Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет ПИ и КТ

OptMethods edition

Лабораторная работа №5

по дисциплине: «Методы оптимизации»

«Линейное программирование»

Вариант 1

Выполнил:

Болорболд Аригуун,

группа P3211

Преподаватель:

Селина Елена Георгиевна

Санкт-Петербург

2024

Задание:

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

1, 8, 15, 22

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \to \min, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

2. Даны матрица A и векторы c и b. Решить каноническую задачу линейного программирования

$$f(x) = cx \to max.$$

при ограничениях

$$Ax = b, x \geq 0$$

с помощью симплекс-метода:

1.1.

$c = (5, \ -1, \ 1, \ 0, \ 0)$,
$b = (5, \ 4, \ 11)$,

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. Даны матрица A и векторы c и b. Решить каноническую задачу линейного программирования

$$f(x) = cx \to max.$$

при ограничениях

$$Ax = b, x \geq 0$$

с помощью симплекс-метода для двойственной задачи:

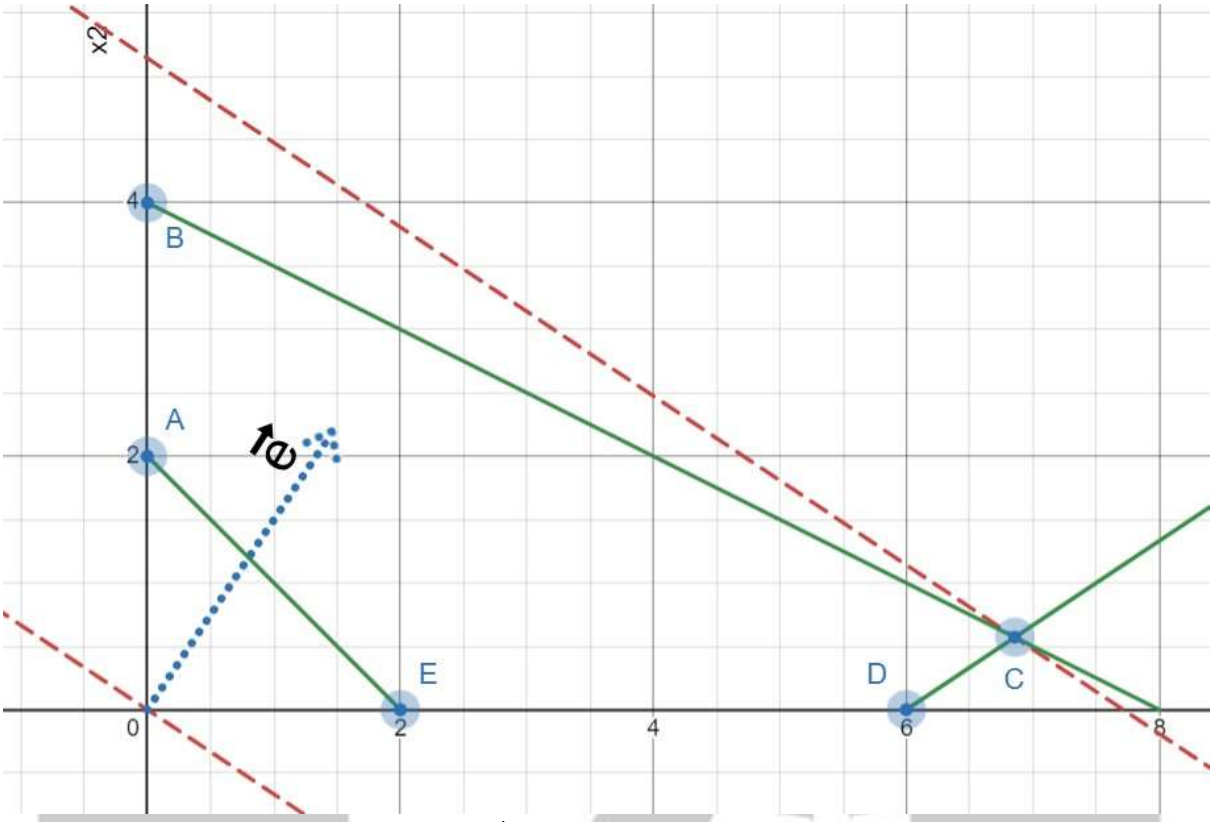
1) 1.70.

$c = (-1/3, \ 0, \ 0, \ -1, \ 0)$,
$b = (-1, \ -1, \ -1)$,

$$A = \begin{Vmatrix} 12 & 6 & 0 & -18 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & -18 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -6 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Задание 1.

Изобразим на плоскости (x_1, x_2) допустимое множество X данной задачи (многоугольник $ABCDE$) и одну из линий уровня $-2x_1 - 3x_2 = C$ целевой функции.



Антиградиент $-\nabla f(x) = (2{,}3) = \vec{e}$ указывает направление убывания функции $f(x)$. Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль направления $\vec{e}$, находим её крайнее положение. В этом положении прямая $-2x_1 - 3x_2 = C$ проходит через вершину C многоугольника $ABCDE$. Чтобы найти точные координаты этой точки, нам надо найти координаты точки пересечения следующих прямых:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 = 24 \end{cases}, \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 12 \\ \quad 10{,}5x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 12 \\ \quad x_2 = \dfrac{4}{7} \end{cases}, \begin{cases} x_1 = \dfrac{48}{7} \\ x_2 = \dfrac{4}{7} \end{cases}$$

Следовательно, $x_1^* = \frac{48}{7} \approx 6{,}8571$, $x_2^* = \frac{4}{7} \approx 0{,}5714$

$$X^* = \begin{pmatrix} 6{,}8571 \\ 0{,}5714 \end{pmatrix}.$$

Вычислим f^*:

$$f^* = f(X^*) = -2 \cdot 6{,}8571 - 3 \cdot 0{,}5714 = -15{,}4284.$$

Задание 2.

Сначала приведём задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ x_i \geq 0, i = 1, 5 \end{cases}$$

Применим метод искусственного базиса. Для этого введем переменные y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 + x_5 + y_1 = 5 \\ x_1 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 + y_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + y_3 = 11 \\ x_i \geq 0, i = 1, 5 \\ y_i \geq 0, i = 1, 3 \end{cases}$$

Потом нам требуется решать следующую вспомогательную задачу:

$$W = y_1 + y_2 + y_3 \to \min.$$

$$y_1 = 5 - 3x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5$$

$$y_2 = 4 - x_1 - 5x_3 - x_4 + 7x_5$$

$$y_3 = 11 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5$$

$$W = y_1 + y_2 + y_3 = -5x_1 - x_2 - 9x_3 - 8x_4 + 5x_5 + 20$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
y_1	–3	1	–1	–6	–1	5
y_2	–1	0	–5	–1	7	4
y_3	–1	–2	–3	–1	–1	11
W	–5	–1	–9	–8	5	20

Будем выбрать максимальную по модулю отрицательную разницу (Δ). Видно, что при увеличении x_3 быстрее всего до нуля доходит y_2.

Меняем y_2 и x_3 местами:

$$x_3 = -0{,}2x_1 - 0{,}2y_2 - 0{,}2x_4 + 1{,}4x_5 + 0{,}8$$

$$y_1 = -3x_1 + x_2 - (-0{,}2x_1 - 0{,}2y_2 - 0{,}2x_4 + 1{,}4x_5 + 0{,}8) - 6x_4 - x_5 + 5 = -2{,}8x_1 + x_2 + 0{,}2y_2 - 5{,}8x_4 - 2{,}4x_5 + 4{,}2$$

$$y_3 = -x_1 - 2x_2 - 3(-0{,}2x_1 - 0{,}2y_2 - 0{,}2x_4 + 1{,}4x_5 + 0{,}8) - x_4 - x_5 + 11 = -0{,}4x_1 - 2x_2 + 0{,}6y_2 - 0{,}4x_4 - 5{,}2x_5 + 8{,}6$$

$$W = -5x_1 - x_2 - 9(-0{,}2x_1 - 0{,}2y_2 - 0{,}2x_4 + 1{,}4x_5 + 0{,}8) - 8x_4 + 5x_5 + 20 = -3{,}2x_1 - x_2 + 1{,}8y_2 - 6{,}2x_4 - 7{,}6x_5 + 12{,}8$$

	x_1	x_2	y_2	x_4	x_5	β

y_1	–2,8	1	0,2	–5,8	–2,4	4,2
x_3	–0,2	0	–0,2	–0,2	1,4	0,8
y_3	–0,4	–2	0,6	–0,4	–5,2	8,6
W	–3,2	–1	1,8	–6,2	–7,6	12,8

Будем выбрать максимальную по модулю отрицательную разницу (Δ). Видно, что при увеличении x_5 быстрее всего до нуля доходит y_3.

Меняем y_3 и x_5 местами:

$$x_5 = -0{,}07692x_1 - 0{,}38462x_2 - 0{,}11538y_2 - 0{,}07692x_4 - 0{,}19231y_3 + 1{,}65385$$

$$\begin{aligned} y_1 = {} & -2{,}8x_1 + x_2 + 0{,}2y_2 - 5{,}8x_4 \\ & - 2{,}4(-0{,}07692x_1 - 0{,}38462x_2 - 0{,}11538y_2 - 0{,}07692x_4 \\ & - 0{,}19231y_3 + 1{,}65385) + 4{,}2 \\ & = -2{,}61538x_1 + 1{,}92308x_2 + 0{,}07692y_2 - 5{,}61538x_4 \\ & + 0{,}46154y_3 + 0{,}23077 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 = {} & -0{,}2x_1 - 0{,}2y_2 - 0{,}2x_4 \\ & + 1{,}4(-0{,}07692x_1 - 0{,}38462x_2 - 0{,}11538y_2 - 0{,}07692x_4 \\ & - 0{,}19231y_3 + 1{,}65385) + 0{,}8 \\ & = -0{,}30769x_1 - 0{,}53846x_2 - 0{,}03846y_2 - 0{,}30769x_4 \\ & - 0{,}26923y_3 + 3{,}11538 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = {} & -3{,}2x_1 - x_2 + 1{,}8y_2 - 6{,}2x_4 \\ & - 7{,}6(-0{,}07692x_1 - 0{,}38462x_2 - 0{,}11538y_2 - 0{,}07692x_4 \\ & - 0{,}19231y_3 + 1{,}65385) + 12{,}8 = \\ & = -2{,}61538x_1 + 1{,}92308x_2 + 0{,}92308y_2 - 5{,}61538x_4 \\ & + 1{,}46154y_3 + 0{,}23077 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	y_2	x_4	y_3	β
y_1	–2,61538	1,92308	–0,07692	–5,61538	0,46154	0,23077
x_3	–0,30769	–0,53846	–0,03846	–0,30769	–0,26923	3,11538
x_5	–0,07692	–0,38462	0,11538	–0,07692	–0,19231	1,65385
W	–2,61538	1,92308	0,92308	–5,61538	1,46154	0,23077

Будем выбрать максимальную по модулю отрицательную разницу (Δ). Видно, что при увеличении x_4 быстрее всего до нуля доходит y_1.

Меняем y_1 и x_4 местами:

$$x_4 = -0{,}46575x_1 + 0{,}34247x_2 - 0{,}0137y_2 - 0{,}17808y_1 + 0{,}08219y_3 + 0{,}0411$$

$$\begin{aligned} x_3 = {} & -0{,}30769x_1 + 0{,}53846x_2 - 0{,}03846y_2 \\ & - 0{,}30769(-0{,}46575x_1 + 0{,}34247x_2 - 0{,}0137y_2 - 0{,}17808y_1 \\ & + 0{,}08219y_3 + 0{,}0411) - 0{,}26923y_3 + 3{,}11538 \\ & = -0{,}16438x_1 - 0{,}64384x_2 - 0{,}03425y_2 + 0{,}05479y_1 \\ & - 0{,}29452y_3 + 3{,}10274 \end{aligned}$$

$$x_5 = -0{,}07692x_1 - 0{,}38462x_2 + 0{,}11538y_2 - 0{,}07692(-0{,}46575x_1 + 0{,}34247x_2 - 0{,}0137y_2 - 0{,}17808y_1 + 0{,}08219y_3 + 0{,}0411) - 0{,}19231y_3 + 1{,}65385 = -0{,}0411x_1 - 0{,}41096x_2 + 0{,}11644y_2 + 0{,}0137y_1 - 0{,}19863y_3 + 1{,}65068$$

$$W = -2{,}61538x_1 + 1{,}92308x_2 + 0{,}92308y_2 - 5{,}61538(-0{,}46575x_1 + 0{,}34247x_2 - 0{,}0137y_2 - 0{,}17808y_1 + 0{,}08219y_3 + 0{,}0411) + 1{,}46154y_3 + 0{,}23077 \approx y_2 + y_1 + y_3$$

	x_1	x_2	y_2	y_1	y_3	β
x_4	–0,46575	0,34247	–0,0137	–0,17808	0,08219	0,0411
x_3	–0,16438	–0,64384	–0,03425	0,05479	–0,29452	3,10274
x_5	–0,0411	–0,41096	0,11644	0,0137	–0,19863	1,65068
W	0	0	1	1	1	0

Так как здесь уже выполнен критерий оптимальности (все $\Delta \geq 0$), вспомогательная задача решена.

Выбросим вспомогательные переменные y_1, y_2, y_3, они больше не нужны.

$$x_3 = 3{,}10274 - 0{,}16438x_1 - 0{,}64384x_2$$
$$x_4 = 0{,}0411 - 0{,}46575x_1 + 0{,}34247x_2$$
$$x_5 = 1{,}65068 - 0{,}0411x_1 - 0{,}41096x_2$$
$$f = 5x_1 - x_2 + x_3 = 4{,}83562x_1 - 1{,}64384x_2 + 3{,}10274$$

	x_1	x_2	β
x_4	–0,46575	0,34247	0,0411
x_3	–0,16438	–0,64384	3,10274
x_5	–0,0411	–0,41096	1,65068
f	4,83562	–1,64384	3,10274

Будем выбрать максимальную по модулю отрицательную разницу (Δ). Видно, что при увеличении x_1 быстрее всего до нуля доходит x_4.

Меняем x_4 и x_1 местами:

$$x_1 = -2{,}14706x_4 + 0{,}73529x_2 + 0{,}08824$$
$$x_3 = -0{,}16438(-2{,}14706x_4 + 0{,}73529x_2 + 0{,}08824) - 0{,}64384x_2 + 3{,}10274 = 0{,}35294x_4 - 0{,}76471x_2 + 3{,}08824$$
$$x_5 = -0{,}0411(-2{,}14706x_4 + 0{,}73529x_2 + 0{,}08824) - 0{,}41096x_2 + 1{,}65068 = 0{,}08824x_4 - 0{,}44118x_2 + 1{,}64706$$
$$F = 4{,}83562(-2{,}14706x_4 + 0{,}73529x_2 + 0{,}08824) - 1{,}64384x_2 + 3{,}10274 = -10{,}38235x_4 + 1{,}91176x_2 + 3{,}52941$$

	x_4	x_2	β
x_1	–2,14706	0,73529	0,08824
x_3	0,35294	–0,76471	3,08824
x_5	0,08824	–0,44118	1,64706
f	–10,38235	1,91176	3,52941

Будем выбрать максимальную по модулю отрицательную разницу (Δ). Видно, что при увеличении x_2 быстрее всего до нуля доходит x_5.

Меняем x_5 и x_2 местами:

$$x_1 = 0{,}2x_4 - 2{,}26667x_5 + 3{,}73333$$

$$x_1 = -2{,}14706x_4 + 0{,}73529(0{,}2x_4 - 2{,}26667x_5 + 3{,}73333) + 0{,}08824 \approx -2x_4 - \frac{5}{3}x_5 + \frac{17}{6}$$

$$x_3 = 0{,}35294x_4 - 0{,}76471(0{,}2x_4 - 2{,}26667x_5 + 3{,}73333) + 3{,}08824 \approx 0{,}2x_4 + \frac{26}{15}x_5 + \frac{7}{30}$$

$$F = -10{,}38235x_4 + 1{,}91176(0{,}2x_4 - 2{,}26667x_5 + 3{,}73333) + 3{,}52941 \approx -10x_4 - \frac{13}{3}x_5 + \frac{32}{3}$$

	x_4	x_5	β
x_1	–2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{17}{6}$
x_3	0,2	$\frac{26}{15}$	$\frac{7}{30}$
x_2	0,2	$-\frac{34}{15}$	$\frac{56}{15}$
f	–10	$-\frac{13}{3}$	$\frac{32}{3}$

Обе характеристические разности — отрицательные.

Найдено оптимальное решение:

$$x_1^* = \frac{17}{6} \approx 2{,}83333$$

$$x_2^* = \frac{56}{15} \approx 3{,}73333$$

$$x_3^* = \frac{7}{30} \approx 0{,}23333$$

$$x_4^* = 0$$

$$x_5^* = 0$$

$$f^* = \frac{32}{3} = 10{,}66667$$

Задание 3.

Сначала приведём задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 - 18x_4 = -1 \\ 12x_1 + 6x_2 - 18x_4 = -1 \\ 3x_1 - 6x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1,5 \end{cases}$$

Двойственная задача имеет вид $\min\{-y_1 - y_2 + 3y_3\}$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 12y_1 + 12y_2 + 3y_3 - y_4 = -1 \\ -18y_1 - 18y_2 - 6y_3 - y_5 = -1 \\ y_i \geq 0, i = 1,5 \end{cases}$$

	y_1	y_2	y_3	β
y_4	12	12	3	0.5
y_5	-18	-18	-6	1
f	-1	-1	3	0

Выбираем максимальную по модулю отрицательную разницу (Δ). Видно, что при увеличении y_1 быстрее всего до нуля доходит y_5.

Значит, меняем y_1 и y_5 местами.

$$y_1 = -\frac{5}{90}y_5 - y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{5}{90}$$

Далее:

$$y_4 = 12\left(-\frac{5}{90}y_5 - y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{5}{90}\right) + 12y_2 + 3y_3 + 0{,}5 = -\frac{2}{3}y_5 - y_3 + \frac{7}{6}$$

А значит, сама функция:

$$F = -\left(-\frac{5}{90}y_5 - y_2 - \frac{1}{3}y_3 + \frac{5}{90}\right) - y_2 + 3y_3 = \frac{5}{90}y_5 + \frac{10}{3}y_3 - \frac{5}{90}$$

	y_5	y_2	y_3	β
y_4	$-\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{7}{6}$
y_1	$-\frac{5}{90}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{90}$
f	$\frac{5}{90}$	0	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{90}$

Обе характеристические разности отрицательные. Найдено оптимальное решение:

$$f^* = -\frac{5}{90} \approx -0.05556$$