组合数学作业 2

1. 证明

$$\sum_{0\le k\le n}\binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n}=\binom{r}{m}\binom{s}{n}, 其中, m,n\in\mathbb{N}$$

证明　首先, 我们有:

$$\begin{aligned}\binom{r}{k}\binom{k}{j}&=\frac{r!}{k!(r-k)!}\times\frac{k!}{j!(k-j)!}=\frac{r!}{(r-k)!(k-j)!j!}\\&=\frac{r!}{j!(r-j)!}\times\frac{(r-j)!}{(k-j)!(r-k)!}\\&=\binom{r}{j}\binom{r-j}{k-j}\end{aligned}$$

由 Vandermond 恒等式, 有

$$\binom{r+k}{m+n}=\sum_{j=0}^{m+n}\binom{r}{j}\binom{k}{m+n-j}=\sum_{j=-n}^{m}\binom{r}{n+j}\binom{k}{m-j}$$

$$\begin{aligned}LHS&=\sum_{0\le k\le n}\binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\sum_{j=-n}^{m}\binom{r}{n+j}\binom{k}{m-j}\\&=\sum_{0\le k\le n}\sum_{j=-n}^{m}\binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r}{n+j}\binom{k}{m-j}\\&=\sum_{j=m-n}^{m}\sum_{k=m-j}^{n}\binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r}{n+j}\binom{k}{m-j}\\&=\sum_{j=m-n}^{m}\sum_{k=m-j}^{n}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r}{n+j}\binom{m-r+s}{m-j}\binom{j-r+s}{k-m+j}\\&=\sum_{j=m-n}^{m}\binom{r}{n+j}\binom{m-r+s}{m-j}\sum_{k=m-j}^{n}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{j-r+s}{k-m+j}\\&=\sum_{j=m-n}^{m}\binom{r}{n+j}\binom{m-r+s}{m-j}\sum_{k=m0}^{m+n-j}\binom{n+r-s}{n-m+j-k}\binom{j-r+s}{k}\\&=\sum_{j=m-n}^{m}\binom{r}{n+j}\binom{m-r+s}{m-j}\binom{n+j}{n-m+j}\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{r}{m+j}\binom{m-r+s}{n-j}\binom{m+j}{j}\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{r}{j}\binom{r-j}{m}\binom{m-r+s}{n-j}\end{aligned}$$

(续上页)

$$
\begin{aligned}
LHS &= \sum_{j=0}^{n} \frac{r!(r-j)!}{j!m!(r-j)!(r-m-j)!}\binom{m-r+s}{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{r!}{m!(r-m!)} \times \frac{(r-m)!}{j!(r-m-j)!}\binom{m-r+s}{n-j} \\
&= \binom{r}{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{r-m}{j}\binom{m-r+s}{n-j} \\
&= \binom{r}{m}\binom{s}{n}
\end{aligned}
$$

□

2. 独立重复地抛 n 次质地均匀的硬币, 将正面朝上的次数记为 ξ, 试估计 $Pr[\xi = \lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor]$

解 每次抛硬币, 正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$, 则有

$$
\begin{aligned}
Pr[\xi = \lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor] &= \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor} \times (\frac{1}{2})^n \\
&= \frac{n!}{\lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor ! \lfloor \frac{n}{2} - 3\sqrt{n} \rfloor !} \times (\frac{1}{2})^n
\end{aligned}
$$

根据 Stirling 公式, 有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{\sqrt{2\pi \lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor}(\frac{\lfloor \frac{n}{2}+3\sqrt{n} \rfloor}{e})^{\lfloor \frac{n}{2}+3\sqrt{n} \rfloor}\sqrt{2\pi \lfloor \frac{n}{2} - 3\sqrt{n} \rfloor}(\frac{\lfloor \frac{n}{2}-3\sqrt{n} \rfloor}{e})^{\lfloor \frac{n}{2}-3\sqrt{n} \rfloor}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi n} \times n^n}{\sqrt{2\pi \lfloor \frac{n}{2} - 3\sqrt{n} \rfloor}\lfloor \frac{n}{2} - 3\sqrt{n} \rfloor^{\lfloor \frac{n}{2}-3\sqrt{n} \rfloor}\sqrt{2\pi \lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor}\lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor^{\lfloor \frac{n}{2}+3\sqrt{n} \rfloor}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \times \frac{\sqrt{2\pi n} \times n^n}{\sqrt{2\pi \lfloor \frac{n}{2} - 3\sqrt{n} \rfloor}\lfloor \frac{n}{2} - 3\sqrt{n} \rfloor^{\lfloor \frac{n}{2}-3\sqrt{n} \rfloor}\sqrt{2\pi \lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor}\lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor^{\lfloor \frac{n}{2}+3\sqrt{n} \rfloor}}
\end{aligned}
$$

当 n 很大时, 做近似运算, 有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \times \frac{n^n}{(\frac{n}{2} - 3\sqrt{n})^{(\frac{n}{2}-3\sqrt{n})}(\frac{n}{2} + 3\sqrt{n})^{(\frac{n}{2}+3\sqrt{n})}} \times \sqrt{\frac{n}{\frac{n^2}{4} - 9n}} \\
&\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \times \frac{n^n \times (\frac{n}{2} - 3\sqrt{n})^{6\sqrt{n}}}{(\frac{n^2}{4} - 9n)^{\frac{n}{2}+3\sqrt{n}}} \times \sqrt{\frac{4}{n}} \\
&\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \times \frac{n^n \times (\frac{n}{2} - 3\sqrt{n})^{6\sqrt{n}}}{(\frac{n}{2})^{n+6\sqrt{n}}} \times \sqrt{\frac{4}{n}} \\
&\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \times \frac{n^n \times (\frac{n}{2})^{6\sqrt{n}}}{(\frac{n}{2})^{n+6\sqrt{n}}} \times \sqrt{\frac{4}{n}}
\end{aligned}
$$

(续上页)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \times \frac{n^n}{(\frac{n}{2})^n} \times \sqrt{\frac{4}{n}} \\
&\sim \sqrt{\frac{1}{\pi}} \times 2^n \times \sqrt{\frac{2}{n}}
\end{aligned}
$$

综合上述估计, 有

$$
Pr[\xi = \lfloor \frac{n}{2} + 3\sqrt{n} \rfloor] \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi}}
$$

3. *Lucas* 数 $l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$ 的定义如下*:*

$$
l_n = \begin{cases} l_{n-1} + l_{n-2}, & n \geq 2 \\ 2, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \end{cases}
$$

证明*:*

*a.*对任意 $n \geq 2, \quad l_n = f_n + f_{n-2};$

*b.*对任意 $n \geq 0, \quad l_0^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$

证明 对于 a

根据 Lucas 数的定义, 有 $l_0 = f_0 + 1, l_1 = f_1$, 于是有

$$
\begin{aligned}
l_2 = l_0 + l_1 = f_0 + f_1 + 1 = f_2 + f_0 \\
l_3 = l_1 + l_2 = f_1 + f_2 + 1 = f_3 + f_1
\end{aligned}
$$

假设 $l_n = f_n + f_{n-2}$ 对 $n = k, k-1$ 成立 $(k \geq 2)$

$$
\begin{aligned}
l_{k+1} &= l_k + l_{k-1} \\
&= f_k + f_{k-2} + f_{k-1} + f_{k-3} \\
&= (f_k + f_{k-1}) + (f_{k-2} + f_{k-3}) \\
&= f_{k+1} + f_{k-1}
\end{aligned}
$$

对于 b, 采用数学归纳法进行证明

n=0 时

$$
l_0^2 = 4 = l_0 l_1 + 2
$$

n=1 时

$$l_0^2+l_1^2=5=l_1l_2+2$$

假设结论对 $n\geq 1$ 成立, 研究该式对 n+1 是否成立

$$l_0^2+l_2^2+\cdots+l_n^2+l_{n-1}^2$$

由归纳假设

$$\begin{aligned}\text{原式}&=l_nl_{n+1}+l_{n+1}^2+2\\&=l_{n+1}(l_n+l_{n+1})+2\\&=l_{n+1}l_{n+2}+2\end{aligned}$$

综上所述, 对任意 $\quad n\geq 0,\quad l_0^2+l_2^2+\cdots+l_n^2=l_nl_{n+1}+2$总是成立 □

4. *求解递推关系:*

a.

$$\begin{cases}h_n=h_{n-1}+9h_{n-2}-9h_{n-3} & n\geq 3\\ h_0=0,h_1=1,h_2=2\end{cases}$$

b.

$$\begin{cases}h_n=5h_{n-1}-6h_{n-2}-4h_{n-3}+8h_{n-4} & n\geq 4\\ h_0=0,h_1=1,h_2=1,h_3=2\end{cases}$$

解 对于 a, 利用生成函数来解决

设生成函数 $h(x)=\sum_{n\geq 0}h_nx^n$, 则对于递推式, 有

$$h(x)-xh(x)-9x^2h(x)+9x^3h(x)=x+x^2$$

$$h(x)(1-x-9x^2+9x^3)=x+x^2$$

$$h(x)=\frac{x+x^2}{1-x-9x^2+9x^3}=\frac{x+x^2}{(x-1)(3x-1)(3x+1)}$$

进而, 我们得到

$$\begin{aligned}h(x)&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{12}\times\frac{1}{3x+1}\\&=-\frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}x^n+\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(3x)^n-\frac{1}{12}\sum_{n\geq 0}(1)^n(3x)^n\\&=\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{3}\times 3^n-\frac{1}{12}\times(-3)^n-\frac{1}{4})x^n\end{aligned}$$

也即

$$h_n = \frac{1}{3} \times 3^n - \frac{1}{12} \times (-3)^n - \frac{1}{4}$$

对于 b, 利用特征方程来解决
根据递推式, 有特征方程

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$$
$$(x-2)^3(x+1) = 0$$

该递推关系的特征根分别是 $x = 2, x = -1$ 重数分别为 2 和 1, 于是我们有

$$h_n = a \times 2^n + b \times n2^n + c \times n^2 2^n + d \times (-1)^n$$

再将四条初始条件, $h_0 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 2$ 带入, 解得

$$\begin{cases} a = \frac{8}{27} \\ b = \frac{7}{72} \\ c = -\frac{1}{24} \\ d = -\frac{8}{27} \end{cases}$$

进而, 我们得到

$$h_n = \frac{8}{27} \times 2^n + \frac{7}{72} \times n2^n - \frac{1}{24} \times n^2 2^n - \frac{8}{27} \times (-1)^n$$

5. *求解递推关系:*

a.

$$\begin{cases} h_n = 4h_{n-1} + 3 \times 2^n \\ h_0 = 1 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} h_n = 2h_{n-1} + n \\ h_0 = 1 \end{cases}$$

解 对于 a, 利用生成函数来求解

设生成函数 $h(x)=\sum_{n\geq 0}h_n x^n$, $g(x)=\sum_{n\geq 0}2^n x^n$ 则对于递推式, 有

$$h(x)-4xh(x)-3g(x)=-2$$
$$h(x)(1-4x)=3g(x)-2=\frac{4x+1}{1-3x}$$
$$h(x)=\frac{4x+1}{(1-3x)(1-4x)}$$
$$h(x)=(-3)\times\sum_{n\geq 0}(2x)^n+4\times\sum_{n\geq 0}(4x)^n$$

于是我们得到

$$h_n=-3\times 2^n+4\times 4^n$$

对于 b, 通过分配构造新数列来求解

整理递推关系得

$$h_n+(n+2)=2(h_{n-1}+(n+1))$$

于是数列 $\{h_n+n+2\}$ 构成等比函数, 进而我们可以得到

$$h_n+n+2=2^n(h_0+0+2)=3\times 2^n$$
$$h_n=3\times 2^n-n-2$$

6. *计算满足以下条件的 n 位数的个数; 每个数的各位数字都是 1,2,3 之一, 允许有些数字不出现, 并且要求其中出现的数字 1 两两不相邻*

解 本题利用递推关系求解, 分类讨论结尾数, 设这样满足条件的 n 位数, 以 1,2,3 结尾的个数为 $h_1(n),h_2(n),h_3(n)$

$$\begin{cases}h_1(n+1)=h_2(n)+h_3(n)\\ h_2(n+1)=h_1(n)+h_2(n)+h_3(n)\\ h_3(n+1)=h_1(n)+h_2(n)+h_3(n)\end{cases}$$

观察到, $h_2(n)=h_3(n)$, 设 $h_2(n)+h_3(n)=h_1'(n)$, 于是我们有

$$\begin{cases}h_1(n+1)=h_1'(n)\\ h_1'(n+1)=2h_1'(n)+2h_1(n)\end{cases}$$

将 2 式带入 1 式, 得到

$$h_1'(n)-2h_1'(n-1)-2h_1'(n-2)=0(n\geq 2)$$

根据题目条件, 我们定义 $h_1'(1)=2, h_1'(0)=1$ 则根据该递推式对应的特征方程

$$x^2-2x-2=0$$
$$(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))=0$$

该递推关系的特征根分别是 $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$, 所以

$$h_1'(n)=a(1+\sqrt{3})^n+b(1-\sqrt{3})^n$$

带入初始条件, 解得

$$\begin{cases} a=\frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ b=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

于是

$$h_1'(n)=\frac{\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^{n+1}-\frac{\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^{n+1}$$
$$h_1(n)=\frac{\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^{n}-\frac{\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^{n}$$
$$h(n)=h_1'(n)+h_1(n)=\frac{2\sqrt{3}+3}{6}(1+\sqrt{3})^{n}-\frac{2\sqrt{3}-3}{6}(1-\sqrt{3})^{n}$$

7. *请计数:*

a.n 个平面最多能将三维空间划分成多少个区域?

b.n 个圆最多能将平面划分成多少个区域?

c.n 个球面最多能将三维空间划分成多少个区域?

解 对于 a, 我们首先考虑 n 条直线能够将平面分为几部分

设 n 条直线最多能将平面分为 $f(n)$ 部分, 再多一条直线, 和前 n 条直线都相交, 也就是说前 n 条直线将这条直线分为 n+1 段, 这每段都对应一个平面的部分, 于是我们有

$$f(n+1)=f(n)+n+1$$

又因为 $f(1)=2$, 我们定义 $f(0)=1$, 于是我们得到

$$f(n)=f(0)+1+2+\cdots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

我们可以利用该结论对平面分空间问题进行讨论, 同样假设 n 个平面能够将平面分为 $g(n)$ 部分, 再多一个平面, 和前 n 个平面都相交, 由于是最多的, 所以任意两个平面不平行,
因此产生的 n 个交线两两相交, 这 n 个交线将平面分为 $f(n)$ 个部分, 每个部分都对应一个空间的部分, 于是我们得到

$$g(n+1)=g(n)+f(n)$$

$g(1)=2$, 进而我们有

$$
\begin{aligned}
g(n)=g(n-1)+f(n-1)=g(1)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)&=2+n+\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k)\\
&=1+n+\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}+\frac{n(n-1)}{4}\\
&=1+n+\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\\
&=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1
\end{aligned}
$$

(实际上, 可以反复利用此方法来计算 n-1 维超平面分割 n 维空间的问题)

对于 b, 设 n 个圆最多将平面分为 $c(n)$ 个部分, 我们考虑一个圆最多能被分割为几段圆弧, 每个圆弧都对应平面的一个部分, 而两个圆最多有两个交点, 一个圆上 n 个点对应 n 个弧, 于是我们有

$$c(n+1)=c(n)+2n=c(1)+2+4+\cdots+2n=c(1)+n(n+1)=n^2+n+2$$
$$c(n)=n^2-n+2$$

对于 c, 这个问题与平面分割空间类似, 我们考虑在 n 个球的基础上多加一个球, 这个球产生的圆被原来 n 个圆分割, 我们得到

$$
\begin{aligned}
r(n+1)&=r(n)+c(n)\\
r(n)&=r(1)+c(1)+c(2)+\cdots+c(n-1)\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k+2n=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}-\frac{n(n-1)}{2}+2n\\
&=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}+2n\\
&=\frac{1}{3}n^3-n^2+\frac{8}{3}n
\end{aligned}
$$

8. 设 h_n 表示有 *n+2* 条边的凸多边形被它的对角线分成的区域数, 其中假设没有三条对角线有公共点, 定义 $h_0=0$, 求 h_n 的通项公式

解 一个 n+2 边型, 一共有 $\binom{n+2}{2}-n=\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ 条对角线, 而 $n\to n+1$, 相当于在原有基础上多了一个一个顶点, 构成新的一个区域, 并从这个顶点出发连接其他非相邻顶点, 所产生的交点个数 + 新对角线条数 +1 就是 h_{n+1} 下面只需要研究交点数即可, 列出前面几项

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & (n=2)\\
 & & & 2 & 2 & (n=3)\\
 & & 3 & 4 & 3 & (n=4)\\
 & 4 & 6 & 6 & 4 & (n=5)\\
5 & 8 & 9 & 8 & 5 & (n=6)
\end{array}$$

观察到, 斜线上成等差数列, 于是我们可以列出递推式

$$h(n)=h(n-1)+1+(n-1)+(n-1)\times 1+(n-2)\times 2+(n-3)\times 3+\cdots+(1)\times(n-1)$$

当 n 为奇数时, 设 $n=2k+1$

$$\begin{aligned}
h(2k+1)&=h(2k)+2k+1+2\times(1\times(2k)+2\times(2k-1)+\cdots+k\times(2k-(k-1)))\\
&=h(2k)+2k+1+2\times(k^2(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6})\\
&=h(2k)+\frac{4}{3}k^3+2k^2+\frac{8}{3}k+1
\end{aligned}$$

也即

$$h(n)=h(h-1)+\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n$$

当 n 为偶数时, 设 $n=2k$

$$\begin{aligned}
h(2k)&=h(2k-1)+2k+2\times(1\times(2k-1)+2\times(2k-2)+\cdots+(k-1)\times(2k-(k-1)))+k^2\\
&=h(2k-1)+2k+2\times(k^2(k-1)-\frac{k(k-1)(2k-1)}{6})+\frac{k^2}{4}\\
&=h(2k-1)+\frac{2}{3}k^3+\frac{5}{3}k
\end{aligned}$$

也即

$$h(n)=h(h-1)+\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n$$

所以, n 的奇偶性并不影响递推式, 进而我们可以得到

$$h(n)=\frac{n^4+2n^3+11n^2+10n}{24}$$

9. 给定向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n),|a_i|\geq 1,i\in[n]$, 记$S=\{\vec{\epsilon}=\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_n:\epsilon_i\in\{-1,1\},i\in[n],\vec{\epsilon}\cdot\vec{a}\in(-1,1)\}$, 证明 $|S|\leq\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$

证明 任取 $\vec{\epsilon}\in S$, 考虑 $|A_{\vec{\epsilon}}|$ 所构成的集族, 证明这个集族里的任意两个集合不能相互包含, 假设 $A_{\vec{\epsilon}}\subset A_{\vec{\epsilon'}}$ 则至少存在一对 $\epsilon'_j a_j>0$ 且 $\epsilon_j a_j<0$, 则有

$$\vec{\epsilon'}\cdot\vec{a}-\vec{\epsilon}\cdot\vec{a}\geq 2a\geq 2$$

则 ϵ' 和 ϵ 二者至多只有一个符合条件, 矛盾, 再根据课上所讲的引理

$$|S|\leq\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$$

□