

# Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме

## «Предел»

### Описание работы

Расчётно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-4 человека) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и его защите (порядок см. ниже). Сформированные команды сами выбирают себе номер от 1 до 8 так, чтобы у каждой команды он был уникальный.

### Требования

**К выполнению заданий** – в работе должны быть:

- 1) поставлены требуемые задачи;
- 2) представлены в логической последовательности основные этапы исследования или решения;
- 3) указаны используемые теоретические положения и методы;
- 4) получены точные численные результаты и построены требуемые графические изображения.

**К содержанию отчета** – отчет выполняется в электронном виде (текстовый документ или презентация; для презентации в MS Power Point используется шаблон Университета ИТМО: ИСУ → Полезные ссылки → Корпоративная стилистика → Презентации (в самом низу)). Отчёт должен содержать:

- 1) титульный лист/слайд (название дисциплины, учебный год, название РГР, ФИ исполнителей, номера групп, ФИ преподавателя, ФИ ментора (если у преподавателя есть ментор), дата, место выполнения);
- 2) условия всех заданий (условие каждого задания – перед его решением);
- 3) основные этапы решения (исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты;
- 4) графики или рисунки, иллюстрирующие решение каждой задачи (выполненные в математическом редакторе Desmos: <https://www.desmos.com/>, Geogebra: <https://www.geogebra.org/> или других);
- 5) выводы;
- 6) оценочный лист  
(вклад каждого исполнителя оценивается всей командой по шкале от 0 до 100% баллов).

**К оформлению отчета:**

- 1) Страницы и слайды следует пронумеровать (на титульной странице/слайде номер не ставится).
- 2) Текст представляется полностью в цифровом виде. Не допускается вставка фото или сканов текста, а также скриншотов электронного текста.
- 3) Все формулы набираются в редакторе формул. Не допускается набор формул текстом (например,  $f(x)=3*x^2$ ), а также вставка фото или сканов формул, однако допускается вставка скриншотов электронных формул (если ни один редактор формул не доступен). Про редакторы формул:
  - a. в MS Office есть встроенный редактор формул;
  - b. в MS Office также есть скачиваемая надстройка MathType для набора формул;
  - c. Google-документы и Open Office имеют встроенные редакторы формул;
  - d. в LaTeX встроен набор формул;
  - e. можно воспользоваться бесплатным сервисом набора формул <https://editor.codecogs.com/> и скачать формулу в виде изображения;
  - f. или воспользоваться математическим пакетом (MathCAD, Wolfram Mathematica и др.) или сайтом Wolfram Alpha и сделать оттуда скриншоты формул.

### Защита работ

Порядок защиты РГР определяется преподавателем практики.

### Задание 1. Метод математической индукции

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом  $n \in \mathbb{N}$ :

№ ком.	Утверждение
1.	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ при $n > 1$
2.	$1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
3.	число $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6
4.	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$
5.	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$
6.	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
7.	число $n^5 - n$ делится на 5
8.	$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$

#### План:

- 1) Ознакомьтесь с методом математической индукции. Например, в задачнике: Кудрявцев Л.Д. и др. «Сборник задач по математическому анализу» Том 1 (2003).
- 2) Проверьте утверждение для номеров  $n = 1, n = 2, n = 3$  (база индукции).
- 3) Предположите, что утверждение верно (индукционное предположение).
- 4) Покажите, что из справедливости индукционного предположения для номера  $n$  следует справедливость этого утверждения для номера  $n + 1$  (шаг индукции).
- 5) Сделайте вывод.

## Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

Вещественная последовательность задана рекуррентно:  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ , где  $x_1 \in \mathbb{R}$ . Исследуйте её предел при  $n \rightarrow \infty$  в зависимости от значения  $x_1$ .

### План:

- 1) Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования предела будет проведено в п. 6).
- 2) Какими могут быть значения  $x_1$ ? Укажите множество возможных значений  $x_1$ . Докажите ваш ответ аналитически.
- 3) При каком значении  $x_1$  последовательность является стационарной? Докажите это аналитически.
- 4) Познакомьтесь с теоремой Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности и запишите её формулировку (например, в учебнике: Зорич В.А. "Математический анализ" Том 1 (2019): глава III, п. 3. "Вопросы существования предела").
- 5) Выделите характерные случаи для значений  $x_1$  (с точки зрения монотонности) и проиллюстрируйте их графиками последовательности.
- 6) Докажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме Вейерштрасса.

### Задание 3. Сравнение бесконечно малых

Решите задачу, следуя плану (см. ниже).

№ ком.	Задача
1.	Какой порядок будет иметь приращение площади круга по отношению к бесконечно малому приращению его радиуса?
2.	Какой порядок будет иметь приращение площади квадрата по отношению к бесконечно малому приращению его диагонали?
3.	Какой порядок будет иметь приращение площади прямоугольного треугольника по отношению к бесконечно малому приращению одного из его катетов?
4.	Какой порядок будет иметь приращение площади треугольника по отношению к бесконечно малому приращению одного из его углов?
5.	Какой порядок будет иметь приращение объема шара по отношению к бесконечно малому приращению его радиуса?
6.	Какой порядок будет иметь приращение объема конуса по отношению к бесконечно малому приращению радиуса его основания?
7.	Какой порядок будет иметь приращение объема прямой призмы с квадратом в основании по отношению к бесконечно малому приращению стороны квадрата?
8.	Какой порядок будет иметь приращение объема правильного тетраэдра по отношению к бесконечно малому приращению его ребра?

#### План:

- 1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.
- 2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.
- 3) Решите задачу аналитически.
- 4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

#### Задание 4. Прикладные задачи

Решите задачу, следуя плану (см. ниже).

№ ком.	Задача
1.	Дан правильный треугольник со стороной $a$ . Из трех его высот строится новый правильный треугольник и так $n$ раз. Найдите предел суммы площадей всех треугольников при $n \rightarrow \infty$ .
2.	В круг радиуса $r$ вписан квадрат, в квадрат вписан круг и так $n$ раз. Найдите предел суммы площадей всех кругов и предел суммы площадей всех квадратов при $n \rightarrow \infty$ .
3.	Отрезок длиной $a$ разделен на $n$ частей и на каждой построена полуокружность. Найдите предел длины получившейся линии при $n \rightarrow \infty$ .
4.	Отрезок длиной $a$ разделен на $n$ частей и на каждой построен равносторонний треугольник. Найдите предел длины получившейся ломаной при $n \rightarrow \infty$ .
5.	В равнобедренном прямоугольном треугольнике, катет которого равен $a$ , гипотенуза разделена на $n$ частей и на каждой построен треугольник со сторонами, параллельными катетам. Найдите предел длины получившейся ломаной при $n \rightarrow \infty$ .
6.	Вычислите длину окружности как предел периметра вписанного многоугольника, полученного удвоением числа сторон вписанного правильного шестиугольника.
7.	В треугольной пирамиде боковое ребро высотой $h$ перпендикулярно основанию. Площадь основания равна $S$ . Плоскости, параллельные основанию пирамиды, делят ее на $n$ слоев. На основании каждого слоя строится прямая треугольная призма. Найдите предел суммы объемов призм при $n \rightarrow \infty$ .
8.	Дан конус с высотой $h$ и радиусом основания $R$ . Плоскости, параллельные основанию конуса, делят его на $n$ слоев. На основании каждого слоя строится прямой цилиндр. Найдите предел суммарного объема цилиндров при $n \rightarrow \infty$ .

#### План:

- 1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.
- 2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.
- 3) Решите задачу аналитически.
- 4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

### Задание 5. Исследование сходимости

Даны последовательность  $a_n$  и функция  $f(x)$ . Исследуйте поведение предложенных величин.

#### План:

1)	Вычислите предел последовательности при $n \rightarrow \infty$ .	Вычислите предел функции при $x \rightarrow \infty$ .
2)	Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера $n$ .	Постройте график функции в зависимости от $x$ .
3)	Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:	Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) функции на бесконечности:
3а)	вспомните определение сходимости (расходимости) последовательности;	вспомните определение сходимости (расходимости) функции на бесконечности;
3б)	выберите три различных положительных числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ ;	
3в)	для каждого такого числа изобразите на графике $\varepsilon$ -окрестность (« $\varepsilon$ -трубу»)	
3г)	и найдите на графике номер $n_0$ , после которого все члены последовательности попадают в $\varepsilon$ -окрестность, или установите, что такого номера нет.	и найдите на графике $\delta$ -окрестность переменных $x$ , в которой все значения функции $f(x)$ попадают в $\varepsilon$ -окрестность, или установите, что такой окрестности нет.

№ ком.	$a_n$	$f(x)$
1.	$a_n = \frac{4}{1 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 17} + \dots + \frac{4}{(8n-7) \cdot (8n+1)}$	$f(x) = \left( \frac{2x-3}{3x+8} \right)^{4x+11}$
2.	$a_n = \frac{8^{n+2} + (-7)^{n-1}}{5 \cdot 8^n + (-7)^n}$	$f(x) = \left( \frac{1-x^2}{2-7x^2} \right)^{x-13}$
3.	$a_n = \frac{3+8+\dots+(5n-2)}{4+7+\dots+(3n+1)}$	$f(x) = \left( \frac{x^3-1}{3x^3+1} \right)^{x^3-3}$
4.	$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^5(5n-3)} - \sqrt[3]{5n^6+2}}{\sqrt{9n^2-2n+3}}$	$f(x) = \left( \frac{1-x}{2-10x} \right)^{5x-3}$
5.	$a_n = -\frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \dots + 3 \cdot \frac{(-1)^n}{5^n}$	$f(x) = \left( \frac{3x-1}{2x+11} \right)^{1-3x}$
6.	$a_n = \frac{\sqrt{9n^4-1} + \sqrt{3n^2+1}}{7+9+\dots+(2n+5)}$	$f(x) = \left( \frac{4+3x}{5+x} \right)^{7x+2}$
7.	$a_n = \frac{5-n+3n^2}{2+6+\dots+(4n-2)}$	$f(x) = \left( \frac{13x+8}{10x-1} \right)^{x^3-1}$
8.	$a_n = \sqrt[3]{n^2} \left( \sqrt[3]{(3n^2-1)^2} - \sqrt[3]{(3n^2+1)^2} \right)$	$f(x) = \left( \frac{5-3x}{1-2x} \right)^{0,3x-3}$