (Stirling 公式)**.** $n \to +\infty$ 时,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

或更精确地,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1.$$

证明　两边同时取对数，即要证

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}.$$

在这里我们只证明

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + O(1).$$

因为 $\ln x$ 在正数上为单调增函数，所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln k &< \int_1^{n+1}\ln x dx\\ &= (x\ln x - x)|_1^{n+1}\\ &= (n+1)\ln(n+1)-(n+1)+1\\ &= (n+1)\ln(n+1)-n.\end{aligned}$$

可以看出，近似结果很接近答案，更进一步

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}\ln x dx - \ln k &= (x\ln x - x)|_k^{k+1} - \ln x\\ &= (k+1)\ln(k+1)-(k+1)-k\ln k + k - \ln k\\ &= (k+1)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1.\end{aligned}$$

对 $\ln(1+\frac{1}{k})$ 做泰勒展开，得到

$$\begin{aligned}(k+1)\ln(1+\frac{1}{k})-1 &= (k+1)\left(\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i\cdot k^i}\right)-1\\ &= 1+\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i\cdot(i+1)\cdot k^i}-1\\ &= \frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right).\end{aligned}$$

由 Euler-Mascheroni 常数的定义式，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+O(1).$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln k&=(n+1)\ln(n+1)-n-\frac{1}{2}\ln n+O(1)\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1)-n+O(1)\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-n+O(1).\end{aligned}$$

又由泰勒展开可得

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=O(1),$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+O(1).$$

□

例 1 估计 100 次抛硬币 50 次正面的概率.
根据斯特林公式

$$\binom{100}{50}=\frac{100!}{(50!)^2}\approx\frac{\sqrt{2\pi\cdot 100}\left(\frac{100}{e}\right)^{100}}{\left(\sqrt{2\pi\cdot 50}\left(\frac{50}{e}\right)^{50}\right)^2}=\frac{2^{100}}{5\cdot\sqrt{2\pi}}.$$

$$P=\frac{\binom{100}{50}}{2^{100}}\approx\frac{1}{5\cdot\sqrt{2\pi}}\approx 0.08.$$

2 球放盒子的组合模型

依据球是否全同，盒子是否有区别，可以分为四种情况:

- 球不同，盒子不同;
- 球不同，盒子相同;
- 球相同，盒子不同;
- 球相同，盒子相同.

2.1 球不同，盒子不同

例 2 将 n 个不同的球放入 m 个不同的盒子中，有多少种方法?
解 对于每一个球，有 m 种安放方式, 由乘法原理，总共有 m^n 种方法.

2.2 球相同，盒子不同

例 3 将 n 个相同的球放入 m 个不同的盒子中，每个盒子至少有一个球，有多少种方法?

解 只需要关心每个盒子里球的个数. 这可以看成是在排成一列的 n 个小球间的 $n-1$ 个空隙中选择 $m-1$ 个空隙插隔板的方法数，即 $\binom{n-1}{m-1}$.

推论 2. 不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的正整数解的个数为 $\binom{n-1}{m-1}$.

推论 3. 若每个盒子可以没有球，其方法数与不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的非负整数解的个数相同，同时，$x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 等价于 $(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_m+1)=n+m$. 令 $y_i=x_i+1, 1\le i\le m$ 则方程化为 $y_1+y_2+\cdots+y_m=n+m$，其正整数解的个数为 $\binom{n+m-1}{m-1}$.

2.3 球不同，盒子相同

例 4 将 n 个不同的球放入 m 个相同的盒子中, 有多少种方法?

此问题与第二类 Stirling 数关系密切.

定义 4 (第二类 Stirling 数)**.** 将 n 个不同的元素划分成 m 个不计较顺序的非空集合的方法数称为第二类斯特林数，记作 $S_2(n,m)$.

解（例 4） 注意到对第二类 Stirling 数的定义中，我们要求所有集合非空，而在此例中我们允许盒子空着. 我们需要按照非空盒子的数量分类讨论，由加法原理，将 n 个不同的球放进 m 个相同的盒子里的放法数为 $S_2(n,m)+S_2(n,m-1)+\cdots+S_2(n,1)$.

2.4 球相同，盒子相同

例 5 将 n 个相同的球放入 m 个相同的盒子中, 有多少种方法?

此问题与分拆数关系密切.

定义 5 (分拆数)**.** 把自然数 n 拆分成 m 个正整数之和（不计顺序）的方法数称作 n 的 m-分拆数，记为 $P(n,m)$.

解（例 5） 注意到对分拆数的定义中，我们要求把 n 拆分成 m 个**正**整数之和，而在此例中我们允许盒子空着. 我们需要按照非空盒子的数量分类讨论，同样由加法原理，将 n 个相同的球放进 m 个相同的盒子里的放法数为 $P(n,m)+P(n,m-1)+\cdots+P(n,1)$.

3 集合系统

集族是具有某种性质的一些集合所构成的集合，即“集合的集合”，常用花体字母 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{F}$ 等表示. 之后我们简记 $[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$. 一个最简单的例子就是 $[n]$ 的幂集 $2^{[n]}$，即 $[n]$ 的全体子集构成的集族，它共有 2^n 个元素.

极值组合学中最重要的一类问题是研究满足特定条件的子集族大小的极值.

3.1 相交集族

定义 6 (相交集族)**.** 给定集族 $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$，若 $\forall A \neq B \in \mathcal{F}$，有 $A \cap B \neq \varnothing$，则称 $\mathcal{F}$ 是一个相交集族.

例 6 给定相交集族 $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$，求 $\max|\mathcal{F}|$.

解 若取所有包含数字 1 的集合构成 $\mathcal{F}$，则此时 $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$，因此 $\max|\mathcal{F}| \geq 2^{n-1}$.

下面求上界. $2^{[n]}$ 中的所有元素可划分为 2^{n-1} 组，每组由某个集合和它的补集组成. 由于 $A \neq B$ 且 $A \cap B \neq \varnothing$，因此在 $\mathcal{F}$ 中只能包含一组中的一个集合，所以 $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

因此 $\max|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.

3.2 反链与 Sperner 定理

定义 7 (反链)**.** 对于集族 $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$，若 $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $A \neq B \Rightarrow A \not\subseteq B$，则称 $\mathcal{F}$ 是一个反链.

反链有一个重要的性质，即著名的 Sperner 定理：

定理 8 (Sperner, 1928)**.** 对任意的 n，

$$\max_{\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}\text{是反链}} |\mathcal{F}| = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

证明 首先，考虑对任意 $S \in \mathcal{F}$, $|S| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 时的情况即

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ S \subseteq [n] \mid |S| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\}.$$

注意到大小相等且互不相同的集合一定不被对方包含，于是 $\widetilde{\mathcal{F}}$ 为反链，且此时

$$|\widetilde{\mathcal{F}}| = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

因此

$$\max|\mathcal{F}| \geq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

接下来我们证明

$$\max|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

记 $[n]$ 排列的集合为 S_n, 对一个确定的 $S \in 2^{[n]}$，不难发现满足前 $|S|$ 个元素恰好为 S 的 $\pi \in S_n$ 有 $|S|!\,(n - |S|)!$ 个。

考虑将所有的 $S \in \mathcal{F}$ 对应的排列数相加，得到 $\sum\limits_{S \in \mathcal{F}} |S|!\,(n - |S|)!$，若其中存在对同一个排列进行重复计数的情况，则可以找到 $S, T \in \mathcal{F}$，$|S| = k_S$, $|T| = k_T$，且 $k_S \geq k_T$，使得 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_S}\} \supseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_{k_T}\}$，这与 $\mathcal{F}$ 为反链矛盾，因此不存在对同一个排列进行重复计数的可能，所以

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} |S|!\,(n - |S|)! \leq n!.$$

将 $n!$ 提到左式，得

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|S|}} \leq 1. \tag{1}$$

由于
$$\binom{n}{|S|} \le \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$
可得
$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}} = \sum_{S\in\mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}} \le 1.$$
于是
$$|\mathcal{F}| \le \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

该引理得证。由于证明方法由 Lubell, Yamamoto, Meshalkin 三人提出，证明中的 (1) 式又被称作 Lubell-Yamamoto-Meshalkin 不等式。

$\square$

4 选做题

记集合 $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, 考察 $[n]$ 的子集构成的集族 $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$.

1. 若要求 $\forall S, T \in \mathcal{F}, S \neq T$, 有如下条件成立:
   - $S \cap T \neq \varnothing$,
   - $S \nsubseteq T, T \nsubseteq S$.

   试求 $\max |\mathcal{F}|$, 即问集族 $\mathcal{F}$ 至多有多少个元素?

2. 若给定 $k > 1$, 要求 $\forall S, T \in \mathcal{F}, S \neq T$, 有如下条件成立:
   - $|S \cap T| \ge k$.

   试求 $\max |\mathcal{F}|$, 即问集族 $\mathcal{F}$ 至多有多少个元素?

3. 若给定 $k > 1$, 要求 $\forall S, T \in \mathcal{F}, S \neq T$, 有如下条件成立:
   - $|S \cap T| \ge k$,
   - $S \nsubseteq T, T \nsubseteq S$.

   试求 $\max |\mathcal{F}|$, 即问集族 $\mathcal{F}$ 至多有多少个元素?