组合数学作业 3

1. 求解如下递推关系:

a.

$$\begin{cases} h_n = (n+2)h_{n-1} + (n+2) & (n \geq 1) \\ h_0 = 2 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} h_n = 2h_{n-1} - h_{n-2} + n + 1 & (n \geq 2) \\ h_0 = 3; \qquad h_1 = 4 \end{cases}$$

解 对于 a, 设对应指数生成函数 $H(x)$

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h_n}{(n+2)!}x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)(h_{n-1}+1)}{(n+2)!}x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_{n-1}}{(n+1)!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n \\ &= 1 + xH(x) + \frac{1}{x}(e^x - 1 - x) \end{aligned}$$

进而, 我们可以得到

$$\begin{aligned} (1-x)H(x) &= \frac{1}{x}(e^x - 1) \\ H(x) &= \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!})x^n \end{aligned}$$

进而, 有

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+2)!}{(k+1)!}$$

对于 b, 我们设 $h_n, n+1$ 对应的生成函数是 $H(x), G(x)$ 对于 $G(x)$, 可以得到

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= (\frac{x}{1-x})' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

根据递推式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} H(x) - 2xH(x) + x^2H(x) = 3 - 2x + G(x) - 1 - 2x \\ (1-x)^2H(x) &= 2 - 4x + \frac{1}{(1-x)^2} \\ H(x) &= -\frac{2}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^4} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4x^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n \end{aligned}$$

因此, 我们求得

$$h_n = \frac{1}{6}n^3 + n^2 - \frac{1}{6}n + 3$$

2. 设数列 $a_n = n^3$, 求它的生成函数

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

和指数生成函数

$$E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

解 对于生成函数, 考虑

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ x(\frac{1}{1-x})' = \frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n \\ x(\frac{x}{(1-x)^2})' = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n \\ x(\frac{x^2+x}{(1-x)^3})' = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^3x^n \end{aligned}$$

也即

$$G(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$$

对于指数生成函数, 考虑

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\
x(e^x)' = xe^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n \\
x(xe^x)' = x(1+x)e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n \\
x[(x^2+x)e^x]' = (x^3+3x^2+x)e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}x^n
\end{aligned}$$

也即

$$E(x) = (x^3 + 3x^2 + x)e^x$$

3. *考察由 $\{a, b, c\}$ 中的字母构成的字符串. 分别计算满足下面各种限制的 n 位字符串个数:*
a. 每个字母至少出现一次;
b.a 和 b 出现的次数都为偶数;
c.a 的个数为偶数, b 的个数模 3 余 1

解 对于 a, 利用容斥原理, 只有 a, b, c 三者其中之二的字符串个数为

$$3 \times (2^n - 2)$$

只有 a, b, c 三者其中之一的字符串个数为 3, 因此, 可以推得

$$a_n = 3^n - 3 \times 2^n + 3$$

对于 b, 利用递推关系求解, 设全是偶数、a 奇 b 偶、a 偶 b 奇的 n 位数个数分别为 h_n, g_n, a_n, b_n 则有如下递推关系

$$\begin{cases}
h_n = a_{n-1} + b_{n-1} + h_{n-1} \\
g_n = a_{n-1} + b_{n-1} + g_{n-1} \\
a_n = a_{n-1} + h_{n-1} + g_{n-1} \\
b_n = b_{n-1} + h_{n-1} + g_{n-1}
\end{cases}
\quad \text{初始条件:} \begin{cases}
h_0 = 1 \qquad h_1 = 1 \\
a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \\
b_0 = 0 \qquad b_1 = 1 \\
g_0 = 0 \qquad g_1 = 0
\end{cases}$$

利用指数型生成函数求解, 设 a,b,c 的个数分别为 i,j,k, 指数型生成函数为 $H(x)$

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i|2, j|2}} \frac{1}{i!j!k!} x^n \\
&= (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots) \\
&= (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 e^x \\
&= \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3^n}{4n!} + \frac{1}{2n!} + (-1)^n \frac{1}{4n!}) x^n
\end{aligned}
$$

于是我们得到

$$
h_n = \frac{3^n}{4} + \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{1}{4}
$$

对于 c, 同样利用指数型生成函数来求解, 记号与 b 问相同

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i|2, j \equiv 1 (mod 3)}} \frac{1}{i!j!k!} x^n \\
&= (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)(\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)
\end{aligned}
$$

对于 $(\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)$, 我们设 $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} \\
e^{\omega x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} \\
e^{\omega^2 x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \omega \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}
\end{aligned}
$$

因此, 我们可以得到

$$
\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{1}{3}(e^x + \omega^2 e^{\omega x} + \omega e^{\omega^2 x})
$$

进一步可以得到

$$
\begin{aligned}
H(x) &= (\frac{e^x + e^{-x}}{2})(\frac{e^x + \omega^2 e^{\omega x} + \omega e^{\omega^2 x}}{3}) e^x \\
&= \frac{1}{6}(e^{3x} + \omega^2 e^{(\omega+2)x} + \omega e^{(\omega^2+2)x} + e^x + \omega^2 e^{\omega x} + \omega e^{\omega^2 x})
\end{aligned}
$$

进而, 有

$$h_n = \frac{1}{6}(3^n + 1 + \omega^2(\omega+2)^n + \omega(\omega^2+2)^n + \omega^{n+2} + \omega^{2n+1})$$

4. 考察由 $\{2,3,5\}$ 中的数字组成的 n 位数, 问这些数中能被 *3* 整除的有多少

解 设被三整除, 模 3 余 1, 模 3 余 2 的 n 位数个数分别是 a_n, b_n, c_n
递推关系如下

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = b_{n-1} + 2c_{n-1} \\ c_n = 2a_{n-1} + c_{n-1} \end{cases}$$

通过整理上述三条递推关系中的方程, 我们可以得到

$$a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - 9a_{n-3} = 0 \qquad \text{初始条件:} \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 9 \end{cases}$$

设生成函数为 A(x)

$$\begin{aligned} A(x) - 3xA(x) + 3x^2A(x) - 9x^3A(x) &= (1-x)^2 \\ (1+3x^2)(1-3x)A(x) &= (1-x)^2 \\ A(x) &= \frac{(1-x)^2}{(1+3x^2)(1-3x)} \\ A(x) &= \frac{2}{3}\frac{1}{1+3x^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-3x} \\ A(x) &= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 3^n x^{2n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n \end{aligned}$$

最终可以得到

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \times 3^n \qquad \text{(n 为奇数)} \\ \frac{1}{3} \times 3^n + \frac{2}{3} \times (-1)^{\frac{n}{2}} \times 3^{\frac{n}{2}} \qquad \text{(n 为偶数)} \end{cases}$$

另证: 利用指数型生成函数 $T(x)$ 求解, 设 2,3,5 的个数分别是 i,k,j

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{i+j+k=n \\ i|3, j|3}} \frac{1}{i!j!k!} + \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i\equiv 1(mod3) \\ j\equiv 2(mod3)}} \frac{1}{i!j!k!} + \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i\equiv 2(mod3) \\ j\equiv 1(mod3)}} \frac{1}{i!j!k!} \Big) x^n \\
&= \frac{e^x(e^x+e^{\omega x}+e^{\omega^2 x})(e^x+e^{\omega x}+e^{\omega^2 x}) + 2e^x(e^x+\omega^2 e^{\omega x}+\omega e^{\omega^2 x})(e^x+\omega e^{\omega x}+\omega^2 e^{\omega^2 x})}{3} \\
&= \frac{3e^{2x}+3e^{2\omega x}+3e^{2\omega^2 x}+2e^{(\omega+1)x}+2e^{(\omega^2+1)x}+2e^{(\omega^2+\omega)x}}{3}
\end{aligned}
$$

进而可以得到

$$
t_n = \frac{1}{3}(3\times 2^n(1+\omega^n+\omega^{2n}) + 2(\omega+1)^n + 2(\omega^2+1)^n + 2(\omega^2+\omega)^n)
$$

(不知道这第二个做法对不对, 不太确定, 但是第一个解法应该是没有问题的)

5. 给定一个 n 个节点的扇形, 问 W_n 有多少棵不同的生成树

解 考虑递推关系, 设 W_n 之中最右边的两个点为 m, n, W_n 之中新加上的点为点 p, 考虑三种情况, 设有 mn 边的生成树为 A_n, 没有 mn 边的生成树为 B_n, 考虑如下 2 种情况
情况 1: pm 和 pn 两条边只有一条, 这种情况下对应的数目是 W_{n-1}
情况 2: pm 和 pn 两条边同时都有, 由于不能出现环, 考虑上面的连接的弧的长度, 对应的数目是 $W_{n-2}+\ldots+W_1$
于是有如下递推关系

$$
W_n = 2W_{n-1} + W_{n-2} + \cdots + W_0 \qquad (n \geq 3)
$$

根据递推关系做差可以得到, 给出初始条件 $W_0 = 0, W_1 = 0, W_2 = 1$

$$
\begin{aligned}
W_n - 3W_{n-1} + W_{n-2} &= 0 \\
(1-3x+x^2)W(x) &= x^2 \\
W(x) &= \frac{x^2}{1-3x+x^2}
\end{aligned}
$$

最后可解得

$$
W_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{2}{3-\sqrt{5}})^{n-1} - (\frac{2}{3+\sqrt{5}})^{n-1})(n \geq 1)
$$

6. 考虑两个队伍 A,B 之间的 $2n$ 场无平局的比赛, 最终比分为 n 比 n, 且存在一个时间节点, A 的得分在此之前不少于 B 的得分, 在之后不多于 B 的得分满足这样的胜负结果序列有多少种?

解 考虑课上的例题图, 这个问题可以归结到两个" 不超过", " 不低于" 的问题上
考虑时间节点为 k (k=0,1,...,2n), 在节点 k 前不超过, 在节点 k 之前, A 不少于 B, 在节点 k 之后, A 不多于 B, 在这个节点前后都是 Catalan 数, 于是我们可以得到

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{k=0}^{n} C_k \times C_{n-k} \\ &= C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} \end{aligned}$$

7. 考虑用 n 个矩形铺贴高度为 n 的阶梯型, 对一般的 n, 求可能的方法数目

解 考虑将阶梯分为两部分考虑, 一部分是 k 高的阶梯, 另一部分是 n-k 高, 底长为 n 的" 直角梯形", 由此我们可以得到

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k}$$

下面考虑用 n-k 个矩形来铺贴 n-k 高, 底长为 n 的" 直角梯形", 的方法数, 考虑边缘上的 n-k 阶阶梯, 欲铺满这个梯形, 首先需要填满这个阶梯, 于是 $g_{n-k} \le h_{n-k}$, 再考虑先将这个阶梯铺满, 之后将于空白部分接触的延长, 这样就在不增加砖块数的情况下将这个梯形填满, 于是 $g_{n-k} \ge h_{n-k}$, 进而我们得到 $g_{n-k} = h_{n-k}$

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k} \sum_{k=0}^{n-1} h_k h_{n-k} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

8. 在一个圆上等间隔的选出 $2n$ 个点, 将这些点用 n 条互不相交的线段连成 n 对, 共有多少种不同的方式

解 考虑先选取一个点, 再随机连这个圆上的另一个点, 这样将这个圆分为两部分, 如果分割后的两部分所含的点是奇数, 那么无法完成题设, 于是这个点的连线必须将这 2n 个点分为偶数的两部分, 这样就归结到两个子问题, 于是我们得到

$$h_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \times h_{n-1-k} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$