组合数学作业 7

1. *证明: 任给 $\mathbb{R}^3$ 的 6 个向量, 一定存在两个向量, 其内积不小于 0*

证明 如果这六个向量之中有 0 向量, 则结果显然. 如果这六个向量都是从原点出发的非零向量, 考虑其中一个向量 $\vec{v_1}$, 做它过原点的法平面, 这个法平面将这个空间分为两部分, 有其他向量和这个向量在这个法平面的同一侧, 或者平面上, 那么这两个向量内积不小于 0. 如果其他的五个向量都在这个平面的另一侧, 则考虑它们在这个法平面上的投影, 这个五个投影向量落在一个平面内, 则一定有两条投影向量的夹角小于等于 90°, 那么它们在立体空间中的夹角小于等于它们投影平面内的夹角, 则这两个向量的内积大于等于 0.
事实上, 从这个证明可以直接看出, 5 条向量就够了 □

证明 对于向量投影后夹角变化的的证明: 由于是角度, 所以与坐标系的选取无关, 选取标准坐标系和两个位于 $x-y$ 平面上方的向量 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, 则对于它们和它们所对应投影向量的夹角可以利用等腰三角形来比较, 底边不变, 两个腰经过投影后变小, 夹角变大, 于是投影后的夹角不小于投影前的夹角. □

2. *对 6 阶完全图 K_6 的边做任意二染色, 证明存在两个同色三角形 (两个三角形的颜色可以不同)*

证明 证明中的所有假设都不失一般性, 我们考虑在 ABCEFG 中的 ABC 三点为一个红色三角形, 若 EFG 为同色三角形, 则得证, 设 EFG 不是同色三角形, 则设其中 EF 为蓝边. 由抽屉原理, 从 E 点出发到 A,B,C 三点中的线段至少由两条同色, 若这两条同色线段为红色, 则这个图中存在两个红色三角形, 得证. 若这两条线段为蓝色, 设 EA, EC 两条边为蓝色. 同理, 从 F 出发到 A,B,C 三点的三条线段也至少由两条为蓝色, 这说明 FA, FC 二者之中一定有一条为蓝色, 也就是说 CEF 和 AEF 中一定有一个为蓝色三角形. □

3. *令 $\mathbb{Z}^2$ 为平面上整点的集合, 证明在其中任取 9 个点, 其中一定存在三个点, 他们的重心也是整点*

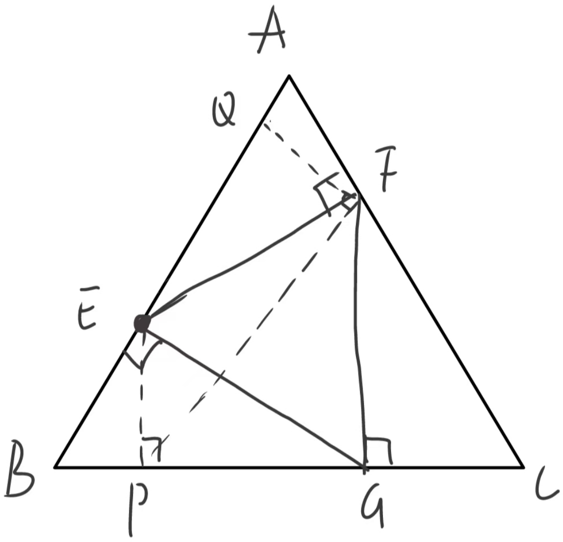
证明 考虑二位坐标关于 3 的模的坐标的情况有如下 9 种

$$(0,0)(1,0)(2,0)$$
$$(0,1)(1,1)(2,1)$$
$$(0,2)(1,2)(2,2)$$

如果这 9 个点中, 有三个占满了一行或者一列, 或者有三个在同一种情况下, 或者每行, 每列各取一个 (也即一种排列), 则这三个点的重心也是整点, 则为了保证不存在三个点的重心也是整点, 则需要保证每种情况至多有两个点, 同时一行或者一列都不能去满, 也不能每行每列各取一个, 为了使得取出来的点尽量不满足条件, 每种情况最多可以取两个点, 如果有九种中的五种情况, 则存在三个点满足条件, 因此这样最多可以有 4 个情况, 每种情况 2 个点, 由抽屉原理, 有 9 个点, 所以一定存在一个点, 使得有三个点的重心也是直角三角形 □

4. *设 ABC 是一个等边三角形, 将边 AB,BC,CA 上的每个点任意二染色, 证明存在一个同色直角三角形*

证明 考虑用黑白两种颜色对等边三角形 ABC 进行染色, 考虑如上图形
图中的 EFG 是一个等边三角形, 他的三条边分别和 ABC 的三条边垂直不失去一般性, 考虑将 E 点



染为黑色, 则 EFP 三点中至少有两点为同色, 下面对几种情况进行讨论:
1. 若 EP 都为黑色, F 为白色, 如果 BC 上存在不同 P 的黑色点, 则存在黑色的直角三角形, 如果 BC 上没有其他黑色点, 则过 F 一定存在直角边在 BC 上的直角三角形
2. 若 EFP 都为黑色, 则如果 BC 或者 AC 上存在不同于 F,P 的黑色点, 那么存在黑色的直角三角形, 反之 BC 和 AC 上除了 F,P 两点都是白色, 则一定存在顶点在 AC 和 BC 上的直角三角形
3. 对于 EF 的讨论与 1,2 完全对称, 不多赘述
4. 若 FP 为白色, 考虑 G, 如果 G 为白色, 则 FPG 为白色的直角三角形, 如果 G 为黑色, 则如果 AB 上存在不同于 E 点的黑色点, 则存在黑色的直角三角形, 反之, AB 上除了 E 以外都是白色点, 则 FPQ 为白色的直角三角形
综上所述, 同色直角三角形一定存在 □

5. *确定最小的正整数 n, 使得将集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 任意划分成 3 个互不相交的子集 A_1,A_2,A_3 后, 总存在正整数 $x,y,z\in A_i$, 满足 $x+y=z$*

证明 这个问题等价于将这 n 个正整数进行三染色, 则一定存在三个同色的正整数 x,y,z 满足 $x+y=z$, 题目并不要求 $x\neq y$, 于是考虑 Ramsey 定理, $Schur(3)\leq R(3,3,3)-1$, 根据 Rasmey 数的递推公式,

$$R(3,3,3)\leq 3\times R(2,3,3)$$

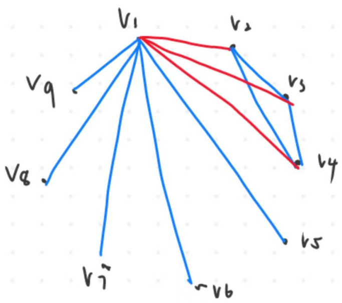
由于 $R(2,3,3)=6$, 所以 $R(3,3,3)\leq 18$, $schur(3)\leq 17$, 由于枚举的数目太多, 直接用程序检测, 最终检查出 $schur(3)=14$ □

6. 证明:$R(3,4)=9$

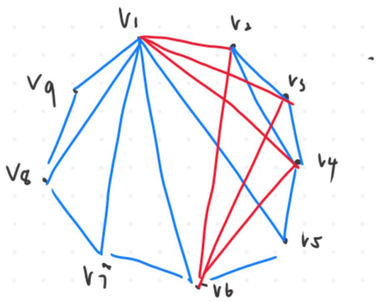
证明 对于课上讲的有关 Ramsey 定理的不等式递推, 有

$$R(3,4) \leq R(3,3) + R(2,4) = 6 + 4 = 10$$

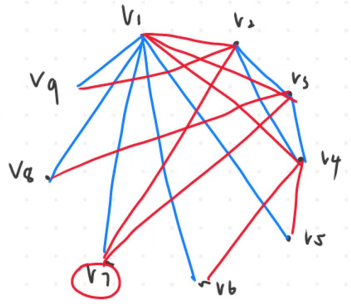
现在考虑从 r 任意一个点出发的 8 条边, 首先如果存在不少于 4 条红边或者不少于 6 条蓝边的情况, 则存在一个蓝色的 K_4 或者红色的 K_3, 反之, 如果从任意每个点出发都恰好有 3 条红边和 5 条蓝边, 推导过程如下 □



从v1开始连

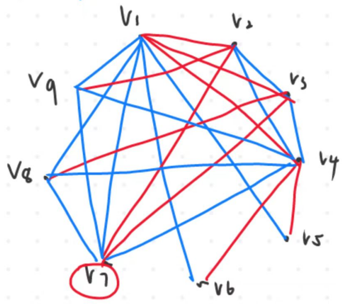


从v2~v4出发,有的R,连到同一点v6
则v6与v5~v9\{v6}只有B,
若v5~v9\{v6}中有与v6连的B,则有K4,
否则,与v2~v4形成K4 D)

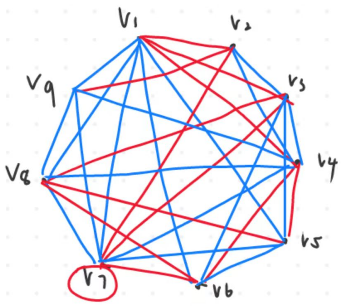


否则,至少有一个点有2条R边
形成上述图形(不失一般性,几个点等价)

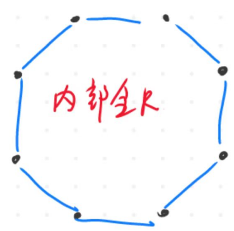
$\Longrightarrow$



则v2~v4的R已连完,为了不出现K3,
形成如上图形
v7与v6,v5连R多余,对于v6的情况



Counter example for 8.



则v7-v5连B,则v8v5连R,v5 v6连B
则v6 v8连R, v5 v8连R (路上出现K4),
则v8,v9连B, v1,v8,v9,v7形成K4 ⟹ R(3,4)≤9

7. 证明:$R(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq R(a_1, R(a_2, \ldots, a_n))$

证明 只需要证明有 $R(a_1, R(a_2, \ldots, a_n))$ 个点的完全图, 一定满足 $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 所限制的条件, 设 $M = R(a_1, R(a_2, \ldots, a_n)), m = R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 对有 M 个点的图进行 n 染色, 考虑将 a_1 对应的颜色视为一种颜色, 将 $a_2, \ldots, a_n$ 对应的颜色设为另一种颜色, 相当于对 K_M 进行二染色, 则一定存在同色的 K_{a_1} 或 $K_{R(a_2,\ldots,a_n)}$, 则根据我们的定义, 相当于对这个子图进行 $n-1$ 染色, 则根据 Ramsey 定理, $K_{R(a_2,\ldots,a_n)}$ 一定存在同色的 $K_{a_2}, \ldots, K_{a_n}$ 中的至少一个 □

8. 证明*: 存在正整数 N, 使得将 $1, 2, \ldots, N$ 任意三染色时, 都存在四个互不相同的正整数 x, y, z, w, 它们的颜色相同, 且 $xy = zw$*

证明 仅仅考虑对 2^n 进行染色, 对方程 $xy = zw$ 两端同时取 2 的对数, 则有 $\log_2(x)+\log_2(y) = \log_2(z) + \log_2(w)$, 设 $x = 2^a, y = 2^b, z = 2^c, w = 2^d$, 则等价与证明存在 $a + b = c + d$ 则我们在充分性上考虑长度为 4 的等差数列, 则根据范德瓦尔登定理, 一定存在长度为四的同色等差数列 a, c, d, b, 这个等差数列必定满足 $a + b = c + d$ □