组合数学第 8 讲

授课时间: 2024 年 10 月 14 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 寇逸欣，李陈琦

1　夫妻入座问题

例 1　有 n 对夫妻围桌而坐，并且每一对夫妻的座位不可以相邻，请问有多少种排列方法?

解　记 S 为这 $2n$ 个人的所有圆排列构成的集合；对于第 k 对夫妻，记

$$A_k = \{\pi \in S \mid 第k对夫妻在\pi中座位相邻.\}$$

由容斥原理，此题的答案即

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right| = |S| - \sum_{1\le i\le n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|. \quad (1)$$

对于其中 t 个集合的交，例如 $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t$，我们可以将前 t 对夫妻分别“捆绑”在一起，将他们和其余 $2n-2t$ 个人进行圆排列；同时注意到每对“捆绑”在一起的夫妻内部可以调换顺序，所以

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_t| = 2^t (2n-t-1)!.$$

不难发现，上述结果仅与 t 和 n 有关，而 (1) 式中有 $\binom{n}{t}$ 项是 t 个集合的交，所以答案即

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} (2n-k-1)!.$$

2　拆信封问题

例 2　有 $2n$ 个人和 $2n$ 个信封，每个信封里装着一个人的名字. 现让 $2n$ 个人依次进屋选 n 个信封，然后把信封复原（开完后与其他人不能交流）. 如果每个人都开到带自己名字的信封，则游戏胜利. 请问他们在开信封之前能否商量出一个最佳方案，使得游戏胜利的概率尽可能高?

解　如果每个人都完全随机地选取 n 个信封，则每个人找到自己名字的概率都是 $\frac{1}{2}$，此时游戏胜利地概率为 $\frac{1}{2^{2n}}$，此概率随 n 指数级下降. 以下展示的策略将显著提高成功率.

为方便起见，把人按 $1-2n$ 编号，信封也按 $1-2n$ 编号. 每个人地策略如下：先打开对应自己编号的信封（如第 7 个人先开 7 号信封），信封里装着第几个人的名字就去开第几个信封，重复以上过程直到找到自己的名字或选完 n 个信封停止. 现计算以上方案能让所有人开到自己的名字（即游戏胜利）的概率.

由于每个信封里的名字都不同，把信封和名字编号后可以看到，信封和名字的对应编号是一个置换，而置换又可以分解成多个不相交的循环. 每个人开信封的过程即为在对应循环上绕一圈找自己编号的过程. 因此可以推知，采取以上策略后，游戏胜利的充要条件即为最长循环的长度不超过 n. 所以我们计算最长循环长度不超过 n 的概率即可计算出采取以上策略游戏胜利的概率.
现计算最长循环超过 n 的情况数. 由于 $2n$ 个数中长度超过 n 的循环最多只有一个. 设最长循环长度

为 k，从 $2n$ 个数中取出 k 个数的方案为 $\binom{2n}{k}$，k 个数进行圆排列的方案为 $(k-1)!$，剩余 $2n-k$ 个数自由排列的方案为 $(2n-k)!$. 故最长循环超过 n 的情况数为

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}(k-1)!(2n-k)!,$$

最长循环超过 n 的概率就是

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{存在圆环长度大于}n) &= \frac{1}{(2n)!}\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}(k-1)!(2n-k)! \\
&= \frac{1}{(2n)!}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}(k-1)!(2n-k)! \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \\
&\sim \ln(2n)-\ln(n) \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

故最长循环不超过 n 的概率为 $1-\ln 2 \approx 0.31$.

3 第一类 Stirling 数

定义 1 (第一类 Stirling 数的组合定义). *第一类 Stirling 数记作 $S_1(n,k)$，表示将 n 个元素划分为 k 个非空圆排列的方法数.*

以下展示若干特殊第一类 Stirling 数的取值

$$\begin{aligned}
S_1(n,1) &= (n-1)!; \\
S_1(n,2) &= \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}(n-1)!(n-k-1)! = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{n-k} \\
&= (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = (n-1)!H(n-1); \\
S_1(n,n) &= 1; \\
S_1(n,n-1) &= \binom{n}{2}.
\end{aligned}$$

定理 2 (第一类 Stirling 数的递推公式).

$$S_1(n,k) = S_1(n-1,k-1) + (n-1)S_1(n-1,k).$$

证明 由第一类 Stirling 数的组合意义, 我们可以想到由 $1,2,\ldots,n$ 构成恰好有 k 个圈的排列的方案数可以由两部分构成, 第一部分是将 1 提出来自成一个长度为 1 的圈，剩下 $n-1$ 个元素形成另外的 $k-1$ 个圈，共有 $S_1(n-1,k-1)$ 种方案；第二部分是将 1 插入已有的 $n-1$ 个数构成的含有 k 个圈的排列中. 1 作为剩下 $n-1$ 个数中任意一个数的前驱时都能构成一种互不相同的满足要求的

排列，并且任意一个合法的，且 1 不单独成圈的排列都可以通过这样的方式得到. 这部分的方案数是 $(n-1)S_1(n-1,k)$. 因此我们可以得到

$$S_1(n,k)=S_1(n-1,k-1)+(n-1)S_1(n-1,k).$$

□

定理 3.

$$x^{\overline{n}}=\sum_{k=1}^{n}S_1(n,k)x^k.$$

证明 使用数学归纳法. 当 $n=1$ 有

$$x^{\overline{1}}=x=S_1(1,1)x^1.$$

假设 $n=n_0(n_0\geq 1)$ 成立，那么

$$\begin{aligned}
x^{\overline{n_0+1}}&=x^{\overline{n_0}}(x+n_0)\\
&=\sum_{k=1}^{n_0}S_1(n_0,k)x^{k+1}+n_0\sum_{k=1}^{n_0}S_1(n_0,k)x^k\\
&=\sum_{k=2}^{n_0+1}S_1(n_0,k-1)x^k+n_0\sum_{k=1}^{n_0}S_1(n_0,k)x^k\\
&=n_0S_1(n_0,1)x^1+\sum_{k=2}^{n_0}S_1(n_0,k-1)x^k+n_0\sum_{k=2}^{n_0}S_1(n_0,k)x^k+x^{n_0+1}\\
&=n_0(n_0-1)!x+\sum_{k=2}^{n_0}S_1(n_0+1,k)x^k+x^{n_0+1}\\
&=S_1(n_0+1,1)x+\sum_{k=2}^{n_0}S_1(n_0+1,k)x^k+S_1(n_0+1,n_0+1)x^{n_0+1}\\
&=\sum_{k=1}^{n_0+1}S_1(n_0+1,k)x^k,
\end{aligned}$$

即 $n=n_0+1$ 也成立. □

由于 $x^{\overline{n}}$ 和 $x^{\underline{n}}$ 的展开式中每一项系数绝对值相同, 只有正负号的区别, 且正负号与取来相乘的 x 的个数有关, 因此有如下等式:

$$\begin{aligned}
x^{\overline{n}}&=\sum_{k=1}^{n}S_1(n,k)x^k,\\
x^{\underline{n}}&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}S_1(n,k)x^k.
\end{aligned}$$

以上两式可以看作是对第一类 Stirling 数的代数定义，有的文献中把 $(-1)^{n-k}S_1(n,k)$ 叫做带符号的第一类 Stirling 数，而把我们所说的第一类斯特林数 $S_1(n,k)$ 称作无符号的第一类 Stirling 数. 读者在阅读其他文献时需要注意辨别.

4 第二类 Stirling 数

定义 4 (第二类 Stirling 数的组合定义)**.** 第二类 *Stirling* 数记作 $S_1(n,k)$，表示将 n 个元素划分为 k 个非空集合的方法数.

以下展示若干特殊第二类 Stirling 数的取值

$$
\begin{aligned}
&S_2(n,1) = 1;\\
&S_2(n,2) = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}-1;\\
&S_2(n,n) = 1;\\
&S_2(n,n-1) = \binom{n}{2}.
\end{aligned}
$$

定理 5 (第二类 Stirling 数的递推公式)**.**

$$S_2(n,k) = S_2(n-1,k-1) + kS_2(n-1,k).$$

证明 分情况讨论. 第一种情况，原先的 $n-1$ 个元素 $2,3,\dots,n$ 只形成了 $k-1$ 个集合，将元素 1 加入，单独构成第 k 个集合，则方案数为 $S_2(n-1,k-1)$. 第二种情况，原先的 $n-1$ 个元素 $2,3,\dots,n$ 已经组成了 k 个集合，再将元素 1 放入任意一个集合中（不考虑集合内部顺序），有 k 种选择，则方案数为 $kS_2(n-1,k)$. 则 n 个元素组成 k 个非空集合的方案数即为以上两种情况之和，即

$$S_2(n,k) = S_2(n-1,k-1) + kS_2(n-1,k).$$

□

定理 6.

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)x^{\underline{k}}.$$

证明 使用数学归纳法. $n=1$ 时有

$$x^1 = x^{\underline{1}} = S_2(n,1)x^{\underline{1}}.$$

假设 $n=n_0(n_0\geq 1)$ 成立，则

$$\begin{aligned}
x^{n_0+1} &= x^{n_0}\cdot x\\
&= \sum_{k=1}^{n_0} S_2(n_0,k)x^{\underline{k}}\cdot(x-k+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n_0} S_2(n_0,k)x^{\underline{k+1}}+\sum_{k=1}^{n_0} kS_2(n_0,k)x^{\underline{k}}\\
&= x^{\underline{n_0+1}}+\sum_{k=2}^{n_0} S_2(n_0,k-1)x^{\underline{k}}+\sum_{k=1}^{n_0} kS_2(n_0,k)x^{\underline{k}}\\
&= x^{\underline{n_0+1}}+\sum_{k=2}^{n_0} (S_2(n_0,k-1)+kS_2(n_0,k))x^{\underline{k}}+x\\
&= x^{\underline{n_0+1}}+\sum_{k=2}^{n_0} S_2(n_0+1,k)x^{\underline{k}}+x\\
&= S_2(n_0+1,n_0+1)x^{\underline{n_0+1}}+\sum_{k=2}^{n_0} S_2(n_0+1,k)x^{\underline{k}}+S_2(n_0+1,1)x\\
&= \sum_{k=1}^{n_0+1} S_2(n_0+1,k)x^{\underline{k}},
\end{aligned}$$

即 $n=n_0+1$ 成立. $\square$

与第一类 Stirling 数类似，

$$x^n=\sum_{k=1}^{n} S_2(n,k)x^{\underline{k}}.$$

可以看作是对第二类 Stirling 数的代数定义.

5 选做题

有 n 个人参加游戏，编号为 $1,2,\ldots,n$。游戏主办方把写有这 n 个人编号的号码牌均匀随机地分别放在 n 个带有编号的信封中。现在依次让每个人拆开一部分信封（看完后放回），所有人在游戏开始后不允许交流信息，如果所有人都找到了自己编号对应的号码牌则这 n 个人获胜。请问：

a) 若每个人最多可以看 $n/3$ 个信封 (不妨假设 n 被 3 整除)，请为这 n 个人设计一个以尽可能高的概率通过游戏的方案。

b) 若每个人还是可以看 $n/2$ 个信封 (不妨假设 n 为偶数)，但是这次向 n 个带有编号的信封中额外加入了 $n/2$ 个空信封 (即一共有 $\frac{3}{2}n$ 个信封)，请为这 n 个人设计一个以尽可能高的概率通过游戏的方案。