组合数学第 15 讲

授课时间: 2024 年 12 月 9 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 李驭（助教）　陈子珩（助教）

1 Cauchy-Davenport 定理

定理 1 (Cauchy-Davenport)**.** 设 p 是一个质数，A, B 是 $\mathbb{Z}_p$ 的子集，定义 $A+B=\{a+b|a\in A, b\in B\}$，其中 $a+b$ 是在 $\mathbb{Z}_p$ 中的加法. 则有

$$|A+B| \geq \min\{|A|+|B|-1, p\}.$$

这里只给出 $|B|\leq 2$ 情形的证明.

证明 $|B|=1$ 时，设 $B=\{b\}$，则 $A+B$ 即 A 中每个元素加 b 构成的集合，所以 $|A+B|=|A|\geq \min\{|A|+|B|-1, p\}$.

$|B|=2$ 时，设 $B=\{b_1\ b_2\}$，其中 $b_1<b_2$. 令 $A'=A+\{b_1\}, B'=\{0, b_2-b_1\}$，此时 $|A'|=|A|, |B'|=|B|=2, A'+B'=A+B$. 记 $b=b_2-b_1$，因为 $0\in B'$，故 $A'\subseteq A'+B'$. 任取 $a\in A'$，考虑 $a, a+b, a+2b, \ldots$.

- 若存在 $k\in\mathbb{N}_+$ 满足 $a+(k-1)b\in A'$ 且 $a+kb\notin A'$，则 $a+kb=(a+(k-1)b)+b\in A'+\{b\}$，故 $A'+B'\not\subseteq A'$，又 $A'\subseteq A'+B'$，故 $|A'+B'|\geq |A'|+1=|A'|+|B'|-1$.
- 否则任意 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $a+kb\in A'$，又 b 和 p 互质，则

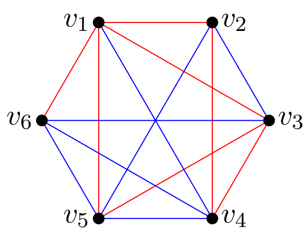
$$|A'+B'|\geq |A'|\geq |\{a+kb\}_{k\in\mathbb{N}}|=|\{kb\}_{k\in\mathbb{N}}|=p.$$

综合两种情况，我们得到 $|A+B|=|A'+B'|\geq \min\{|A|+|B|-1, p\}$. □

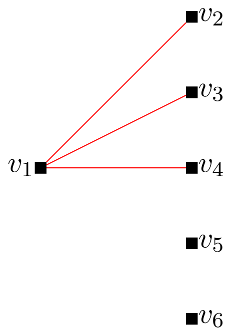
2 拉姆塞理论 (Ramsey Theory)

例 1 证明：任取 6 个人，其中必有 3 人互相认识或 3 人互相不认识，这里假设任何两个人之间只有可能互相认识或互相不认识.

证明 这类问题可以用图论的语言来形式化叙述. 即，给定一个 6 个顶点的完全图，其中每条边用红色或蓝色染色，每个点代表一个人，每条蓝边表示其连接的两个人相互不认识，红边表示相互认识. “有 3 个人互相认识” 等价于 “存在一个仅包含红边的 3 个顶点的完全图”，“有 3 个人互相不认识” 等价于 “存在一个仅包含蓝边的 3 个顶点的完全图”. 因此，这个问题等价于证明：任意一个对边红蓝二染色的 K_6，其中必有一个仅包含红边的 K_3 或一个仅包含蓝边的 K_3.



现将 v_1 单独取出，v_1 将有 5 条邻边，根据抽屉原理，一定有至少 3 条边颜色相同，不妨设其中有 3 条红边 v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4.



考虑 v_2, v_3, v_4 之间的 3 条边.

1. 若这 3 条边中有一条红边，不妨设为 v_2v_3，则 v_1, v_2, v_3 构成一个仅包含红边的 K_3.
2. 若这 3 条边全部都是蓝边，则 v_2, v_3, v_4 构成一个仅包含蓝边的 K_3.

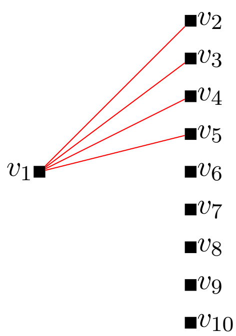
□

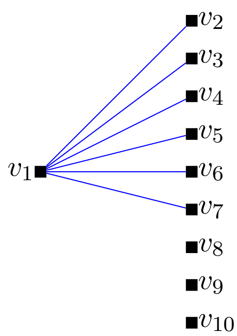
定义 2 (Ramsey 数). 令 $s, t \geq 2$ 为正整数，*Ramsey* 数 $R(s,t)$ 为满足以下条件的最小的正整数 n：对 K_n 的所有边进行任意红蓝二染色，都可以保证存在一个仅包含红边的 K_s 或一个仅包含蓝边的 K_t.

我们讨论 Ramsey 数的上界：

例 2 证明：$R(3,4) \leq 10$.

证明 在 K_{10} 中，我们单独取出 v_1. 因为 $9 = 3 + 5 + 1$，因此与 v_1 相邻的 9 条边中，要么至少 4 条红边，要么至少 6 条蓝边（否则至多 $3 + 5 = 8$ 条边，矛盾）.

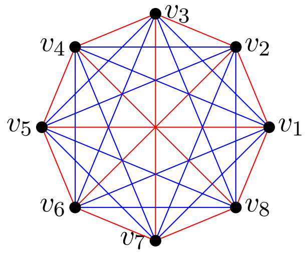




先考虑第一种情况，v_1 连出了至少 4 条红边，不妨设 v_1 与 v_2, v_3, v_4, v_5 之间的边都是红边，如果 v_2, v_3, v_4, v_5 之间存在一条红边，则这条红边连接的两个顶点与 v_1 构成红色 K_3，否则，v_2, v_3, v_4, v_5 构成蓝色 K_4.

再考虑第二种情况，v_1 连出了至少 6 条蓝边，不妨设 v_1 与 $v_2, v_3, \cdots, v_7$ 之间的边都是蓝边，根据例 1，$v_2, v_3, \cdots, v_7$ 构成的 K_6 必定存在红色 K_3 或者蓝色 K_3 子图，如果包含红色 K_3 子图，则断言成立，如果包含蓝色 K_3，则构成蓝色 K_3 的三个顶点与 v_1 一起构成蓝色 K_4. □

注 事实上 $R(3,4)=9$. 证明思路分为两步，在 K_9 中：此时 v_1 引出 8 条边. 我们已经证明了如果 v_1 至少引出 6 条蓝边或 4 条红边的情况的情况，所以在这里还需考虑 v_1 恰好引出 5 条蓝边，3 条红边的情况，我们可以发现这 9 个点不可能同时都能引出 5 条蓝边，3 条红边，否则我们总共会得到 $5\times 9=45$ 条蓝边，又因为每条蓝边我们计算了 2 次（每个端点都考虑了一次），所以在图中总共有 $45/2$ 条蓝边，矛盾. 于是 $R(3,4)\le 9$. 另外，在 K_8 中，如下染色方式既不存在红色 K_3，也不存在蓝色 K_4.



引理 3. *对于正整数 $m,n\ge 2$，如果 $R(n,m)$ 存在，则 $R(m,n)$ 也存在且 $R(n,m)=R(m,n)$.*

证明 红边和蓝边本质上是对称的，所以显然成立. □

引理 4. *$\forall n\ge 2$, 且 $R(n,2)=n$.*

证明 对于任意顶点个数小于 n 的完全图，如果所有边均为红色，则图中既没有红色的 K_n，也没有蓝色的 K_2，因此 $R(n,2)\ge n$.

考虑 K_n，如果仅包含红色的边，则恰好构成红色 K_n，如果包含任意一条蓝色的边，则构成蓝色 K_2，因此 $R(n,2)\le n$.

因此 $R(n,2)=n$. □

将例 2的证明推广，可以得到下面的结论:

引理 5. *对于正整数 $m,n\ge 3$，如果 $R(n,m-1)$ 和 $R(n-1,m)$ 存在，则 $R(n,m)$ 存在且满足 $R(n,m)\le R(n-1,m)+R(n,m-1)$.*

证明 定义 $N:=R(n-1,m)+R(n,m-1)$，只需要证明对 K_N 进行二染色，其中要么存在红色的 K_n，要么存在蓝色的 K_m. 因为 $N-1=(R(n-1\ m)-1)+(R(n,m-1)-1)+1$，在 K_N 中取出 v_1，v_1 的 $N-1$ 条邻边中，由抽屉原理知 v_1 要么有至少 $(R(n-1,m)-1)+1=R(n-1,m)$ 条红边，要么有至少 $(R(n,m-1)-1)+1=R(n,m-1)$ 条蓝边.

若 v_1 有 $(R(n-1,m)-1)+1=R(n-1,m)$ 条红边，另一端 $R(n-1,m)$ 个顶点要么形成红色 K_{n-1} 与 v_1 构成红色 K_n，要么形成蓝色 K_m.

若 v_1 有 $(R(n,m-1)-1)+1=R(n,m-1)$ 条蓝边，分析过程完全对称，证明完毕. □

定理 6 (Ramsey 数必定存在)**.** *对于正整数 $m,n\ge 3$，$R(n,m)$ 有界且 $R(n,m)\le\binom{n+m-2}{n-1}=\binom{n+m-2}{m-1}$.*

证明 运用归纳法，注意到 $R(2,m)=R(m,2)=m\le\binom{m}{m-1}$，由此归纳基础成立.

假设 $m+n<t$ 时命题成立.

$n+m=t$ 时，$R(m,n)\le R(n-1,m)+R(n,m-1)\le\binom{n+m-3}{n-2}+\binom{n+m-3}{n-1}=\binom{n+m-2}{n-1}$. □

接下来我们讨论 $R(n,n)$ 的下界.

定理 7. $\forall n \geq 3, R(n,n) > (n-1)^2$.

证明 我们先作出 $n-1$ 个独立红色 K_{n-1}，这样我们已经拥有了 $(n-1)^2$ 个顶点. 对于来自不同红色 K_{n-1} 的两个顶点，我们在两点之间作蓝色边，如此我们便完成了对 $K_{(n-1)^2}$ 的边二染色. 对于其中任何 n 个点，由抽屉原理，必然存在两个顶点属于同一个红色 K_{n-1}，这两个顶点之间是红色边；因为每个红色 K_{n-1} 不到 n 个顶点，所以必然存在两个顶点属于不同红色 K_{n-1}，这两个顶点之间是蓝色边，于是这 n 个点必然无法构成同色完全图. □

定理 8. $\forall n \geq 3, R(n,n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot n}{2e}$.

证明 令 $N := \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot n}{2e}$. 首先构造一个概率空间, 对 K_N 的每条边独立随机地红蓝二染色且 $\forall 1 \leq i,j \leq N, \Pr\left((v_i,v_j) = \text{Red}\right) = \Pr\left((v_i,v_j) = \text{Blue}\right) = \frac{1}{2}$，其中 v_i, v_j 是完全图 K_N 的顶点. 定义下面的三个事件:

事件 X：K_N 边的红蓝二染色中既不存在红色 K_n, 也不存在蓝色 K_n.

事件 A：K_N 边的红蓝二染色中存在同色的 K_n.

事件 $K(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$: $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$ 形成了同色完全图.

$$\begin{aligned}
\Pr(A) &= \Pr\left(\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq N} K(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})\right) \\
&\leq \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq N} \Pr\left(K(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})\right) \\
&= \binom{N}{n} \cdot \frac{2}{2^{\binom{n}{2}}}.
\end{aligned}$$

上面的不等式推理 $\Pr(E_1 \cup E_2) \leq \Pr(E_1) + \Pr(E_2)$，即两个事件的并的发生概率小于等于这两个事件发生的概率之和.

$$\begin{aligned}
\Pr(X) &= 1 - \Pr(A) \\
&\geq 1 - 2\binom{N}{n} \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \\
&\geq 1 - 2 \cdot \left(\frac{Ne}{n}\right)^n \frac{1}{2^{\binom{n}{2}}} \\
&= 1 - 2 \cdot (2^{\frac{n}{2}-1})^n \cdot \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \\
&= 1 - 2^{1+\frac{n^2}{2}-n-\frac{n^2-n}{2}} \\
&= 1 - 2^{1-\frac{n}{2}} > 0,
\end{aligned}$$

所以事件 X 概率不为 0，则可以得到结论：存在一个染色方案，使得 K_N 中既不存在红色 K_n，也不存在蓝色 K_n，结合 Ramsey 数的定义可以知道，$\forall n \geq 3, R(n,n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot n}{2e}$ 成立. □

3 选做题

给定 $n \in \mathbb{N}$，试确定最小的 $m \in \mathbb{N}$，使得对于 $\mathbb{Z}^3$ 中任意 m 个整点，其中都存在 n 个点，其几何重心仍为整点。