中国科学院大学

考试日期：2017-11-22

课程编号：091M5028H

试 题 专 用 纸

课程名称：矩阵分析与应用

任课教师：李保滨

姓名[redacted]　　学号[redacted]　　成绩________

本试题共六题，满分 100，要求全做，答案请写在答题纸上。

10.5

一、判断下面说法是否正确。(15 分)

1. A、B 和 C 为 nxn 的矩阵，如果 AB=AC，那么 B=C；
2. A 为 $m\times n$ 的矩阵，如果 $trace(A^TA)=0$，那么 A 一定为零矩阵；
3. 对于 nxn 的矩阵 A，存在矩阵 X，使得 AX-XA=I；
4. $rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$ ；
5. A 为 $n\times n$ 非奇异矩阵，那么 A 与 A^{-1} 等价；
6. 矩阵 $U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i & -1+i\\ 1+i & 1-i\end{pmatrix}$ 为酉矩阵；
7. A 为 $m\times n$ 的矩阵，且满足 $A^TA=0$，那么矩阵 $A=0$；
8. A 为 $n\times n$ 矩阵，$N(A)=N(A^2)$；
9. 设 A 为 $n\times n$ 的反对称矩阵，当 n 为奇数时，A 为奇异矩阵（singular）；
10. A 为 nxn 的可逆矩阵，$A\sim A^{-1}$；
11. 高斯消去法求解 $n\times n$ 线性方程组时，使用乘法次数为 $\frac{n^3}{3}+n^2+\frac{n}{3}$，Gauss-Jordan 乘法次数为 $\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}$；
12. Hermitian 矩阵不一定是对称矩阵，但对称矩阵一定是 Hermitian 矩阵；
13. Givens reduction 算法复杂度大约为 $\frac{2n^3}{3}$ ；
14. A、B 为 mxn 的矩阵，且 A~B，那么 A 与 B 行等价；
15. 如果 $\lambda\in\sigma(A),\mu\in\sigma(B)$，那么 $\lambda+\mu\in\sigma(A+B)$；
16. $A=\begin{pmatrix}5+i & -2i\\ 2 & 4+2i\end{pmatrix}$ 为 Normal matrix；
17. 实数对称矩阵都可以对角化；
18. 如果矩阵 A 和 B 都为对称矩阵，那么两个矩阵的乘积 AB 也为对称矩阵；
19. 对于 $n\times n$ 的矩阵 A，$\det(A^*A)\ge 0$；
20. 矩阵 $A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & \sqrt{8}\end{pmatrix}$，$\|A\|_2=2$；

21. 如果$\sigma(A)=\sigma(B)$，那么矩阵A和B有相同的特征多项式（Characteristic Polynomial）；

22. $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$；

23. 矩阵$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&3&3&4\end{pmatrix}$可逆；

24. 对于$n\times n$的矩阵A，有$R(A)\oplus N(A)=R^n$；

25. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1/2&\alpha\\0&1/2\end{pmatrix}$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}A^n=0$；

26. 如果$\lambda\in\sigma(A),\mu\in\sigma(B)$，那么$\lambda\mu\in\sigma(AB)$；

27. A、B 为 mxn 的矩阵，如果对于任意的 nx1 的向量，都有 Ax=Bx，那么 A=B；

28. 设A为$m\times n$的矩阵，$R(A^TA)=R(A)$；

29. $\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\det(AD)-\det(BC)$；

30. 矩阵$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}\\0&1/\sqrt{3}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$为正交矩阵.

$A-\lambda I$.

6

二、（1）写出$Rank(A)=r$等价定义；（5分）

（2）写出矩阵 1-Norm,2-Norm 和∞-Norm 的定义，并对矩阵

$$\begin{pmatrix}4&-2&4\\-2&1&-2\\4&-2&4\end{pmatrix}$$

分别计算它的 1-Norm,2-Norm 和∞-Norm；（6分）

三、（1）简要说明所有实矩阵$A_{n\times n}$构成实数域 R 上的向量空间V；（10分）

ϕ V A_{nx}

0

（2）说明其中零元素的唯一性；（5分）

（3）对于向量空间V，定义内积为$\langle A|B\rangle=trace(A^TB)$，说明所有实对称矩阵组成的集合$S_n$为向量空间$V$的子空间，并给出$S_n^{\perp}$。（7分）

四、试用旋转矩阵构造 R^4 中一组标准正交基包含向量 $x=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-2\end{pmatrix}$.(10 分)

4

$\sqrt{5}$

五、对于矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1/3&1/3&1/3\\0&1&0&1/3&1/3&1/3\\0&0&1&1/3&1/3&1/3\\0&0&0&1/3&1/3&1/3\\0&0&0&1/3&1/3&1/3\\0&0&0&1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$$

计算 A^{300}.(12 分)

六、设

3

4

$$A=\begin{pmatrix}4&-3&4\\2&-14&-3\\-2&14&0\\1&-7&15\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}5\\-15\\0\\30\end{pmatrix}.$$

（1）使用 Householder reduction 方法，找出 $R(A)$ 的一组标准正交基；（15 分）

（2）使用 Householder reduction 方法计算 $Ax=b$ 的最小二乘解。（5 分）

七、设 A,B 为 $n\times n$ 的矩阵，证明：

0

（1）$trace(AB)=trace(BA)$；（4 分）

（2）如果 A 为对称矩阵（symmetric matrix），$index(A)\le 1$。（6 分）

ABx