2025 矩阵分析与应用

作业五

1. 对于矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

分别计算 Frobenius-norm, 1-norm, 2-norm, ∞-norm.

2. 对于向量空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$, 定义 $<\mathbf{A},\mathbf{B}>= trace(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$.

(1) 简要说明 $<\mathbf{A},\mathbf{B}>$ 满足内积定义，为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 空间的一个内积。

(2) 证明

$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

为向量空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组标准正交基，并计算矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 在该组基下的傅里叶展开 (Fouier expansion).

(3) 试给出 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中一组新的标准正交基。

3. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，向量 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 给出矩阵 $\mathbf{A}$ 的 **QR** 分解；并给出 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解。

4. 对于向量组 $\left\{ \mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$，在三个有效数字情形下，分别使用传统 Gram-Schmidt 和修改后的 Gram-Schmidt 方法，把上述向量组正交化。