组合数学第 16 讲

授课时间: 2024 年 12 月 16 日 授课教师: 孙晓明 记录人: 李驭（助教） 陈子珩（助教）

1 广义 Ramsey 数

我们将完全图的边 2 染色扩展到边 k 染色，得到广义 Ramsey 数的定义.

定义 1 (广义 Ramsey 数)**.** 令 $s_1, s_2, \ldots s_k \geq 2$ 为正整数，$c_1, c_2, \ldots, c_k$ 为 k 种颜色，广义 *Ramsey* 数 $R(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ 为满足以下条件的最小的正整数 n：对 K_n 的所有边进行任意 k 染色，都存在一个 i，使得这种边染色方式包含一个边的颜色均为 c_i 的 K_i.

对于边 3 仍然色的广义 Ramsey 数，使用和之前相同的估计方式，我们可以得到如下结论.

定理 2. 对于正整数 $m, n, p \geq 3$，如果 $R(n-1, m, p), R(n, m-1, p)$ 和 $R(n, m, p-1)$ 都存在，则 $R(n, m\ p)$ 存在且满足 $R(n, m, p) \leq R(n-1, m, p) + R(n, m-1, p) + R(n, m, p-1)$.

2 舒尔 (Schur) 定理

定理 3 (舒尔 (Schur) 定理)**.** d 为正整数，对全体正整数进行任意 d 染色，则一定存在 *3* 个正整数 x, y, z 同色，且 $x + y = z$.

我们首先对 $d = 2$ 给出一个证明.

证明 用反证法。假设结论不成立，考虑式子 $1 + 2 = 3$，则 $1, 2, 3$ 的染色必然为一种颜色两个数字，另一种颜色一个数字，且同一种颜色的两个数字和与差为另一种颜色。不妨设其中两个数字的颜色是红色，下面分情况证明.

(1) $1, 3$ 为红色，2 为蓝色。于是 $1 + 3 = 4$ 为蓝色，$2 + 4 = 6$ 为红色，$1 + 6 = 7$ 为蓝色，$3 + 6 = 9$ 为蓝色. 得到红色数集合 $\{1, 3, 6\}$，蓝色数集合 $\{2, 4, 7, 9\}$，此时存在红色的三个数 $2, 7, 9$ 满足 $2 + 7 = 9$，矛盾.

(2) $2, 3$ 为红色，1 为蓝色. 于是 $2 + 3 = 5$ 为蓝色，$5 - 1 = 4$ 为红色，$2 + 4 = 6$ 为蓝色。得到红色数集合 $\{2, 3, 4\}$, 蓝色数集合 $\{1, 5, 6\}$，此时存在蓝色的三个数 $1, 5, 6$ 满足 $1 + 5 = 6$，矛盾。

(3) 当 $1, 2$ 为红色，3 为蓝色时，我们分别考虑 4 的颜色为红色和蓝色的情形。

(3.1) 4 为蓝色时，$3 + 4 = 7$ 为红色，$7 - 2 = 5$，$7 - 1 = 6$，$1 + 7 = 8$，$2 + 7 = 9$，均为蓝色。得到红色数集合 $\{1, 2, 7\}$, 蓝色数集合 $\{3, 4, 5, 6, 9\}$, 此时存在蓝色的三个数 $3, 6, 9$ 满足 $3 + 6 = 9$，矛盾。

(3.2) 4 为红色时，$1 + 4 = 5$，$2 + 4 = 6$ 为蓝色，$3 + 5 = 8$，$3 + 6 = 9$ 为红色。得到红色数集合 $\{1, 2, 4, 8, 9\}$, 蓝色数集合 $\{3, 5, 6\}$, 此时存在红色的三个数 $1, 8, 9$ 满足 $1 + 8 = 9$，矛盾。

综上所得，对 $\{1,2,\cdots,9\}$ 二染色就能保证一定有同色的三个数 x,y,z 使得 $x+y=z$. 我们可以构造 $\{1,2,3,\cdots,8\}$ 的二染色为红色：$\{1,2,4,8\}$，蓝色：$\{3,5,6,7\}$ 不满足结论。因此 9 是使上述结论成立的最小正整数. □

接下来我们证明该定理本身.

证明 设 $N=R(\overbrace{3,3,\ldots,3}^{d\text{ 个 }3})$. 基于 $\{1,2,\ldots,N\}$ 的任意一种 d 染色方式，将完全图 K_N 的所有边按照如下方式 d 染色：将这 N 个顶点标号为 $v_1,v_2,\ldots,v_N$，边 v_iv_j 染成正整数 $|i-j|$ 的颜色. 根据 N 的定义，K_N 中一定存在同色三角形. 设这三个点为 v_i,v_j,v_k，其中 $i>j>k$. 这意味着在 $\{1,2,\ldots,N\}$ 的染色中，正整数 $i-j$、$j-k$ 和 $i-k$ 被染成了同一颜色。令 $x=i-j,y=j-k,z=i-k$，则 $x+y=z$，从而定理得证. □

事实上，若加入 $x\neq y$ 的限制条件，定理依然成立.

定理 4. *d 为正整数，对全体正整数进行任意 d 染色，则一定存在互不相同的 3 个正整数 x,y,z 同色，且 $x+y=z$.*

证明 设 $N=R(\overbrace{4,4,\ldots,4}^{d\text{ 个 }4})$. 基于 $\{1,2,\ldots,N\}$ 的任意一种 d 染色方式，将完全图 K_N 的所有边按照如下方式 d 染色：将这 N 个顶点标号为 $v_1,v_2,\ldots,v_N$，边 v_iv_j 染成正整数 $|i-j|$ 的颜色. 根据 N 的定义，图染色中一定存在同色 K_4，设这四个点为 v_i,v_j,v_k,v_l，其中 $i>j>k>l$。这意味着在 $\{1,2,\ldots,N\}$ 的染色中，正整数 $i-j$、$j-k$、$k-l$、$i-k$、$j-l$ 和 $i-l$ 都被染成了同一颜色. 若 $i-j\neq j-k$，则令 $x=i-j,y=j-k,z=i-k$ 即得证。否则，$i-j\neq j-l$，令 $x=i-j,y=j-l,z=i-l$ 即得证. □

如果我们将 Schur 定理中的方程 $x+y=z$，变为 $x_1+x_2+\cdots+x_t=x_{t+1}$，结论依然成立.

定理 5. *d,t 为正整数，对全体正整数进行任意 d 染色，则一定存在 $t+1$ 个正整数 $x_1,x_2,\ldots,x_t,x_{t+1}$ 同色，且 $x_1+x_2+\cdots+x_t=x_{t+1}$.*

证明 设 $N=R(\overbrace{t+1,t+1,\ldots,t+1}^{d\text{ 个 }(t+1)})$. 对于 $\{1,2,\ldots,N\}$ 的任意一种 d 染色方式，将完全图 K_N 的所有边进行如下 d 染色：将这 N 个顶点标号为 $v_1,v_2,\ldots,v_N$，边 v_iv_j 染成正整数 $|i-j|$ 的颜色. 根据 N 的定义，图染色中一定存在同色 K_{t+1}. 设它的顶点下标从大到小排列依次为 $i_1,i_2,i_3,\ldots,i_{t+1}$. 这意味着正整数 $i_1-i_2,i_2-i_3,\ldots,i_t-i_{t+1}$ 以及 i_1-i_{t+1} 被染成了同一颜色，依次令 $x_1,x_2,\ldots,x_t,x_{t+1}$ 为这 $t+1$ 个正整数，则它们满足 $x_1+x_2+\cdots+x_t=x_{t+1}$. □

如果我们进一步要求 $x_1+x_2+\cdots+x_t=x_{t+1}$ 中的未知数互不相等，我们可以按照定理 2 的证明方法，将 Ramsey 数中的参数变大，通过不断调整完成证明，但是对于这个参数的大小设定可能难以精确把握. 为此，我们提供一种更简单的证明方式.

证明 设 $N=R(\overbrace{t+1,t+1,\ldots,t+1}^{d\text{ 个 }(t+1)})$. 对于 $\{1,2,\ldots,2^{N-1}\}$ 的任意一种 d 染色方式，将完全图 K_N 的所有边进行如下 d 染色：将这 N 个顶点标号为 $v_{2^0},v_{2^1},\ldots,v_{2^{N-1}}$，边 $v_{2^i}v_{2^j}$ 染成正整数 $|2^i-2^j|$ 的颜色. 根据 N 的定义，图染色中一定存在同色 K_{t+1}. 设它的顶点下标从大到小排列依次为 $2^{i_1},2^{i_2},2^{i_3},\ldots,2^{i_{t+1}}$. 这意味着正整数 $2^{i_1}-2^{i_2},2^{i_2}-2^{i_3},\ldots,2^{i_t}-2^{i_{t+1}}$ 以及 $2^{i_1}-2^{i_{t+1}}$ 被染成了同一颜色，依次令 $x_1,x_2,\ldots,x_t,x_{t+1}$ 为这 $t+1$ 个正整数，则它们满足 $x_1+x_2+\cdots+x_t=x_{t+1}$. 对于不完全相同的正整数对 $(a,b),(c,d)$，其中 $a>b,c>d$，若 $a=c$，则 $b\neq d$，于是 $2^a-2^b\neq 2^c-2^d$；若

$a \neq c$，不妨设 $a > c$，则 $2^a - 2^b \geq 2^{a-1} \geq 2^c > 2^c - 2^d$. 所以对于不完全相同的正整数对 $(a,b),(c,d)$，其中 $a > b, c > d$，$2^a - 2^b \neq 2^c - 2^d$ 一定成立，于是上述 $x_1, x_2, \ldots, x_t, x_{t+1}$ 互不相同，满足条件. □

3 Van der Waerden 定理

定理 6 (范德瓦尔登定理 (Van der Waerden's theorem)). *对于任意给定的正整数 d 和 k，存在正整数 N，使得对 $\{1,2,\ldots,N\}$ 的任意 d 染色中都存在长度为 k 的同色等差数列. 我们把满足上述条件最小的 N 记作 $W(d,k)$.*

该定理由荷兰数学家范德瓦尔登（B. L. Van der Waerden）在 1927 年证明. 我们先来观察一些 d,k 取值较小时的 $W(d,k)$ 例子，易知 $W(1,k) = k, W(d,1) = 1, W(d,2) = d+1$，如下表格所示：

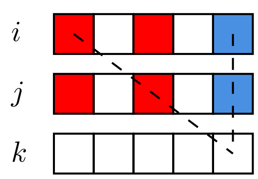
d \ k	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	3			
3	1	4			
4	1	5			
5	1	6			

类比 Ramsey 数上界的证明方法，我们可以通过这些已知的范德瓦尔登数，以递归的方式证明范德瓦尔登定理. 下面给出 $W(2,3)$ 和 $W(3,3)$ 的证明.

定理 7. $W(2,3) \leq (2W(2,2)-1)\left[2W(2^{2W(2,2)-1},2)-1\right] = 325.$

证明 假设我们使用红、蓝这两种颜色. 把 $\{1,2,\ldots 325\}$ 中的数字按顺序分为 65 个长度为 5 的块. 考虑一个块可能出现的染色方法，由于每个块中有 5 个数字，且每个数字有 2 种染色方法，所以每个块可以有 $2^5 = 32$ 种不同的染色方法，由于 $W(32,2) = 33$，因此前 33 个块中必有两个块染色方式相同. 设第 i,j 个块染色方式相同，$0 < i < j \leq 33$.

由于每个块中有五个数字，而 $W(2,2) = 3$，因此每个块前 3 个数必有两个同色. 不妨设第 i 个块中第 1,3 个数染红色 (其它情形类似)，此时如果第 i 块中第 5 个数染红色，则第 1,3,5 个数构成长度为 3 的同色等差数列；否则第 5 个数染蓝色. 由于第 j 块与第 i 块同色，第 j 个块中对应地第 1,3 个数染红色，第 5 个数染蓝色. 考虑第 $k = 2j - i$ 块，则因为 $0 < i < j \leq 33$，所以 $k \leq 65$. 如下图所示：



每条虚线所连接的三个数字可构成等差数列，两条虚线交于第 k 块中的第 5 个数，因此无论这个数染蓝色还是红色，都能找到一个长度为 3 的同色等差数列. □

类似地我们来处理 $W(3,3)$.

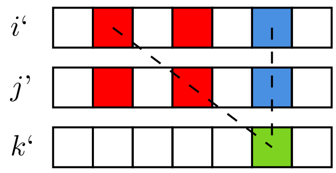
定理 8. $W(3,3) \leq (2W(3,2)-1)\left[2W(3^{2W(3,2)-1},2)-1\right]\left[2W(3^{(2W(3,2)-1)\left[2W(3^{2W(3,2)-1},2)-1\right]},2)-1\right]$

如果我们继续重复上一个证明过程，会发现第 k 块第 5 个数可以染绿色，导致无法得到结论. 为了解决这个问题，我们要把上述整个结构当作一个更大的整体（细节处需要做微小调整），再通过重复这个更大的结构完成证明.

证明 假设我们使用红、蓝、绿这三种颜色. 令 $L = (2W(3,2)-1)\left[2W(3^{2W(3,2)-1},2)-1\right]$. 取 $2W(3^L,2)-1$ 个长度为 L 的“超块”，同样考虑超块的染色方式，共 3^L 种. 因此前 $W(3^L,2)$ 个“超块”中至少有两个染色方式相同, 不妨设为第 i,j 个“超块”.

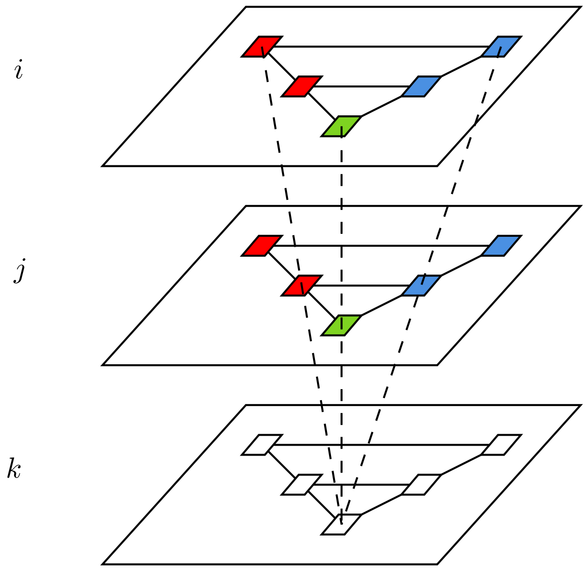
对于第 i 个“超块”,这个“超块”中有 L 个连续的正整数,将这些正整数继续划分为 $2W(3^{2W(3,2)-1},2)-1$ 个长度为 $2W(3,2)-1$ 的块. 每个块的染色方式有 $3^{2W(3,2)-1}$ 种, 因此前 $W(3^{2W(3,2)-1},2)$ 块必有两块染色方式相同. 设第 i',j' 个块染色方式相同，$0 < i' < j' \le W(3^{2W(3,2)-1},2)$.

每个块中有 $2W(3,2)-1$ 个数, 前 $W(3,2)$ 个数中必有两个同色. 不妨设第 i' 块中第 2,4 个数染红色 (其它情形类似), 如果第 6 个数也是红色, 则找到了长度为 3 的同色等差数列; 否则设第 6 个数染蓝色. 对应地, 第 j' 个块中第 2,4 个数染红色, 第 6 个数染蓝色. 考虑第 $k' = 2j' - i'$ 块，如下图所示.



每条虚线所连接的三个数字可构成等差数列, 两条虚线交于第 k’ 块中的第 6 个数. 与 $W(2,3)$ 不同的是, 第 k 块中的第 6 个数可染红色、蓝色或绿色. 如果染红色或蓝色, 则找到了长度为 3 的同色等差数列; 否则设第 6 个数染绿色.

此时，第 j 个“超块”与第 i 个“超块”染色方式相同，我们考虑第 $k = 2j - i$ 个“超块”，同样由之前对 i,j 的上界限制，$k \le 2W(3^L,2)-1$. 如下图所示:



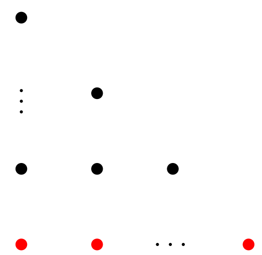
每条虚线所连接的三个数字可构成等差数列, 三条虚线交于第 k 个“超块”中的一个数, 这个数无论染红色、蓝色还是绿色, 都能找到一个长度为 3 的同色等差数列. □

4 Van der Waerden 定理的应用

定理 9. *对平面上的整点进行任意 d-染色, 均存在两直角边平行于坐标轴的同色等腰直角三角形 (指三个顶点同色).*

证明 我们证明, 对一个两直角边平行于坐标轴且底边长 $L(d) < \infty$ 的等腰直角三角形进行 d-染色, 就能找到一个满足要求的同色等腰直角三角形. 注意这里的" 底边长度" 是指底边上点的个数.

采用数学归纳法. $d = 1$ 时 $L(1) = 2$ 成立. 设 $d = k$ 时 $L(k)$ 成立. $d = k + 1$ 时, 令 $L(k + 1) = W(k + 1, L(k) + 1)$. 由范德瓦尔登定理, 底边 $L(k + 1)$ 个整点中存在 $L(k) + 1$ 个点同色且等间隔, 不妨设都是红色. 对于这些点, 找到其上方的点组成一个等腰直角三角形, 如下图所示:



如果上方任意一个点是红色, 则可以找到一个红色等腰直角三角形. 否则上方的点构成了一个底边长为 $L(k)$ 的等腰直角三角形, 且至多染 k 种颜色, 由归纳假设必有同色等腰直角三角形. □