组合数学第 1 讲

授课时间: 2024 年 8 月 26 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 石曜铭、孙易

1 排列数与组合数

定义 1 (下降幂)**.** 对 $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$,

$$x^{\underline{n}} := x(x-1)\cdots(x-n+1),$$

称作 x 的 n 次下降幂.

定义 2 (排列数)**.** 从 n 个物品中取出 m 个进行有序排列，定义方案数为 $P(n,m)$，那么

$$P(n,m) = n(n-1)\cdots(n-m+1) = n^{\underline{m}}.$$

定义 3 (组合数)**.** 从 n 个物品中取出 m 个，不计顺序，定义方案数为 $\binom{n}{m}$，那么

$$\binom{n}{m} = \frac{P(n,m)}{m!} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}.$$

在以上定义中显然要求 $n,m \in \mathbb{N}$ 且有 $0 \le m \le n$，但依据上式的最右一式，可以将组合数推广到任意 $n \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ 的情形.

例 1　当 $n \in \mathbb{N}, m > n$ 时，由下降幂的定义，有 $n^{\underline{m}} = 0$，进而 $\binom{n}{m} = 0$.

当 $n = -1$ 时，有

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)\times(-2)\times\cdots\times(-k)}{k!} = (-1)^k.$$

2 二项式定理

利用推广的组合数定义可以给出二项式定理及其推广的一种简洁表示.

定理 4 (二项式定理)**.** 对 $n \in \mathbb{N}$，有

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

定理 5 (广义二项式定理)**.** 对 $\alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1$，有

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{k\ge 0}\binom{\alpha}{k}x^k.$$

例 2　对 $n \in \mathbb{N}$，试展开 $(1+x)^n$.

解

$$(1+x)^n = \sum_{k\ge 0}\binom{n}{k}x^k.$$

例 3　试展开 $(1+x)^{-1}$.

解

$$(1+x)^{-1}=\sum_{k\geq 0}\binom{-1}{k}x^k=\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k,$$

与泰勒展开结果相同.

例 4 试展开 $\sqrt{1-x}$.

解

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x}&=(1-x)^{\frac{1}{2}}\\&=\sum_{k\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^k\\&=1+\sum_{k\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^k.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^k&=\frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times\cdots\times(\frac{1}{2}-k+1)(-1)^k}{k!}\\&=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2k-3}{2}}{k!}\\&=\frac{(2k-3)!!}{2^k\cdot k!}\\&=\frac{(2k-2)!}{2^k\cdot k!\cdot 2^{k-1}\cdot(k-1)!}\\&=\frac{1}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}.\end{aligned}$$

所以

$$\text{原式}=1+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k\cdot 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}x^k.$$

例 5 试求 $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k},\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1}$.

解 设 $n>0$，在等式 $(1+x)^n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}x^k$ 中，分别令 $x=1,x=-1$，有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0. \tag{2}$$

((1)式 + (2)式)/2 和 ((1)式 − (2)式)/2 分别得到

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=2^{n-1},$$
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{2\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}=2^{n-1},$$

即二项式系数奇数项和偶数项之和相等.

例 6 试求

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k},\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1},\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2},\sum_{k\geq 0}\binom{n}{4k}.$$

与上面的方法类似，相关计算留作作业.

3 二项式定理与 Pascal 矩阵

定义 6 (Pascal 矩阵)**.**

$$A:=\begin{bmatrix}\binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & 0\\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n}\end{bmatrix}$$

称作 *Pascal* 矩阵，它是一个下三角矩阵，其主对角线以下的部分即杨辉三角形.

定理 7.

$$B:=\begin{bmatrix}(-1)^{0+0}\binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0\\ (-1)^{1+0}\binom{1}{0} & (-1)^{1+1}\binom{1}{1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (-1)^{n+0}\binom{n}{0} & (-1)^{n+1}\binom{n}{1} & \cdots & (-1)^{n+n}\binom{n}{n}\end{bmatrix}$$

是 A 的逆矩阵.

证明 根据二项式定理知

$$\begin{bmatrix}(1+x)^0\\ (1+x)^1\\ \vdots\\ (1+x)^{n-1}\\ (1+x)^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\binom{0}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & 0\\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^0\\ x^1\\ \vdots\\ x^{n-1}\\ x^n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x^0\\ x^1\\ \vdots\\ x^{n-1}\\ x^n\end{bmatrix}.$$

令 $y=x+1$，则 $x^k=(y-1)^k=(-1)^k(1-y)^k$，由二项式定理可得 $x^k=(-1)^k\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{k}{j}y^j$，故

$$\begin{bmatrix}x^0\\ x^1\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^{0+0}\binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0\\ (-1)^{1+0}\binom{1}{0} & (-1)^{1+1}\binom{1}{1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (-1)^{n+0}\binom{n}{0} & (-1)^{n+1}\binom{n}{1} & \cdots & (-1)^{n+n}\binom{n}{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y^0\\ y^1\\ \vdots\\ y^n\end{bmatrix}.$$

对于线性空间 $\{P(x):\deg(P(x))\leq n\}$，$\{x^0,x^1,\ldots,x^n\}$ 和 $\{y^0,y^1,\ldots,y^n\}$ 分别构成此空间的一组基，所以这两组基之间的变换矩阵 A 和 B 互为逆矩阵. □

另一方面, 我们也可以通过组合数的性质得出 $AB=BA=I$，证明留作作业.

4 选做题

1. 有一串首尾不相连的项链，上面有红、蓝两种颜色的宝石各偶数颗。现要将这串项链剪断并将宝石平分给两个人，即对于每种颜色，两个人得到的该颜色宝石数量均相同，问最坏情况下至少需要剪几刀?

2. 进一步地，对于给定的正整数 n, m，项链上有 n 种不同颜色的宝石，每种颜色的宝石数量均为 m 的倍数。现要将这串项链剪断并将宝石平分给 m 个人，即仍要求对于每种颜色，每个人得到的该颜色宝石数量均相同，此时最坏情况下又至少需要剪几刀?