

2025 矩阵分析与应用

作业三

1. 试说明所有 $n \times n$ 的实数矩阵构成的集合为一个线性空间。另外判断下列哪些是该空间的子空间，并给出理由。

(1) 所有对称矩阵；(2) 所有反对称矩阵；(3) 所有可逆矩阵；(4) 所有上三角矩阵；(5) 所有下三角矩阵；(6) 满足： $\text{trace}(\mathbf{A}) = 0$ 的所有矩阵。

2. \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 分别为 $m \times n$ 和 $n \times p$ 的矩阵，简要说明下面结论成立：

(1) $R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A})$.

(2) $N(\mathbf{B}) \subseteq N(\mathbf{AB})$.

3. 已知集合：

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

试判断该集合是否线性无关。

4. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -8 \end{pmatrix}$, 验证： $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{AA}^T)$.