

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Учебно-исследовательская работа №2
по дисциплине
“Моделирование”

**“”ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
НА МАРКОВСКИХ МОДЕЛЯХ**

Вариант № 47.9

Студент:

Чухно Матвей
Романович
Вахрушев Данил
Сергеевич

Группа Р34312

Преподаватель:

Алиев Тауфик Измайлович



Санкт-Петербург, 2023

Содержание:

Цель работы:	3
Постановка задачи и исходные данные:	3
Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем	3
Параметры загрузки:	3
Описание исследуемой системы:	3
Перечень состояний марковского процесса для исследуемой системы:	4
Результаты работы:	4
Размеченный граф переходов марковского процесса	4
Матрица интенсивностей переходов	4
Значения стационарных вероятностей, сведенные в таблицу	4
Формулы, используемые для расчета характеристик системы и значения характеристик системы, сведенные в таблицы	5
Результаты (графики и выводы) сравнительного анализа характеристик функционирования исследуемых систем	5
Обоснование выбора наилучшего варианта организации системы в соответствии с заданным критерием эффективности	5
Вывод:	5

Цель работы:

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей - систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

Постановка задачи и исходные данные:

Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем:

СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2	
П	ЕН	П	ЕН
2	1/3	3	1/0/0

Параметры загрузки:

Интенс. потока	Ср.длит. обл.	Вероятность занятия прибора		
λ , 1/с	b, с	П1	П2	П3
0,9	4	0,5	0,3	0,2

Описание исследуемой системы:

Система 1:

- Система содержит 2 обслуживающих прибора
- Поток поступающих в систему заявок однородный
- Длительность обслуживания заявок в приборе – величина случайная
- Перед первым прибором есть 1 место для заявок, ожидающих обслуживания и образующих очередь. Перед вторым прибором - 3 места.
- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
- Длительность обслуживания заявок в приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью $\mu = 1/b$, где b – средняя длительность обслуживания.
- Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель заполненным, теряется.
- Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO).
- Заявка, поступившая в систему, с заданной вероятностью занятия прибора направляется к соответствующему прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен или отсутствует

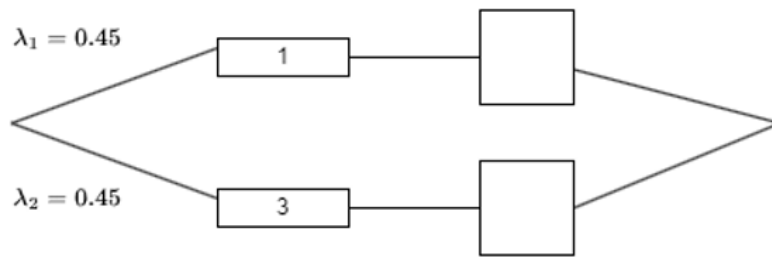


Рисунок 1. Схема системы 1.

Система 2:

- Система содержит 3 обслуживающих прибора
- Поток поступающих в систему заявок однородный
- Длительность обслуживания заявок в приборе – величина случайная
- Перед первым прибором есть 1 место для заявок, ожидающих обслуживания и образующих очередь. Перед вторым и третьим приборами мест для ожидающих заявок нет.
- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью λ .
- Длительность обслуживания заявок в приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью $\mu = 1/b$, где b – средняя длительность обслуживания.
- Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель заполненным, теряется.
- Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «первым пришел – первым обслужен» (FIFO).
- Заявка, поступившая в систему, с заданной вероятностью занятия прибора направляется к соответствующему прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен или отсутствует

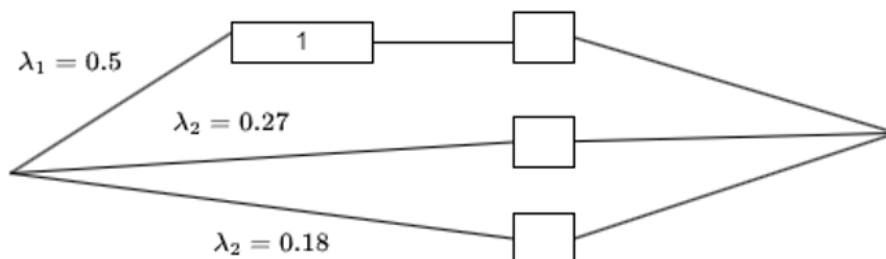


Рисунок 2. Схема системы 2.

Перечень состояний марковского процесса для исследуемой системы:

Результаты работы:

Размеченный граф переходов марковского процесса

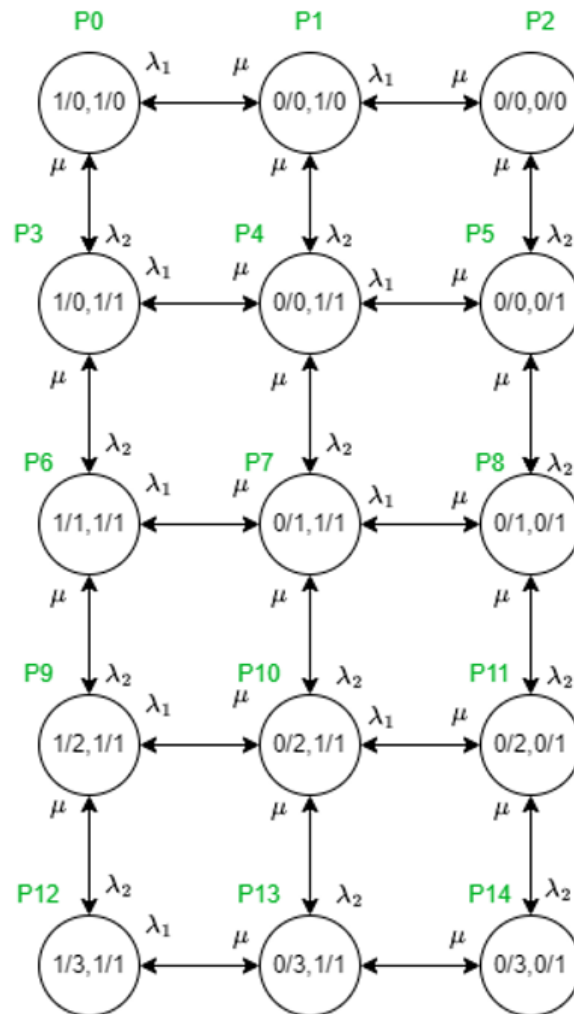


Рисунок 3. Размеченный граф переходов для системы 1

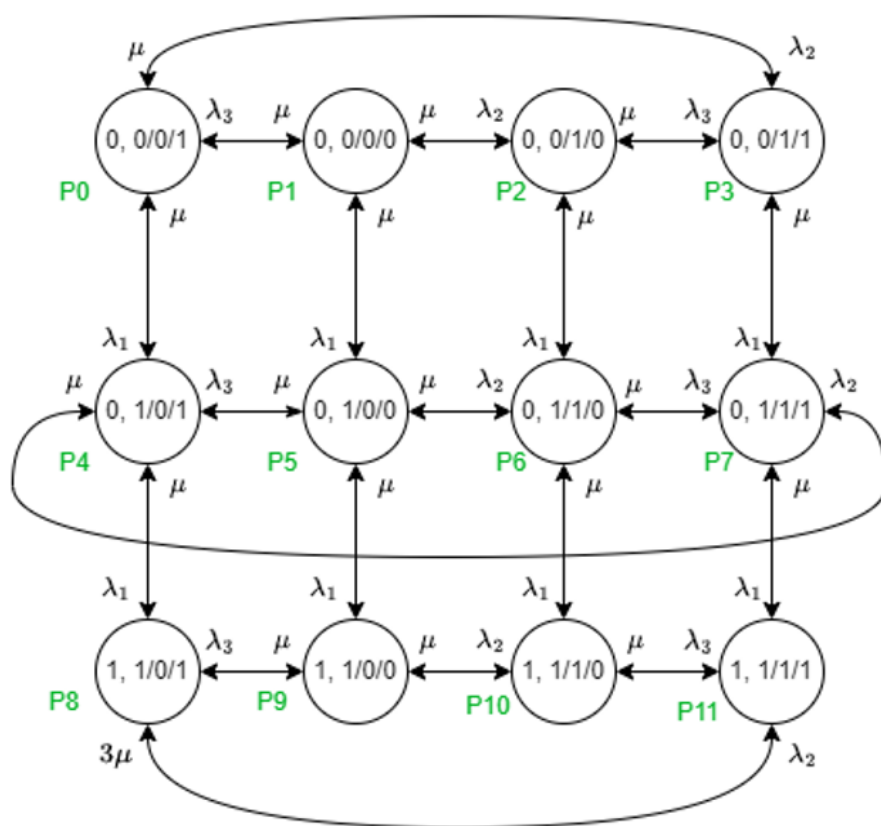


Рисунок 4. Размеченный граф переходов системы 2.

Матрица интенсивностей переходов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	mu	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	lam1	1	mu	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	lam1	2	0.0000	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	mu	0.0000	0.0000	3	mu	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	mu	0.0000	lam1	4	mu	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	mu	0.0000	lam1	5	0.0000	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	0.0000	6	mu	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	lam1	7	mu	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	lam1	8	0.0000	0.0000	lam2	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	0.0000	9	mu	0.0000	lam2	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	lam1	10	mu	0.0000	lam2	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	lam1	11	0.0000	0.0000	lam2
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	0.0000	12	mu	0.0000
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	lam1	13	mu
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	lam1	14

Рисунок 5. Матрица интенсивностей переходов системы 1.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	mu	0.0000	lam2	lam1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	lam3	1	lam2	0.0000	0.0000	lam1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	mu	2	lam3	0.0000	0.0000	lam1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	mu	0.0000	mu	3	0.0000	0.0000	0.0000	lam1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	mu	0.0000	0.0000	0.0000	4	mu	0.0000	lam2	lam1	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	mu	0.0000	0.0000	lam3	5	lam2	0.0000	0.0000	lam1	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	mu	0.0000	0.0000	mu	6	lam3	0.0000	0.0000	lam1	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	mu	mu	0.0000	mu	7	0.0000	0.0000	0.0000	lam1
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	0.0000	0.0000	8	mu	0.0000	lam2
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	0.0000	lam3	9	lam2	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	0.0000	0.0000	mu	10	lam3
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	mu	mu	0.0000	mu	11

Рисунок 6. Матрица интенсивностей переходов системы 2.

Скриншоты из программы WinMark, где μ_i - интенсивность выходящего потока системы, а $\lambda_{in}(i)$ - интенсивность входящего потока i -го прибора системы.

Значения стационарных вероятностей

Номер состояния	СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2	
	Обозн	Вер-ть	Обозн	Вер-ть
0	1/0, 1/0	0,024	0, 0/0/1	0,0333
1	0/0, 1/0	0,0133	0, 0/0/0	0,0463
2	0/0, 0/0	0,0074	0, 0/1/0	0,05
3	1/0, 1/1	0,0432	0, 0/1/1	0,036
4	0/0, 1/1	0,024	0, 1/0/1	0,06
5	0/0, 0/1	0,0133	0, 1/0/0	0,0833
6	1/1, 1/1	0,0777	0, 1/1/0	0,09
7	0/1, 1/1	0,0432	0, 1/1/1	0,0648
8	0/1, 0/1	0,024	1, 1/0/1	0,108
9	1/2, 1/1	0,1399	1, 1/0/0	0,1499
10	0/2, 1/1	0,0777	1, 1/1/0	0,1619
11	0/2, 0/1	0,0432	1, 1/1/1	0,1166
12	1/3, 1/1	0,2517		
13	0/3, 1/1	0,1399		
14	0/3, 0/1	0,0777		

Формулы, используемые для расчета характеристик системы и значения характеристик системы

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	СИСТ.1	СИСТ.2
Нагрузка	П1	λ_1/μ	1,8	1,8
	П2	λ_2/μ	1,8	1,08
	П3	λ_3/μ		0,72
	Сумм.	λ/μ	3,6	3,6
Загрузка	П1	$\sum_{i=0}^K p_i \times f(1), *$	0,8344370861	0,8345
	П2	$\sum_{i=0}^K p_i \times f(2), *$	0,9552964738	0,5193
	П3	$\sum_{i=0}^K p_i \times f(3), *$		0,4187

	Сумм.	$\frac{N}{(\sum_{i=1}^N \rho_i) / N}$	0,8948667799	0,5908333333
Длина очереди	П1	$\sum_{i=0}^L i(\sum_{k=0}^K p_k \times g(1, i)), **$	0,5364238411	0,5364
	П2	$\sum_{i=0}^L i(\sum_{k=0}^K p_k \times g(2, i)), **$	2,074100565	0
	П3	$\sum_{i=0}^L i(\sum_{k=0}^K p_k \times g(3, i)), **$		0
	Сумм.	$\sum_{i=1}^N l_i$	2,610524406	0,5364
Число Заявок	П1	$\sum_{i=0}^{L+1} i(\sum_{k=0}^K p_k \times h(1, i)), **$	1,370860927	1,3709
	П2	$\sum_{i=0}^{L+1} i(\sum_{k=0}^K p_k \times h(2, i)), **$	3,029397039	0,5193
	П3	$\sum_{i=0}^{L+1} i(\sum_{k=0}^K p_k \times h(3, i)), **$		0,4187
	Сумм.	$\sum_{i=1}^N m_i$	4,400257966	2,3089
Время ожидания	П1	$l_1 / \lambda_1^{'}$	2,571428571	2,571182053
	П2	$l_2 / \lambda_2^{'}$	8,684636119	0
	П3	$l_3 / \lambda_3^{'}$		0
	Сумм.	$\frac{N}{(\sum_{i=1}^N w_i) / N}$	5,628032345	1,285591027
Время пребывания	П1	$m_1 / \lambda_1^{'}$	6,571428571	6,571277922
	П2	$m_2 / \lambda_2^{'}$	12,68463612	4,001109493
	П3	$m_3 / \lambda_3^{'}$		4,001567368
	Сумм.	$\frac{N}{(\sum_{i=1}^N u_i) / N}$	9,628032345	5,286193707
Вероятность потери	П1	$\sum_{k=0}^N p_k \times g(1, L)$	0,5364238411	0,5364
	П2	$\sum_{k=0}^N p_k \times g(2, L)$	0,4692797368	0,5193
	П3	$\sum_{k=0}^N p_k \times g(3, L)$		0,4187

	Сумм.	$\sum_{i=1}^N \pi_i / N$	0,5028517889	0,4914666667
Интенсивность обслуженных заявок (Производительность)	П1	$\lambda_1(1 - \pi_1)$	0,2086092715	0,20862
	П2	$\lambda_2(1 - \pi_2)$	0,2388241184	0,129789
	П3	$\lambda_3(1 - \pi_3)$		0,104634
	Сумм.	$\sum_{i=1}^N \lambda_i$	0,44743339	0,338409
Коэффициент простоя	П1	$1 - \rho_1$	0,1655629139	0,1655
	П2	$1 - \rho_1$	0,04470352621	0,4807
	П3	$1 - \rho_1$		0,5813
	Сумм.	$\sum_{i=1}^N \eta_i / N$	0,1051332201	0,4091666667
Интенсивность потока потерянных заявок	П1	$\lambda_1 \pi_1$	0,2413907285	0,24138
	П2	$\lambda_2 \pi_2$	0,2111758816	0,140211
	П3	$\lambda_3 \pi_3$		0,075366
	Сумм.	$\sum_{i=1}^N \lambda_i$	0,45256661	0,456957

* - функция $f(X)$, принимающая значения 0 или 1 в зависимости от того, занят прибор X или нет

** - функция $g(X, i)$, принимающая значения 0 или 1 в зависимости от того, находится ли в очереди прибора X ровно i заявок или нет

*** - $h(X, i)$ функция, принимающая значения 0 или 1 в зависимости от того, находится ли в узле X ровно i заявок или нет

L - емкость накопителя

Результаты (графики и выводы) сравнительного анализа характеристик функционирования исследуемых систем

Сравнение характеристик систем

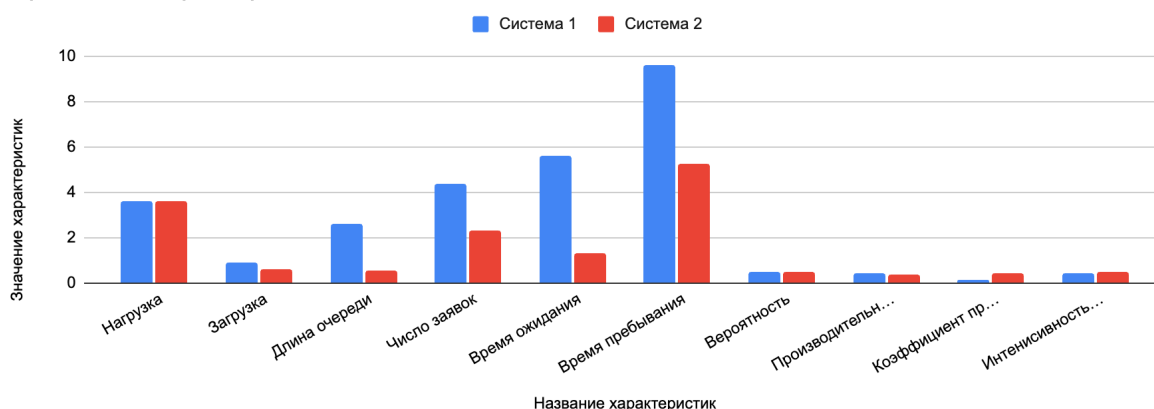


Рисунок 7. Сравнение характеристик систем

Сравнительный анализ характеристик систем:

- Нагрузка - равные значения, так как данная характеристика зависит от интенсивностей входящего потока и обработки заявок, значение которых одинаково для обеих систем.
- Загрузка - первая система имеет большее значение, так как данная характеристика учитывает долю работающих приборов. Во второй системе третий прибор имеет интенсивность поступления заявки меньше, чем интенсивность обработки заявки, то есть есть вероятность, что прибор будет простаивать. В первой же системе интенсивность поступления заявок приборов больше интенсивности обработки. Это объясняет меньшую загрузку второй системы.
- Длина очереди - суммарная емкость накопителей в первой системе больше, чем во второй системе. Помимо этого в первой системе одинаковые интенсивности заявок в каждую из очередей. Во второй системе очередь имеет только первый прибор. (интенсивность попадания заявки на этот прибор равна интенсивности попадания в любой из приборов в первой системе). Это объясняет разницу характеристик.
- Число заявок - данная характеристика зависит от количества заявок в очереди и количества обрабатываемых заявок. Т.к. среднее кол-во обрабатываемых заявок - это загрузка системы, которые примерно эквивалентны для двух систем, а среднее кол-во заявок в очереди больше в первой системе, то получаем, что число заявок в первой системе больше.
- Время ожидания - так как интенсивности попадания заявок в первую и вторую системы равны, а кол-во заявок в очереди у второй системы меньше, то и время ожидания во второй системе меньше. Так же на это влияет отсутствие накопителей у второго и третьего приборов во второй системе.
- Время пребывания - характеристика напрямую зависит от времени ожидания и обработки заявок на приборах. Время обработки одинаково для обеих систем, а время ожидания у первой системы больше, следовательно и время пребывания также больше.

- Вероятность потери заявки - потеря заявки происходит в результате отказа системы в ее обслуживании, а это происходит из-за занятости прибора и заполненности очереди (при ее наличии). Сравним вероятности состояний p_2 первого прибора (одна заявка на приборе и одна в очереди), p_4 второго прибора (аналогично одна заявка на приборе и три в очереди) в первой системе с вероятностями p_2 первого прибора и p_1 для второго и третьего приборов (так как у них нет накопителей) второй системы - они примерно эквивалентны, а вероятности p_2 у первых приборов обеих систем вовсе равны (так как одинаковые характеристики прибора и поток входящих заявок), что объясняет очень маленькую разницу между вероятностями потерей заявки в первой и второй системах.
- Производительность системы зависит от интенсивности входного потока и вероятности потери заявки, а т.к. они равны, то и производительности практически одинаковы.

Обоснование выбора наилучшего варианта организации системы в соответствии с заданным критерием эффективности

При сравнении систем было определено, что вероятность потери заявок практически одинакова для обеих систем, а значит, что не имеет особого смысла ориентироваться только на неё. В данном случае стоит выбирать систему, основываясь на других критериях эффективности.

Вывод:

Загрузка в первой системе выше, а значит что среднее число работающих приборов выше, т.е. первая система меньше простаивает. Средняя длина очереди выше в первой системе, а значит, большая часть заявок ожидает в очереди, а не обрабатывается, в сравнении со второй системой. Т.к. в первой системе время пребывания в системе выше, значит, что требуется больше времени на обслуживание заявки.