1.简答题

（1）

试说明所有 $n\times n$ 的实矩阵组成的集合为数域 R 上的向量空间 $R^{n\times n}$，并给出该空间的一个内积以及对应的模。 用 S 表示满足 $trace(A)=0$ 的矩阵构成的集合，即
$S=\{A\in R^{n\times n}\mid trace(A)=0\}$， 试说明 S 是否为 $R^{n\times n}$ 的一个子空间，并给出理由。（10分）

（2）

对于 $m\times n$ 的矩阵 A 和 $n\times p$ 的矩阵 B，给出两个矩阵相乘的算法实现。（5分）

（3）

矩阵 A 为实的反对称矩阵，试说明 $I-A$ 为非奇异矩阵。（5分）

（4）

对于任意一个 $n\times n$ 的实矩阵 A，试说明是否存在矩阵 B 使得 $AB-BA=I$ 成立。（5分）

（5）

如果矩阵 A 为一个 2×2 的正交投影矩阵，试给出矩阵 A 的所有形式。（5分）

2.

对于矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\-2&1&-2\\4&-2&4\end{pmatrix}$，计算 $\|A\|_F$、$\|A\|_1$、$\|A\|_2$、$\|A\|_\infty$。（10分）

3.

求矩阵 A 的 LU 分解，即 $A=LU$，这里 L 和 U 分别为下三角矩阵和上三角矩阵。 再用此分解求解方程 $Ax=b$，$b=\begin{pmatrix}4\\10\\24\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&3&3\\8&7&9\end{pmatrix}$ （15分）

4.

设向量 $a=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$，试构造一个初等反射矩阵 H，使得 $Ha=b$。（12分）

5.

$B=\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ 和 $B'=\{u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},u_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\}$ 分别为 R^3 空间的一组基，I 为该空间的恒等算子，试求 $[I]_B,[I]_{B'},[I]_{BB'},[I]_{B'B}$。（13分）

6.

使用旋转矩阵构造 R^4 的一组包含向量 $x=\frac{1}{3}(-1,2,0,-2)^T$ 的标准正交基。（10分）

7.

实矩阵 N 为一个 index 为 k 的幂零矩阵，即 $N^k=0$，向量 x 满足 $N^{k-1}x\neq 0$，试说明
$\{x,Nx,N^2x,\dots,N^{k-1}x\}$ 为线性无关集合。（10分）