题目难度

简单：1001，1003，1007

中等：1002，1005，1006，1010

困难：1004，1008，1009

题解

1001 拼图游戏

不难发现，如果一个矩阵满足条件，那么所有包含该矩阵的矩阵也一定满足条件。矩阵的范围为(1,1)到(X,Y)，也就是说在固定其中一维的情况下，另一维对是否满足条件有单调性。

可以利用类似双指针的方法解决这道题目，先找到最小的X使得(1,1)到(X,M)的矩阵满足条件，然后尝试缩小另一维，再找到在X不变的情况下最小的Y使得(1,1)到(X,Y)满足条件。接下来令X+1，此时这个满足条件的最小的Y关于X的增大，只会减小或不变，不会增大。在过程中求M-Y的和即可。复杂度$O(NM)$。

1002 缓存系统

类似01背包问题，但增加了每组物品必须先选前面、再选后面的限制。可以在dp的状态增加一维0或1表示是否连续取，也可以给每一组求个前缀和，然后互斥的选择同一组的前缀即可。复杂度$O(NMX)$。

1003 独到寒山顶

签到题，把所有起点的坐标加入队列后进行BFS即可。注意终点可以是最后一排任意一个格子。复杂度$O(NM)$。

1004 毕业旅行

没有经过城市数量的限制就是最短路问题，但是由于X太大，不好直接枚举。

先不考虑城市数量的限制，直接做一次最短路，此时得到的方案中经过城市的数量如果不超过限制，直接可以作为答案；如果超过了限制，我们自然希望经过的数量变少一些，也就是说在求最短路的过程中相对优先考虑少经过一些节点。这里可以用“WQS二分”，也就是带权二分解决。我们在过程中给每条边增加一个相同的正权值v，这个权值越大，最短路算法就越倾向于在原图中选择节点数较少但总距离相对较大的路径。极端一点来说，如果$v = inf$，那么最终求得的结果将会是不考虑边权的BFS最短路。

我们需要做的就是二分这个v，然后跑最短路，根据当前最短路方案经过的节点数量来判断v该增大还是缩小，如果节点数量大于X则放大，小于X则缩小即可。复杂度$O(N \log M \log c_i)$。

这种做法的正确性有一个比较巧妙的说明方法：一个路径L经过t个点、长为l、每条边加v的路径最终长为$l + (t-1)v$，将其设为函数$f(L) = l + (t-1)v$。考虑v为x轴，$f(L)$为y轴，那么一个路径就可以表示为坐标系中的一条直线，所有路径可以表示为若干条直线。而不同v时候的最短路其实就是这些直线围出来的一个上凸壳。如果我们想要在上凸壳上找一条斜率不大于x的切线使得y轴截距最小，这里的y轴截距其实就是当$v = 0$时候的原图路径长度，显然凸包上切线对应y轴截距是单调的。

赛时经一位大佬提醒才醒悟过来（再次感谢），最短路问题中并不能保证是（最短路长度，最短路边数）这个点集是下凸的，所以也不满足WQS二分的条件要求，可以构造出hack的数据。本题数据由于暴力验证过，所以数据是对的，但是做法不一定正确，题解仅供参考，如果大家有更好的做法欢迎联系。

1005 咒语附魔

诈骗题。乍一看这个数据范围可能不好求解，但注意到题目描述中"数字串是随机生成的，也就是说每个位置上的数字等概率地生成为0或1"，而目标是让异或结果最大，所以只需要优先让异或结果的二进制表示中尽可能长的前缀全为1就可以。可以枚举在B上的起点，暴力扫描前缀，如果当前位置异或结果不为1就退出。随机生成的特性使得每扫到下一个位置都有50%的概率停止，所以长度不会很长。

需要注意的是可能存在多个起点位置异或结果前缀连续的1数量相同的情况，可以把它们都存起来排序一下找最大值。复杂度$O(N\log N)$。

1006 彩票

需要看第i天投注了多少个不会出现的数字，把这个值记为C_i。那么一个不会出现的数字，对应着某个j使得

$$ij+i+j+1\equiv i+1 \pmod n$$

化简我们知道这等价于$(i+1)j\equiv 0 \pmod n$。也就是说，j 需要满足：

$$j\equiv 0 \pmod{\frac{n}{\gcd(i+1,n)}}$$

令：

$$d=\frac{n}{\gcd(i+1,n)}$$

于是 j 必须是 d 的倍数，且 j 需要满足 $1\le j\le k$。所以，**计算满足条件的 j 的个数**

$$C_i=\left\lfloor\frac{k}{d}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{k}{\frac{n}{\gcd(i+1,n)}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{k\cdot\gcd(i+1,n)}{n}\right\rfloor$$

然后剩下的$k-C_i$个投注数字是有希望获奖的。注意奖金是可以用投注的数字挨个累加的；具体来说，设投注的数字是$a_1,\dots,a_k$，而开奖的数字是$b_1,\dots,b_m$。那么当日奖金可以改写为

$$\sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{m}[a_s=b_t]$$

所以可以单独看每个有效投注数字的贡献。每个投注数字被一个抽奖数字选中的概率是$\frac{1}{n-1}$，一共选m次，所以每个投注数字的奖金期望是$\frac{m}{n-1}$。所以期望得到的奖金总和是

$$\sum_{i=1}^{T}\frac{m(k-C_i)}{n-1}$$

这个数除以T就是平均每天的收益，向上取整就能保证老板至少不赔。

1007 架子鼓

首先可以把所有的时长都乘以48，这样就都变成整数来处理了。用两个数组分别存放所有的击打时间，然后用双指针法去统计所有重合的部分即可。

1008 奇袭

首先一次DFS求`s[u]`，表示以`u`为根的子树的点权和（以下称为重量）。

考虑二分法：二分这个最小值`mid`，看是否存在一种切割方案，使得产生的森林中，每棵树的点权和都不超过这个`mid`。

我们首先维护一个`f[u][j]`，表示我们单看`u`为根的子树（即假定`u`已经和`u`的父亲切割），那么是否可以找到一条从`u`开始往下的路径切`j`刀，切完以后得到的`j+1`个树的森林，满足其中每棵树都`<= mid`。

- 这是可以递归求解的：如果`u`有一个儿子`v`满足`f[v][j - 1]`并且`s[u] - s[v] <= mid`，那么`f[u][j]`为真。
- 初值是`f[u][0] = (s[u] <= mid)`。
- 注意`f[u][j]`为真隐含了这个子树的高度至少是`j`。

在求`f[u][j]`的同时我们可以维护`h[u][j][0/1]`，表示的是`u`的儿子`v`中满足`f[v][j]`为真的最重的两个`v`的值。

然后我们枚举节点`u`，表示我们选择的路径中深度最小的点。然后我们枚举这个路径怎么在`u`的儿子中分配。

如果我们只分配给`u`的一个儿子，那么只用找`v = h[u][k - 1][0]`即可（如果存在，下同），然后看切掉之后剩下的部分`s[0] - s[v] <= mid`是否成立。

下面，如果`u`至少有两个儿子，我们可以找`u`的两个儿子对路径进行分配。我们可以枚举`a + b = k`，其中`a`和`b`分别表示分配给每个儿子的路径长度。我们直接找`v1 = h[u][a - 1][0]`,然后`v2 = h[u][b - 1][0/1]`，之所以有可能取到`1`是因为两个儿子不能重合。看这两个点是否都存在，然后判断切剩下的部分`s[0] - s[v1] - s[v2] <= mid`是否成立即可。

值域设为Y（规模在10^{12}），时间复杂度是$O(KN\log Y)$。

1009 能量网络

把一个能量光束看成是图论中的点，把两个能量光束之间的能量网络组看成是图论中的边。如果一个能量光束AB是从点$A(x_A, y_A, z_A)$到点$B(x_B, y_B, z_B)$的，那么可以把AB的坐标定义为$(x_A + x_B, y_A + y_B, z_A + z_B)$。重新整理一下题目，就变成了：

给定m个点的空间坐标(x_i, y_i, z_i)，连接第i和第j个点边的成本是$\min\{|x_i - x_j|, |y_i - y_j|, |z_i - z_j|\}$，求最小生成树的成本。

设v_x是将这些点按x维度坐标为关键字对这些点进行排序后的序列。相似地，求出v_y和v_z。容易证明，如果一条边被选入最小生成树，那么这条边所连接的两个点，一定在v_x, v_y, v_z中的至少一个序列是相邻的。这样的话，我们便只需考虑这些相邻点之间的边（一共是$3(m-1)$条）去做Kruskal即可。

1010 字符串哈希

考虑两个哈希函数的性质，由于哈希函数$B(x)$的值域很小，最多只有10007个不同的取值，所以方程$B(x)^3 * c + B(x)^2 * d + B(x) * e + f = A(x)$等式左边同样最多有10007种取值。而$A(x)$函数不会发生碰撞的性质使得我们可以根据哈希值反推原字符串。所以在这道题目中我们可以枚举$B(x)$的值，根据等式左边的计算结果得到$A(x)$的值，再用$A(x)$反推出原字符串x的构成，代入到$B(x)$中判断是否满足即可。复杂度$O(10007 * k)$。