2025 矩阵分析与应用

作业四

1. 设 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, 试说明下面哪些是线性变换。

(1) $\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times n}) = \mathbf{AX} - \mathbf{XA}$, (2)$\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$,

(3)$\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times n}) = \frac{\mathbf{X}+\mathbf{X}^T}{2}$ (4)$\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times 1}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

2. 设 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$，$\mathbf{T}$ 为 $\mathcal{R}^{n\times 1}$ 的一个线性算子，定义为：$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. 记 S 为标准基，试说明 $[\mathbf{T}]_S = \mathbf{A}$.

3. 对于向量空间 R^3,

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

为该空间的两组基。

(1) 对于恒等算子 $\mathbf{I}$，分别计算 $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

(2) 对于投影算子 $\mathbf{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, 计算 $[\mathbf{P}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

4. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^3 的一个线性算子, 其定义为 $\mathbf{T}(x,y,z) = (x-y, y-x, x-z)$, $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 为其一组基，$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 为 R^3 的一个向量。

(1) 分别计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$。

(2) 计算 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$，并验证 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 成立。

5.$\mathbf{A}(x,y,z) = (x+2y-z, -y, x+7z)$ 为 R^3 的一个线性算子，记

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(1) 计算 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}$.

(2) 求矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}\mathbf{Q}$ 成立。

6. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^4 的一个线性算子，其定义为 $\mathbf{T}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2+2x_3-x_4, x_2+x_4, 2x_3-x_4, x_3+x_4)$. 令 $\mathcal{X} = span\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$. 试说明 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，并计算 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}}$.

7. 对于 $\mathcal{R}^{2\times 2}$ 空间,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

为其一组基，对于该空间中任意矩阵 $\mathbf{A}$，线性算子 $\mathbf{T}$ 定义如下:

$$\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2},$$

计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$.