中国科学院大学

试 题 专 用 纸

考试日期：2016 年 5 月 16 日

课程编号：092M5006H

课程名称：矩阵分析与应用

任课教师：李保滨

姓名________________ 学号________________ 成绩________________

本试题共七题，满分 100，要求全做，答案请写在答题纸上。

一、判断下面说法是否正确。（20 分）

× 1. 高斯消去法求解 $n\times n$ 线性方程组时，使用乘法次数为 $\frac{n^3}{3}+n^2+\frac{n}{3}$，Gauss-Jordan 乘法次数为 $\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}$；

√ 2. A 为 $m\times n$ 的矩阵，如果 $trace(A^T A)=0$，那么 A 一定为零矩阵；

× 3. Hermitian 矩阵不一定是对称矩阵，但对称矩阵一定是 Hermitian 矩阵；

√ 4. $rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$ ；

√ 5. A 为 $n\times n$ 非奇异矩阵，那么 A 与 A^{-1} 等价；

× 6. 矩阵 $U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i & -1+i\\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}$ 为酉矩阵；

√ 7. A 为 $m\times n$ 的矩阵，且满足 $A^T A=0$，那么矩阵 $A=0$；

× 8. A 为 $n\times n$ 矩阵，$N(A)=N(A^2)$；

√ 9. 设 A 为 $n\times n$ 的反对称矩阵，当 n 为奇数时， A 为奇异矩阵（singular）；

× 10. Givens reduction 算法复杂度大约为 $\frac{2n^3}{3}$ ；

× 11. 矩阵 $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵；

√ 12. 实数对称矩阵都可以对角化；

× 13. 如果矩阵 A 和 B 都为对称矩阵，那么两个矩阵的乘积 AB 也为对称矩阵；

√ 14. 对于 $n\times n$ 的矩阵 A，$\det(A^*A)\ge 0$；

× 15. 如果 $\lambda\in\sigma(A),\mu\in\sigma(B)$，$\lambda+\mu\in\sigma(A+B)$；

× 16. 矩阵 $A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & \sqrt{8}\end{pmatrix}$，$\|A\|_2=2$；

× 17. 如果 $\sigma(A)=\sigma(B)$，那么矩阵 A 和 B 有相同的特征多项式（Characteristic Polynomial）；

× 18. $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$；

× 19. 对于 $n\times n$ 的矩阵 A，有 $R(A)\oplus N(A)=R^n$；

× 20. $trace(ABC)=trace(CAB)=trace(BAC)$ ；

二、(1) 写出 $Rank(A)=r$ 等价定义；(5 分)

(2) 写出矩阵 1-Norm,2-Norm 和 ∞-Norm 的定义；(3 分)

三、(1) 简要说明所有实矩阵 $A_{n\times n}$ 构成实数域 R 上的向量空间 V；(10 分)

(2) 并说明其中零元素的唯一性；(2 分)

(3) 对于向量空间 V，定义内积为 $\langle A|B\rangle = trace(A^T B)$. 试说明所有实对称矩阵组成的集合 S_n 为向量空间 V 的子空间，并给出 $S_n^{\perp}$。(10 分)

四、设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.901 \end{pmatrix}$$

使用高斯消去法分别在精确和 3-digit floating-point 意义下计算 $rank(A)$。(10 分)

五、设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

(1) 求矩阵 A 的 LU 分解 $PA=LU$；(10 分)

(2) 使用 LU 分解求解线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{b}=(3,60,1,5)^T$。(5 分)

六、设

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & -14 & -3 \\ -2 & 14 & 0 \\ 1 & -7 & 15 \end{pmatrix},$$

使用 Householder reduction 方法，找出 $R(A)$ 的一组标准正交基。(15 分)

七、设 A 为 $n\times n$ 的矩阵，证明：(1) $|trace(A)|^2 \le n\, trace(A^* A)$；(4 分)

(2) 如果 A 为对称矩阵 (symmetric matrix)，$index(A)\le 1$。(6 分)