组合数学作业 5

1. 设 $Q(n,k)$ 是将正整数 n 分拆成若干个正整数之和且最大的正整数为 k 的方法数, 并设 $Q(n,\leq k)$ 是将正整数 n 分拆成若干个正整数之和且最大的正整数不大于 k 的方法数. 证明对任意两个正整数 $r \leq n$, $Q(n,r) = Q(n-r,\leq r)$

证明 考虑在二者之间建立一一对应关系, 对于 $Q(n,r)$, 最大的正整数为 r, 将这个正整数删去, 得到一个新的分割, 这和分拆满足最大的数不超过 k, 得到了一个 $Q(n-r,\leq r)$

反之, 对于一个 $Q(n-r,\leq r)$ 的分拆, 考虑在原分拆的基础上加上一个正整数 r, 得到了一个 $Q(n,r)$ 分拆.

如此我们构建了一个二者之间的一一对应关系, 也即 $Q(n,r) = Q(n-r,\leq r)$ □

2. 定义 n 的分拆的共轭是它 *Ferrers* 图转置对应的分拆, 令 $P_{SC}(n)$ 表示 n 的分拆中共轭是其本身的数量, $P_{od}(n)$ 表示 n 的分拆中各个元素均为技术且互不相同的个数, 求证: $P_{SC}(n) = P_{od}(n)$

证明 考虑在二者对应的 Ferrers 图中构建一个一一对应关系, 对于 $P_{SC}(n)$, 其中任意一种分拆对应的 Ferrers 图关于从左上到右下的对角线对称, 也考虑从左上到右下为每一层, 每一层的点的个数都是奇数, 则考虑将对角线一下的点取出来, 接到对角线以上对称的分拆上, 这样得到了一个从 $P_{SC}(n)$ 到 $P_{od}(n)$ 的对应, 例如:

• • • • • •	• • • • • •

反之, 我们每一行都有 $2k+1$ 个点, 去除后 k 个点, 按照对角线接在首个点之下, 这样得到了一个从 $P_{od}(n)$ 到 $P_{SC}(n)$ 的对应, 如此构建了一个一一对应关系, 也即 $P_{SC}(n) = P_{od}(n)$ □

3. 计算分拆数 $P(n,3)$

解 考虑分拆数的递推关系 $P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$, 于是我们有

$$\begin{aligned} P(n,3) &= P(n-1,2) + P(n-3,3) \\ &= P(n-1,2) + P(n-4,2) + P(n-6,3) \end{aligned}$$

对 P 进行分类讨论

情况 a.$P = 3k$ 时:

$$\begin{aligned} P(3k,3) &= \sum_{i=0}^{k-1} P(3k-3i-1,2) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \lfloor \frac{3k-3i-1}{2} \rfloor \end{aligned}$$

$$P(n,3) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1} \lfloor \frac{n-3i-1}{2} \rfloor$$

情况 b.$P=3k+1$ 时:

$$\begin{aligned}P(3k+1,3)&=\sum_{i=0}^{k-1}P(3k-3i,2)\\&=\sum_{i=0}^{k-1}\lfloor\frac{3k-3i}{2}\rfloor\\P(n,3)&=\sum_{i=0}^{\frac{n-4}{3}}\lfloor\frac{n-3i-1}{2}\rfloor\end{aligned}$$

情况 c.$P=3k+2$ 时：

$$\begin{aligned}P(3k+2,3)&=\sum_{i=0}^{k-1}P(3k-3i+1,2)\\&=\sum_{i=0}^{k-1}\lfloor\frac{3k-3i+1}{2}\rfloor\\P(n,3)&=\sum_{i=0}^{\frac{n-5}{3}}\lfloor\frac{n-3i-1}{2}\rfloor\end{aligned}$$

4. 证明 $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor x+y\rfloor\leq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$

证明 设整数 n, 有 $\lfloor n+x\rfloor=n+\lfloor x\rfloor$ 于是考虑 $x,y\in[0,1)$ 即可, 将区间分为 $A:=[0,0.5),B:=[0.5,1)$ 两部分, 由于 x,y 完全对称, 于是有如下三种情况:

情况 a. $x,y\in A$, 则 $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor=\lfloor x+y\rfloor=0,\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1=1$, 不等式成立

情况 b. x,y 二者之一属于 B, 不妨设 $x\in B,y\in A$, 则 $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor=0$, 且根据 x,y 的选取,$\lfloor x+y\rfloor$ 有可能是 0 或者 1 , 同时 $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1=1$, 不等式成立

情况 c. $x,y\in B$, 则 $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor=0$,$\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1=1$, 不等式成立

综上所述, $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor x+y\rfloor\leq\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$ 恒成立 □

5. 证明, 对于 $\forall a,b\in\mathbb{N},\exists p,q\in\mathbb{Z},ap+bq=gcd(a,b)$

证明 给出一个存在性证明 (构造性证明由 Euclid 算法直接可得), 根据 gcd 的性质, 对于 a,b 的任意一个公因子 g, 有 $g|gcd(a,b)$, 设集合 $S=\{ma+nb|m,n\in\mathbb{Z}\}$ 其中 g 是 S 中最小的正整数, 接下来证明 $g=gcd$, 根据公因数的性质, 对于 a,b 的任意一个公因子 d, 都有 $d|s,\forall s\in S$, 于是得到 $gcd|g$

下证 $g|gcd$, 只许证明 g 是 a,b 的一个公因子即可, 不妨设 $a=qg+r$, 其中 $r\leq g-1$, 于是得到

$$\begin{aligned}ma+nb&=g\\qma+qnb&=qg=a-r\\-(qm-1)a-qnb&=r\end{aligned}$$

因为 g 是 S 中最小的正整数, 于是 $r=0,g|m$, 同理可得 $g|n$, 于是 $g|gcd$, 最终我们得到 $g=gcd$ □

6. 证明, 对于 $\forall x\in\mathbb{R}$,$\forall n\in\mathbb{N}^+$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\lfloor x+\frac{i}{n}\rfloor=\lfloor nx\rfloor$$

证明 考虑将 x 分为整数 X 和小数 x' 两部分, 则有 $x' \in [0,1)$, 则 x' 一定落在 $[0,1)$ 中分割成的 n 个小区间中的某一个, 设 $x' \in [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n})$, 其中 $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \lfloor x+\frac{i}{n} \rfloor &= nX + \sum_{i=0}^{n-1} \lfloor x'+\frac{i}{n} \rfloor \\ &= nX + \sum_{i=0}^{n-j-1} \lfloor x'+\frac{i}{n} \rfloor + \sum_{i=n-j}^{n-1} \lfloor x'+\frac{i}{n} \rfloor \\ &= nX + 0 + j = nX + j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}RHS &= nX + \lfloor nx' \rfloor \\ &= nX + j \\ &= LHS\end{aligned}$$

于是 $\forall x \in \mathbb{R}$,$\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lfloor x+\frac{i}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

□

7. 证明, 对于任意给定的 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $m!n!(m+n)!|(2m)!(2n)!$

证明 考虑课上所讲的函数 $h_p(m)$, 要证 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $m!n!(m+n)!|(2m)!(2n)!$, 只需证对于任意的 m 或 n 的素因子 p, 都有 $h_p(2m) + h_p(2n) \geq h_p(m) + h_p(n) + h_p(m+n)$ 只需证明对于高斯取整函数, 有 $\lfloor 2m \rfloor + \lfloor 2m \rfloor \geq 2\lfloor m \rfloor + 2\lfloor n \rfloor + \lfloor m+n \rfloor$
与第 4 题的方法相同, 不妨考虑 $m, n \in [0,1)$, 沿用第 4 题的记号

情况 a. $m, n \in A$, 则 $\lfloor 2m \rfloor + \lfloor 2m \rfloor = 2\lfloor m \rfloor + 2\lfloor n \rfloor + \lfloor m+n \rfloor = 0$ 不等式成立

情况 b. 不妨设 $m \in B$, $n \in A$, 则 $\lfloor 2m \rfloor + \lfloor 2m \rfloor = 1$,$2\lfloor m \rfloor + 2\lfloor n \rfloor + \lfloor m+n \rfloor = \lfloor m+n \rfloor \leq 1$ 不等式成立

情况 c. $m.n \in B$, 则则 $\lfloor 2m \rfloor + \lfloor 2m \rfloor = 2$, $2\lfloor m \rfloor + 2\lfloor n \rfloor + \lfloor m+n \rfloor = \lfloor m+n \rfloor = 1$ 不等式成立

于是 $\lfloor 2m \rfloor + \lfloor 2m \rfloor \geq 2\lfloor m \rfloor + 2\lfloor n \rfloor + \lfloor m+n \rfloor$

$$\begin{aligned}h_p(2m) + h_p(2n) = \sum_{k\geq 0} \lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor + \lfloor \frac{2m}{p^k} \rfloor \geq 2\sum_{k\geq 0} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor + 2\sum_{k\geq 0} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor + \sum_{k\geq 0} \lfloor \frac{m+n}{p^k} \rfloor \\ = 2h_p(m) + 2h_p(n) + h_p(m+n)\end{aligned}$$

□

8. 证明, 正整数 p 是素数当且仅当

$$(p-1)! \equiv -1 \quad (mod\, p)$$

证明 充分性:

$(p-1)! \equiv -1 \quad (mod\, p)$, 假设 p 是合数, 则存在 $m, n \in 2, 3, \ldots, p-1$ 使得 $p = mn$, 则 $mn|(p-1)!$, 进而 $p|(p-1)!$, 也即 $(p-1)! \equiv 0 \quad (mod\, p)$, 矛盾.

必要性:

假设 p 是素数, 只需证 $(p-2)! \equiv 1 \pmod p$, 已知对 $\forall a \in \{1,2,\ldots,p1\}, gcd(p,a) = 1$, 也即 $\exists m \in \mathbb{Z}, ma \equiv 1 \pmod p$ 也即所有 a 都存关于 p 的同余逆元由于 m 在同余的意义下等价, 所以对 $\forall a$, 总存在落在 $1,2,\ldots,p-1$ 内的同余逆元, 要保证 $(p-2)! \equiv 1 \pmod p$, 只需证明在 $1,2,\ldots,p-2$ 中的同余逆元两两一对, 则只需证 $2,3,\ldots,p-2$ 中的同余逆元不是自己本身 (这样就可以两两配对)

$$a^2 \equiv 1 \pmod p$$

$$(a+1)(a-1) = qp$$

所以 $p|(a-1) or p|(a+1)$ 所以 $a = 1, p-1$, 则 $2,3,\ldots,p-2$ 中的同余逆元不是自己本身, 于是有 $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ □

9. 证明

$$\sum_{\substack{p\le n\\ p\,is\,prime}} \log_2 p = \Theta(n)$$

证明 利用如下定理, 对于一个正整数 n, 不大于 n 的素数的个数 $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$, 考虑将 $1 \sim n$ 分为 $1 \sim \sqrt{n}, \sqrt{n} \sim n$ 两部分则 $\sqrt{n} \sim n$ 中素数的个数 $\phi(n)$ 的阶

$$\phi(n) \sim \frac{n}{\ln n} - \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\ln n} \sim \frac{n}{\ln n}$$

并且对于 $[\sqrt{n}, n]$ 区域内的素数 $p \ge \sqrt{n}$, 存在实数 C, 满足

$$\sum_{\substack{p\le n\\ p\,is\,prime}} \log_2 p \ge \sum_{\sqrt{n}\le p\le n} \log_2 p \ge \frac{1}{2}\frac{Cn\log_2 n}{\ln n} = O(n)$$

而根据课上的定理

$$\prod_{\substack{p\le n\\ p\,is\,prime}} p \le 4^n$$

$$\sum_{\substack{p\le n\\ p\,is\,prime}} \log_2 p = o(n)$$

于是得到

$$\sum_{\substack{p\le n\\ p\,is\,prime}} \log_2 p = \Theta(n)$$

□