Методичка V2

(Актуальная версия)

К экзамену по физике

Лектор: Коробков Максим Петрович

Раздел: *Механика*

Контактировать автора по

поводу вопросов и фидбеков:

@XVIIstarPt, bolorboldariguun16@gmail.com

Санкт-Петербург, 2024г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел 1. Классическая (ньютоновская) механика

Вопрос 1. Нормальное и тангенциальное ускорение. Радиус кривизны траектории

В большинстве случаев ускорение направлено под некоторым углом к скорости. Составляющую ускорения, которая направлена вдоль скорости, называют **тангенциальным ускорением** . Тангенциальное ускорение описывает степень изменения скорости по модулю

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Нормальное ускорение – это составляющая ускорения, которая направлена к центру кривизны траектории, то есть она является нормалью (направлена перпендикулярно) к скорости. Нормальное ускорение описывает степень изменения скорости по направлению

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Радиус кривизны траектории — это мера кривизны пути, по которому движется объект. Он определяет, насколько остро или полого изогнут путь в определенной точке. Чем меньше радиус кривизны, тем более изогнута траектория движения. Формула для радиуса кривизны R в данной точке траектории для двумерного движения задаётся как:

$$R = \frac{ds}{d\varphi},$$

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \text{где } \tan\varphi = \frac{dy}{dx} = y',$$

где θ - угол направления касательной к траектории, а s - длина дуги траектории. Другими словами, радиус кривизны можно найти как обратное значение абсолютной величины производной угла θ относительно длины дуги траектории s. Это означает, что радиус кривизны определяет, как быстро меняется направление движения объекта в данной точке его траектории.

Для более сложных траекторий, таких как криволинейные линии, радиус кривизны может быть переменным вдоль траектории, поэтому может потребоваться использование дифференциального исчисления для нахождения радиуса кривизны в каждой точке траектории.

Вопрос 2. Кинематика твердого тела: связи линейных и угловых величин

Из определения радианной меры угла можно записать связь для линейных и угловых величин

$$dS = d\varphi \cdot R \quad /dt$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot R;$$

$$\text{Т. к. } \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d|\vec{\omega}|}{dt} \cdot R;$$

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot R$$

Связь между линейным и угловым ускорением по такому же принципу:

Т.к. вектор углового ускорения $E = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$|a_r| = |\vec{E}| \cdot R$$

По итогу, при $|\vec{r}| = R$:

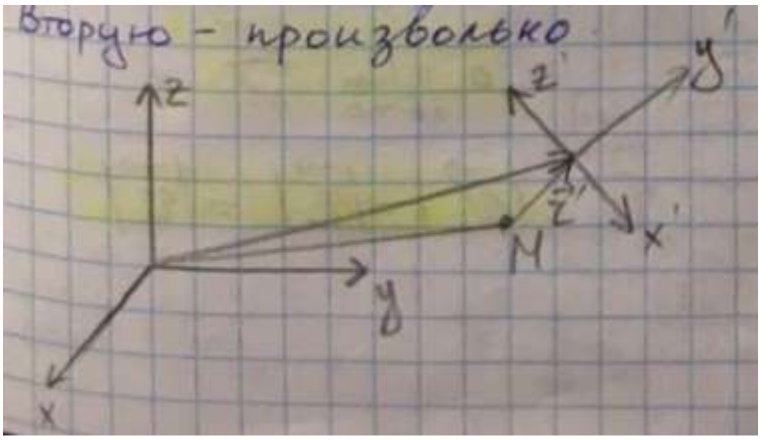
1) $\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$
2) $\vec{a_r} = [\vec{E} \cdot \vec{r}]$
3) $\vec{\omega} = \frac{[\vec{r} \cdot \vec{v}]}{R^2}$
4) $\vec{E} = \frac{[\vec{r} \cdot \vec{a_r}]}{R^2}$, значит
5) $\vec{E} = \frac{[\vec{r} \cdot \vec{a}]}{R^2}$, т. к. $\vec{a_r} = \vec{a} - \vec{a_n}$

   $[r \cdot \vec{a_n}] = 0$

Вопрос 3. Преобразования Галилея

Преобразования Галилея — это математические выражения, описывающие преобразования между системами отсчета в классической механике, предложенные Галилео Галилеем. Они используются для перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой.

Рассмотрим 2 системы координат. Одну с центром в т. О, а именно xyz **– неподвижная система координат. Вторую возьмем произвольно.** **(**$x'y'z'$**)**:



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$
$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{R} \ / \ t$$
Предположим, что точка M будет двигаться в пространстве:
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}$$
Где $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ — это $\vec{v}$ скорость относительно неподвижной системы координат;

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}$ — это $\vec{v}$ скорость относительно подвижной системы координат.

Если расстояние невелики и скорости тел малы по сравнению со скоростью света, то $\Delta t = \Delta t'$.

$\vec{v}$ — скорость относительно подвижной системы координат.

Преобразование скоростей:

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} / \frac{d}{dt}$;

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt}$;

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$.

Если $\vec{A} = 0$, то система подвижна $\vec{a} = \vec{a}'$, тогда система $x'y'z'$ — инерциальная система отсчёта.

Вопрос 4. Преобразование вектора скорости при переходе во вращающуюся СО

Совместим начала отсчёта обеих систем так, чтобы в некоторый момент времени t радиус-векторы частицы в них совпали. Тогда за последующее время dt частица переместится в системе K' на $v'dt$, а вместе с системой K' ещё и повернётся относительно неподвижной системы на угол $d\varphi$, тогда суммарное перемещение:
$$d\vec{r} = \vec{v}'dt + [d\vec{\varphi}, \vec{r}] \ (*)$$
Разделив это выражение на dt, получим закон преобразования скоростей:
$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$
Найдём приращение скорости (так как $\vec{\omega} = const$):
$$d\vec{v} = d\vec{v}' + [\vec{\omega}, d\vec{r}] \ (**)$$
Но изменение $\vec{v}'$ происходит как в результате движения частицы с ускорением $\vec{a}'$ в системе K', так и поворота вектора скорости $\vec{v}'$ вместе с системой K' относительно системы K:
$$d\vec{v} = \vec{a}'dt + [d\vec{\varphi}, \vec{v}'] \ (***)$$
Подставляя в (*) выражения $\vec{v}'$ и $d\vec{r}$, получаем:
$$d\vec{v} = \vec{a}'dt + [d\vec{\varphi}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, (\vec{v}'dt + [d\vec{\varphi}, \vec{r}])]$$
$$= \vec{a}'dt + [d\vec{\varphi}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, \vec{v}']dt + \left[\vec{\omega}, [d\vec{\varphi}, \vec{r}]\right]$$

Разделив полученное выражение на dt и приведя подобные выражения, найдём закон преобразования ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\right]$$

Последнее слагаемое в формуле направлено по радиусу к оси вращения и поэтому называется центростремительным или осестремительным ускорением:

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] \text{ — *Кориолисово ускорение*}$$

$$\vec{a}_{\text{ос}} = \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\right], \text{его модуль } \vec{a}_{\text{ос}} = \omega^2 R \text{ — центростремительное или осестремительное ускорение}$$

Если система K' относительно системы K совершает поступательное и вращательное движение одновременно добавляется ещё ускорение поступательного движения:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\right]$$

Используя формулу преобразования ускорений, запишем закон движения так, чтобы он выполнялся и в неинерциальной системе отсчёта (второй закон Ньютона для неинерциальной системы отсчёта):

$$m\vec{a}' = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_0 + 2m[\vec{v}', \vec{\omega}] + m\omega^2\vec{R}.$$

Вопрос 5. Типы фундаментальных взаимодействий в природе

Различают четыре вида фундаментальных взаимодействий в природе: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. Каждое взаимодействие (K) характеризуется так называемой константой взаимодействия, которая определяет его сравнительную интенсивность временем протекания (t) и радиусом действия (r). Дадим краткую характеристику этих взаимодействий.

Сильное взаимодействие происходит на уровне атомных ядер и представляет собой взаимное притяжение и отталкивание их составных частей (нуклонов). Отличительными свойствами сильного взаимодействия являются: короткодействие; зарядовая независимость, проявляющаяся во взаимодействии как заряженных, так и нейтральных частиц; насыщение, которое проявляется в том, что каждый нуклон в ядре взаимодействует лишь с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов. Сильное взаимодействие отвечает за устойчивость ядер.

Электромагнитное взаимодействие в 100–1000 раз слабее сильного взаимодействия ($K = 10^{-2}$, радиус взаимодействия неограничен, $\tau \approx 10^{-20}$ с). Электромагнитное взаимодействие связано с электрическими и магнитными полями. Электрическое поле возникает при наличии электрических зарядов, а магнитное поле – при их движении. В природе существуют как положительные, так и отрицательные заряды, что и определяет характер электромагнитного взаимодействия (притяжение либо отталкивание). В процессе электромагнитного взаимодействия электроны и атомные ядра соединяются в атомы, атомы – в молекулы.

Слабым взаимодействием объясняются все виды b-распада, многие распады элементарных частиц. За счет слабого взаимодействия светит Солнце. Испускаемое нейтрино обладает огромной проницающей способностью – оно проходит через железную плиту толщиной миллиард км. Константа слабого взаимодействия имеет порядок 10^{-13}, t » 10^{-10} с. Это взаимодействие, как и сильное, является короткодействующим: r » 10^{-18} м. При слабых взаимодействиях меняется заряд частиц.

Слабое взаимодействие осуществляется путем обмена тяжелыми промежуточными частицами – бозонами, аналогичными фотону.

Гравитационное взаимодействие, хотя и является универсальным, самое слабое, не учитываемое в теории элементарных частиц, так как его К = 10^{-38}, r = ¥, t – не ограничено. Гравитационное взаимодействие характерно для всех материальных объектов вне зависимости от их природы. Оно заключается во взаимном притяжении тел и определяется фундаментальным законом всемирного тяготения. Гравитационным взаимодействием определяется падение тел в поле сил тяготения Земли. Законом всемирного тяготения описывается движение планет Солнечной системы, а также других макрообъектов.

Связь, взаимодействие и движение представляют собой важные атрибуты материи, без которых невозможно ее существование. Взаимодействие обусловливает объединение различных материальных элементов в системы, системную организацию материи. Все свойства тел производны от их взаимодействий, являются результатом их структурных связей и внешних взаимодействий между собой.

Вопрос 6. Центральные силы: гравитационное и электростатическое взаимодействия

Гравитационное взаимодействие определяется фундаментальным законом всемирного тяготения. Гравитационные силы убывают пропорционально квадрату расстояния между взаимодействующими телами. Закон всемирного тяготения Ньютона описывается формулой:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(где $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{м^3}{кг*с^2}$ **— грав**итационная **пост**оянная**)**
Электростатическое взаимодействие определяется **фунд**аментальным **зако**ном **всем**ирного **тяго**тения. **Элек**тростатические **сил**ы **убыв**ают **проп**орционально **квад**рату **расс**тояния **между взаи**модействующими **тел**ами**. Элек**тростатические **сил**ы **нахо**дятся **по форм**уле:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

(где r — **расс**тояние **между част**ицами**,** $q_{1,2}$ **— их масс**ы**,** $k = 1,38 * 10^{-23}\ \frac{Дж}{К}$ **— пост**оянная **Боль**цмана**)**

Вопрос 7. Сила тяжести и вес. Зависимость веса от географической широты

В системе **отсч**ета**, свя**занной **с Зем**лей**, на вся**кое **тел**о **дейс**твует **сил**а**, назы**ваемая **сил**ой **тяж**ести**. Сил**а **тяж**ести**, дейс**твующая **на мат**ериальную **точ**ку**, высч**итывается **по форм**уле: $F_T = mg$ (где F_T — **сил**а **тяж**ести**,** m — **масс**а **мате**риальной **точ**ки**,** $g = 9,81\ \frac{м}{с^2}$ — **уско**рение **своб**одного **пад**ения**).**
Вес тела – **это сил**а**, с кото**рой **тел**о **дейс**твует **на подв**ес **или опор**у **всле**дствие **грав**итационного **притя**жения **к Зем**ле.

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$$ **(осно**вная **форм**ула**)**

Если $a = g$**,** тело **пер**естаёт **дей**ствовать **на подв**ес-**вес тел**а **стан**овится **равн**ым **нул**ю**, т.е. наст**упает ***сост**ояние **неве**сомости***.

Вес тела **зави**сит **от грав**итационного **уско**рения**, кото**рое**, в сво**ю **очер**едь**, може**т **изме**няться **в зави**симости **от гео**графической **широ**ты**.**

Гравитационное **уско**рение **— это уско**рение**, кото**рое **тел**о **приоб**ретает **под возд**ействием **грав**итационного **поля Зем**ли**.**

На экваторе **Зем**ли **грав**итационное **уско**рение **немн**ого **мень**ше**, чем на полю**сах **из-за цент**робежной **сил**ы**, обус**ловленной **вращ**ением **Зем**ли**. Это свя**зано **с тем, что вращ**ение **Зем**ли **созд**ает **цент**робежную **сил**у**, кото**рая **немн**ого **комп**енсирует **грав**итационное **прит**яжение **на эква**торе**. На полю**сах **цент**робежная **сил**а **мень**ше**, поэ**тому **грав**итационное **уско**рение **на полю**сах **боль**ше**, чем на эква**торе**.**

Следовательно**, вес тел**а **на эква**торе **може**т **быть незн**ачительно **мень**ше**, чем на полю**сах **из-за разн**ицы **в грав**итационном **уско**рении**. Одна**ко **этот эффе**кт **влия**ет **незн**ачительно **на общи**й **вес тел**а**. Изме**нение **вес**а **на прак**тике **част**о **не заме**тно **и оста**ется **в пре**делах **неск**ольких **проц**ентов **от общ**его **вес**а **тел**а **чело**века **или друг**ого **объе**кта**.**

Значения весов однодюймового куба из вольфрама в различных местах, слева направо: Логан, штат Юта; Аэропорт Солт-Лейк-Сити, штат Юта; Аэропорт Шарлотсвилл, штат Вирджиния; Манчестер, Великобритания

Вопрос 8. Импульс материальной точки. Закон сохранения импульса (ЗСИ)

Импульс (количество движения) — векторная физическая величина, являющаяся мерой механического движения тела. В классической механике импульс тела равен произведению массы m этого тела на скорость v, направление импульса совпадает с направлением вектора скорости:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Закон сохранения импульса (Закон сохранения количества движения) — закон, утверждающий, что векторная сумма импульсов всех тел системы есть величина постоянная, если векторная сумма внешних сил, действующих на систему тел, равна нулю.

В классической механике закон сохранения импульса обычно выводится как следствие законов Ньютона. Из законов Ньютона можно показать, что при движении системы в пустом пространстве импульс сохраняется во времени, а при наличии внешнего воздействия скорость изменения импульса определяется суммой приложенных сил.

Согласно второму закону Ньютона, для системы из N частиц выполняется соотношение:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{p}$ — импульс системы:

$$\vec{p} = \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_n.$$

Вопрос 9. Применение ЗСИ в задаче о столкновении двух тел

Абсолютно упругий удар — абстрактная модель соударения, при которой не учитываются трение, деформацию, и т.п. Никакие другие взаимодействия, кроме непосредственного контакта, не учитываются. При абсолютно упругом ударе о закрепленную поверхность скорость объекта после удара по модулю равна скорости объекта до удара, то есть величина импульса не меняется. Может поменяться только его направление. При этом угол падения равен углу отражения.

Абсолютно неупругий удар — удар, в результате которого тела соединяются и продолжают дальнейшее своё движение как единое тело. Например, пластилиновый шарик при падении на любую поверхность полностью прекращают своё движение, при столкновении двух вагонов срабатывают автосцепка и они так же продолжают двигаться дальше вместе.

Вопрос 10. Движение тела с переменной массой. Уравнение Мещерского

Вопрос 11. Формула Циолковского. Реактивное движение. Пример расчета

Реактивным движением называют движение, при котором у тела возникает изменение скорости за счет отделения его части с некоторой скоростью относительно тела. При этом тело и отбрасываемая масса образуют замкнутую систему, в которой сила взаимодействия равна нулю, а импульс сохраняется.

Реактивная сила – это величина, равная произведению расхода топлива на скорость газов относительно ракеты, взятое с минусом.

Формула Циолковского определяет скорость, которую развивает летательный аппарат под воздействием тяги ракетного двигателя, неизменной по направлению, при отсутствии всех других сил. Эта скорость называется характеристической скоростью и выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{v = I \ln \frac{m_1}{m_2}},$$

где:

- $\boldsymbol{v}$ — конечная скорость летательного аппарата;
- $\boldsymbol{I}$ — удельный импульс ракетного двигателя;
- $\boldsymbol{m_1}$ — начальная масса летательного аппарата;
- $\boldsymbol{m_2}$ — конечная масса летательного аппарата.

Пример расчета характеристической скорости для одноступенчатой ракеты:

Пусть начальная масса ракеты составляет 1000 кг, из которых 800 кг — топливо, а удельный импульс ракетного двигателя равен 3000 м/с. Тогда конечная масса ракеты будет 200 кг, а характеристическая скорость равна:

$$V = 3000 ln\frac{1000}{200} \approx 4828,31\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Вопрос 12. Центр масс системы материальных точек. Уравнение движения центра масс

Центр масс — точка, через которую должна проходить линия действия силы, чтобы под действием этой силы тело двигалось поступательно (не вращалось).

- Если направление прямой, вдоль которой действует сила, не проходит через центр масс тела, эта сила вызывает поворот тела.
- Если тело движется поступательно под действием нескольких сил, значит, точка приложения равнодействующей этих сил находится в центре масс этого тела.
- Для того, чтобы описать поступательное движение тела, необходимо описать движение центра масс этого тела под действием равнодействующей внешних сил.
- Когда мы считаем тело материальной точкой, то имеем в виду центр масс данного тела.

ИЛИ ЖЕ

Центром масс тела, состоящего из n материальных точек, называется точка (в геометрическом смысле), радиус-вектор которой определяется формулой:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i R_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Здесь R — радиус-вектор точки с номером i.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

Уравнение движения центра масс произвольной системы частиц:

$$M\vec{a}_C = M\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,\text{внеш}}$$

где:

- M — общая масса системы частиц;
- $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс;
- $\vec{F}_{i,\text{внеш}}$ — внешняя сила, которая действует на i-ую частицу системы.

Если тело можно разбить на n элементов, массы которых m_1, m_2, ..., m_n и если известны координаты центров масс этих элементов x_1, x_2, ..., x_n, то координата масс тела вычисляется по формуле:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Такое же соотношение можно записать для y_C и z_C.

Вопрос 13. Работа сил в механике и способы ее расчета

Работа — скалярная, количественная мера измерения приложенной силы. При этом работа совершается с телом или с системой тел.

Работа измеряется в Джоулях (Дж, 1 Дж = 1 Н * 1м).

В механике работа всегда сопровождается изменением положения тела в пространстве. Работа прямо пропорциональна прилагаемой силе и проделанному пути. При этом если была приложена сила, но тело не переместилось — работа равна нулю.

$$A = F \cdot s$$

Количество проделанной работы зависит от того, как направлены вектор движения и вектор силы между собой. Учитывая этого, можно вывести более общую формулу:

$$A = F \cdot s \cos(\vec{F}, \vec{s})$$

Стоит заметить, что в инерциальных системах отсчёта приложенная работа равна энергии.

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

Вопрос 14. Кинетическая энергия частицы и ее преобразование при смене СО

Кинетическая энергия — скалярная функция, являющаяся мерой движения материальных точек, образующих рассматриваемую механическую систему, и зависящая только от масс и модулей скоростей этих точек. Работа всех сил, действующих на материальную точку при её перемещении, идёт на приращение кинетической энергии. Для движения со скоростями значительно меньше скорости света кинетическая энергия записывается следующим образом:

$$E_{\text{кин}} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Часто выделяют кинетическую энергию поступательного и вращательного движения. Более строго, кинетическая энергия есть разность между полный энергией системы и её энергией покоя; таким образом, кинетическая энергия — часть полной энергии, обусловленная движением. Когда тело не движется, его кинетическая энергия равна нулю. В системе СИ она измеряется в джоулях (Дж).

Кинетическая энергия в классической механике:

Случай одной материальной точки

По определению, кинетической энергией материальной точки массой называется величина

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2},$$

При этом предполагается, что скорость точки всегда значительно меньше скорости света. С использованием понятия импульса ($\vec{p} = m\vec{v}$) данное выражение примет вид

$$E_{\text{кин}} = \frac{p^2}{2m}.$$

Если $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к точке, выражение второго закона Ньютона запишется как

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Скалярно умножив его на перемещение материальной точки $d\vec{s} = \vec{v}dt$ и учитывая, что $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, причём $\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$, получим $\vec{F}d\vec{s} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_{\text{кин}}$.

Если система замкнута (внешние силы отсутствует) или равнодействующая всех сил равна нулю, то стоящая под дифференциалом величина T остаётся постоянной, то есть кинетическая энергия является интегралом движения.

Случай абсолютно твёрдого тела

При рассмотрении движения абсолютно твёрдого тела его можно представить как совокупность материальных точек. Однако, обычно кинетическую энергию в таком случае записывают, используя формулу Кёнига, в виде суммы кинетических энергий поступательного движения объекта как целого и вращательного движения:

$$E_{\text{кин}} = \frac{M\vec{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

где:

- M — масса тела;
- $\vec{v}$ — скорость центра масс;
- ω — угловая скорость тела
- I — момент инерции тела относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс.

Кинетическая энергия в релятивистской механике:

Если в задаче допускается движение со скоростями, близкими к скорости света, кинетическая энергия материальной точки определяется как

$$E_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2,$$

где:

- m — масса покоя;
- v — скорость движения в выбранной инерциальной системе отсчёта;
- c — скорость света в вакууме (mc^2 — энергия покоя).

Как и в классическом случае, имеет место соотношение

$\vec{F}d\vec{s} = dE_{\text{кин}}$, получаемое посредством умножения на $d\vec{s} = \vec{v}dt$ выражения второго закона Ньютона (в виде $\vec{F} = m \cdot \frac{d\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)}{dt}$).

При скоростях, много меньших скорости света ($v \ll c$) имеем $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}$ и выражение для $E_{\text{кин}}$ переходит в классическую формулу $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$.

Эйнштейном была установлена формула связи между энергией частицы, которая движется со скоростью v, и её массой частицы:

$$E = m_p c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

Исходя из формулы (1), тело имеет энергию и при скорости, равной 0. Это является энергией покоя:

$$E_0 = mc^2 \qquad (2)$$

Всякое тело уже лишь благодаря факту своего существования имеет энергию, пропорциональную массе покоя m.

Уравнение (2) является формулой Эйнштейна, первая из двух великих формул физики (другая — формула Планка).

В процессе превращения элементарных частиц, которые имеют массу покоя, в частицы, у которых $m = 0$, энергия покоя полностью переходит в кинетическую энергию новых частиц. Это оказывается самым очевидным экспериментальным доказательством существования энергии покоя.

Преобразование кинетической энергии при смене СО:

Принцип относительности требует, чтобы в двух рассматриваемых системах отсчёта соблюдались одни и те же физические законы. Таким образом должен выполняться закон сохранения энергии, согласно которому изменение энергии тела должно быть равно работе внешних сил. Поэтому в первой системе должно быть справедливо соотношение $\frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \vec{F}s$. Здесь s — длина пути, пройденного телом в первой системе за то время, в течение которого скорость возросла с v_1 до v_2. Так как тело движется с ускорением $\frac{\vec{F}}{m}$, то $s = v_1 t + \frac{\vec{F}t^2}{2m}$.

Во второй системе $\frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) - mv(v_2 - v_1) = \vec{F}s_1$. Здесь s_1 — длина пути, пройденного телом во второй системе $s_1 = (\vec{v}_1 - \vec{v})t + \frac{\vec{F}t^2}{2m}$. Итак, $s - s_1 = vt$. Так как $\frac{\vec{F}}{m} = a = \frac{v_2 - v_1}{t}$, то $t = \frac{m(v_2 - v_1)}{\vec{F}}$,

$s - s_1 = \frac{mv(v_2 - v_1)}{\vec{F}}$. Таким образом $\vec{F}(s - s_1) = mv(v_2 - v_1)$.

Работа внешней силы в первой системе отсчёта настолько больше, чем во второй, насколько изменение кинетической энергии в первой системе больше, чем во второй. Так как в первой системе изменение энергии равно работе внешних сил, то это справедливо и для второй системы. Следовательно, принцип относительности Галилея не нарушен.

Вопрос 15. Связь потенциальной энергии и консервативной силы. Оператор градиента

Пространство, в котором действуют консервативные силы, называется потенциальным полем. Каждом точке потенциального поля соответствует некоторое значение силы $\vec{F}$, действующей на тело, и некоторое значение потенциальной энергии $E_{\text{п}}$. Значит, между силой $\vec{F}$ и $E_{\text{п}}$ должна быть связь.

Известно, что $dA = \vec{F}d\vec{r}$; с другой стороны, $dA = -dE_{\text{п}}$, следовательно, $\vec{F}d\vec{r} = -dE_{\text{п}}$, тогда

$$\vec{F} = -\frac{dE_{\text{п}}}{d\vec{r}}.$$

Для компонент силы по осям x, y, z можно записать, что

$$F_x = \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}; F_y = \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}; F_z = \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}.$$

Так как вектор силы $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, то получим

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_{\text{п}} = -\mathrm{grad} E_{\text{п}},$$

где ∇ — оператор Гамильтона (оператор набла), $\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Градиент — вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции. Знак минуса показывает, что вектор $\vec{F}$ направлен в сторону быстрейшего уменьшения $E_{\text{п}}$.

Следовательно, консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому со знаком минус. $\vec{F} = -\mathrm{grad} E_{\text{п}}$.

Вопрос 16. Полная механическая энергия частицы и закон ее изменения

Полная механическая энергия частицы – энергия механического движения и взаимодействия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий: $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{п}}$. Внешние силы не имеют отношения к силовому полю, в котором находятся частицы, они могут быть и консервативными, и неконсервативными. Работа последних сил не может быть учтена как изменение потенциальной энергии системы.

Закон сохранения механической энергии частицы:

Полная механическая энергия частицы в стационарном поле консервативных сил остается неизменной во времени, если внешние силы отсутствуют или таковы, что не совершают работы в течение рассматриваемого времени: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{кин}} + \boldsymbol{E}_{\text{п}} = \boldsymbol{const}$.

Механическая энергия системы определяется как $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{кин}} + \boldsymbol{E}_{\text{п}}^{\text{соб.}}$. Изменение механической энергии замкнутой системы равно алгебраической сумме работ всех внутренних неконсервативных сил $\boldsymbol{E_2} - \boldsymbol{E_1} = {}^{\text{неконсерв.}}\boldsymbol{A}_{\text{внутр.}}$

Закон сохранения механической энергии системы:
механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой отсутствуют неконсервативные силы, сохраняется в процессе движения.

Полная механическая энергия системы во внешнем поле равна сумме кинетической и потенциальной энергий $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{кин}} + {}^{\text{соб.}}\boldsymbol{E}_{\text{п}} + {}^{\text{внеш.}}\boldsymbol{E}_{\text{п}}$

Закон сохранения полной механической энергии системы, находящейся во внешнем стационарном поле консервативных сил: в инерциальной системе отсчета, полная механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой нет внутренних неконсервативных сил, остается постоянной в процессе движения.

Вопрос 17. Неупругое столкновение двух тел в системе центра масс

Столкновение частиц в системе центра масс

Столкновения обе частицы имеют одинаковые по модулю и противоположные по направлению импульсы. Более того, так как суммарная кинетическая энергия частиц до и после столкновения одинакова, также как и их приведенная масса, то импульс каждой частицы в результате столкновения изменит только направление на противоположное, не меняясь при этом по модулю, т. е. $\tilde{\vec{p}}_i = -\vec{p}'_i$, где $i = 1, 2$. Аналогично, и скорости каждой частицы в C-системе будут противоположны:

$$\tilde{\vec{v}}_i = -\vec{v}'_i.$$

Теперь найдем скорость каждой частицы после столкновения в *К*-системе отсчета. Для этого используем формулы преобразования скоростей при переходе между системами, а также предыдущее равенство. Тогда

$$\widehat{\vec{v}}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i' = \vec{v}_C - \vec{v}_i' = \vec{v}_C - (\vec{v}_i - \vec{v}_C) = 2\vec{v}_C - \overleftarrow{v}_i,$$

где $\vec{v}_C$ — скорость центра масс (т.е. C-системы) в K-системе отсчёта. Итак, скорость частицы в K-системе после столкновения есть

$$\widehat{\vec{v}}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i' = \vec{v}_C - \vec{v}_i' = \vec{v}_C - (\vec{v}_i - \vec{v}_C) = 2\vec{v}_C - \overleftarrow{v}_i,$$

где $i = 1, 2$. В проекциях на произвольную ось x это равенство имеет вид

$$v_{ix} = 2v_{cx} - v_{ix}.$$

В частности, если массы частиц одинаковы, то легко убедиться, что частицы в результате столкновения просто обмениваются скоростями, т. е.

$$\widehat{\vec{v}}_1 = \vec{v}_2, \widehat{\vec{v}}_2 = \vec{v}_1.$$

Абсолютно неупругим ударом **называют такое ударное взаимодействие, при котором тела соединяются (слипаются) друг с другом и движутся дальше, как одно тело.**

При абсолютно неупругом ударе механическая энергия не сохраняется. Она частично или полностью переходит во внутреннюю энергию тел (нагревание).

Примером абсолютно неупругого удара может служить попадание пули (или снаряда) в *баллистический маятник*. Маятник представляет собой ящик с песком массой M, подвешенный на веревках (рис. 1.21.1). Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью $\vec{v}$, попадает в ящик и застревает в нем. По отклонению маятника можно определить скорость пули.

Обозначим скорость ящика с застрявшей в нем пулей через $\vec{u}$. Тогда по закону сохранения импульса

$$m\vec{v} = (M + m)\vec{u}, \vec{u} = \frac{m}{M + m}\vec{v}.$$

При застревании пули в песке произошла потеря механической энергии:

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M + m)\vec{u}}{2} = \frac{(mv)^2}{2(M + m)}$$

Отношение $\frac{m}{M+m}$ — доля кинетической энергии пули, перешедшая во внутреннюю энергию системы:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{m}{M + m} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}}.$$

Эта формула применима не только к баллистическому маятнику, но и к любому неупругому соударению двух тел с разными массами.

При $m \ll M$ $\frac{\Delta E}{E_0} \to 1$ — почти вся кинетическая энергия пули переходит во внутреннюю энергию.

При $m = M \frac{\Delta E}{E_0} \rightarrow \frac{1}{2}$ — во внутреннюю энергию переходит половина первоначальной кинетической энергии.

Наконец, при неупругом соударении движущегося тела большой массы с неподвижным телом малой массы ($m \gg M$) отношение $\frac{\Delta E}{E_0} \rightarrow 0$.

Дальнейшее движение маятника можно рассчитать с помощью закона сохранения механической энергии:

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M+m)gh, u^2 = 2gh,$$

где h — максимальная высота подъема маятника. Из этих соотношений следует:

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}.$$

Измеряя на опыте высоту h подъема маятника, можно определить скорость пули υ.

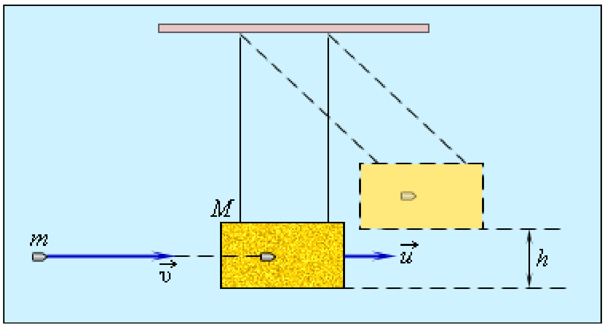


Рисунок 1.21.1. Баллистический маятник

БОЛЕЕ ПОДРОБНО:
http://phys.bspu.by/static/lib/phys/bmstu/tom1/ch4/texthtml/ch4_4.htm
https://natalibrilenova.ru/blog/508-stolknoveniya-chastic-neuprugie-stolknoveniya-peredacha-energii-pri-udare-sistema-centra-mass-obratimost-uprugih-stolknoveniy.html

Вопрос 18. Момент силы. Момент импульса частицы. Закон изменения момента импульса

Сначала возьмем одну частицу. Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор, характеризующий ее положение относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета, а $\vec{p}$ — её импульс в этой системе. Моментом импульса частицы А относительно точки O (рис. 6.1) называют вектор $\vec{L}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$:

$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$.

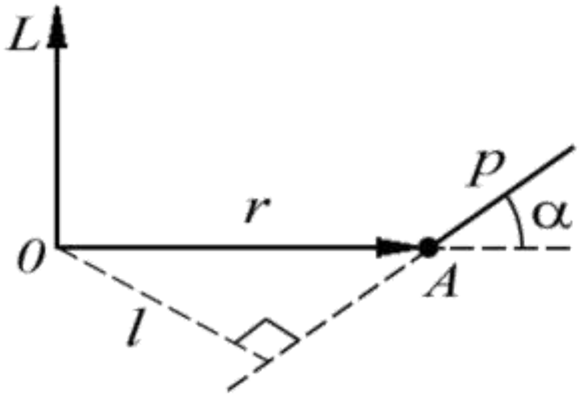


Рис. 6.1.
Определение вектора момента импульса

Из этого определения следует, что $\vec{L}$ является аксиальным вектором. Его направление выбрано так, что вращение вокруг точки O в направлении вектора $\vec{p}$ образуют правовинтовую систему. Модуль вектора равен

$$L = rp\sin\alpha = lp,$$

Где α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$, $l = r\sin\alpha$ — плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O (рис. 6.1).

Выведем уравнение, описывающее изменение во времени вектора $\vec{L}$. Его называют *уравнением моментов*. Для вывода необходимо выяснить — какая механическая величина ответственна за изменение вектора $\vec{L}$ в данной системе отсчета. Продифференцируем уравнение (6.1) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Так как точка O неподвижна, то вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}$ равен скорости $\vec{v}$ частицы, т. е. совпадает по направлению с вектором $\vec{p}$, поэтому

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] = \mathbf{0}.$$

Используя второй закон Ньютона, получим $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к частице. Следовательно,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Величину, стоящую в правой части этого уравнения, называют *моментом силы* $\vec{F}$ относительно точки O (рис. 6.2). Обозначив ее буквой $\vec{M}$, запишем

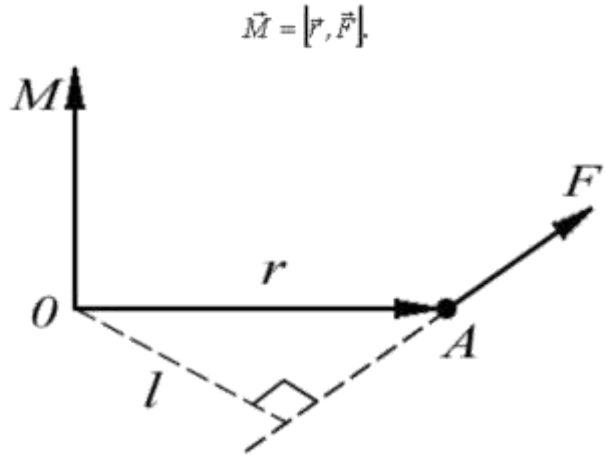


Рис. 6.2.
Определение вектора момента силы

Вектор $\vec{M}$, как и $\vec{L}$, является аксиальным. Модуль этого вектора, аналогично (6.2), равен

$$M = lF,$$

где l — плечо вектора $\vec{F}$ относительно точки O (рис. 6.2). Итак, производная по времени от момента импульса частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту равнодействующей силы относительно той же точки O:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Это уравнение называют *уравнением моментов*. Заметим, что если система отсчета является неинерциальной, то момент силы $\vec{M}$ включает в себя как момент сил взаимодействия, так и момент сил инерции относительно той же точки O.

Из уравнения моментов, в частности, следует, что если $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = const$. Другими словами, если относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю в течение интересующего нас промежутка времени, то относительно этой точки момент импульса частицы остается постоянным в течение этого времени.

Закон изменения момента импульса.

Рассмотрим произвольную систему тел. Моментом импульса системы назовем величину $\vec{L}$, равную векторной сумме моментов импульсов отдельных ее частей $\vec{L}_i$, взятых относительно одной и той же точки выбранной системы отсчета.

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i$$

Найдем скорость изменения момента импульса системы. Проведя рассуждения, аналогичные описанию вращательного движения твердого тела, получим, что ***скорость изменения момента импульса системы равна векторной сумме моментов внешних сил M, действующих на части этой системы.***

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Причем вектора $\vec{L}$ и $\vec{M}$ задаются относительно одной и той же точки O в выбранной СО. Уравнение представляет собой ***закон изменения момента импульса системы***.

Причиной изменения момента импульса является действующий на систему результирующий момент внешних сил. Изменение момента импульса за конечный промежуток времени можно найти, воспользовавшись выражением

$$\Delta L = \int_0^t M dt.$$

Приращение момента импульса системы равно импульсу результирующего момента внешних сил, действующих на неё.

В неинерциальной системе к моменту внешних сил необходимо прибавить момент сил инерции относительно выбранной точки O.

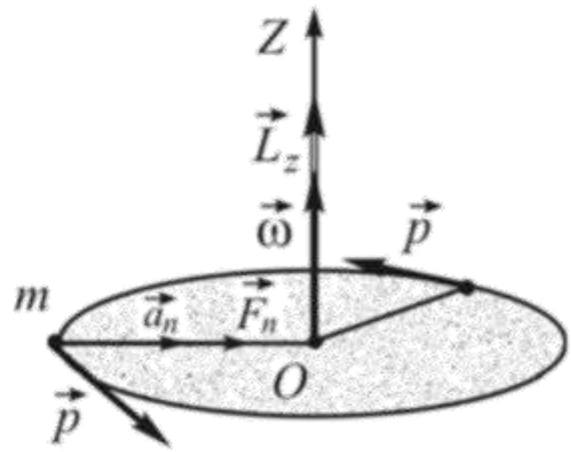
Вопрос 19. Закон изменения момента импульса системы частиц

Из уравнения динамики вращательного движения (3) следует, что если суммарный момент внешних сил равен нулю, то момент импульса тела или системы тел остается постоянным:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = const.$$

Для замкнутой механической системы условие равенства нулю суммарного момента внешних сил выполняется всегда. Может случиться так, что результирующая внешних сил не равна нулю, однако равен нулю ее момент относительно некоторой оси OZ. Тогда остается постоянным момент импульса тела или системы относительно этой оси.

$$\vec{L}_z = \sum_1 \vec{L}_{zi} = const.$$

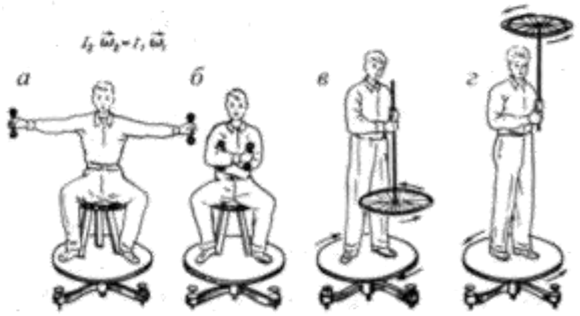


Например, импульс материальной точки, движущейся по окружности вокруг неподвижной оси OZ с постоянной угловой скоростью ω, все время изменяет свое направление ($p \neq const$) по причине действия силы $\vec{F}_n$, которая вызывает нормальное ускорение $\vec{a}_n$ (см. рисунок слева). Однако относительно оси OZ момент этой силы равен нулю, поэтому соответствующий момент импульса не изменяется:

$$L_Z = I_Z\omega = mr^2\omega = const.$$

При неизменном моменте инерции тела и равном нулю моменте внешних сил угловая скорость вращения будет постоянной как по величине, так и по направлению. Если момент инерции тела изменяется, то одновременно должна изменяться и угловая скорость его вращения, чтобы произведение $\vec{L} = I\vec{\omega}$ оставалось постоянным. Изменение момента инерции тела может происходить под действием внутренних сил, вызывающих перемещение частей тела.

Пример (для лучшего понимания)



Яркой демонстрацией закона сохранения момента импульса служат опыты со скамьей Жуковского, которая представляет собой металлическую платформу, способную вращаться относительно вертикальной оси с малым трением (рис. слева). На эту платформу садится человек с гантелями в руках. Момент внешних сил равен нулю (моменты силы тяжести и реакции опоры равны нулю, поскольку центр масс человека с гантелями лежит на оси и направление силы тяжести совпадает с осью вращения; моментом силы трения пренебрегаем). Скамью вращают с угловой скоростью ω, когда человек держит гантели в вытянутых руках (рис. а). После того, как он подносит гантели к груди, угловая скорость вращения заметно возрастает (рис. б), а при разведении рук снова уменьшается. Угловая скорость скамьи не изменится, если человек будет перемещать гантели по вертикали, не меняя расстояния от них до оси вращения.

Фигурист на коньках или балерина, чтобы сообщить своему телу быстрое вращение, при первом толчке разводят руки в стороны, а затем приближают их к телу. В результате момент инерции тела уменьшается, а скорость вращения возрастает.
Внутренние силы не могут изменить момент импульса всей системы, однако они могут вызвать изменение моментов ее частей. Если человек на покоящейся скамье Жуковского начнет вращать насаженное на вертикальную ось велосипедное колесо, которое вначале было неподвижно, то сам он вместе со скамьей начнет вращаться в противоположном направлении так, что суммарный момент импульса, как и ранее, останется равным нулю (рис. в). При изменении направления оси вращающегося колеса на противоположное также изменится на противоположное и направление вращения скамьи с человеком (рис. г). Этот опыт наглядно показывает, что момент импульса является векторной величиной.
Закон сохранения момента импульса позволяет при изучении вращательного движения исключить из рассмотрения моменты внутренних сил. При соответствующем выборе осей исключается также действие ряда внешних сил, моменты которых относительно выбранных осей равны нулю. Поэтому он широко применяется в технических расчетах.
Этот закон имеет важное значение для современной физики, где понятие момента импульса распространяется на немеханические системы и постулируется сохранение момента импульса для всех физических процессов. Так, каждая элементарная частица (протон, нейтрон) обладает собственным моментом импульса (спином). Сумма этих моментов сохраняется, например, в ядерных реакциях, которые сопровождаются превращением одних элементарных частиц в другие. При этом могут выполняться законы сохранения и других физических величин: импульса, энергии и др.

Вопрос 20. Преобразование момента импульса при переходе в другую СО

Преобразование момента импульса при переходе из одной инерциальной системы отсчета (ИСО) в другую происходит с использованием законов сохранения импульса и закона преобразования скоростей.

Пусть у нас есть момент импульса L относительно точки в инерциальной системе отсчета S, и мы хотим найти его представление в другой инерциальной системе отсчета S', движущейся относительно S со скоростью $\vec{v}$.

Момент импульса L для тела относительно точки O выражается как произведение массы m на векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ и скорости $\vec{v}$ точки тела:

$$L = m \cdot [\vec{r}, \vec{v}]$$

Если перейти к новой инерциальной системе S', то для нахождения момента импульса в этой системе можно воспользоваться формулой для преобразования скоростей:

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

где $\vec{v}'$ — скорость тела в новой системе отсчета S', $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения одной системы относительно другой. Изменение момента импульса при переходе из S в S' будет зависеть от того, изменится ли положение точки отсчета, относительно которой определен момент импульса, в новой системе S'. Если точка отсчета остается той же самой, то момент импульса будет изменяться только за счет изменения скорости объекта в новой системе отсчёта.

Вопрос 21. Движение в центральном поле $1/r$. Секториальная скорость. Эффективный потенциал

Движение в центральном поле, где потенциальная энергия зависит от расстояния r как $1/r$ (или обратно пропорциональна квадрату расстояния), является одним из классических примеров движения в физике.

Секторальная скорость:

В центральном поле, секторальная скорость — это угловая скорость объекта, движущегося по круговой или эллиптической орбите вокруг центра поля. Она остается постоянной благодаря законам сохранения момента импульса.

$$v(t) = \frac{r^2}{2}\omega = const.$$

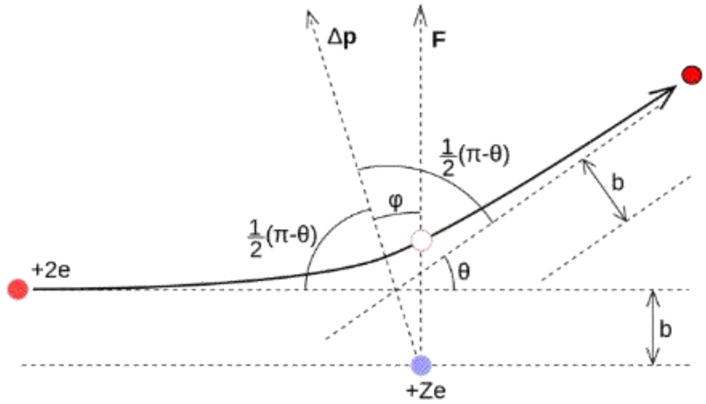
Эффективный потенциал:

Эффективный потенциал $U_{eff}(r)$ является суммой потенциальной и кинетической энергии объекта и играет важную роль в анализе движения в центральном поле. Он определяется как:

$$U_{eff} = -\frac{m}{2}\left(\frac{\alpha}{L}\right)^2$$

Вопрос 22. Задача о рассеянии в поле $1/r$. Связь угла рассеяния, прицельного параметра и энергии.

Задача о рассеянии в потенциальном поле, обратно пропорциональном расстоянию $1/r$, часто рассматривается в классической механике. Угол рассеяния θ связан с прицельным параметром b и энергией частицы следующим образом:



$$\Delta p = 2mv_0 \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Delta p = \int \frac{\alpha}{r^2}\cos\varphi(t)\,dt = \alpha\int \cos\varphi(t)\frac{dt}{r^2}$$

- При увеличении прицельного параметра b угол рассеяния θ уменьшается.
- Высокая энергия (E) увеличивает прицельный параметр b и уменьшает угол рассеяния θ.
- Меньший угол рассеяния обычно соответствует более большой энергии частицы и/или большему прицельному параметру.

Эти связи демонстрируют, как изменения энергии и прицельного параметра могут влиять на угол рассеяния в потенциальном поле, обратно пропорциональном расстоянию.

Вопрос 23. Осевые моменты инерции твердого тела и их связь с моментом импульса

Моментом инерции механической системы относительно неподвижной оси («осевой момент инерции») называется величина J_a, равная сумме произведений масс всех n материальных точек системы на квадраты их расстояний до оси:

$$J_a = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где:

- m_i — масса i-ой точки;
- r_i — расстояние от i-ой точки до оси.

Осевой момент инерции тела J_a является мерой инертности тела во вращательном движении вокруг оси подобно тому, как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении.

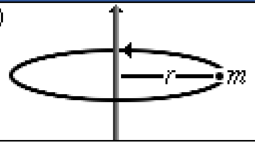
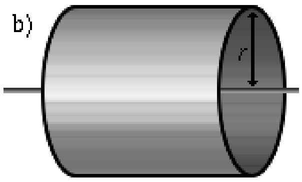
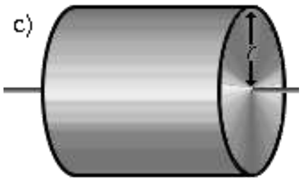
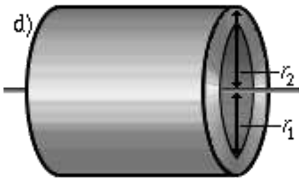
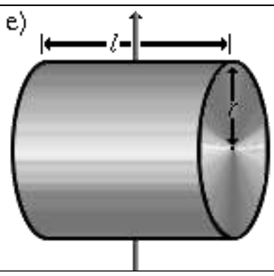
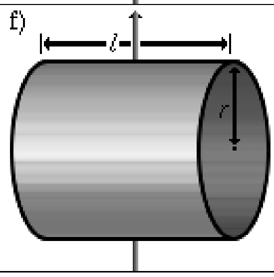
$$J_a = \int_{(m)} r^2 dm = \int_{(V)} pr^2 dV,$$

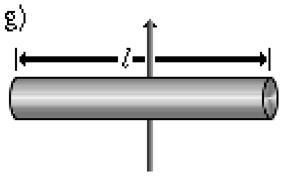
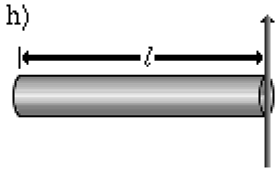
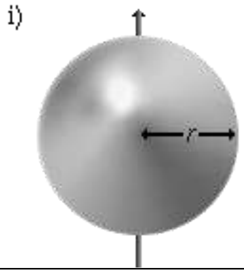
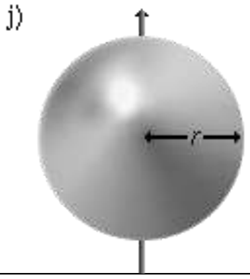
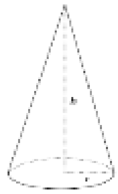
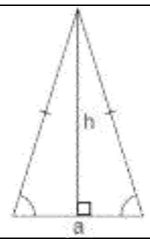
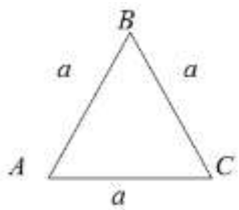
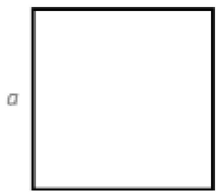
где:

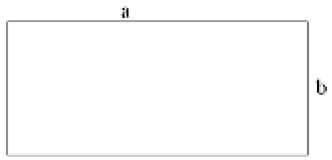
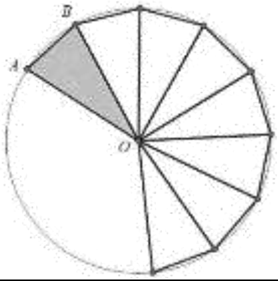
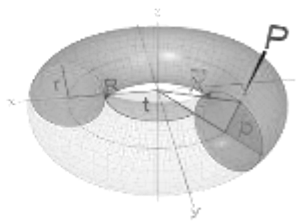
- $dm = \rho dV$ — масса малого элемента объёма тела dV;
- ρ — плотность;
- r — расстояние от элемента dV до оси a.

Если тело однородно, то есть его плотность всюду одинакова, то

$$J_a = p\int_{(V)} r^2 dV$$

Тело	Описание	Положение оси a	Момент инерции J_a
a) 	Материальная точка массы m	На расстоянии r от точки, неподвижная	mr^2
b) 	Полый тонкостенный цилиндр или кольцо радиуса r и массы m	Ось цилиндра	mr^2
c) 	Сплошной цилиндр или диск радиуса r и массы m	Ось цилиндра	$\frac{1}{2}mr^2$
d) 	Полый толстостенный цилиндр массы m с внешним радиусом $r2$ и внутренним радиусом $r1$	Ось цилиндра	$m\frac{r_2^2 + r_1^2}{2}$
e) 	Сплошной цилиндр длины l, радиуса r и массы m	Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его центр масс	$\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
f) 	Полый тонкостенный цилиндр (кольцо) длины l, радиуса r и массы m	Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его центр масс	$\frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$

	Прямой тонкий стержень длины l и массы m	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его центр масс	$\frac{1}{12}ml^2$
	Прямой тонкий стержень длины l и массы m	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
	Тонкостенная сфера радиуса r и массы m	Ось проходит через центр сферы	$\frac{2}{3}mr^2$
	Шар радиуса r и массы m	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mr^2$
	Конус радиуса r и массы m	Ось конуса	$\frac{3}{10}mr^2$
	Равнобедренный треугольник с высотой h, основанием a и массой m	Ось перпендикулярна плоскости треугольника и проходит через вершину	$\frac{1}{24}m(a^2+12h^2)$
	Правильный треугольник со стороной a и массой m	Ось перпендикулярна плоскости треугольника и проходит через центр масс	$\frac{1}{12}ma^2$
	Квадрат со стороной a и массой m	Ось перпендикулярна плоскости квадрата и проходит через центр масс	$\frac{1}{6}ma^2$

	Прямоугольник со сторонами a и b и массой m	Ось перпендикулярна плоскости прямоугольника и проходит через центр масс	$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$
	Правильный n-угольник радиуса r и массой m	Ось перпендикулярна плоскости и проходит через центр масс	$\frac{mr^2}{6}\left[1+2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right]$
	Тор (полый) с радиусом направляющей окружности R, радиусом образующей окружности r и массой m	Ось перпендикулярна плоскости направляющей окружности тора и проходит через центр масс	$m\left(\frac{3}{4}r^2+R^2\right)$

Вопрос 24. Моменты инерции шара, цилиндра, конуса (примеры расчета)

Тонкостенный цилиндр (кольцо, обруч)

Момент инерции тела равен сумме моментов инерции составляющих его частей. Разобьём тонкостенный цилиндр на элементы с массой dm и моментами инерции dJ_i. Тогда

$$J=\sum dJ_i=\sum R_i^2 dm. \quad (1)$$

Поскольку все элементы тонкостенного цилиндра находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения, формула (1) преобразуется к виду

$$J=\sum R^2 dm=R^2\sum dm=mR^2.$$

Толстостенный цилиндр (кольцо, обруч)

Пусть имеется однородное кольцо с внешним радиусом R, внутренним радиусом R_1, толщиной h и плотностью ρ. Разобьём его на тонкие кольца толщиной dr. Масса и момент инерции тонкого кольца радиуса r составит

$$dm=\rho dV=\rho\cdot 2\pi rh dr;\quad dJ=r^2dm=2\pi\rho h r^3 dr.$$

Момент инерции толстого кольца найдём как интеграл

$$J=\int_{R_1}^{R} dJ = 2\pi\rho h\int_{R_1}^{R} r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{r^4}{4}\Bigg|_{R_1}^{R} = \frac{1}{2}\pi\rho h\left(R^4-R_1^4\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho h\left(R^2-R_1^2\right)\left(R^2+R_1^2\right).$$

Поскольку объём и масса кольца равны

$$V=\pi\left(R^2-R_1^2\right)h;\quad m=\rho V=\pi\rho\left(R^2-R_1^2\right)h,$$

получаем окончательную формулу для момента инерции кольца

$$J=\frac{1}{2}m\left(R^2+R_1^2\right)$$

Однородный диск (сплошной цилиндр)

Рассматривая цилиндр (диск) как кольцо с нулевым внутренним радиусом ($R_1 = 0$), получим формулу для момента инерции цилиндра (диска):

$$J=\frac{1}{2}mR^2$$

Сплошной конус

Разобьём конус на тонкие диски толщиной dh, перпендикулярные оси конуса. Радиус такого диска равен

$$r=\frac{Rh}{H}$$

где R – радиус основания конуса, H – высота конуса, h – расстояние от вершины конуса до диска. Масса и момент инерции такого диска составят

$$dm=\rho V=\rho\cdot\pi r^2 dh$$

$$dJ=\frac{1}{2}r^2 dm=\frac{1}{2}\pi\rho r^4 dh=\frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{Rh}{H}\right)^4 dh;$$

Интегрируя, получим

$$J=\int_0^H dJ=\frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{R}{H}\right)^4\int_{R_1}^{R} h^4 dh=\frac{1}{2}\pi\rho\left(\frac{R}{H}\right)^4\frac{h^5}{5}\Bigg|_0^H=\frac{1}{10}\pi\rho R^5 H=$$

$$=\left(\rho\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)\frac{3}{10}R^2=\frac{3}{10}mR^2.$$

Сплошной однородный шар

Разобьём шар на тонкие диски толщиной dh, перпендикулярные оси вращения. Радиус такого диска, расположенного на высоте h от центра сферы, найдём по формуле

$$r=\sqrt{R^2-h^2}.$$

Масса и момент инерции такого диска составят

$$dm=\rho dV=\rho\cdot\pi r^2 dh;$$

$$dJ = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \pi \rho r^4 dh = \frac{1}{2} \pi \rho (R^2 - h^2)^2 dh$$
$$= \frac{1}{2} \pi \rho (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4).$$

Момент инерции сферы найдём интегрированием:

$$J = \int_{-R}^{R} dJ = 2 \int_{0}^{R} dJ = \pi \rho \int_{0}^{R} (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4) dh =$$
$$= \pi \rho \left(R^4 h - \frac{2}{3} R^2 h^3 + \frac{h^5}{5} \right) \Bigg|_0^R = \pi \rho \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{R^5}{5} \right)$$
$$= \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \left(\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2.$$

Тонкостенная сфера

Для вывода воспользуемся формулой момента инерции однородного шара радиуса R:

$$J_0 = \frac{2}{5} M R^2 = \frac{8}{15} \pi \rho R^5.$$

Вычислим, насколько изменится момент инерции шара, если при неизменной плотности ρ его радиус увеличится на бесконечно малую величину dR:

$$J = \frac{dJ_0}{dR} dR = \frac{d}{dR} \left(\frac{8}{15} \pi \rho R^5 \right) dR = \frac{8}{3} \pi \rho R^4 dR = (\rho \cdot 4\pi R^2 dR) \frac{2}{3} R^2$$
$$= \frac{2}{3} m R^2$$

Тонкий стержень (ось проходит через центр)

Разобьём стержень на малые фрагменты длиной dr. Масса и момент инерции такого фрагмента равна

$$dm = \frac{m dr}{l}; \quad dJ = r^2 dm = \frac{m r^2 dr}{l}.$$

Интегрируя, получим

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} dJ = 2 \int_{0}^{l/2} dJ = \frac{2m}{l} \int_{0}^{R} r^2 dr = \frac{2m}{l} \frac{r^3}{3} \Bigg|_0^{l/2} = \frac{2m}{l} \frac{l^3}{24} = \frac{1}{12} m l^5.$$

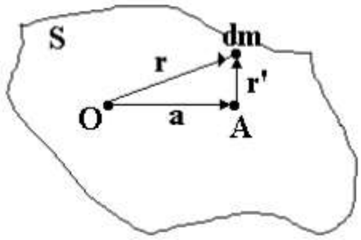
Тонкий стержень (ось проходит через конец)

При перемещении оси вращения из середины стержня на его конец, центр тяжести стержня перемещается относительно оси на расстояние $l/2$. По теореме Штейнера новый момент инерции будет равен

$$J = J_0 + m r^2 = J_0 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

Вопрос 25. Теорема Гюйгенса-Штайнера (доказательство)

Найдем связь между моментами инерции относительно двух различных параллельных осей. Она устанавливается теоремой Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс, параллельно данной и произведения массы на квадрат расстояния между осями



Докажем эту теорему. Пусть S — сечение тела. Будем предполагать, что центр масс находится в точке О **и оси, проходящие через точки O и A, перпендикулярны к рисунку. Мысленно разобьем тело на элементарные массы dm. Момент инерции тела найдем, проинтегрировав по всем элементарным массам. Радиус-вектор элементарной массы dm относительно оси А $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$, где $\vec{r}$ — её радиус-вектор относительно оси О, $\vec{a}$ — радиус-вектор $\overline{OA}$, его модуль равен расстоянию между осями. Таким образом**

$$\vec{r}'^2 = \vec{r}^2 + \vec{a}^2 - 2(\vec{a}\vec{r}). \qquad (5.11)$$

Умножая обе части равенства (5.11) на dm и интегрируя по всему объему, получим:

$$\int\limits_{(V)} r'^2 dm + a^2 \cdot \int\limits_{(V)} dm - 2\left(a \cdot \int\limits_{(V)} r dm\right). \quad (5.12)$$

Так как ось О проходит через центр масс, последний интеграл в (5.12) обращается в нуль.

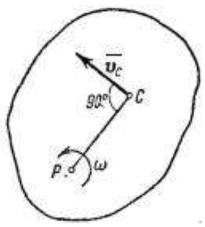
$$\vec{R}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r} dm = 0.$$

Интеграл слева дает момент инерции относительно оси А, первый интеграл справа - момент инерции относительно оси О, второй интеграл справа дает полную массу тела. Откуда

$$I_A = I_0 + ma^2. \qquad (5.13)$$

Это **и есть аналитическое выражение теоремы Гюйгенса-Штейнера.**

Вопрос 26. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении. Теорема Кенига.



Плоское движение. При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис. слева). Следовательно

$$W_k^{\text{плоск}} = \frac{1}{2} I_p \omega^2,$$

где I_p — момент инерции тела относительно названной выше оси, ω — угловая скорость тела. Величина I_p в формуле будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо I_p постоянный момент инерции, относительно оси, проходящей через центр масс C тела. По теореме Гюйгенса-Штейнера, $I_p = I_C + Md^2$, где $d = PC$. Подставим это выражение для I_p. Учитывая, что точка P — мгновенный центр скоростей, и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = V_C$, где V_C — скорость центра масс C, окончательно найдем:

$$W_k^{\text{плоск}} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

Для самого *общего случая движения* материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить *теорема Кёнига.* Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис.3). Переносного – поступательного движения вместе с центром масс C и относительного – движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей x_1, y_1, z_1. Тогда скорость точек $\vec{v}_i = \vec{v}_{ei} + \vec{v}_{ri}$. Но переносное движение – поступательное. Поэтому переносные скорости всех точек равны, равны $\vec{v}_C$. Значит, $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_{ri}$ и кинетическая энергия будет

$$\begin{aligned} W_k &= \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{ri})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(v_C^2 + 2\vec{v}_C \vec{v}_{ri} + v_{ri}^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_C^2 + \sum_i m_i \vec{v}_C \vec{v}_{ri} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ri}^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \vec{v}_C \cdot \sum_i m_i \vec{v}_{ri} + W_r. \end{aligned}$$

По определению центра масс его радиус-вектор в подвижной системе $\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} = 0$ (центр масс находится в начале координат), значит, и $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$. Производная по времени от этой суммы также равна нулю:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r}_i = \sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i m_i\vec{v}_{ri} = \mathbf{0}.$$

Поэтому, окончательно, кинетическая энергия системы

$$W_k = \frac{1}{2}Mv_C^2 + W_r. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс C и относительного – вращения вокруг точки C), по теореме Кенига (1) получим

$$W_k = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}I_p\omega^2$$

или

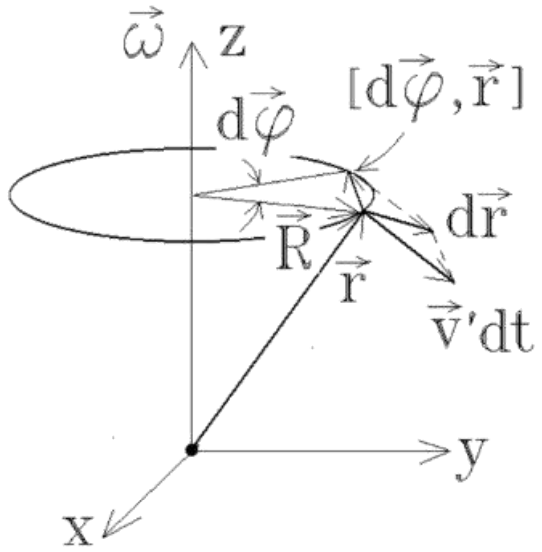
$$W_k = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right),$$

где I_x, I_y, I_z — главные центральные оси инерции тела.

Вопрос 27. Преобразование скоростей и ускорений при переходе в НИСО

Переход в неинерциальную систему отсчета (НИСО) влияет на преобразование скоростей и ускорений из-за ускорения самой системы. В инерциальной системе отсчета (ИСО), в которой отсутствуют внешние силы, законы Ньютона сохраняют свою форму. Однако в НИСО, вращающейся или имеющей ускорение, это уже не так, и формулы для скоростей и ускорений могут отличаться.

Преобразование скоростей: В НИСО скорость наблюдаемого объекта относительно ИСО связана со скоростью v в ИСО и скоростью самой НИСО u следующим образом:



$$d\vec{r} = \vec{v}'dt + \vec{V}dt + [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}' + \vec{V} + \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right]$$
$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Преобразование ускорений: Ускорение $\boldsymbol{a'}$ в НИСО связано с ускорением $\boldsymbol{a}$ в ИСО и ускорением самой НСО $\boldsymbol{\omega}$ по формуле:

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}];\ d\vec{v} = d\vec{v}' + [\vec{\omega}, d\vec{r}]$$
$$d\vec{v}' = \vec{a}'dt + [d\vec{\varphi}, \vec{v}']$$
$$d\vec{v} = \vec{a}'dt + [d\vec{\varphi}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, d\vec{r}]$$
$$\vec{a} = \vec{a}' + \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{v}'\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$
$$\vec{a} = \vec{a}' + [\vec{\omega}, \vec{v}'] + [\vec{\omega}, (\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}])]$$
$$\vec{a} = \vec{a}' + 2[\vec{v}', \vec{\omega}] + \big[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\big]$$

Здесь $\vec{v}', \vec{v}, \vec{u}, \vec{a}', \vec{a}$ и $\vec{\omega}$ - векторы скоростей и ускорений в трехмерном пространстве.

Преобразования скоростей и ускорений при переходе в НИСО включают добавление векторов ускорений и скоростей НИСО к соответствующим векторам из ИСО. Эти добавки связаны с изменениями движения, вызванными ускорением или вращением НИСО. Они позволяют учесть изменения, связанные с неинерциальностью системы, и перейти к описанию движения объекта в этой системе отсчета.

Вопрос 28. II закон Ньютона в НИСО. Силы инерции. Сила Кориолиса

Второй закон Ньютона, ($\vec{F} = m\vec{a}$), описывает взаимосвязь между силой, массой тела и его ускорением в инерциальной системе отсчета (ИСО). В неинерциальных системах отсчета (НИСО), где на тело действует ускорение или вращение, применение этого закона может потребовать добавления фиктивных сил, чтобы сохранить его форму.

Если рассматривать НИСО, движущуюся с ускорением или вращающуюся, мы должны учесть добавочные ускорения или фиктивные силы, чтобы сохранить форму второго закона Ньютона.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\right]$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} + 2m[\vec{v}', \vec{\omega}] - m\left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\right]$$

1. Добавочные ускорения: Если рассматривается НСО с ускорением, то второй закон Ньютона будет выглядеть как $F_{\text{рез}} = m(a - a_{\text{набл}})$, где $F_{\text{рез}}$ — результирующая сила, a — ускорение тела в НИСО, $a_{\text{набл}}$ — добавочное ускорение, обусловленное ускорением самой системы.
2. Фиктивные силы: В случае вращающейся НИСО, чтобы сохранить второй закон Ньютона, могут использоваться фиктивные силы, такие как центробежная сила или кориолисова сила. Эти силы вводятся для объяснения наблюдаемых эффектов в неинерциальной системе, чтобы второй закон Ньютона оставался верным.

Силы инерции обусловлены свойствами неинерциальных систем отсчёта, являются фиктивными силами:

- III закон Ньютона не выполняется.
- Существуют только в НИСО.
- Все силы инерции пропорциональны массе тела.

В НИСО вводятся различные виды фиктивных сил, чтобы объяснить и описать наблюдаемые явления при рассмотрении движения тел в таких системах. Три из таких фиктивных сил - поступательная, центробежная и кориолисова сила:

1. *Поступательная сила*: Это фиктивная сила, возникающая в НИСО с поступательным ускорением. Если сама система НИСО ускоряется, любое тело в этой системе будет испытывать поступательную силу, которая равна произведению его массы на ускорение системы. Эта сила приводит к изменению скорости тела в НСО.

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{A}$$

2. *Центробежная сила*: Центробежная сила возникает во вращающейся системе координат и направлена относительно оси вращения. Это фиктивная сила, которая создается из-за инерции объекта, стремящегося двигаться прямолинейно, в условиях вращения системы. Ее направление всегда направлено относительно центра вращения. Центробежная сила важна для

объяснения явлений, таких как силы инерции во вращающихся системах.

$$\vec{F}_{CF} = -m\left[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}]\right]$$

3. ***Кориолисова сила (сила Кориолиса)***: Эта сила возникает в результате вращения системы координат и влияет на движение объектов в этой системе. Кориолисова сила действует на тело, движущееся относительно вращающейся системы, и приводит к отклонению траектории движущегося объекта от прямолинейного пути. Ее направление перпендикулярно и скорости объекта, и оси вращения системы.

$$\vec{F}_{Cor} = 2m\left[\vec{v}^{\,'},\vec{\omega}\right]$$

Таким образом, в НИСО второй закон Ньютона может быть применен, но может потребоваться добавление дополнительных слагаемых (фиктивных сил или добавочных ускорений), чтобы учесть влияние самой неинерциальной системы на движение объектов внутри нее.

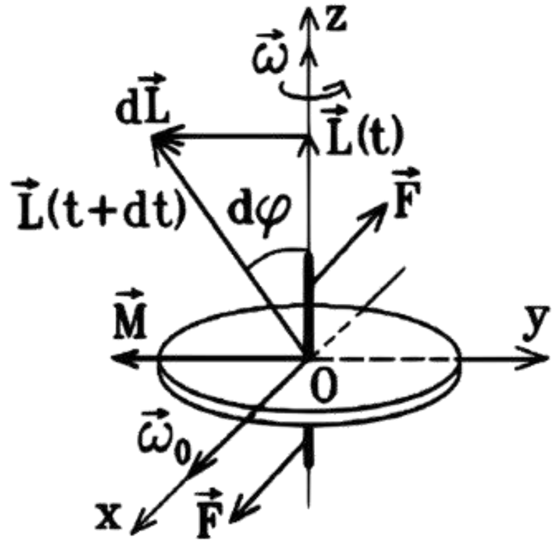
Вопрос 29. Свободный гироскоп. Гироскопический эффект.

Свободный гироскоп — это устройство, состоящее из вращающегося диска (ротора), который может свободно вращаться в любой плоскости относительно своей оси. Ротор гироскопа способен сохранять свою ориентацию в пространстве благодаря моменту импульса, который он обладает из-за своего вращения.

Работа свободного гироскопа основана на принципе сохранения момента импульса. Если на гироскоп не действуют внешние силы, ось его вращения сохраняет прежнее направление в пространстве. Когда гироскоп подвергается действию момента силы (например, внешней силы, пытающейся изменить его ориентацию), он демонстрирует устойчивость за счет своего вращения.

Гироскопический эффект — это явление, проявляющееся при вращении тела или системы тел, когда изменение вектора момента импульса вызывает специфические физические эффекты.

Основной гироскопический эффект связан с сохранением момента импульса. Если вращающееся тело или система тел испытывают изменение направления оси вращения или момента силы, то возникают характерные реакции, связанные с сохранением момента импульса. Это явление проявляется в различных ситуациях и может быть использовано в технических устройствах.



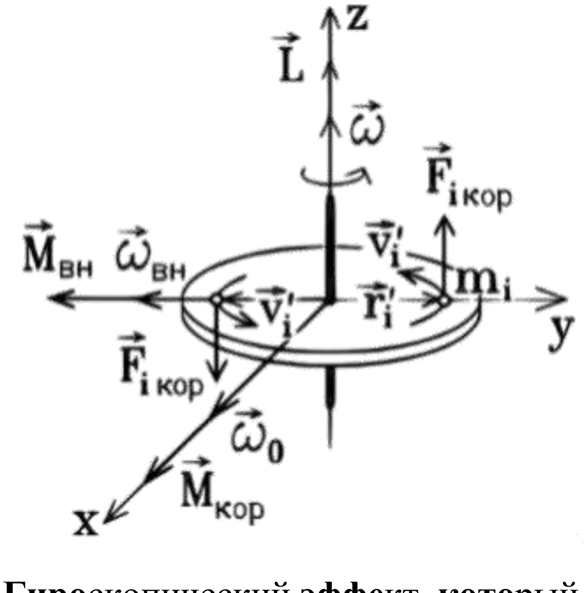
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M};\ dL = Ld\varphi$$
$$dL = Ld\varphi = Mdt$$
$$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}$$
$$\vec{M} = [\vec{\omega}_0, \vec{L}]$$

Примеры гироскопического эффекта:

1. Карусельный эффект: Если вращающаяся карусель наклонить, ось вращения карусели будет изменена, но из-за сохранения момента импульса верхняя часть карусели будет продолжать двигаться в том же направлении, что и до наклона.

2. Гироскопический эффект в авиации: Во время маневров самолета или вертолета изменения вектора момента импульса могут вызывать изменение положения самолета, и пилоты должны учитывать это явление при управлении.

3. Гироскопы в навигационных системах: Гироскопические принципы используются в гироскопах для измерения и поддержания ориентации в пространстве, что является основой для инерциальных навигационных систем.



$$\vec{v}_i' = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$$
$$\vec{F}_{Cor} = 2m_i[\vec{v}', \vec{\omega}_{BH}]$$
$$\vec{M}_{Cor} \parallel Ox$$

Гироскопический эффект, который проявляется в поведении вращающегося объекта или системы тел при изменении направления оси вращения или момента силы, связан с действием кориолисовых сил инерции.

Кориолисовыми силами инерции называют фиктивные силы, возникающие в результате вращения системы отсчета. Кориолисова сила действует на тело, движущееся относительно вращающейся системы, и приводит к отклонению траектории движения этого тела.

Когда вращающийся гироскоп подвергается воздействию внешних сил, например, когда ось его вращения или момент силы изменяют свое направление, внутренние части гироскопа подвергаются действию кориолисовых сил инерции. Эти силы приводят к специфическим реакциям гироскопа, вызывая изменения в его ориентации в пространстве и проявляясь как гироскопический эффект.

Таким образом, гироскопический эффект, проявляющийся в реакциях вращающегося объекта на изменение момента силы или оси вращения, связан с действием кориолисовых сил инерции, которые возникают во вращающейся системе отсчета.

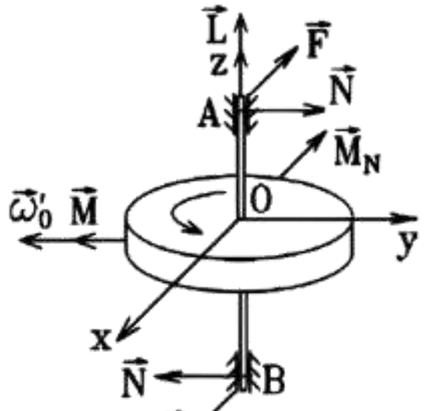
Гироскопический эффект играет важную роль в различных технических и научных областях, обеспечивая стабильность, устойчивость и точность в различных приложениях.

Вопрос 30. Угловая скорость прецессии несвободного гироскопа.

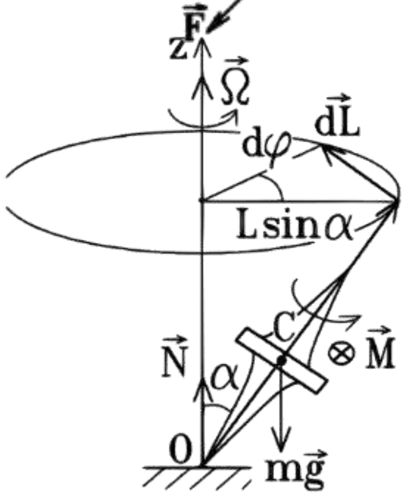
Прецессия гироскопа — это движение оси вращения гироскопа вокруг вертикальной оси в ответ на внешнее воздействие момента силы. Это движение происходит так, что ось вращения гироскопа поворачивается вокруг вертикальной оси, образуя конус.

Прецессия гироскопа является результатом воздействия момента силы на вращающийся гироскоп. Когда на гироскоп действуют внешние силы, например, гравитация или приложенная сила, изменяющая его ориентацию, гироскоп начинает прецессировать.

Ключевым аспектом прецессии является сохранение момента импульса. При воздействии внешнего момента силы на гироскоп, он реагирует таким образом, чтобы сохранить свой момент импульса. Это приводит к вращению оси гироскопа вокруг вертикальной оси, образуя конус.



Гироскопический эффект создается моментом пары сил $\vec{M}_N$ и ось несвободного гироскопа будет поворачиваться вокруг оси Oy.



$$\vec{M}_{mg} = [\vec{l}, m\vec{g}];\ l = OC$$

$$M_{mg} = mgl\sin\alpha$$

$$dL = L\sin\alpha\, d\varphi = M_{mg}dt$$

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_{mg}}{L}$$

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega}$$

Ω не зависит от угла α!

Угловая скорость прецессии несвободного гироскопа определяется с учетом внешнего момента силы, действующего на гироскоп, и его инерции.

Для несвободного гироскопа, на который действует внешний момент силы, угловая скорость прецессии определяется по аналогии с моментом силы в классической механике. Угловая скорость прецессии $\vec{\omega}'_0$ связана с величиной внешнего момента силы $\vec{M}_N$ и момента инерции гироскопа $\vec{L}$ следующим образом:

$$\vec{M}_N = [\vec{\omega}'_0, \vec{L}]$$

Это уравнение аналогично уравнению второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{M}_N$ — момент силы, $\vec{L}$ — момент инерции гироскопа, а $\vec{\omega}'_0$ — угловая скорость прецессии. Угловая скорость прецессии определяется величиной момента силы, действующей на гироскоп, и его моментом инерции. Таким образом, чем больше момент силы или момент инерции гироскопа, тем больше будет угловая скорость прецессии.

Раздел 2. Элементы теории упругости.

Вопрос 31. Закон Гука и пределы его применимости

Закон Гука описывает зависимость силы, действующей на упругое тело, от величины его деформации. Этот закон применим к упругим телам, которые возвращаются к своей исходной форме и размерам после прекращения воздействия силы.

Математически закон Гука выражается следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$T = E\frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon E \ (P = -\varepsilon E),$$

где E — модуль Юнга.

Закон Гука описывает линейную зависимость деформации упругого материала от приложенной силы в пределах его упругости. Однако, есть определенные ограничения и пределы применимости этого закона:

1. Линейность: Закон Гука справедлив только в пределах линейной упругости материала. Это значит, что деформация материала должна быть пропорциональна приложенной силе. После превышения предела пропорциональности материала он может начать проявлять нелинейное поведение.

2. Предел упругости: Закон Гука применим только до достижения предела упругости материала. После этого предела материал может начать проявлять пластичность или даже разрушаться.

3. Однородность материала: Закон Гука предполагает однородность материала. Если материал неоднороден, то его свойства могут изменяться в разных частях, что приведет к неравномерной деформации и неприменимости закона Гука для всего материала.

4. Скорость деформации: Для некоторых материалов и в условиях быстрого или медленного действия силы закон Гука может стать неприменимым из-за изменения скорости деформации. В таких случаях могут проявляться вязкоупругие или вязко-пластичные свойства материала.

5. Температура: Высокие или низкие температуры также могут изменить свойства материала, что приведет к нарушению линейности и предельных значений деформации.

Все эти факторы определяют пределы применимости закона Гука и требуют осторожного учета при его использовании в различных инженерных и научных приложениях.

Вопрос 32. Принцип суперпозиции малых деформаций

Принцип суперпозиции малых деформаций используется в механике деформируемых тел для объяснения и анализа сложных деформаций, предполагая, что общая деформация тела равна сумме всех небольших деформаций, происходящих независимо друг от друга.

Суть принципа состоит в том, что, если на материал действуют несколько небольших внешних сил, вызывающих малые деформации, общая деформация тела может быть представлена как сумма этих малых деформаций. Это предположение справедливо только в том случае, если деформации не взаимно влияют друг на друга и не вызывают нелинейные эффекты.

$$T = E\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^3 + \cdots$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{l_0 + \Delta l}$$

$$\varepsilon - \varepsilon' = \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta l}{l_0 + \Delta l} = \frac{\Delta l^2}{(l_0 + \Delta l) l_0} \approx \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 = \varepsilon^2$$

$$\frac{\Delta l_1}{l_0} = \frac{T_1}{E};\ \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{T_2}{E'};\ \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{\Delta l_2}{l_0};$$

$$\frac{\Delta l_1}{l_0} + \frac{\Delta l_2}{l_0} = \frac{T_1}{E} + \frac{T_2}{E'} \Leftrightarrow \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{l_0} = \frac{T_1 + T_2}{E} \Rightarrow E = E'$$

Принцип суперпозиции малых деформаций часто используется в механике материалов для упрощения анализа сложных структур и материалов, предполагая, что эффект от каждой малой силы или деформации является независимым от остальных. Это упрощение позволяет более легко моделировать и анализировать сложные системы, где на материал действуют несколько факторов, вызывающих его деформацию. Однако в реальности существуют случаи, когда этот принцип может быть ограничен из-за нелинейных эффектов или взаимного влияния различных деформаций на материал.

Вопрос 33. Энергия упругой деформации

Энергия упругой деформации — это вид потенциальной энергии, которая накапливается в упругом материале при его деформации и может быть восстановлена при возвращении материала к его исходному состоянию. Когда на упругий материал действует внешняя сила, вызывающая его деформацию (например, растяжение, сжатие или изгиб), энергия тратится на изменение его формы или размеров. Эта энергия сохраняется в материале в виде упругой потенциальной энергии.

Упругая деформация характеризуется тем, что материал может восстановить свою исходную форму или размеры, когда внешняя сила перестает действовать. Это означает, что энергия, потраченная на деформацию, хранится в материале в виде потенциальной энергии упругости и может быть восстановлена при возвращении материала в его исходное состояние.

Формула для вычисления энергии упругой деформации зависит от типа деформации и характеристик материала. Например, для упругой деформации в виде растяжения или сжатия применяется формула:

$$\boldsymbol{U} = \int_0^{\Delta l} F dx = \int_0^{\Delta l} TS dx = \int_0^{\Delta l} \frac{x}{l_0} ES dx = \frac{ES}{l_0}\frac{\Delta l^2}{2} = \frac{ESl_0}{2}\varepsilon^2$$

$$w = \frac{U}{V} = \frac{U}{Sl_0} = \frac{E\varepsilon^2}{2}.$$

где:

- $\boldsymbol{w}$ — энергия упругой деформации;
- $\boldsymbol{E}$ — модуль Юнга;
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ — величина деформации(изменение длины);
- $\frac{\boldsymbol{E\varepsilon^2}}{\boldsymbol{2}}$ — потенциальная энергия упругости.

Энергия упругой деформации играет важную роль в механике материалов и механике деформируемых тел, она помогает оценить количество энергии, хранимой в упругих материалах в результате их деформации, и может быть использована для расчёта различных параметров в технических приложениях.

Вопрос 34. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона

Модуль Юнга, также известный как модуль упругости в продольном направлении или модуль продольной упругости, это фундаментальная физическая характеристика материала, описывающая его упругие свойства в ответ на растяжение или сжатие вдоль продольной оси.

Формально модуль Юнга ($\boldsymbol{E}$) определяется как отношение напряжения, вызываемого деформацией, к величине деформации вдоль продольной оси.

Математически модуль Юнга выражается как:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Fl}}{\boldsymbol{S\Delta l}}$$

где:

- $\boldsymbol{F}$ — нормальная составляющая силы;
- $\boldsymbol{S}$ — площадь поверхности, по которой распределено действие силы;
- $\boldsymbol{l}$ — длина деформируемого стержня;

- Δl — модуль изменения длины стержня в результате упругой деформации (измеренного в тех же единицах, что и длина l).

Модуль Юнга измеряется в единицах давления (Паскали, Ньютона на квадратный метр или Па) и характеризует степень жесткости материала: чем больше значение модуля Юнга, тем жестче материал.

Коэффициент Пуассона — это числовая характеристика материала, описывающая его деформационные свойства в ответ на растяжение или сжатие вдоль оси. Он определяет отношение поперечной деформации к продольной деформации в материале при действии на него напряжения вдоль продольной оси.

Формально, коэффициент Пуассона (обозначается как μ) выражается как отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации:

$$\mu = -\frac{\Delta r \cdot l}{\Delta l \cdot r}$$

Коэффициент Пуассона зависит только от материала тела и является одной из важных постоянных, характеризующих его упругие свойства.

Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через E и μ.

Вопрос 35. Модуль однородного всестороннего сжатия

Модуль однородного всестороннего сжатия (обычно обозначается как K) — это физическая характеристика материала, которая описывает его способность сопротивляться объемному сжатию или уменьшению объема под действием внешних сил.

Модуль однородного всестороннего сжатия измеряет изменение давления в материале при изменении его объема и является мерой упругих свойств материала в объеме. Модуль K определяется как отношение увеличения давления к относительному изменению объема материала:

$$K = -V\frac{dp}{dV} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

Модуль однородного всестороннего сжатия является важной характеристикой материала и используется для анализа его упругих свойств в объеме. Этот параметр помогает определять изменения объема материала под действием давления, что важно для понимания его поведения при компрессии и в различных инженерных и научных приложениях, например, в геологии, строительстве и материаловедении.

Вопрос 36. Модуль одностороннего растяжения

Деформация одностороннего растяжения — это вид деформации, характеризующийся изменением формы объекта или материала только в одном направлении, обусловленном применением нагрузки или силы только в этом направлении.

Представьте, например, растяжение резиновой ленты. Если на ленту действует сила, тянущая ее только вдоль одной оси, резиновая лента будет деформироваться вдоль этой оси, проявляя одностороннее растяжение.

Одностороннее растяжение происходит, когда приложенная сила вызывает деформацию только вдоль определенного направления, при этом остальные направления остаются неизменными или почти не меняются.

Пусть вдоль стержня действует постоянное натяжение T_x. Поперечные напряжения T_y и T_z найдутся из условия неизменности размеров стержня в направлениях координатных осей Y и Z.

Этот тип деформации играет важную роль в материаловедении и инженерии, поскольку позволяет понять, как материалы реагируют на направленные нагрузки и какие изменения происходят в их структуре и свойствах при одностороннем растяжении. Полагая, что $\Delta y = \Delta z = 0$, получим:

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E}\left(T_y + T_z\right)$$

$$0 = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E}\left(T_z + T_x\right) \Rightarrow T_y = T_z = T_x\frac{\mu}{1-\mu}$$

$$0 = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E}\left(T_x + T_y\right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E'}; E' = \frac{E}{3}\left[\frac{2}{1+\mu} + \frac{1}{1-2\mu}\right] = const.$$

E'и называется модулем одностороннего растяжения (сжатия).

Раздел 3. Элементы гидродинамики несжимаемой жидкости

Вопрос 37. Уравнение непрерывности струи

Уравнение непрерывности для струи является одним из фундаментальных уравнений гидродинамики, описывающим сохранение массы в потоке жидкости или газа. Это уравнение выражает принцип непрерывности потока вещества.

Уравнение непрерывности утверждает, что количество жидкости (или газа) входящего в определенную область пространства за единицу

времени должно быть равно количеству жидкости, покидающего эту область за то же время. Математически уравнение непрерывности для струи записывается следующим образом:

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S u \Delta t$$

$$\rho S u = const$$

где:

- $\boldsymbol{\rho}$ — плотность жидкости (или газа);
- $\boldsymbol{S}$ — площадь поперечного сечения;
- $\boldsymbol{u}$ — осевая проекция скорости по поперечному сечению.

Это уравнение выражает закон сохранения массы в континууме, где изменение плотности в определенной области пространства равно потоку массы через границы этой области. Уравнение непрерывности является одним из ключевых уравнений в гидродинамике и используется для моделирования и анализа движения жидкостей и газов в различных условиях потока.

Вопрос 38. Уравнение неразрывности. Оператор дивергенции

Уравнение неразрывности (или уравнение непрерывности) представляет собой фундаментальный закон сохранения массы в физике и инженерии. Это уравнение выражает принцип сохранения массы для непрерывного потока вещества и применимо как для жидкостей, так и для газов.

$$dm_x = \rho(x) u_x(x) dt \cdot dydz$$

$$dm_{x+dx} => \rho(x+dx) u_x(x+dx) dt \cdot dydz$$

$$\frac{dm}{dt \cdot dxdydz} = -\frac{\rho(x+dx)u_x(x+dx) - \rho(x)u_x(x)}{dx} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right) = 0$$

В общем виде уравнение неразрывности можно записать как:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

где:

- ρ — плотность среды;
- div — оператор дивергенции;
- u — вектор скорости потока.

Это уравнение гласит, что изменение плотности среды внутри объема равно потоку массы, пересекающему границы этого объема. Суть уравнения неразрывности заключается в том, что масса среды в системе не может ни создаваться, ни исчезать, а может только перемещаться из одной области в другую.

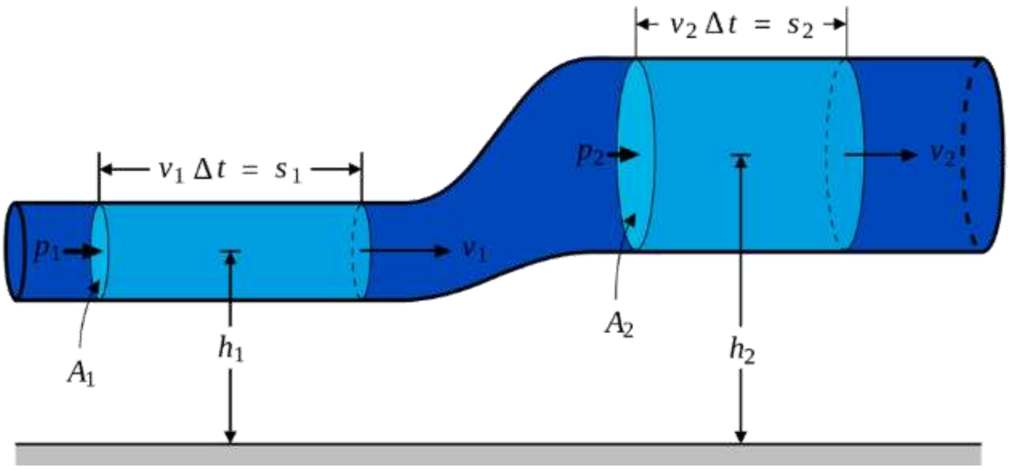
В уравнении неразрывности оператор дивергенции ($\vec{\nabla}$) применяется к векторному полю, в данном случае, к произведению плотности (ρ) на вектор скорости потока ($\vec{u}$). Этот оператор измеряет изменение направленного потока вещества через поверхность в данной точке пространства.

Геометрически дивергенция описывает расходимость или сближение векторного поля в данной области пространства. Положительная дивергенция означает "расхождение" векторного поля, что может интерпретироваться как источник или утечка вещества из рассматриваемой области, а отрицательная дивергенция — как "схождение" потока вещества в этой области.

В уравнении неразрывности оператор дивергенции выражает изменение плотности вещества в объеме пространства: если поток вещества выходит из этого объема, то дивергенция положительна, и наоборот, если поток вещества входит в этот объем, то дивергенция отрицательна. Уравнение неразрывности утверждает, что эта дивергенция должна быть равна изменению плотности вещества внутри этого объема за единицу времени.

Уравнение неразрывности имеет широкий спектр применений, включая гидродинамику, аэродинамику, газовую динамику, а также применяется в различных областях науки и техники, включая анализ потоков в жидкостях и газах, проектирование трубопроводов, расчеты аэродинамических профилей, моделирование погоды и течений в океане, а также в других областях, где важно учитывать сохранение массы при изучении потоков вещества.

Вопрос 39. Уравнение Бернулли и следствия из него



Уравнение Бернулли — фундаментальное уравнение в гидродинамике, которое описывает закон сохранения для невязкого, несжимаемого потока жидкости. Это уравнение является результатом применения закона сохранения энергии (в форме работы, совершенной давлением, кинетической энергии и потенциальной энергии) к частице жидкости, движущейся вдоль потока.

Уравнение Бернулли устанавливает взаимосвязь между давлением, скоростью и высотой жидкости вдоль потока, и его можно записать в следующей форме для несжимаемой жидкости без потерь энергии и вязкости:

$$\boldsymbol{\rho = const \Rightarrow V_m = const}$$

$$\boldsymbol{\Delta E = A = P_1 S_1 l_1 - P_2 S_2 l_2}$$

$$\boldsymbol{\Delta E = \left(m_2 g h_2 + \frac{m_2 u_2^2}{2}\right) - \left(m_1 g h_1 + \frac{m_1 u_1^2}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{P_1 S_1 l_1 + m_1 g h_1 + \frac{m_1 u_1^2}{2} = P_2 S_2 l_2 + m_2 g h_2 + \frac{m_2 u_2^2}{2}}$$

$$P + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = const.$$

где:

- $\boldsymbol{P}$ — давление жидкости,
- $\boldsymbol{\rho}$ — плотность жидкости,
- $\boldsymbol{v}$ — скорость потока жидкости,
- $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения,
- $\boldsymbol{h}$ — высота вдоль потока,
- $const$ — постоянная вдоль потока, если нет внешних сил.

Каждое из слагаемых в уравнении Бернулли представляет потенциальную, кинетическую и потенциальную энергии соответственно. Это уравнение показывает, что при несжимаемом и идеальном движении жидкости с потоком без потерь энергии, сумма этих трех энергий в любой точке потока остается постоянной.

Из этого уравнения можно вывести ряд следствии:

1. **Гидростатическое давление:** Гидростатическое давление описывает силу, действующую на погруженное в жидкость тело вследствие столба жидкости над ним. Оно определяется высотой столба жидкости и плотностью жидкости. Выражение для гидростатического давления:

$$\boldsymbol{P(h) = P_0 + \rho g} h,$$

где:

- $\boldsymbol{P}$ — гидростатическое давление,
- $\boldsymbol{P_0}$ — начальное давление,
- $\boldsymbol{\rho}$ — плотность жидкости,
- $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения,
- $\boldsymbol{h}$ — высота столба жидкости.

2. **Сила Архимеда:** Сила Архимеда равна величине выталкиваемой жидкости телом, и направлена вверх, против

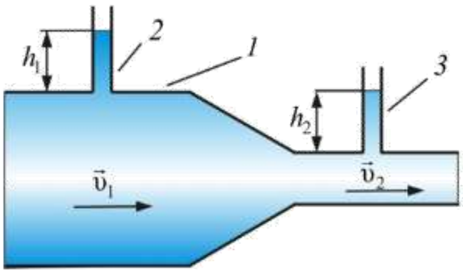
действия силы тяжести. Она равна весу вытесненной жидкости:

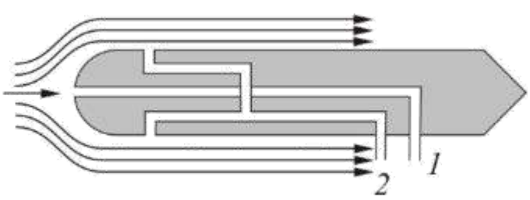
$$F_{\text{арх}} = m_L g = \rho g V,$$

где:

- m_L — масса вытесненной жидкости,
- ρ — плотность жидкости,
- g — ускорение свободного падения,
- V — объём столба жидкости.

3. **Подъёмная сила крыла самолёта:** Подъёмная сила, возникающая на крыле самолета, объясняется принципами аэродинамики, а закон Бернулли играет определенную роль в понимании основных принципов ее возникновения.
   Для возникновения подъёмной силы необходимо, чтобы крыло было несимметрично или несимметрично расположено относительно горизонтальной плоскости. Вихри уносят момент количества движения, а вокруг крыла образуется циркуляция по часовой стрелке. Скорость потока над крылом увеличивается, под крылом — уменьшается. Давление под крылом растёт, над крылом — уменьшается. Возникшая разность давлений проявляется в подъёмной силе, направленной вверх, и горизонтальной силе сопротивления среды. Это всё происходит из-за действия закона Бернулли.
4. **Измерение скорости течения жидкости и газа:** Для измерения скорости течения, особенно в трубопроводах или каналах, можно использовать уравнение Бернулли для определения скорости потока по различию давлений между двумя точками или сечениями потока. Например, если известны давления в двух различных точках вдоль трубопровода и нет больших потерь энергии, можно использовать уравнение Бернулли для определения скорости жидкости или газа. Для измерения скорости течения существует такой прибор, как трубка Пито.





Трубка Пито состоит из двух основных элементов: статической трубки и столбика Пито. Статическая трубка представляет собой трубку, установленную параллельно потоку жидкости или газа внутри трубопровода. Столбик Пито — это маленькая трубочка или зонд, установленный поперек течения, который используется для измерения давления в потоке. Принцип работы трубки Пито основан на законе Бернулли и изменении давления внутри потока. Когда жидкость или газ течет вокруг столбика Пито, скорость увеличивается, а давление снижается. Это приводит к возникновению разницы давлений между статической трубкой и столбиком Пито. Эта разница давлений используется для определения скорости потока согласно уравнению Бернулли.

Уравнение Бернулли дает ключевые принципы и инсайты для анализа потоков и является фундаментальным инструментом в гидродинамике и аэродинамике. Однако стоит помнить, что оно применимо только в идеальных условиях и не учитывает такие факторы, как вязкость, турбулентность и потери энергии, которые могут играть важную роль в реальных потоках.

Вопрос 40. Гидростатическое давление и сила Архимеда

Гидростатическое давление

Гидростатическое давление — это давление, которое создается столбом жидкости вследствие действия силы тяжести на этот столб.

Это давление возникает в жидкостях (например, в воде) или в других несжимаемых средах под воздействием гравитационной силы. Гидростатическое давление пропорционально плотности жидкости, ускорению свободного падения и глубине нахождения точки внутри жидкости.

Формула для расчета гидростатического давления в жидкости:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{P_0} + \boldsymbol{\rho g} h,$$

где:

- $\boldsymbol{P}$ — гидростатическое давление,
- $\boldsymbol{P_0}$ — начальное давление,
- $\boldsymbol{\rho}$ — плотность жидкости,
- $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения,
- $\boldsymbol{h}$ — высота столба жидкости.

Это уравнение показывает, что гидростатическое давление в жидкости увеличивается с увеличением плотности жидкости, глубины столба жидкости и ускорения свободного падения.

Гидростатическое давление имеет широкое применение в различных областях, таких как гидравлика, гидродинамика, инженерия, а также в разработке систем водоснабжения и других технических приложениях.

Сила Архимеда

Сила Архимеда — это сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ, направленная вверх и равная весу жидкости или газа, вытесненного этим телом.

Когда тело погружается в жидкость или газ, оно вытесняет объем этой жидкости или газа, что приводит к возникновению силы, направленной вверх — это и есть сила Архимеда. Сила Архимеда по величине равна весу жидкости или газа, которые были бы занимаемы объемом тела в этой среде.

Формула для вычисления силы Архимеда:

$$\boldsymbol{F}_{\text{арх}} = \boldsymbol{m_L g} = \boldsymbol{\rho g} V,$$

где:

- $\boldsymbol{m_L}$ — масса вытесненной жидкости,
- $\boldsymbol{\rho}$ — плотность жидкости,
- $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения,
- $\boldsymbol{V}$ — объём столба жидкости.

Сила Архимеда объясняет, почему плавучие объекты поднимаются вверх, чувствуют себя легче в воде или в других жидкостях, и почему тела теряют вес при погружении в жидкость или газ. Этот принцип широко используется в различных областях, включая судостроение, гидравлику, аэронавтику и другие инженерные приложения.

Вопрос 41. Ламинарное течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе. Профиль Пуазейля.

Ламинарное течение — это тип движения жидкости (или газа), при котором оно движется слоями (ламинация) без перекрывания слоев. В цилиндрической трубе ламинарное течение характеризуется тем, что жидкость или газ движется равномерно и параллельно оси трубы, со слоями, перемещающимися без смешивания.

Турбулентное течение — течение, сопровождающееся образованием вихрей и перемешиванием слоёв.

В цилиндрической трубе ламинарное течение сохраняется при небольших скоростях потока или при небольших числах Рейнольдса. Число Рейнольдса — это безразмерное число, определяющее характер течения в жидкости или газе, и определяется отношением инерционных сил к вязким силам.

$$\boldsymbol{Re} = \frac{\boldsymbol{\rho v l}}{\boldsymbol{\eta}}$$

При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение; при $\boldsymbol{Re} > \boldsymbol{Re}_{\text{кр}}$ (критическое значение) ламинарное течение переходит в турбулентное.

В случае ламинарного течения в цилиндрической трубе жидкость движется в виде слоев, где каждый слой движется со своей скоростью. Слои расположены один за другим без перемешивания. Скорость жидкости вблизи стенок трубы меньше, чем в центре, из-за взаимного воздействия стенок трубы на движущиеся слои.

Профиль Пуазейля описывает распределение скорости внутри трубы при ламинарном течении, где скорость максимальна в центре потока и постепенно уменьшается по мере приближения к стенкам трубы. В центре потока скорость жидкости или газа достигает максимального значения (максимума), а у стенок трубы она приближается к нулю. Это соответствует параболической форме распределения скорости внутри трубы.

Профиль Пуазейля описывается математической формулой, которая связывает радиус трубы и скорость жидкости:

$$v(r) = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + const = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), v_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2$$

Этот профиль является идеализированным описанием распределения скорости и характерен для идеальных условий ламинарного течения в трубе. Однако, при увеличении скорости потока или изменении условий, когда течение становится турбулентным, профиль Пуазейля может изменяться или терять свою симметрию и параболическую форму.

Раздел 4. Колебания и волны

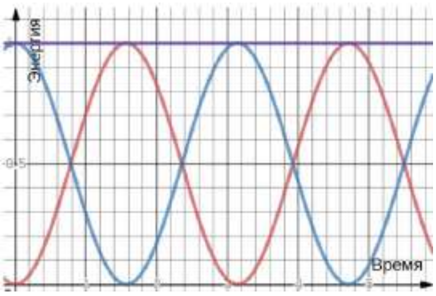
Вопрос 42. Энергия незатухающих гармонических колебаний

Если последовательность состояний системы точно повторяется через равные промежутки времени, то колебания называются незатухающими:

$$x(t) = x(t + nT), n \in \mathbb{Z}.$$

Энергия гармонических колебаний

$$E = \frac{mv^2(t)}{2} + \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2 \varphi(t)}{2} + \frac{kA^2 \sin^2 \varphi(t)}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$



$$T(t) = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2 \varphi(t)}{2}$$

$$U(t) = \frac{kA^2 \sin^2 \varphi(t)}{2}$$

Кинетическая и потенциальная энергия в случае незатухающих колебаний соответственно равны:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi),$$

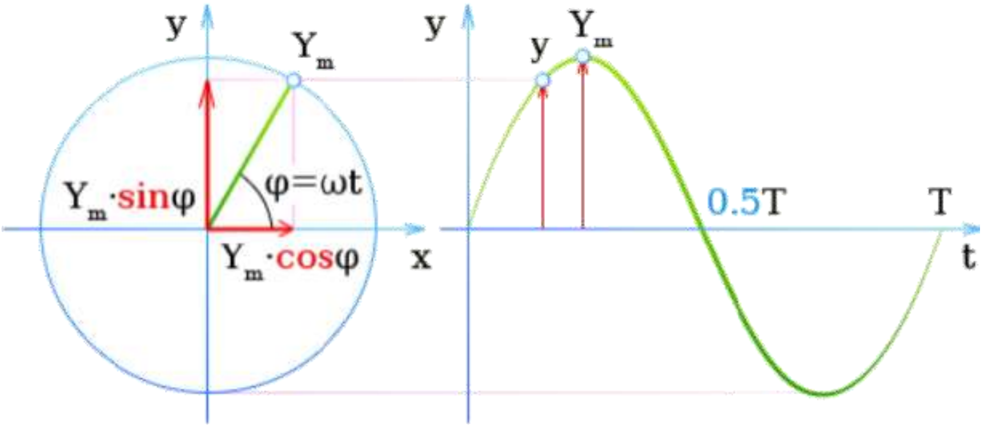
Тогда полная энергия незатухающих колебаний равна:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Введём $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и $k = \omega_0^2 \cdot m$. Потом подставим введённые параметры в формулу выше и получим:

$$\frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{A^2\omega_0^2 m}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

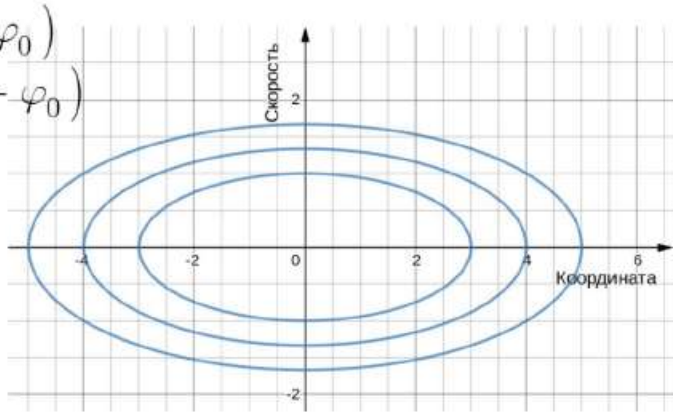
Незатухающие гармонические колебания можно представить в виде проекции равномерного движения по окружности. Если изобразить графически колебания на диаграмме отклонение-время, то получится синусоидальная кривая. Поэтому часто гармонические колебания называется также синусоидальными колебаниями.



При прохождении положения равновесия, т.е. положения, которое занимает покоящаяся система, колеблющееся тело имеет наибольшую скорость. В точке максимального отклонения (точке поворота) скорость равна нулю.

Вопрос 43. Фазовый портрет бездиссипативного гармонического осциллятора

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1$$



Фазовый портрет бездиссипативного гармонического осциллятора представляет собой графическое изображение траекторий движения системы в фазовом пространстве. В случае гармонического осциллятора без потерь энергии (бездиссипативного) фазовый портрет может быть описан в полярных координатах.

Гармонический осциллятор — система, которая при выведении её из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x. *(Представь пружинку, ты на неё давишь, а она пытается вернуться в исходное состояние)*

Для простейшего гармонического осциллятора, например, маятника, уравнение движения может быть записано в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0,$$

где:

- x — координата;
- ω_0 — частота собственных колебаний.

Фазовый портрет представляет собой график, на котором ось абсцисс (горизонтальная ось) обозначает координату x, а ось ординат (вертикальная ось) - скорость $\dot{x}$.

Диссипативное колебание — затухающие колебания, следствием является понятие бездиссипативных колебании — колебания, на которые не воздействуют внешние силы, кроме той, которая вывела тело из состояния равновесия.

Бездиссипативный гармонический осциллятор в фазовом пространстве представляет собой эллипсоид, круговые траектории или спирали, зависящие от начальных условий. Например, для маятника фазовый портрет может иметь форму эллипса или круга, в зависимости от начальных амплитуд и скоростей колебаний.

Эти траектории в фазовом пространстве отображают поведение системы во времени и позволяют увидеть эволюцию колебаний. Фазовый портрет является мощным инструментом для анализа динамики системы, позволяя представить траекторию системы и получить информацию о её стабильности, периоде колебаний и других характеристиках без необходимости решения дифференциальных уравнений движения.

Вопрос 44. Математический маятник при малой амплитуде колебаний

Математический маятник — осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения. Другой конец нити (стержня) обычно неподвижен. Период малых собственных колебаний маятника длины L, подвешенного в поле тяжести, равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

и не зависит, в первом приближении, от амплитуды колебаний и массы маятника. Здесь g — ускорение свободного падения.

Математический маятник служит простейшей моделью физического тела, совершающего колебания: она не учитывает распределение массы. Однако реальный физический маятник при малых амплитудах колеблется так же, как математический с приведённой длиной.

Характер движения маятника

Математический маятник со стержнем способен колебаться только в какой-то одной плоскости (вдоль какого-то выделенного горизонтального направления) и, следовательно, является системой с одной степенью свободы. Если же стержень заменить на нерастяжимую нить, получится система с двумя степенями свободы (так как становятся возможными колебания по двум горизонтальным координатам).

При колебаниях в одной плоскости маятник движется по дуге окружности радиуса L, а при наличии двух степеней свободы может описывать кривые на сфере того же радиуса. Нередко, в том числе в случае нити, ограничиваются анализом плоского движения; оно и рассматривается далее.

Уравнение колебаний маятника

Колебания математического маятника описываются обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) вида

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$$

где ω — положительная константа, определяемая исключительно из параметров маятника. Неизвестная функция $x(t)$ — это угол отклонения маятника в момент t от нижнего положения равновесия, выраженный в радианах; $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, где L — длина подвеса, g — ускорение свободного

падения. Уравнение малых колебаний маятника около нижнего положения равновесия (т. н. гармоническое уравнение) имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Приведённые уравнения предполагают, что потерь энергии в системе нет.

Вопрос 45. Физический маятник. Приведенная длина. Теорема Гюйгенса о центре качания

Физический маятник — это простой механический устройство, которое используется для изучения основ законов колебаний. Он состоит из твердого тела (обычно это металлический или деревянный шар, планка, маятник и т. д.), закрепленного на невесомой и нерастяжимой нити или стержне. Физические маятники могут иметь разные формы и конфигурации, но основной принцип работы остается одним и тем же.

Принцип работы физического маятника основан на движении тела под действием гравитационной силы, которая создает возвратное движение. Когда маятник смещается от положения равновесия и отпускается, действует сила тяжести, стремящаяся вернуть маятник в положение покоя. Это движение туда и обратно повторяется, создавая регулярные колебания.

При малой амплитуде колебаний его колебания становятся гармоническими.

Период физического маятника вычисляется следующим образом:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{mga}}, \text{ где}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \text{ — собственная частота.}$$

Момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса:

$$I = m(r^2 + h^2)$$

Приведённая длина — величина, измеряемая в единицах длины и условно вводимая для описания физического объекта в тех или иных задачах, но, возможно, не связанная напрямую с его размером. Чаще всего используется применительно к физическому маятнику.

В этом случае под приведённой длиной понимается длина математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний изучаемого физического маятника. Она вычисляется как

$$l = \frac{I}{ma},$$

где:

- I — момент инерции данного физического маятника относительно точки подвеса;
- m — масса;
- a — расстояние от точки подвеса до центра масс.

Центр качания — точка, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы его период колебаний не изменился.

Поместим на луче, проходящем от точки подвеса через центр тяжести точку на расстоянии l от точки подвеса. Эта точка и будет центром качания маятника.

Действительно, если всю массу сосредоточить в центре качания, то центр качания будет совпадать с центром масс. Тогда момент инерции относительно оси подвеса будет равен

$$I = ml^2$$

а момент силы тяжести относительно той же оси $-mgl\sin\theta$. Легко заметить, что уравнение движения не изменится.

Теорема Гюйгенса

Если физический маятник подвесить за центр качания, то его период колебаний не изменится, а прежняя точка подвеса сделается новым центром качания.

Доказательство

Доказательство теоремы Гюйгенса основано на предположении, что каждая точка волнового фронта испускает сферические элементарные волны, которые распространяются во всех направлениях. Путем сложения вторичных волн, созданных всеми точками на волновом фронте, можно показать, что в результате возникает новый волновой фронт, соответствующий законам интерференции и дифракции.

Вычислим приведенную длину для нового маятника:

$$l_1 = \frac{r^2}{r^2/h^2} + \frac{r^2}{h^2} = h + \frac{r^2}{h^2} = l.$$

Совпадение приведённых длин для двух случаев и доказывает утверждение, сделанное в теореме.

Вопрос 46. Фазовый портрет осциллятора при произвольной амплитуде колебаний

Рассмотрим гармонический осциллятор под действием периодических толчков: например, грузик на пружинке, лежащий на горизонтальном столе (трение отсутствует) под действием внешней периодической силы $F(t)$, график зависимости которой от времени представлен на рис. 16. Продолжительность толчков $\tau \ll T_0$, где T_0 — период собственных колебаний осциллятора. При этом уравнение, описывающее движение осциллятора, будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx + F(t)$$

Представим это уравнения в виде

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F(t)}{m} \text{ или } \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = +\frac{F(t)}{m}$$

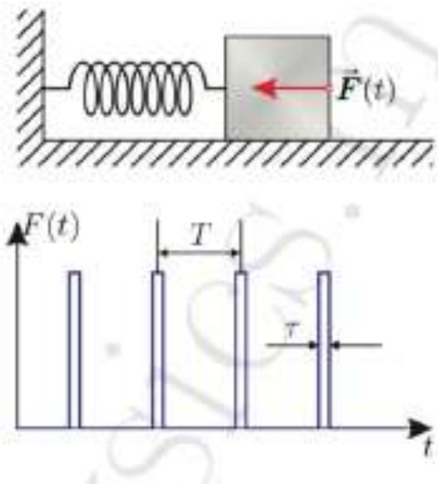


Рис. 16. Периодическая сила, состоящая из кратковременных толчков

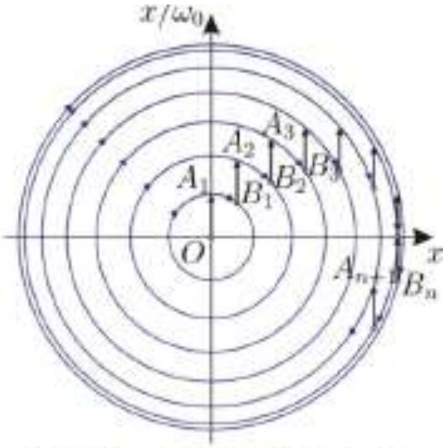


Рис. 17. Гармонический осциллятор под действием периодических толчков. Период воздействия больше собственного периода. Фазовая плоскость

Будем считать, что в начальный момент времени колебательная система находится в равновесии, т.е. $x = 0$ и $v = 0$. Проследим за движением изображающей точки на фазовой плоскости (рис. 17). Первый толчок переводит изображающую точку из начала координат O в т. A1, причем

$$OA_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_1+r} F(t)dt}{m\omega_0}$$

Дальше вплоть до момента действия второго толчка изображающая точка будет двигаться так же, как в случае свободно колеблющегося осциллятора, т.е. по окружности с центром в т. O и радиусом OA_1. Для определенности будем считать, что период следования толчков T немного больше периода собственных колебаний T_0. В этом случае до воздействия второго толчка изображающая точка пройдёт немного более одного круга (до т. B_1), а под действием второго толчка перескочит в т. A_2 ($B_1A_2 = OA_1$).

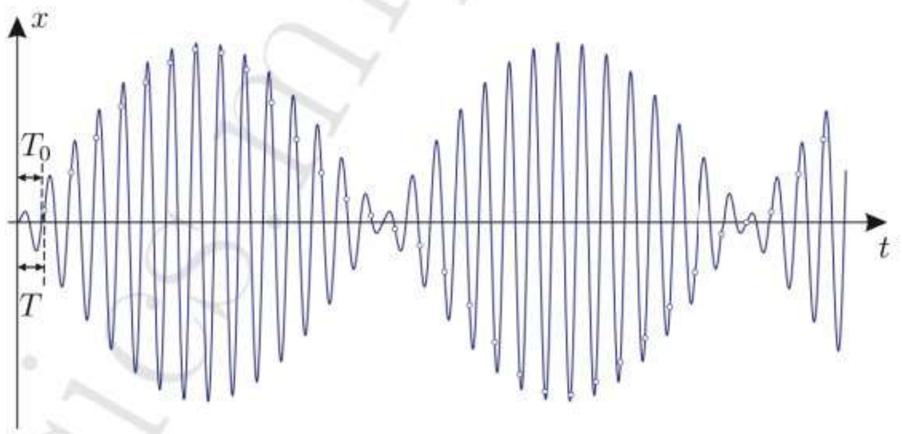


Рис. 18. Осциллограмма к рис. 17. Кружочками отмечены моменты толчков

Продолжив такое рассмотрение, увидим, что через некоторое время толчки начнут уменьшать амплитуду колебаний. Это произойдёт в тот момент, когда направление импульса, передаваемого в результате толчка грузику, станет противоположно скорости грузика, т.е. в тот момент, когда точка B_n на фазовой плоскости перейдет ниже оси x (будет находиться ниже оси x). После того как амплитуда уменьшится почти до нуля, наступит момент, когда толчки снова начнут ее увеличивать и т.д. Зависимость $x(t)$ представлена на рис. 18. Этот график состоит из кусков синусоиды одинакового периода, но различной амплитуды. На нем видны изломы, соответствующие скачкообразным изменениям скорости. К аналогичным заключениям можно прийти и при рассмотрении случая T немного меньше T_0 (рис. 19).

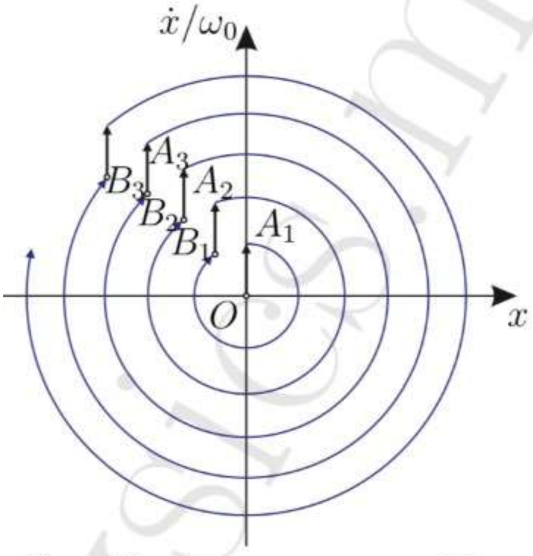


Рис. 19. То же, что и рис. 17, но период воздействия меньше собственного периода

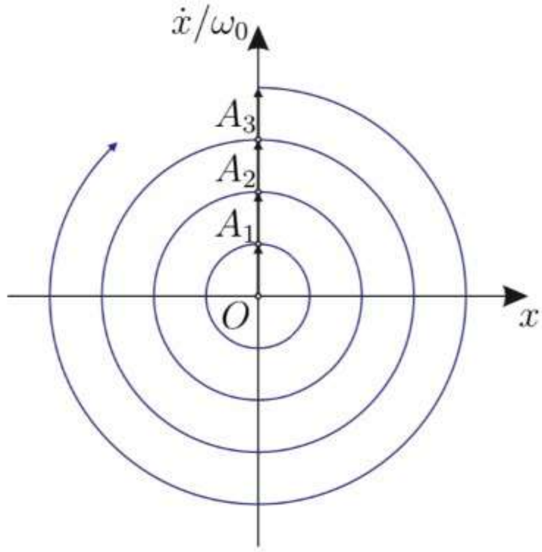


Рис. 20. Монотонное нарастание амплитуды при $T = T_0$

В случае $T = T_0$ будет происходить неограниченное нарастание амплитуды колебаний (рис. 20). Такое нарастание амплитуды колебаний под действием периодического воздействия — одна из черт явления, играющего центральную роль в учении о колебаниях и называемого резонансом. Легко видеть, что резонанс наступит не только при $T = T_0$, но и при $T = NT_0$, где N — целое число. Более подробно с рассмотрением гармонического осциллятора под действием периодических толчков можно ознакомиться в книге [2].

Вопрос 47. Сложение колебаний с помощью векторных диаграмм

Векторная диаграмма – это способ графического задания гармонического колебательного движения в виде вектора.

Пусть складывается два колебания:

$$\xi_1(t) = A_1\cos(\omega t + \alpha_1)$$
$$+$$
$$\underline{\xi_2(t) = A_2\cos(\omega t + \alpha_2)}$$
$$\xi(t) = A\cos(\omega t + \alpha)\ (2.1)$$

Чтобы найти A и α, строим векторные диаграммы и складываем векторы (рис. 2.2).

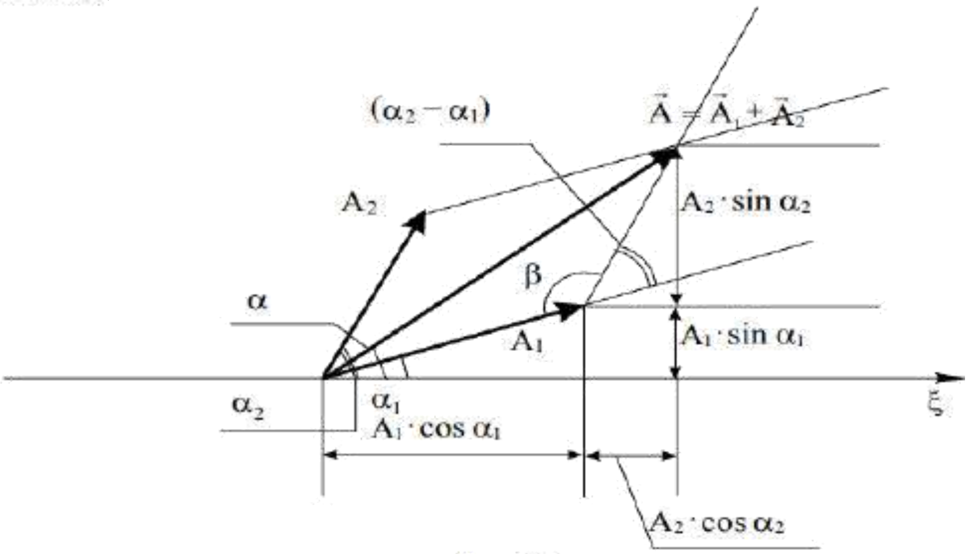


Рис. 2.2

По теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\beta.$$

Так как $\beta = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1)$, то

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Амплитуда результирующего колебания равна:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (2.2)$$

Очевидно (см. рис. 2.2), что начальная фаза результирующего колебания определяется соотношением:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}.$$

Значит, начальная фаза результирующего колебания равна:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}\right). \qquad (2.3)$$

Вывод: при сложении колебаний одинаковой частоты и направления результирующее колебание будет совершаться с той же частотой, что и частота складываемых колебаний. Амплитуда результирующего колебания определяется уравнением (2.2), а начальная фаза — (2.3). Как видно из (2.2), значение амплитуды A зависит от разности фаз $\alpha_2 - \alpha_1$. Если $(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$, то $A = A_1 + A_2$, если $(\alpha_2 - \alpha_1) = \pi$, то $A = |A_2 - A_1|$.

Вопрос 48. Сложение колебаний близких частот. Биения

Пусть складывается два колебания с почти одинаковыми частотами, т.е.

$$\begin{array}{c} \xi_1(t) = A\cos(\omega t) \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \underline{\xi_2(t) = A\cos(\omega + \Delta\omega)t} \\ ? \end{array}, \Delta\omega \ll \omega$$

Метод векторных диаграмм позволяет проанализировать сложение колебаний близких частот на качественном уровне. Так как частоты колебаний немного различаются, то один из векторов на рис. 2.2 будет вращаться быстрее (в нашем случае это вектор $\vec{A}_2$). Значит, угол между векторами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ будет *<u>медленно</u>* изменяться с течением времени, проходя постепенно все возможные значения. Следовательно, амплитуда результирующего колебания будет также медленно изменяться в пределах от $|A_2 - A_1|$ до $A_1 + A_2$. Это видно непосредственно из диаграммы на рис. 2.2 и следует из формулы (2.2), в которой разность фаз $\alpha_2 - \alpha_1$ в нашем случае будет медленно изменяться со временем.

Для количественного анализа сложения колебаний близких частот мы воспользуемся известной тригонометрической формулой:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{(\alpha - \beta)}{2}\cos\frac{(\alpha + \beta)}{2}.$$

Применяя к нашему случаю, получим:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]m,$$

так как $\Delta\omega \ll \omega$, то

$$\xi \approx 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\omega t. \qquad (2.4)$$

График результирующего колебания — график биений, т.е. почти гармонических колебаний частоты ω, амплитуда которых медленно меняется с частотой $\Delta\omega$, представлен на рис. 2.3.

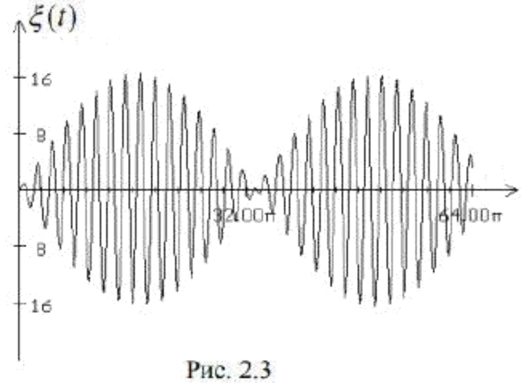


Рис. 2.3

Амплитуда биений:

$$A_б = \left|2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t\right)\right|.$$

Из-за наличия знака модуля (амплитуда всегда больше нуля) частота, с которой изменяется амплитуда, равна не $\frac{\Delta\omega}{2}$, а в два раза выше — $\Delta\omega$.

Вопрос 49. Сложение перпендикулярных колебаний равной частоты

Пусть маленькое тело колеблется на взаимно-перпендикулярных пружинках одинаковой жёсткости (рис. 2.4). По какой траектории будет двигаться это тело?

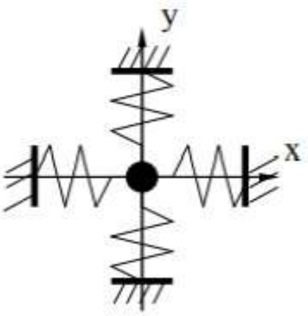


Рис. 2.4

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega t\,, \\ y(t) = B\cos(\omega t + \alpha)\,. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Это уравнения траектории в параметрическом виде.

Для получения явной зависимости между координатами x и y надо из уравнений исключить параметр t.

Из первого уравнения:

$$\cos\omega t = \frac{x}{A}.$$

Тогда:

$$\sin\omega t = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Из второго уравнения:

$$y = B(\cos\omega t\cdot\cos\alpha - \sin\omega t\cdot\sin\alpha).$$

После подстановки сюда полученных выражений для $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ получим:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cdot \cos\alpha \mp \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot \sin\alpha.$$

Избавимся от корня:

$$\frac{x^2}{A^2}\cos^2\alpha - 2 \cdot \frac{xy}{AB} \cdot \cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\alpha - \frac{x^2}{A^2}\sin^2\alpha.$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \cdot \frac{xy}{AB} \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha \text{— это уравнение эллипса.} \ (2.6)}$$

Частные случаи: $\alpha = 0;\ \sin\alpha = 0;\ \cos\alpha = 1.$

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{B}{A} \cdot x$$

Точка совершает колебания по изображенной на рис. 2.5 прямой.

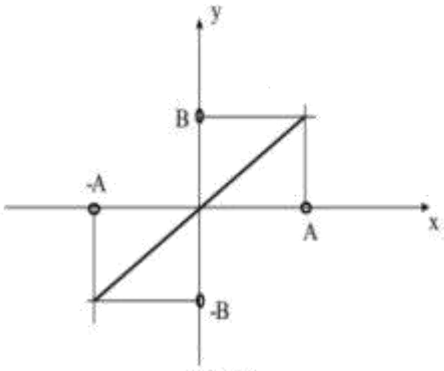


Рис. 2.5

$$2.\ \alpha = \pm\pi;\ \sin\alpha = 0;\ \cos\alpha = -1; \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{B}{A} \cdot x$$

На рис. 2.6. изображена траектория колеблющейся точки при значениях разности фаз $\alpha = \pm\pi$.

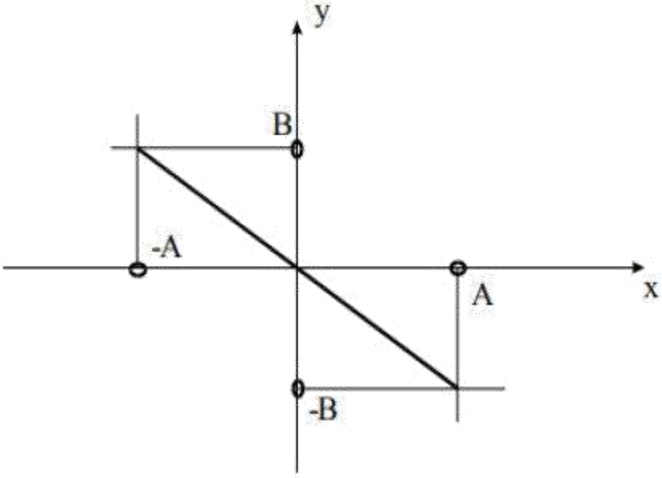


Рис. 2.6

$$2.\ \alpha = \pm\frac{\pi}{2};\ \sin\alpha = \pm 1;\ \cos\alpha = 0; \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 1.$$

На рис. 2.6. изображена траектория колеблющейся точки при значениях разности фаз $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$.

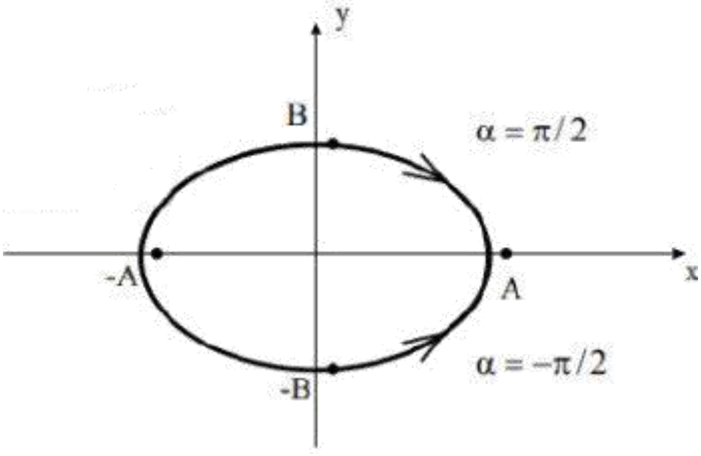
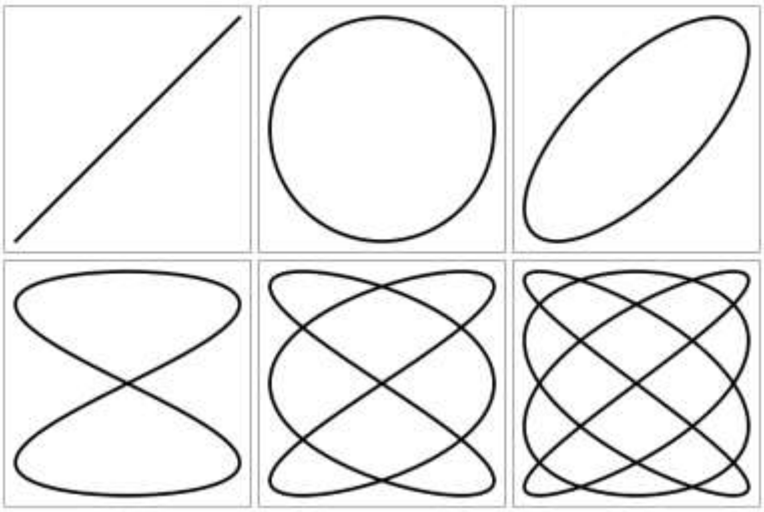


Рис. 2.7

При сложения взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с разными частотами результирующее движение будет происходить по сложным траекториям, называемым фигурами Лиссажу. Форма фигур Лиссажу зависит от соотношения частот складываемых колебаний и разности их начальных фаз.

Если периоды относятся как целые числа, то через промежуток времени, равный наименьшему общему кратному периодов, движущаяся точка возвращается в то же положение — подучается замкнутая фигура сложной формы.



Примеры фигур Лиссажу.

Вопрос 50. Уравнение свободных затухающих колебаний и его решение

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний постепенно уменьшается (затухает).

Во многих случаях в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях силы, вызывающие затухание колебаний, пропорциональны величине скорости (например маятник). Тогда *сила*

трения (**или** ***сопротивления***) $\vec{F} = -r\vec{v}$, **где** r — **коэффициент сопротивления**, $\vec{v}$ — **скорость движения.**

Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси x:

$$ma_x = -kx - rv_x,$$

где kx — **возвращающая сила**, rv_x — **сила трения.**

Это уравнение можно переписать:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

отсюда следует:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Введём обозначения:

$$\frac{r}{2m} = \beta; \frac{k}{m} = \omega_0^2;$$

Тогда однородное *дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее затухающее колебательное движение*, запишем так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (3.1.1)$$

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид (при $\beta \leq \omega_0$**):**

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \varphi_0).$$

Здесь A_0 **и** φ_0 **определяются из краевых условий задачи (начальных и граничных), а** β **и** ω **– из самого уравнения.**

Найдем круговую частоту ω. **Здесь она уже не равна** $\omega_0 (\omega \neq \omega_0)$.

Для этого найдем первую и вторую производные от x:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Подставим эти значения в (3.1.1) и сократим на $A_0 e^{-\beta t}$:

$$\beta^2\cos(\omega t + \varphi_0) + 2\beta\omega\sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) - 2\beta^2\cos(\omega t + \varphi_0) - 2\omega\beta\sin(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2\cos(\omega t + \varphi_0) = 0;$$

$$-\beta^2\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2\cos(\omega t + \varphi_0) = 0;$$

Сократим на $\cos(\omega t + \varphi_0)$ **и выразим** ω:

$$-\beta^2 - \omega^2 - \omega_0^2 = 0;\ \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

где:

- ω_0 — круговая частота собственных колебаний (без затухания);
- ω — круговая частота свободных затухающих колебаний.

Из этого выражения ясно, почему решение (3.1.1) будет только при $\beta \leq \omega_0$.

Для колебаний под действием различных сил (квазиупругих) значения ω, β, ω_0 будут различными. Например, для колебаний под действием упругой силы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\ \beta = \frac{r}{2m};\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, так как в них не повторяется, например, максимальное значение амплитуды. Поэтому называть ω — *циклической* (повторяющейся, круговой) частотой можно лишь *условно*. По этой же причине и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

называется *условным периодом* затухающих колебаний.

Вопрос 51. Параметры осциллятора с затуханием (добротность (Q) и логарифмический декремент (λ))

Для описания затухающих колебаний используются: время релаксации, коэффициент затухания, логарифмический коэффициент затухания, добротность системы и т.д.

1. *Время релаксации* τ.

Временем релаксации называют промежуток времени, за который амплитуда затухающих колебаний уменьшается в е раз (е - основание натуральных логарифмов).

2. *Коэффициент затухания* σ.

Коэффициентом затухания называют физическую величину, обратно пропорциональную времени релаксации:

$$\sigma = \frac{1}{\tau}$$

или

$$\sigma = \frac{b}{2m}.$$

3. *Логарифмический декремент затухания* λ.

Логарифмическим декрементом затухания называют натуральный логарифм отношения амплитуды в данный момент времени к амплитуде колебания спустя период.

Действительно,

$$\lambda = \ln\frac{A_0 e^{-\sigma t}}{A_0 e^{-\sigma(t+T)}} = \sigma T.$$

Логарифмический декремент затухания прямо пропорционален произведению коэффициента затухания и периоду затухающих колебаний.

4. *Добротность системы* **Q.**

Физическую величину, характеризующую потери энергии при затухающих колебаниях, называют добротностью.

Добротность Q физической системы можно найти по формуле

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

Как известно, энергия прямо пропорциональна квадрату амплитуды, тогда формулу можно представить в следующем виде:

$$Q = 2\pi\frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-\sigma t}}.$$

При малых колебаниях физической системы (мало сопротивление и, следовательно, малы потери энергии) добротность можно найти по формуле (T→ T0):

$$Q = \frac{\omega_0}{2\sigma} \text{ или } Q \approx \frac{\pi}{\sigma}.$$

Источник колебаний	Q
Возбуждённое ядро Fe	$3 \cdot 10^{12}$
Лазеры	10^{12}
Колебания электронов в атомах	10^{7}
Колебание струны	10^{3}
Колебание при землетрясении	25 – 1500

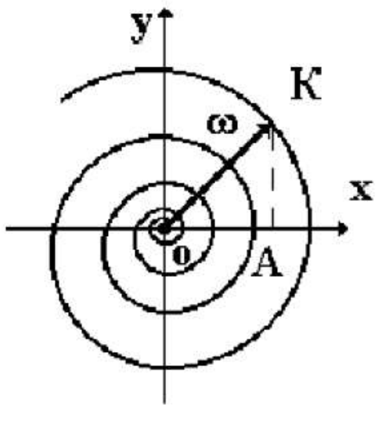


Рис. 6.28

В табл. 6.1 приведены значения добротности различных физических систем, совершающих колебания.

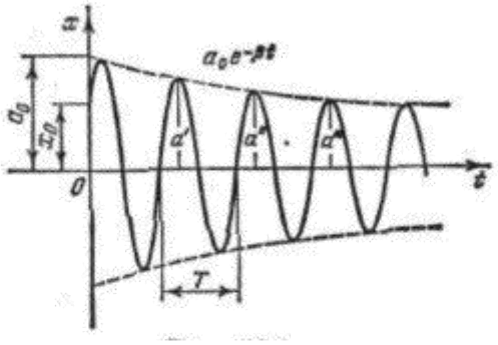
Затухающие колебания можно изучать, используя метод векторных диаграмм. В этом случае вращение вектора амплитуды происходит по логарифмической спирали, асимптотически приближаясь к началу координат (фокус 0, рис. 6.28).

Уравнение логарифмической спирали имеет вид $z = a \cdot e^{bt}$, где a и b — комплексные числа.

Если точка K движется по спирали с постоянной угловой скоростью, приближаясь к фокусу, то ее проекции на оси координат x и y будут совершать затухающие колебания.

Вопрос 52. Энергия затухающих колебаний

Затухающими наз. колебания, энергия (а значит, и амплитуда) которых уменьшается с течением времени. Затухание свободных механических гармонических колебаний связано с убыванием механической энергии за счет действия сил сопротивления и трения.



$$x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha);\ \beta = \frac{r}{2m};\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2};\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Энергию затухающих колебаний можно найти из уравнения энергии гармонических колебаний:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{mx^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{mx^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{mx^2\omega^2}{2}$$

Которое в сокращённом виде записывается так:

$$E = \frac{mx^2\omega^2}{2}$$

В данное уравнение следует подставить амплитуду x, которая убывает по следующему закону: $x = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$, где a_0 и α — произвольные постоянные, β — коэффициент затухания $\beta = \frac{r}{2m}$,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2};\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

r — коэффициент затухания, k — коэффициент жёсткости.

Всё это можно получить из уравнения затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Вопрос 53. Уравнение вынужденных колебаний и его решение

Материальная точка, на которую действует квазиупругая сила, будучи выведена из положения равновесия $x = 0$, начнёт совершать колебания около этого положения. Из-за наличия сил трения подобные *собственные*, или, как их иногда называют, *свободные* колебания точки всегда будут затухающими.

Для получения незатухающих колебаний необходимо воздействие дополнительной переменной внешней силы, которая подталкивала бы точку то в одну, то в другую сторону и работа которой непрерывно восполняла бы убыль энергии, затрачиваемой на преодоление трения. Подобная переменная сила называется *вынуждающей* ($F_{\text{вын}}$), а возникающие под её действием незатухающие колебания — *вынужденными*.

Уравнение вынужденных колебаний описывает поведение системы, которая подвергается воздействию внешней силы или внешнего возмущения при её колебательном движении. Общий вид уравнения вынужденных колебаний для системы может быть представлен следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{F}_m \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} = -k\dot{x} - \Gamma\dot{x} + F_m \cos(\omega t)$$

$$\underline{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_m \cos(\omega t)}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения может быть получено как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее уравнение однородного уравнения получено ранее:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Но оно является нестационарным —быстро затухает.

Частное решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_m \cos(\Omega t - \Psi)\,; (t \gg \tau = \beta^{-1});$$

$$x_m = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\Psi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Для решения уравнения вынужденных колебаний существует несколько подходов, включая метод неопределенных коэффициентов, метод комплексных амплитуд и метод фазовых траекторий.

Методы решения уравнения вынужденных колебаний могут различаться в зависимости от конкретной системы и типа воздействия. В некоторых случаях требуется использовать численные методы для получения приближенных решений в более сложных ситуациях.

Вопрос 54. Амплитудно-частотная характеристика колебательной системы. Резонанс

Амплитудно-частотная характеристика (частотная характеристика) - зависимость амплитуды колебания на выходе устройства от частоты входного гармонического сигнала. Измеряется при изменении частоты постоянного по амплитуде входного сигнала. Для негармонического входного сигнала АЧХ показывает, как передаются его отдельные гармонические составляющие, и позволяет оценить искажения его спектра. При графическом представлении АЧХ по оси абсцисс откладывается частота входного сигнала в линейном или логарифмическом масштабе, по оси ординат - амплитуда выходного сигнала $A_{\text{вых}}$ или модуль коэффициента передачи устройства $k = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}}$.

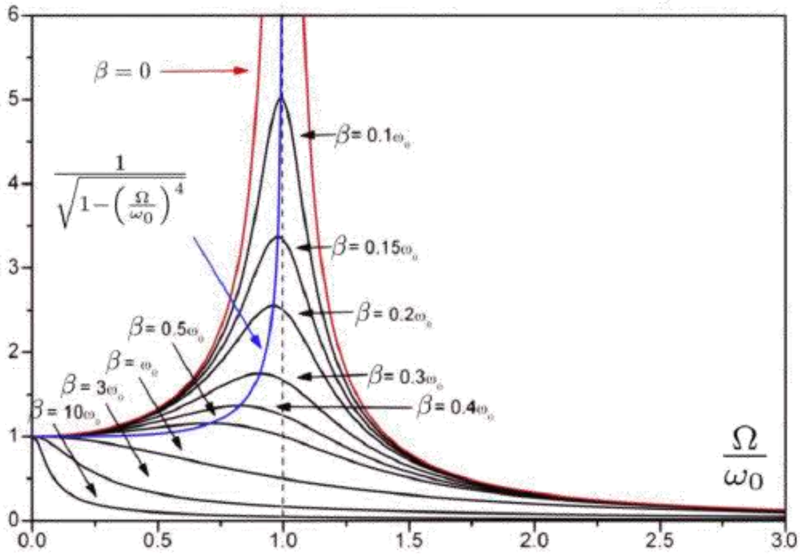
$$x_m = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$x_m(\Omega = 0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$x_{mres}(\Omega_{res}) = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определённой для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте. Это явление называется *резонансом*, а соответствующая частота — *резонансной частотой*.



График, наглядно демонстрирующий явление резонанса

Вопрос 55. Общее волновое уравнение и его решения

Волновой процесс отличается от колебательного тем, что изменяющаяся величина перемещается, «оторвавшись» от своего источника. Обычно при волновом движении переносится только энергия, однако в отдельных случаях (излучение газа в вакуум, процессы горения) имеет место и перенос массы.

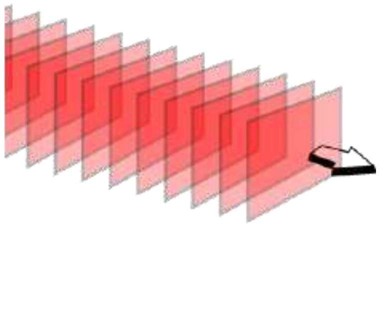
Описывать волны сложно: для них не всегда можно выделить даже общие свойства. Движение волны описывается с помощью волнового дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где:

- u — изменяющаяся величина;
- v — скорость волны;
- x, y, z, t — пространственные и временная координаты.

Решение этого уравнение может оказаться весьма сложным. Поэтому на практике часто используют его частное решение – уравнение плоской волны. Это волна с фронтом в виде бесконечной плоскости, движущаяся перпендикулярно своему фронту.



В природе плоских волн не существует, однако эту модель удобно использовать для расчётов. А излучение лазера или зеркальной антенны с достаточной точностью можно считать плоским.

Уравнение плоской гармонической волны выглядит вот так:

$$A(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где:

- A — изменяющаяся величина;
- A_0 — её амплитуда;
- φ_0 — начальная фаза колебаний.

Волновое число k можно рассчитать, зная длину волны:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Циклическая частота связана со скоростью фронта:

$$\omega = kv$$

А скорость фронта волны, в свою очередь, связана с частотой:

$$\nu(\text{ню}) = v\lambda$$

Чтобы математически описать распространение звука, работу антенны или лампы накаливания, удобно использовать уравнение сферической волны:

$$A(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где:

- r — радиус (симметричная координата);
- $\frac{A_0}{r}$ — амплитуда сферической волны.

Вопрос 56. Скорость продольных упругих волн в тонком стержне

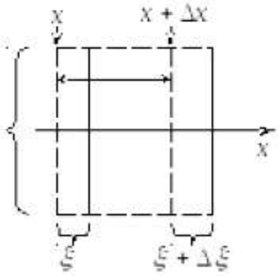


Рис. 2

Пусть в направлении оси x распространяется продольная плоская волна. Выделим в среде цилиндрический объём с площадью оснований S и высотой Δx (рис. 2). Смещения ξ частиц на разные величины x в каждый момент времени оказываются различными (рис. 1). Если основание цилиндра с координатой x имеет в некоторый момент времени смещение ξ, то смещение оснований с координатой $x + \Delta x$ будет $\xi + \Delta\xi$. Поэтому рассматриваемый объём деформируется — он получает удлинение $\Delta\xi$, ($\Delta\xi$ — алгебраическая величина, при $\Delta\xi < 0$ соответствует сжатию цилиндра) или относительное удлинение Δx. Величина $\varepsilon = \frac{\Delta\xi}{\Delta x}$ даёт среднюю деформацию цилиндра.

Наличие деформации растяжения (сжатия) свидетельствует о существовании нормального напряжения σ, при малых деформациях пропорционального величине деформации. По закону Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E\frac{\Delta\xi}{\Delta x}, \qquad (5)$$

где:

- E — модуль Юнга среды.

Продольная волна состоит из чередующихся разряжений и сгущений среды. Скорость распространения импульса деформации и есть скорость волны.

Масса цилиндрического объёма при отсутствии деформации:

$$m = \rho \cdot \Delta x \cdot S, \quad (6)$$

где:

- E — плотность среды.

При распространении деформации в стержне движется только «уплотнение» («разряжение»), масса же деформированного объёма так же:

$$m = (\rho - \Delta\rho)(\Delta x + \Delta\xi)S. \quad (7)$$

Здесь $\Delta\rho$ — изменение плотности вещества ($\Delta\rho$ — величина алгебраическая, $\Delta\rho < 0$, соответствует деформаций растяжения). Соотношения (6) и (7) приравняем:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot S = (\rho - \Delta\rho)(\Delta x + \Delta\xi)S.$$

После преобразования, учитывая, что $\Delta\xi \ll \Delta x$ и$\Delta\rho \ll \rho$, получим:

$$\Delta\rho \cdot \Delta x = \rho \cdot \Delta\xi$$

или

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta\xi}{\Delta x} = \varepsilon.$$

Тогда:

$$\Delta\rho = \varepsilon \cdot \rho. \qquad (8)$$

При распространении деформации это «уплотнение» $\Delta\rho$ последовательно передаётся от слоя к слою со скоростью v. Дело обстоит, таким образом, как если бы импульс деформации обладал массой:

$$\Delta m = \Delta\rho \cdot \Delta x \cdot S$$

и количеством движения:

$$\Delta P = \Delta m \cdot v = \Delta\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot v = \varepsilon \cdot \rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot v. \qquad (9)$$

Рассмотрим промежуток времени , за который импульс деформации распространяется на расстояние, равное высоте цилиндра. Тогда $\Delta x = v \cdot \Delta t$ и равенство (9) запишется в виде:

$$\Delta P = \varepsilon \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot \Delta t.$$

Таким образом, за время Δt через основание цилиндра S слева направо пройдет количество движения ΔP и на такую же величину возрастёт количество движения справа от рассматриваемого сечения. Скорость изменения количества движения

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \varepsilon \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S. \quad (10)$$

По второму закону Ньютона она должна быть равна силе, действующей на это сечение слева направо и вызывающей деформацию. Тогда, с учётом равенств (5) и (10), получим:

$$F = \sigma \cdot S = \varepsilon \cdot E \cdot S = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

или

$$\varepsilon \cdot E \cdot S = \varepsilon \cdot \rho \cdot v^2 \cdot S.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11)$$

Аналогичные вычисления для поперечных волн приводят к выражению

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G — модуль сдвига.

Вопрос 57. Скорость поперечных упругих волн в струне

Скорость поперечных волн в натянутой струне или резиновом жгуте зависит от погонной массы ρ_l (т. е. массы единицы длины) и силы натяжения T:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}},$$

Классический пример распространения волн — поперечная волна на математической идеальной струне. (Так называется бесконечная абсолютно нерастяжимая идеально гибкая нить, натянутая с некоторой постоянной силой). «Средой» является в данном случае натянутая нить.

Пусть по струне бежит волна поперечных отклонений. Форму деформированной струны можно считать профилем смещений струны. Если возмущение занимает ограниченную область на струне, то неподвижную систему отсчёта можно считать связанной

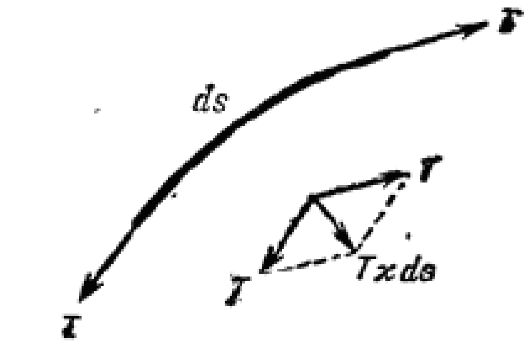


Рис. 6.1. Силы, действующие на элемент струны, и их результирующая.

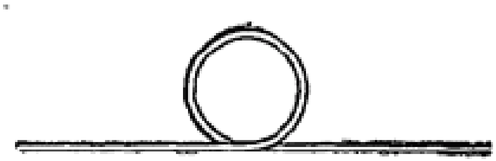


Рис. 6.2. Самопересекающийся профиль бежит по струне с той же скоростью, что и волна любой другой формы.

со струной вне области изменения: перенос массы, осуществляемый возмущением, бесконечно мал по сравнению с полной массой бесконечной струны. Поэтому, если нам удаётся найти такую скорость c подвижной системы отсчёта, что профиль струны в этой системе неподвижен, то частицы струны пробегают этот неподвижный профиль с той же скоростью c. Тогда ускорение элемента струны, пробегающего в данный момент времени некоторую точку неподвижного профиля, равно $c^2\chi$, где χ — кривизна профиля в этой точке, и направлено по главной нормали к профилю в этой точке.

Обозначим натяжение струны через T и её погонную плотность через ρ. Элемент струны длины ds имеет массу ρds. Значит сила, которая должна действовать на элемент ds для осуществления данного движения, равна $c^2\chi\rho\, ds$ и также направлена по главной нормали к профилю. Но единственные силы, действующие на элемент ds, — это силы натяжения на его концах (рис. 6.1). Их равнодействующая сила равна $T\chi\, ds$ и направлена по главной нормали к элементу. Условие осуществления данного движения имеет вид

$$T\chi ds = c^2\chi\rho\, ds,$$

откуда

$$T = \rho c^2.$$

Это соотношение не зависит от формы профиля волны; при любой форме профиль остаётся неизменным и бежит относительно струны со скоростью:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Заметим, что неизменность формы сохраняется и у неплоских, и у самопересекающихся профилей, например имеющих вид витка (рис.

6.2). Такая «баранка» будет бежать по струне с той же универсальной скоростью $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$**.**

Вопрос 58. Энергия волны в упругой среде

Полная энергия, возникающая в упругой среде при распространении в ней плоской гармонической волны, зависит от объема рассматриваемой среды, поэтому вводится понятие плотности энергии, то есть энергии, заключенной в единице объема. Но плотность энергии в каждый момент времени в разных точках пространства различна, поэтому лучше использовать формулу средней по времени плотности энергии в данной точке:

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2.$$

Итак, энергия волны, плотность энергии и ее среднее значение пропорциональны плотности среды, квадрату амплитуды и квадрату частоты.

Более полное:

Пусть в некоторой среде распространяется продольная волна

$$\xi(x,t) = a\cos(\omega t - k_x x + \alpha). \qquad (7.\text{а})$$

Выделим в среде элементарный объём ΔV**, настолько малый, чтобы скорость движения и деформацию во всех точках этого объёма можно было считать одинаковыми и равными соответственно** $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ **и** $\frac{\partial\xi}{\partial x}$**.**

Выделенный объём обладает кинетической энергией

$$\Delta W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho\Delta V}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2, \quad (24)$$

и потенциальной энергией

$$\Delta W_p = \frac{E\varepsilon^2}{2}\Delta V = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\Delta V = \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\Delta V, \quad (24)$$

где:

- $E = \rho v^2$ **— модуль Юнга среды;**
- v **— фазовая скорость волны.**

Полная энергия:

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V.$$

Разделим эту энергию на объём, в котором она содержится, получим плотность энергии

$$w = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]. \qquad (25)$$

Подставим в это выражение уравнение волны (7.а) и приняв во внимание, что $k^2v^2 = w^2$**, получим:**

$$w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - k_x x + \alpha). \quad (26)$$

В случае поперечной волны для плотности энергии получается такое же выражение. Из выражения (26) следует, что плотность энергии в каждый момент времени в различных точках пространства различна. В одной и той же точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Среднее значение квадрата синуса равно $\frac{1}{2}$. Соответственно среднее по времени значение плотности энергии в каждой точке среды равно:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \quad (27)$$

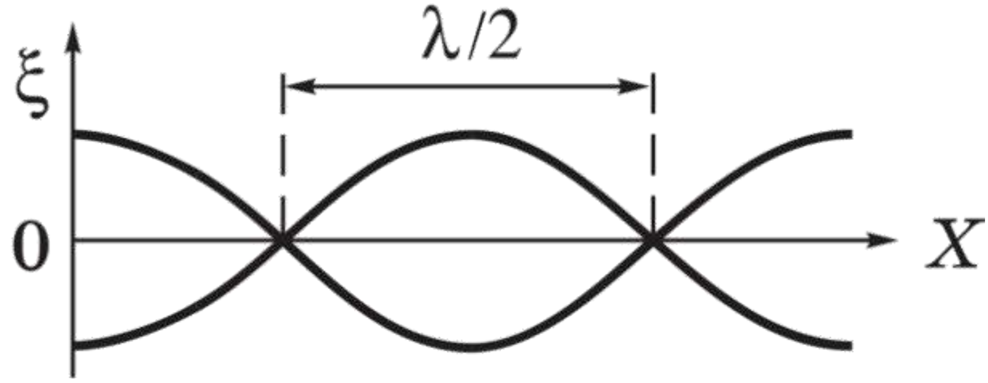
Вопрос 59. Стоячие волны

Стоячая волна — это результат интерференции двух противоположно направленных волн, которые распространяются в одной и той же среде и имеют одинаковую частоту и амплитуду, но движутся в противоположных направлениях.

Стоячая волна образуется в результате интерференции двух волн, одна из которых называется прямой, а другая - отраженной. Когда эти волны встречаются, они создают узлы (места минимального или нулевого колебания) и пучности (места максимального колебания). Эти узлы и пучности остаются на месте и не перемещаются вдоль среды, что и делает эту волну "стоячей".

$$\xi(x,t) = \xi_m \cos(\omega t - kx) + \xi_m \cos(\omega t + kx + \varphi);$$

$$\xi(x,t) = 2\xi_m \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right);$$



Стоячие волны возникают, например, при отражении волн от закрытого конца струны или при отражении звуковых волн внутри закрытого пространства, например, в трубе или резонаторе. Важно отметить, что стоячие волны имеют фиксированные точки с минимальным или нулевым колебанием, что отличает их от бегущих волн, где узлы и пучности перемещаются вдоль среды.

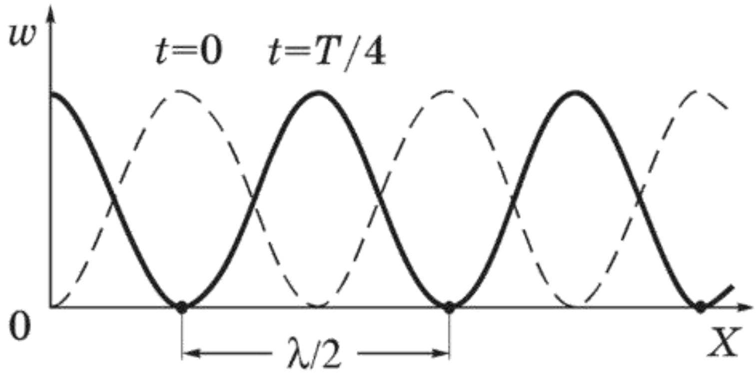
Видно, что распространения волны в пространстве нет, есть только колебания отдельных точек среды с амплитудой, волнообразно распределенной в пространстве. Есть пучности и есть узлы колебаний.

Пучностям соответствует максимальная амплитуда колебаний, равная , в узлах, колебания отсутствуют.

Энергия стоячих волн

Энергия стоячих волн в среде можно найти, учитывая энергетический потенциал колебаний в среде, вызванный этими волнами.

Для стоячих волн на струне или в других упругих средах, энергия можно рассматривать как сумму кинетической и потенциальной энергии, которые возникают из-за колебаний частиц среды. На каждом из узлов (точек, где колебания минимальны или равны нулю) кинетическая энергия равна нулю, в то время как потенциальная энергия находится в максимуме. Наоборот, на участках максимального колебания (пучностях) кинетическая энергия максимальна, а потенциальная энергия равна нулю.



$$\xi(x,t) = 2\xi_m \cos(kx)\cos(\omega t);$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -2\xi_m \cos(kx)\sin(\omega t);$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -2\xi_m \sin(kx)\cos(\omega t);$$

$$w(x,t) = 2\rho{\xi^2}_m\omega^2[\cos^2(kx)\sin^2(\omega t) + \sin^2(kx)\cos^2(\omega t)];$$

$$w(x,t) = \rho{\xi^2}_m\omega^2[1 - \cos(2kx)\cos(2\omega t)]$$

Подсчет этих энергий для сложных систем, таких как стоячие волны в трехмерных пространствах, может потребовать дополнительных математических методов для вычисления интегралов и анализа распределения энергии в среде.

Вопрос 60. Групповая и фазовая скорость волны. Соотношение Рэлея

Фазовая скорость

Фазовой скоростью v монохроматичной (волна с постоянной во времени частотой ω и амплитудой a) волны принято называть скорость распространения волнового фронта. В среде с показателем преломления n фазовая скорость υ равна

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, \text{где } k \equiv \frac{2\pi}{\lambda},$$

Здесь ω — круговая частота, k — волновое число (это отношение 2π радиан к длине волны), c – скорость света в вакууме.

Групповая скорость

Групповая скорость — это скорость перемещения центра волновой группы или точки с максимальным значением амплитуды.

$$u = \frac{d\omega}{dk}$$

Соотношение Рэлея

Связь между фазовой (v) и групповой (u) скоростями выражается через дисперсионное соотношение. В линейных и недисперсионных средах, где фазовая и групповая скорости одинаковы, дисперсионное соотношение отсутствует. Однако в дисперсионных средах, где частота зависит от волнового числа (дисперсия), фазовая и групповая скорости могут различаться.

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v \cdot k)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$

Раздел 5. Релятивистская механика

Вопрос 61. Экспериментальные обоснования СТО. Опыт Майклсона-Морли

Предпосылки СТО: в 1865г. сформулирована теория электромагнитного поля Дж. Максвелла. После открытия электромагнитных волн Г. Герцем, в 1887г. были подтверждены все следствия , вытекающие из теории Максвелла. По какой-то причине уравнения теории Максвелла не подчинялись преобразованиям Галилея.

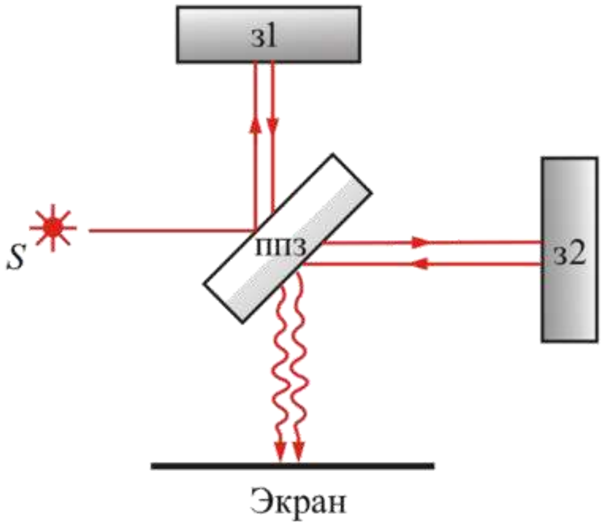
После нескольких экспериментов выстраивалось основание для формулировки СТО.

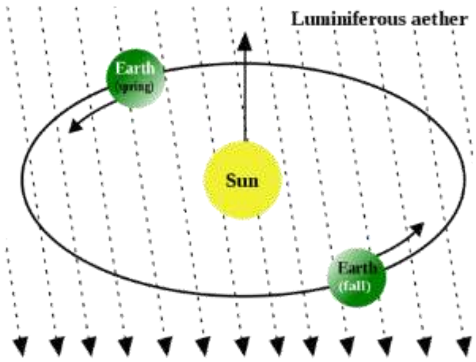
Экспериментальные обоснования СТО включают в себя несколько ключевых аспектов:

1. Опыт Майкельсона-Морли: классический опыт, проведенный в конце 19 века для определения скорости Земли относительно эфира, предполагаемой среды, через которую распространяются световые волны. Он был призван обнаружить так называемый "эфирный ветер", который предполагался стационарным фреймом отсчёта для света.

   Опыт состоял в измерении скорости света в двух перпендикулярных направлениях - параллельно и перпендикулярно движению Земли вокруг Солнца. Для этого использовали интерферометр, который позволял измерять изменения в скорости света относительно направления движения Земли вокруг Солнца.

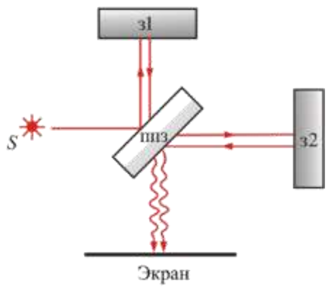
Интерферометр Майкельсона

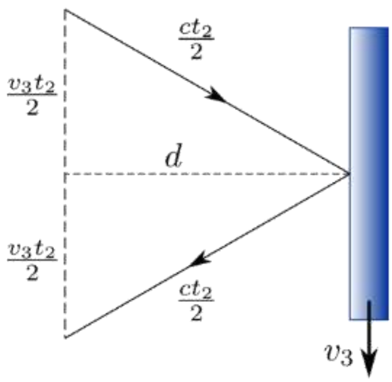




Однако результаты опыта Майкельсона-Морли показали отсутствие любого измеряемого влияния этого движения Земли на скорость света. Не было обнаружено разницы во времени, необходимого для того, чтобы свет пройдет оптический путь в интерферометре в направлениях, параллельном и перпендикулярном движению Земли. Это противоречило ожиданиям того времени, так как, если бы существовал эфир, ожидалось, что скорость света будет различной в зависимости от направления движения Земли через эту среду.

$$t_1 = \frac{d}{c+v_3} + \frac{d}{c-v_3} = \frac{2dc}{c^2 - v_3{}^2}$$





$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{v_3 t_2}{2}\right)^2$$

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v_3{}^2}} \qquad t_1 \neq t_2 \quad ???$$

2. **Эксперименты по распаду частиц:** Эксперименты над распадом частиц, таких как мезоны, дали подтверждение явлений временного расширения или временной дилатации, предсказанной СТО. Частицы, двигающиеся с большой

скоростью, испытывают временное расширение своей жизни по сравнению с частицами в покое.

3. **Наблюдения за движущимися объектами:** Наблюдения за движущимися объектами, например, изучение движущихся часов, показывают эффект временной дилатации. Скорость движущегося объекта влияет на его внутренние часы: для наблюдателя в покое время на движущемся объекте идет медленнее, чем для самого объекта.
4. **Исследования, связанные с электродинамикой:** Эксперименты, связанные с электродинамикой, такие как явление доплеровского смещения частоты, подтверждают некоторые предсказания СТО относительно изменения частоты и длины волн излучения при движении источника или наблюдателя.

Все эти эксперименты и наблюдения предоставили подтверждение ключевым аспектам СТО и её основным постулатам, включая постоянство скорости света, относительность времени и дилатацию времени в зависимости от скорости движения объекта.

Вопрос 62. Постулаты специальной теории относительности

В 1905г. в журнале «Annalen der Physik» вышла статья А. Эйнштейна «Elektrodynamik bewegter Körper», в которой была изложена специальная теория относительности (СТО).

1. Все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта (т.е. инварианты при переходе от одной ИСО к другой). Иначе говоря, никакими опытами нельзя установить покоится ли ИСО или движется равномерно и прямолинейно.
2. Принцип постоянства скорости света: скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта и не зависит от скорости и направления движения источника и приёмника света.

Эти два постулата стали основой СТО и привели к ряду результатов и выводов, которые противоречили классическим представлениям о времени и пространстве, включая относительность времени, дилатацию времени и сокращение длины в направлении движения. Эти понятия тесно связаны с постулатами СТО и оказались экспериментально подтверждёнными.

По моему мнению, нельзя упоминать постулаты Эйнштейна без примера с синхронизацией часов и следствия постулатов.

Синхронизация часов в контексте специальной теории относительности (СТО) означает, что два часа, находящихся в разных местах или движущихся относительно друг друга с большой скоростью, будут отсчитывать время немного по-разному из-за эффектов, связанных со скоростью и гравитацией.

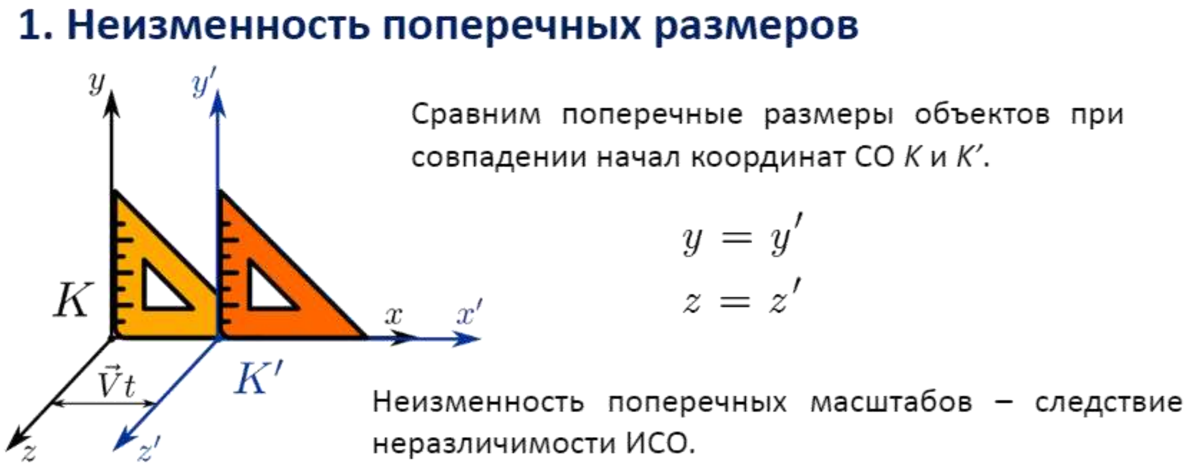
В СТО было показано, что время проходит по-разному для движущихся или находящихся в различных гравитационных полях наблюдателей. Это явление называется дилатацией времени.

Пользуясь постулатом постоянства скорости света, Эйнштейн предложил следующую процедуру синхронизации часов, позволяющую избежать их перемещения: от эталонных часов посылается световой сигнал ко всем другим часам, удалённым на расстояние L. Если на эталонных часах в момент отправления сигнала было время t_0, то на всех прочих часах в момент приёма сигнала следует установить время $t_0 + \frac{L}{c}$.

Следствия постулатов Эйнштейна:

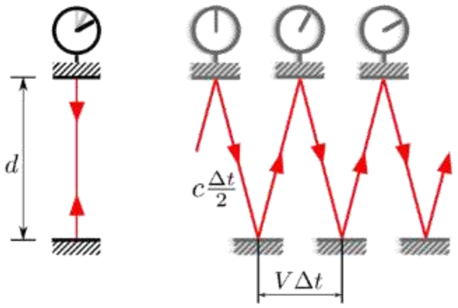
1. Неизменность поперечных размеров: длина объекта в направлении, перпендикулярном к его движению, остается неизменной для наблюдателя в системе отсчёта в покое, независимо от скорости объекта.

   Этот принцип противоречит классическому представлению о длине объекта, двигающегося со значительной скоростью. Согласно СТО, для наблюдателя, находящегося в покое относительно объекта, длина объекта, измеренная в направлении, параллельном его движению, будет сокращена (это явление известно как лоренцево сокращение длины). Однако, в направлении, перпендикулярном к движению объекта, его размеры остаются неизменными для наблюдателя в покое.



   Это следствие СТО означает, что изменения в размерах объекта происходят только в направлении его движения, в то время как поперечные размеры остаются постоянными для наблюдателя в покое.

2. Релятивистское замедление времени: время течёт по-разному для разных наблюдателей в зависимости от их скорости относительно друг друга. Это явление называется временной дилатацией. Для наблюдателя, движущегося со значительной скоростью, время идёт медленнее, чем для стационарного наблюдателя. Это подтверждено множеством экспериментов и используется в современных технологиях, таких как GPS.



Floor-mirrored Einstein–Langevin 'light clock'

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}.$$

$$d^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2;$$

$$\Delta t^2 = \frac{4d^2}{c^2 - V^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

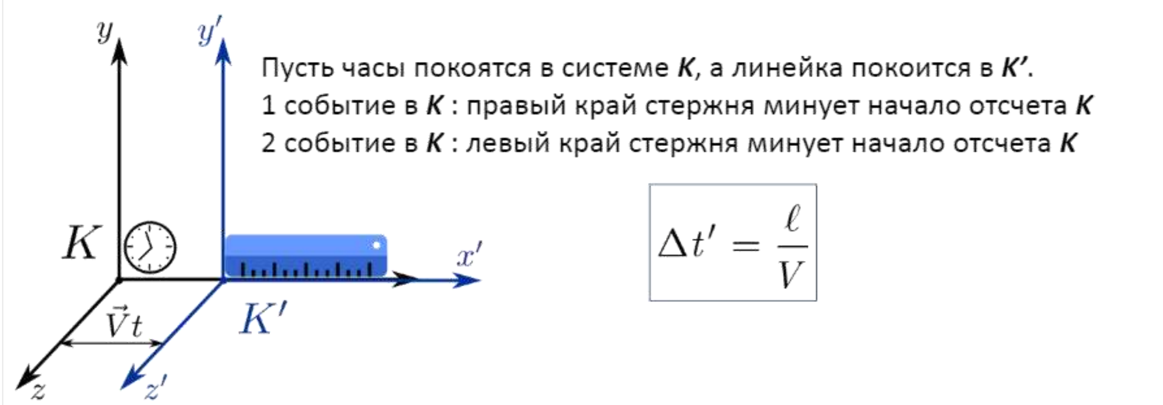
$$\left.\begin{array}{r} \Delta t = \dfrac{2d}{c\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \\ \Delta t' = \dfrac{2d}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$$

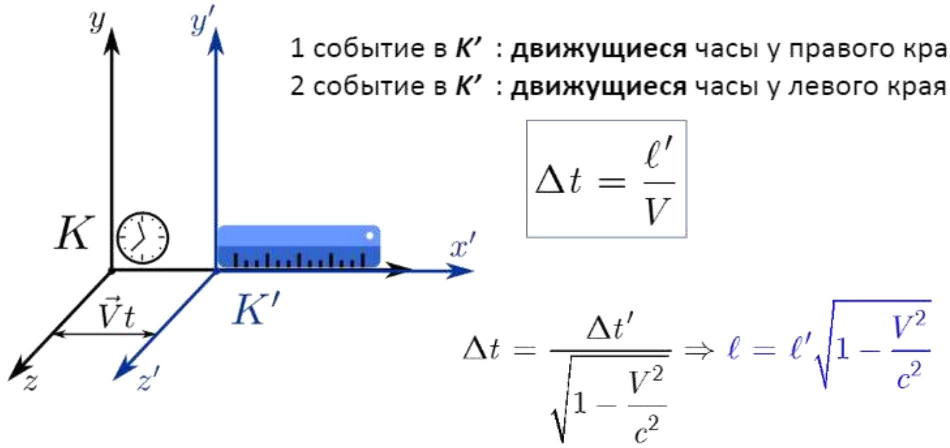
Для движущихся часов период оказывается большим, чем для неподвижных, или иначе: движущиеся часы всегда отстают по сравнению с неподвижными. Собственная или истинная длительность процесса определяется по часам, неподвижным относительно системы, в которой протекает процесс. Такие часы называются собственными и показывают оно *собственное время*.

3. Релятивистское сокращение длины (продольного масштаба): явление, предсказанное специальной теорией относительности (СТО) Альберта Эйнштейна, которое указывает на то, что объект, движущийся со значительной скоростью относительно наблюдателя, сокращает свои размеры в направлении движения.

СТО утверждает, что для наблюдателя в покое длина объекта, движущегося, становится короче в направлении его движения, по сравнению с измерениями этого объекта в его собственной системе отсчёта, где он покоится.

Этот эффект обусловлен изменением понимания о времени и пространстве. Согласно СТО, движущиеся объекты испытывают временное растяжение и сокращение длины в направлении движения относительно наблюдателя в покое.





Вопрос 63. Преобразования Лоренца для координат и времени (вывод)

Преобразования Лоренца — это математические выражения, которые описывают, как пространственные координаты и временные интервалы переходят из одной инерциальной системы отсчёта (ИСО) в другую, двигающуюся относительно первой со скоростью, близкой к скорости света.

Эти преобразования были предложены голландским физиком Генрихом Лоренцом и затем переформулированы и использованы Альбертом Эйнштейном при разработке специальной теории относительности (СТО).

Преобразования Лоренца выражаются следующим образом для преобразования пространственных координат x, y, z и времени t из одной инерциальной системы отсчёта (ИСО) в другую, двигающуюся со скоростью v относительно первой:

$$\boldsymbol{y = y'}$$
$$\boldsymbol{z = z'}$$
$$\boldsymbol{x = \gamma' x' + \delta' t'}$$
$$\boldsymbol{x' = \gamma x + \delta t}$$

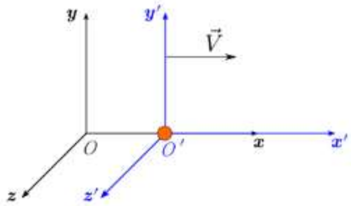
где:

- $\boldsymbol{x', y', z', t'}$ **— коор**динаты **и врем**енные **инте**рвалы **во втор**ой **ИС**О **(движ**ущейся **со скор**остью $\boldsymbol{v}$**);**
- $\boldsymbol{x, y, z, t}$ **— коор**динаты **и врем**енные **инте**рвалы **в перв**ой **ИС**О**;**
- $\boldsymbol{v}$ **— отно**сительная **скор**ость **движ**ения **межд**у **двумя ИС**О**;**
- $\boldsymbol{c}$ **— скор**ость **свет**а **в ваку**уме**;**
- $\boldsymbol{\gamma}$ **— факт**ор **Лоре**нца**, равн**ый $\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$.

Рассмотрим поведение начала координат ***K*** и ***K'***

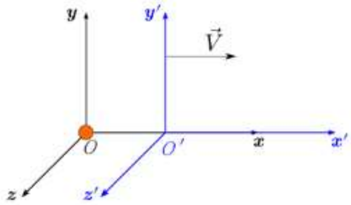
$$y = y' \quad z = z'$$
$$x = \gamma' x' + \delta' t'$$
$$x' = \gamma x + \delta t$$

2



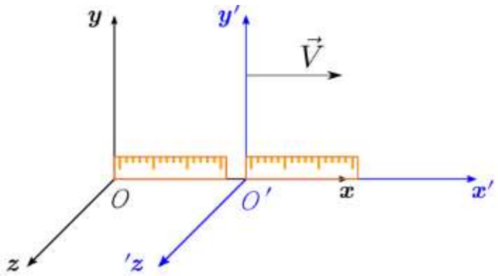
K'

$$\left.\begin{aligned} x' &= 0 \\ x &= Vt \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \gamma \cdot Vt + \delta t \Rightarrow \delta = -\gamma \cdot V$$



K

$$\left.\begin{aligned} x' &= -Vt' \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = -\gamma' \cdot Vt' + \delta' t' \Rightarrow \delta' = \gamma' \cdot V$$



$$x = \gamma' \left(x' + Vt' \right)$$
$$x' = \gamma \left(x - Vt \right)$$

3

Рассмотрим поведение масштабов, которые покоятся в ***K*** и ***K'***

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 = \ell_0 = \gamma' \left(x_2' - x_1' \right) = \gamma' \ell \\ x_2' - x_1' = \ell_0 = \gamma \left(x_2 - x_1 \right) = \gamma \ell \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

$$x = \gamma \left(x' + Vt' \right)$$
$$x' = \gamma \left(x - Vt \right)$$

4

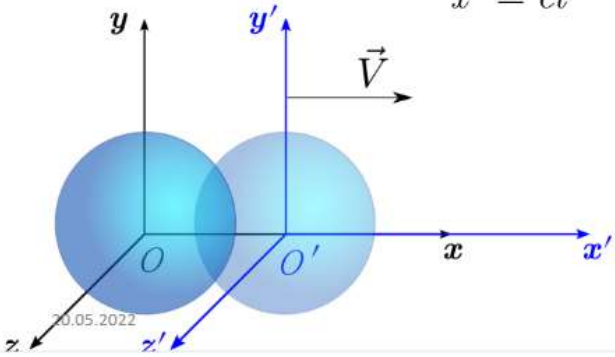
Пусть в момент совпадения начал отсчета – происходит световая вспышка в общем начале координат. Тогда уравнения волнового фронта в ***K*** и ***K'*** должны иметь одинаковый вид.

$$x = ct$$

$$x' = ct'$$

$$\left.\begin{aligned} ct &= \gamma\left(ct' + Vt'\right) \\ ct' &= \gamma\left(ct - Vt\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow c^2 = \gamma^2\left(c^2 - V^2\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$



$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

$$\beta = \frac{V}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Вопрос 64. Кинематические следствия преобразований Лоренца

Кинематические **сле**дствия **прео**бразований **Лоре**нца **связ**аны **с изме**нениями **врем**ени **и прос**транства **для объе**ктов**, двиг**ающихся **со скор**остями**, близ**кими **к скор**ости **све**та**, в срав**нении **с набл**юдателями**, нахо**дящимися **в пок**ое**.**

Вот некоторые **кине**матические **сле**дствия **прео**бразований **Лоре**нца**:**

1. **Дилатация времени:** Для **набл**юдателя**, нахо**дящегося **в поко**е **отно**сительно **движ**ущегося **объе**кта**, врем**я**, прош**едшее **на движ**ущемся **объе**кте**, будет прох**одить **медл**еннее**, чем** для **самог**о **объе**кта**. Это явле**ние **назы**вается **врем**енной **дила**тацией **и**

является одним из кинематических следствий преобразований Лоренца.

2. Лоренцево сокращение длины: Для наблюдателя, находящегося в покое, длина объекта, двигающегося со значительной скоростью, сокращается в направлении его движения. Это означает, что объект вдоль своего движения становится короче, чем в его собственной системе отсчёта.
3. Относительность одновременности: События, которые для двух наблюдателей в разных ИСО считались одновременными, могут оказаться неодновременными для движущегося наблюдателя из-за преобразований Лоренца. Это относится к относительности одновременности событий в разных ИСО.

Эти кинематические следствия СТО, описываемые преобразованиями Лоренца, противоречат классической механике и стали одной из ключевых основ специальной теории относительности (СТО). Они были подтверждены экспериментально и имеют важное значение в современной физике и технологии.

Вопрос 65. Преобразования и сложение скоростей СТО

Вопрос 66. Инварианты в специальной теории относительности

Инварианты в специальной теории относительности (СТО) — это физические величины или математические выражения, которые остаются неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчёта (ИСО) к другой, движущейся относительно первой со скоростями, близкими к скорости света.

СТО утверждает, что некоторые величины остаются неизменными во всех ИСО, несмотря на их движение друг относительно друга. Эти инварианты играют важную роль в теории и помогают в понимании физических явлений.

Некоторые из важных инвариантов в СТО:

1. Скорость света в вакууме c: Согласно постулатам СТО, скорость света в вакууме c остается постоянной во всех инерциальных системах отсчёта. Это является основным инвариантом теории.
2. Интервалы пространства-времени: Интервалы между событиями в пространстве-времени, выраженные с использованием формулы пространственного интервала $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, остаются одинаковыми для всех инерциальных систем отсчёта.

3. Масса-инвариант: Квадрат инвариантной массы m^2c^2 сохраняется при преобразованиях Лоренца.

Эти инварианты играют важную роль в физике и позволяют описывать физические законы таким образом, чтобы они были одинаковыми для всех инерциальных систем отсчёта, что является ключевым аспектом специальной теории относительности.

Оставь надежду, всяк сюда входящий.

GOOD LUCK.