组合数学作业 4

1. 确定满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=25, i\le x_i\le 8, x_i\in\mathbb{N}(i=1,2,3,4)$ 的四元组 (x_1,x_2,x_3,x_4) 的个数.

解 采用容斥原理解决问题, 首先对四个变量进行如下变换

$$\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=x_2-1 \\ y_3=x_3-2 \\ y_4=x_4-3 \end{cases}$$

则原方程转化为

$$y_1+y_2+y_3+y_4=19 \qquad \text{其中} \begin{cases} 1\le y_1\le 8 \\ 1\le y_2\le 7 \\ 1\le y_3\le 6 \\ 1\le y_4\le 5 \end{cases}$$

接下来再考虑容斥原理, $|I|=\binom{18}{3}$, 设

$$\begin{cases} A_1=\{(y_1,y_2,y_3,y_4)|y_1\ge 9\} \\ A_2=\{(y_1,y_2,y_3,y_4)|y_2\ge 8\} \\ A_3=\{(y_1,y_2,y_3,y_4)|y_3\ge 7\} \\ A_4=\{(y_1,y_2,y_3,y_4)|y_4\ge 6\} \end{cases}$$

根据容斥原理, 可以

$$\begin{aligned} |A| &= \binom{18}{3}-(\binom{10}{3}+\binom{11}{3}+\binom{12}{3}+\binom{13}{3})+(\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+2\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}) \\ &=105 \end{aligned}$$

2. 考虑 $\{1,2,\dots,n\}$ 的排列, 求恰好有 k 个整数在其自然位置上的排列的数量. 其中对于排列 π, 数 i 再其自然位置上指 $\pi(i)=i$.

解 在 $\{1,2,\dots,n\}$ 中, 有 k 个整数在自然位置上, 说明有 $n-k$ 个位置完全错位, 已知完全错位的计算方式

$$|\bar{A}_{n-k}|=(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}$$

于是, 我们可以得到

$$|A(k)| = \binom{n}{k}|\bar{A}_{n-k}| = \binom{n}{k}(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!} = \frac{n!}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}$$

3. *求从 1 到 10000 中不能被 4,6,7 或 10 整除的整数个数.*

解 本题同样采取容斥原理来解决, 但应该注意的是, 其中的数并不完全两两互质, 应该采用最小公倍数

$$\begin{aligned}|A| = 10000 &- (\frac{10000}{4} + \lfloor\frac{10000}{6}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{7}\rfloor + \frac{10000}{10}) \\ &+ (\lfloor\frac{10000}{12}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{28}\rfloor + \frac{10000}{20} + \lfloor\frac{10000}{42}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{30}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{70}\rfloor) \\ &- (\lfloor\frac{10000}{84}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{60}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{140}\rfloor + \lfloor\frac{10000}{210}\rfloor) \\ &+ \lfloor\frac{10000}{420}\rfloor\end{aligned}$$

解得 $|A| = 5429$

4. *多重集合 $\Omega = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot c, 1 \cdot d\}$ 的圆排列中, 满足不连续出现三个 a, 并且不连续出现 4 个 b, 也不连续出现 2 个 c 的有多少种?*

解 采用容斥原理来求解, 设 $|I| = \frac{9!}{3!4!2!1!} = 1260$

$$\begin{cases} A_1 = \{\pi(\Omega)|\text{连续出现 3 个 a}\} \\ A_2 = \{\pi(\Omega)|\text{连续出现 4 个 b}\} \\ A_3 = \{\pi(\Omega)|\text{连续出现 2 个 c}\} \end{cases}$$

根据容斥原理直接可得

$$\begin{aligned}|A| &= |I| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 1260 - (\frac{7!}{4!2!} + \frac{6!}{3!2!} + \frac{8!}{4!3!}) + (\frac{4!}{2!} + \frac{6!}{4!} + \frac{5!}{3!}) - 3! \\ &= 871\end{aligned}$$

5. *求下列斯特林数的表达式:*

(a)$S_1(n, n-2)$;

(b)$S_2(n, n-2)$;

(c)$S_1(n, n-3)$;

(d)$S_2(n, 3)$;

解

<u>对于 a</u>

根据第一类斯特林数的组合定义, 相当于将 n 个数在置换中分为 $n-2$ 个圆, 下面讨论圆的情

况
(i) 有一个圆有 3 个元素, 剩下的都是自环
(ii) 有两个圆有 2 个元素, 剩下的都是自环
其中, 情况 (i) 对应的个数是

$$2! \times \binom{n}{3}$$

其中, 情况 (ii) 对应的个数是

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} = 3\binom{n}{4}$$

于是我们可以得到

$$S_1(n, n-2) = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

<u>对于 b</u>
根据第二类斯特林数的组合定义, 相当于将 n 个不同的球放在 $n-2$ 个相同的盒中, 下面讨论放置的情况
(i) 有一个盒有 3 个球
(ii) 有两个盒有两个球
其中, 情况 (i) 对应的个数是

$$\binom{n}{3}$$

其中, 情况 (ii) 对应的个数是

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} = 3\binom{n}{4}$$

于是我们可以得到

$$S_2(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$$

<u>对于 c</u>
根据第一类斯特林数的组合定义, 有以下三种情况
(i) 有一个圆有四个元素, 剩下的都是自环
(ii) 有一个圆有 3 个元素, 一个圆有 2 个元素剩下的都是自环
(iii) 有三个圆有 2 个元素, 剩下的都是自环
其中, 情况 (i) 对应的个数是

$$3! \times \binom{n}{4} = 6\binom{n}{4}$$

其中, 情况 (ii) 对应的个数是

$$2! \times \binom{n}{3}\binom{n-3}{2} = 20\binom{n}{5}$$

其中, 情况 (iii) 对应的个数是

$$\binom{n}{6}\binom{6}{2}\binom{4}{2} \times \frac{1}{6} = 15\binom{n}{6}$$

于是我们可以得到

$$S_1(n, n-3) = 3! \times \binom{n}{4} = 6\binom{n}{4} + 20\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}$$

对于 d

考虑作业 3 中的第 3 题中的 a 小问, 和本小问有共通之处, 将 $\{a, b, c\}$ 组成的 n 位数与 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 一一对应, a,b,c 的位置放入第 1,2,3 个盒子, 同时由于盒子无序, 因此要除去序, 于是有

$$S_2(n, 3) = \frac{1}{3!}(3^n - 3 \times 2^n + 3) = \frac{1}{2} \times 3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}$$

6. 使用容斥公式证明第二类斯特林数的通项公式

$$S_2(n, m) = \frac{1}{m!}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\binom{m}{l}l^n$$

证明 根据第二类斯特林数的组合定义, 将 n 个不同的球放入 m 个盒中, 每个盒不能为空, 不妨先设每一个盒都是有编号, 并且可以为空, 设

$$B_i = \{(A_1, \dots, A_i, \dots, A_m) | A_i = \varnothing\}$$

那么根据容斥公式, 可以得到

$$\begin{aligned}
|B| &= m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + (-1)^m\binom{m}{m}(m-m)^n \\
&= \sum_{k=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{k}(m-k)^n \\
&= \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}l^n \\
&= \sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\binom{m}{l}l^n
\end{aligned}$$

最后再将盒子的序除去, 即可得到

$$S_2(n, m) = \frac{1}{m!}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m+l}\binom{m}{l}l^n$$

□

7. 设 $P(n)$ 表示将正整数 n 拆为若干正整数 *(不考虑顺序)* 的方法数, $P(n,m)$ 表示将正整数 n 拆为 m 个正整数 *(不考虑方法数)*, 证明 $P(n)=P(2n,n)$

证明 考虑在二者之间建立一一对应关系, 根据题意, $P(n,n)=1$, 这样就保证了有 n 个部分, 则 $P(2n,n)$ 相当于在原本的 Ferrers 图上的每一行上对应下降的加上 $P(n)$ 的分拆, 也即

$$P(2n,n)=P(n,n)\times P(n)=P(n)$$

(*) 另外也可以据此推出 $P(n,m)$ 的一个递推公式

$$P(n+m,m)=\sum_{k=0}^{m}P(n,k)$$

□

8. 设 $P(n)$ 表示分拆数, 试比较 $P(n)-P(n-1)$ 与 $P(n-1)-P(n-2)$

解 对于分拆数, 有如下递推公式

$$P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k) \tag{1}$$

又有

$$P(n)=\sum_{k=0}^{n}P(n,k) \tag{2}$$

综合 (1),(2) 我们可以得到

$$\begin{aligned}
P(n)-P(n-1)&=\sum_{k=0}^{n}P(n,k)-\sum_{k=0}^{n-1}P(n-1,k)\\
&=\sum_{k=2}^{n}P(n,k)-P(n-1,k-1)+P(n,1)\\
&=\sum_{k=2}^{[\frac{n}{2}]}P(n-k,k)+P(n,1)\\
&=1+\sum_{k=2}^{n}P(n-k,k)
\end{aligned}$$

同理, 又有

$$P(n-1)-P(n-2)=1+\sum_{k=2}^{[\frac{n-1}{2}]}P(n-1-k,k)$$

根据分拆数的定义, 显然 $P(n-k,k)>P(n-k-1,k)$ 因此,

$$P(n)=P(n-1)\geq P(n-1)-P(n-2)$$