组合数学第 10 讲

授课时间: 2024 年 11 月 4 日 授课教师: 孙晓明 记录人: 曾心格、王谊康

1 分拆数的特殊性质

定理 1. 定义 $D(n)$ 为将 n 分拆成各不相同的正整数之和的方法数，$O(n)$ 为将 n 分拆成若干个奇数之和的方法数，有 $D(n) = O(n)$。

证明（方法一） 我们利用生成函数，定义 $D(n)$ 的生成函数为 $D(x)$，$O(n)$ 的生成函数为 $O(x)$. 对于 $D(n)$，任何一个正整数在某种分拆下至多出现一次，因此，生成函数

$$D(x) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + x^k).$$

对于 $O(n)$，只有奇数可以出现在分拆中，即

$$O(x) = \prod_{k=0}^{+\infty}(\sum_{m=0}^{+\infty} x^{m(2k+1)}) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1 - x^{2k+1}}.$$

注意到

$$1 + x^k = \frac{1 - x^{2k}}{1 - x^k},$$

所以

$$\begin{aligned} D(x) &= \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + x^k) \\ &= \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - x^{2k}}{1 - x^k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{+\infty}(1 - x^{2k})}{\prod_{k=1}^{+\infty}(1 - x^k)}, \end{aligned}$$

注意到分数线上方的每一个乘积项都在分数线下方的乘积中出现，约分后，

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{\prod_{k=1}^{+\infty}(1 - x^{2k})}{\prod_{k=1}^{+\infty}(1 - x^k)} \\ &= \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1 - x^{2k+1}} \\ &= O(x). \end{aligned}$$

这说明 $D(x)$ 和 $O(x)$ 中 x^n 前的系数相同，即 $D(n) = O(n)$. □

证明（方法二） 我们可以建立两种分拆方式之间的一一映射关系。对于一个和数均为奇数的分拆，我们将相同的和数合并，则任何一种和数均为奇数的分拆可以表示为

$$n = \sum_{k=0}^{+\infty}(2k + 1)t_{2k+1},$$

其中 t_{2k+1} 表示在这种分拆下，$2k+1$ 作为和数出现的次数. 例如 $16=1+1+1+3+3+7$ 可以表示为 $16=1\times 3+3\times 2+7\times 1$. 显然，不同的分拆对应的表示不同. 对于这种表示下的每一项 $(2k+1)t_{2k+1}$，t_{2k+1} 可以被唯一分拆成若干个不同 2 的幂次的和，假设 $t_{2k+1}=\sum_{i=1}^{m}2^{a_i}$，则 $(2k+1)t_{2k+1}=\sum_{i=1}^{m}(2k+1)2^{a_i}$，这个和式中的每一项互不相同，且由于每个正整数可以被唯一分解为一个奇数和一个 2 的幂次的乘积，和式中的每一项也不会与其他 $(2k+1)t_{2k+1}$ 中产生的和项相同，所以我们得到了一个和数均不相同的分拆. 例如

$$\begin{aligned}16&=1+1+1+3+3+7\\&=1\times 3+3\times 2+7\times 1\\&=1\times(2+1)+3\times(2)+7\times(1)\\&=1\times 2+1\times 1+3\times 2+7\times 1\\&=2+1+6+7\end{aligned}$$

展示了一个和数均为奇数的分拆映射到一个和数均不相同的分拆的过程. 这种映射方式是和数均为奇数的分拆到和数均不相同的分拆的一个单射，所以 $O(n)\le D(n)$.

反过来的过程是类似的，对于一个和数均不相同的分拆，我们考虑其中的每个和数 x，这个和数可以被唯一分解为一个奇数和一个 2 的幂次的乘积，记为 $x=(2k+1)\times 2^a$，此时我们将 x 分拆为 2^a 个 $2k+1$ 相加. 在对每个和数做如此操作之后，我们便得到一个和数均为奇数的分拆. 例如

$$\begin{aligned}16&=2+1+6+7\\&=1\times 2+1\times 1+3\times 2+7\times 1\\&=1+1+1+3+3+7\end{aligned}$$

展示了一个和数均不相同的分拆转换到一个和数均为奇数的分拆的过程. 这个过程是前面一个映射的逆过程，这说明对于任何一个和数均不相同的分拆，它在前述映射规则下都有一个原像，所以前述映射是一个满射，所以 $O(n)\ge D(n)$.

综上所述，$D(n)=O(n)$. □

2 数论基本概念与预备知识

定义 2 (向下取整、向上取整和小数部分). *x 向下取整是指不大于 x 的最大整数，即*

$$\lfloor x\rfloor \triangleq \max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\},$$

x 向上取整是指不小于 x 的最小整数，即

$$\lceil x\rceil \triangleq \min\{n\in\mathbb{Z}\mid n\ge x\},$$

x 的小数部分即

$$\{x\}\triangleq x-\lfloor x\rfloor.$$

其中 $\lfloor x\rfloor$ 被称作 Gauss 符号，有些文献将上述三种符号统称为 Gauss 符号.

例 1

$$\lfloor 8\rfloor = 8, \lfloor 2.5\rfloor = 2, \lfloor -2.5\rfloor = -3,$$
$$\lceil 8\rceil = 8, \lceil 2.5\rceil = 3, \lceil -2.5\rceil = -2.$$

性质 3.

$$\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1,$$

$$\lceil x\rceil \ge x > \lceil x\rceil - 1.$$

性质 4. 对于任意的整数 n 和实数 x，有

$$\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n,$$

一般的，

$$\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\}\rfloor.$$

证明 首先 $\lfloor x\rfloor + n \le x+n$，又 $\lfloor x\rfloor + n + 1 \ge (\lfloor x\rfloor + 1) + n > x+n$, 于是 $\lfloor x\rfloor + n$ 是不大于 $x+n$ 的最大整数，$\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$.

于是 $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \{x\} + \{y\}\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\}\rfloor$. □

性质 5.

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1 \ge \lfloor x+y\rfloor \ge \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$$

特别的，取 $x = y$ 有：

$$2\lfloor x\rfloor + 1 \ge \lfloor 2x\rfloor \ge 2\lfloor x\rfloor$$

证明 $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\}\rfloor$, 又 $0 \le \{x\} + \{y\} < 2$, 则 $0 \le \lfloor \{x\} + \{y\}\rfloor \le 1$，得证. □

性质 6. 对于任意的正整数 n、p、q, 有：

$$\left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{q} \right\rfloor$$

证明 不妨设 $\frac{n}{p} = \lfloor m_1\rfloor + \{m_1\}$，则 $\frac{n}{pq} = \frac{\lfloor m_1\rfloor}{q} + \frac{\{m_1\}}{q}$；
由于 $\{m_1\}$ 表示 m_1 的小数部分, 本身即小于 1, 除以整数 q 后必然小于 1, 故 $\left\lfloor \frac{\{m_1\}}{q} \right\rfloor = 0$;
则原式左侧可写作:

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\lfloor m_1\rfloor}{q} + \frac{\{m_1\}}{q} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor m_1\rfloor}{q} \right\rfloor + 0 + \left\lfloor \{\frac{\lfloor m_1\rfloor}{q}\} + \{\frac{\{m_1\}}{q}\} \right\rfloor.\end{aligned}$$

$\frac{\{m_1\}}{q} < \frac{1}{q}$, 且因为 $\lfloor m_1 \rfloor$ 是整数, $\{\frac{\lfloor m_1 \rfloor}{q}\} \le \frac{q-1}{q}$, 则 $\{\frac{\lfloor m_1 \rfloor}{q}\} + \{\frac{\{m_1\}}{q}\} < 1$, 所以 $\left\lfloor \{\frac{\lfloor m_1 \rfloor}{q}\} + \{\frac{\{m_1\}}{q}\} \right\rfloor = 0$. 因此

$$\left\lfloor \frac{n}{pq} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor m_1 \rfloor}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{q} \right\rfloor.$$

□

例 2　2024! 的末尾有多少个 0?

解　记 s 为 2024! 的末尾 0 的个数. 设 $2024! = 2^\alpha 5^\beta t$, 其中 t 不含因子 2 或 5, 则 $s = \min\{\alpha, \beta\}$, 下面分别求解 α, β, 以 α 为例，$1, 2, \ldots, 2024$ 中有 $\lfloor \frac{2024}{2} \rfloor$ 个数包含因子 2，但是其中有一部分整数包含不止一个 2 的因子, 所以我们还要考虑有多少数包含因子 2^2. $1, 2, \ldots, 2024$ 中有 $\lfloor \frac{2024}{2^2} \rfloor$ 个数包含因子 2^2，因为我们在之前计算含有因子 2 的整数的时候已经计算过了他们的一个因子 2，所以此处考虑额外的 2 的因子数量不需要乘 2. 类似的操作进一步考虑含有因子 $2^3, 2^4, \ldots$ 的整数，得到

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\lfloor \frac{2024}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2024}{2^{10}} \right\rfloor \\ \beta &= \left\lfloor \frac{2024}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2024}{5^4} \right\rfloor \\ &= 503 \end{aligned}$$

由于此处 α 显然大于 β，$s = \beta = 503$.

上述问题可一般化为求素数 p 在 $n!$ 中出现的次数, 即求 $\max\{m \in \mathbb{N} | (p^m \mid n!)\}$.
若记 $d_p(n) := \max\{m \in \mathbb{N} | (p^m \mid n!)\}$, 则有

$$d_p(n) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots = \sum_{k \ge 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

注意到若 $p^k > n$, $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$, 所以实际上 $d_p(n)$ 为有限项求和.

3 Bertrand-Chebyshev 定理

定理 7. *(Bertrand-Chebyshev 定理).* 对于 $\forall x \geq 1$, $\exists$ 素数 $p \in (x, 2x]$.

证明 $(Paul\ Erdös)$ 当 x 比较小时，我们可以做如下验证：

$$
\begin{aligned}
1 \leq x < 2 \text{ 时}, 2 \in (x, 2x];\\
2 \leq x < 3 \text{ 时}, 3 \in (x, 2x];\\
3 \leq x < 5 \text{ 时}, 5 \in (x, 2x];\\
5 \leq x < 7 \text{ 时}, 7 \in (x, 2x];\\
7 \leq x < 13 \text{ 时}, 13 \in (x, 2x];\\
13 \leq x < 23 \text{ 时}, 23 \in (x, 2x];\\
23 \leq x < 43 \text{ 时}, 43 \in (x, 2x];\\
43 \leq x < 83 \text{ 时}, 83 \in (x, 2x];\\
83 \leq x < 163 \text{ 时}, 163 \in (x, 2x];\\
163 \leq x < 317 \text{ 时}, 317 \in (x, 2x];\\
317 \leq x < 631 \text{ 时}, 631 \in (x, 2x];\\
631 \leq x < 1019 \text{ 时}, 1019 \in (x, 2x].
\end{aligned}
$$

它们可以处理 $1 < x < 1019$ 的情形. 当 $x \geq 1019 > 1000$ 时, 考虑

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \prod_{p \leq 2n, p\text{为素数}} p^{d_p(2n) - 2d_p(n)}$$

利用反证法, 假设 $\exists n$, $n > 1000$ 使得区间 $(n, 2n]$ 内不存在素数, 则有

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \prod_{p \leq n, p\text{为素数}} p^{d_p(2n) - 2d_p(n)}$$

根据 Stirling 定理，有

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}},$$

可以证明，如果 $(n, 2n]$ 之间没有素数，则可导出矛盾

$$\binom{2n}{n} \ll \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

我们将

$$\begin{aligned}\prod_{p\le n, p\text{为素数}} p^{d_p(2n)-2d_p(n)} &= \left(\prod_{p\le\sqrt{2n}, p\text{为素数}} p^{d_p(2n)-2d_p(n)}\right)\\ &\cdot\left(\prod_{\sqrt{2n}<p\le\frac{2}{3}n, p\text{为素数}} p^{d_p(2n)-2d_p(n)}\right)\\ &\cdot\left(\prod_{\frac{2}{3}n<p\le n, p\text{为素数}} p^{d_p(2n)-2d_p(n)}\right)\\ &= A\cdot B\cdot C\end{aligned}$$

分成 3 个部分分别讨论.

对于 C，$\frac{2n}{3}<p\le n$ 时，

$$1\le\frac{n}{p}<\frac{3}{2}, 2\le\frac{2n}{p}<3.$$

$$d_p(2n)-2d_p(n)=2-1\times 2=0.$$

故 $C=1$.

对于 A，$1\le p\le\sqrt{2n}$ 时，由下取整函数性质，有

$$d_p(2n)-2d_p(n)=\sum_{k\ge 1}(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor)\le\sum_{k=1}^{\lfloor\log_p 2n\rfloor}1=\lfloor\log_p 2n\rfloor\le\log_p 2n,$$

所以

$$p^{d_p(2n)-2d_p(n)}\le p^{\log_p 2n}=2n,$$

可得

$$\begin{aligned}\prod_{1\le p\le\sqrt{2n}} p^{d_p(2n)-2d_p(n)} &\le\prod_{1\le p\le\sqrt{2n}} 2n\\ &=(2n)^{\pi(\sqrt{2n})}\\ &\le 2n^{\sqrt{2n}}\\ &=e^{\sqrt{2n}\ln 2n}.\end{aligned}$$

其中，$\pi(\sqrt{2n})$ 代表 1 到 $\sqrt{2n}$ 的素数的个数。

对于 B，$\sqrt{2n}<p\le\frac{2n}{3}$ 时，

$$d_p(2n)-2d_p(n)=\left\lfloor\frac{2n}{p}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{2n}{p}\right\rfloor=1.$$

所以

$$\prod_{\sqrt{2n}<p\le\frac{2n}{3}} p^{d_p(2n)-2d_p(n)}\le\prod_{\sqrt{2n}<p\le\frac{2n}{3}} p^1<\prod_{1\le p\le\frac{2n}{3}} p\le 4^{\frac{2n}{3}}.$$

这里红色的不等号涉及到一个引理.

引理 8. $\forall\ m \in \mathbb{N}, \prod\limits_{p\le m,\, p为素数} p \le 4^m.$

证明 我们利用数学归纳法来证明该结论:

1）$m=1$ 的初始情况容易验证.

2）假设命题对 $\le m$ 的情况成立, 考虑对 $m+1$ 是否成立:

a. 对 $m+1=2k \quad (k\in\mathbb{Z})$, 有

$$\prod_{p\le m+1,\, p为素数} p = \prod_{p\le m,\, p为素数} p \ \le\ 4^m \ \le\ 4^{m+1}$$

结论成立.

b. 对 $m+1=2k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})$, 有

$$\begin{aligned}\prod_{p\le 2k+1,\, p为素数} p &= \prod_{p\le k+1,\, p为素数} p \cdot \prod_{k+2\le p\le 2k+1,\, p为素数} p \\ &\le \prod_{k+2\le p\le 2k+1,\, p为素数} p\ \cdot\ 4^{k+1}\end{aligned}$$

考虑 $\binom{2k+1}{k}=\frac{(2k+1)(2k)\cdots(k+2)}{k!}$, 注意到 $[k+2,2k+1]$ 内的素数出现且仅出现在分子上, 于是有

$$\prod_{k+2\le p\le 2k+1,\, p为素数} p \le \binom{2k+1}{k} \le \frac{2^{2k+1}}{2}$$

即

$$\begin{aligned}\prod_{p\le 2k+1,\, p为素数} p &\le \binom{2k+1}{k}\ \cdot\ 4^{k+1} \\ &\le \frac{2^{2k+1}}{2}\ \cdot\ 4^{k+1} \\ &= 4^{2k+1}\end{aligned}$$

故引理 $\forall m\in\mathbb{N}, \prod\limits_{p\le m,\, p为素数} p \le 4^m$ 得证. □

回到 Bertrand-Chebyshev 定理的证明中，将 A,B,C 相乘可得:

$$\binom{2n}{n} \le e^{\sqrt{2n}\ln 2n} 4^{\frac{2n}{3}} = 2^{\sqrt{2n}\log_2 2n+\frac{4n}{3}} \ll \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

故假设 $(n,2n]$ 中没有素数不成立，原命题得证. □