Обработка результатов имитационного моделирования

При имитационном моделировании систем со стохастическим характером функционирования часто возникает задача оценки параметров вероятностных распределений, например математического ожидания или дисперсии некоторой случайной величины, значения которых заранее неизвестны. В простейшем случае оценка таких параметров может быть «точечной», т.е. представлена одним числом. Точность полученной оценки зависит от ряда факторов, таких как качество генераторов случайных величин, взаимная корреляция вырабатываемых псевдослучайных величин, количества измерений (значений параметра, на основе которой определяется оценка) и т.д. Это означает, что полученная оценка параметра в общем случае отличается от истинного значения, которое нам не известно. Даже в случае идеальных генераторов случайных величин оценка параметра может отличаться от истинного значения, причем это отличие существенно зависит от количества измерений, на основе которых определяется оценка.

Очевидно, что значение параметра, рассчитанное на основе ограниченного числа измерений, носит случайный характер. Такое приближенное значение называется оценкой параметра. Например, оценкой для математического ожидания может служить среднее арифметическое n значений случайной величины, полученных в процессе измерений на имитационной модели. Оценка математического ожидания будет отличаться от истинного значения, т.е. иметь погрешность, которая уменьшается с увеличением количества измерений. Это же справедливо для оценок других неизвестных параметров. При этом желательно получить оценку, погрешность которой минимальна.

1. Оценки для математического ожидания и дисперсии

Положим, что в процессе имитационного моделирования путем n измерений случайной величины X (например, времени ожидания заявок в СМО) получено множество значений случайной величины: $X_1, X_2, ..., X_n$. На основе этих измерений необходимо определить состоятельные и несмещенные оценки $\tilde{m}$ и $\tilde{D}$ для математического ожидания m и дисперсии D, истинные значения которых неизвестны.

Оценка называется *состоятельной*, если при увеличении числа измерений n она приближается (сходится по вероятности) к истинному значению математического ожидания m.

Оценка называется *несмещенной*, если выполняется условие: $M[\tilde{m}] = m$, т.е. математическое ожидание случайной оценки $\tilde{m}$ совпадает с истинным значением m.

Оценка называется *эффективной*, если дисперсия случайной оценки $\tilde{m}$ минимальна: $D[\tilde{m}] = \min$.

В качестве оценки $\tilde{m}$ для математического ожидания воспользуемся средним арифметическим полученных значений $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (1)$$

Очевидно, что оценка математического ожидания $\tilde{m}$ является состоятельной, так как согласно закону больших чисел при увеличении n величина $\tilde{m}$ сходится по вероятности к m, и несмещенной, так как математическое ожидание оценки $\tilde{m}$ совпадает с истинным значением:

$$M[\tilde{m}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} m}{n} = m. \qquad (2)$$

Дисперсия оценки математического ожидания $\tilde{m}$ равна:

$$D[\tilde{m}] = \frac{1}{n} D. \qquad (3)$$

Можно доказать, что если величина X распределена по нормальному закону, дисперсия $D[\tilde{m}]$ будет минимально возможной, т. е. оценка $\tilde{m}$ является эффективной.

Рассмотрим оценку дисперсии $\tilde{D}$.

Для того чтобы оценка дисперсии была состоятельной и несмещенной, она должна рассчитываться по следующей формуле:

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \tilde{m})^2}{n-1}. \qquad (4)$$

Иногда вместо (4) применяют равносильную формулу, в которой статистическая дисперсия выражена через второй начальный момент:

$$\tilde{D} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \tilde{m}^2 \right] \frac{n}{n-1}, \qquad (5)$$

где $\dfrac{n}{n-1}$ – поправочный множитель, необходимый для получения несмещенной оценки для дисперсии. Очевидно, что при больших значениях n, поправочный множитель близок к единице и оказывает малое влияние на оценку дисперсии.

Таким образом, если в процессе имитационного моделирования получены значения $X_1, X_2, ..., X_n$ случайной величиной X с неизвестными математическим ожиданием m и дисперсией D, то для определения этих параметров следует пользоваться приближенными значениями (оценками):

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \\ &\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \tilde{m})^2}{n-1} \quad \text{или} \quad \tilde{D} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \tilde{m}^2 \right] \frac{n}{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

2. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Как было сказано выше, полученная оценка математического ожидания или дисперсии в общем случае отличается от истинного значения, которое нам не известно. Точность полученной оценки при прочих равных условиях зависит от количества измерений n значений случайной величины, на основе которых определяется оценка. Для оценки точности и надежности результата необходимо определить погрешность полученной оценки, которая может быть представлена в виде некоторого интервала, называемого *доверительным интервалом*, в пределах которого с некоторой заданной вероятностью, называемой *доверительной вероятностью*, находится истинное значение рассматриваемого параметра.

Задача определения доверительного интервала особенно актуальна при небольшом числе измерений, когда точечная оценка в значительной мере случайна и может существенно отличаться от истинного значения.

2.1. Доверительный интервал для математического ожидания

Пусть для некоторой случайной величины X в результате измерений, выполненных в процессе имитационных экспериментов, получена несмещенная оценка математического ожидания $\tilde{m}$. Определим насколько полученное значение математического ожидания $\tilde{m}$ может отличаться от истинного значения m. Назначим некоторую достаточно большую вероятность p (часто выбирают $p = 0{,}90$; $0{,}95$ или $0{,}99$), при которой истинное значение математического ожидания с вероятностью p будет находиться в некотором интервале $\tilde{m} \pm \varepsilon$, т.е.:

$$\Pr(|\tilde{m} - m| < \varepsilon) = p.$$

Это выражение можно записать в следующем виде:

$$\Pr(\tilde{m} - \varepsilon < m < \tilde{m} + \varepsilon) = p,$$

т.е. с вероятностью p неизвестное истинное значение m математического ожидания окажется в интервале $(\tilde{m} - \varepsilon; \tilde{m} + \varepsilon)$.

Интервал $(\tilde{m}-\varepsilon; \tilde{m}+\varepsilon)$ называется *доверительным интервалом*, вероятность p – *доверительной вероятностью*, а границы интервала $m_{\text{н}} = \tilde{m} - \boldsymbol{\varepsilon}$ и $m_{\text{в}} = \tilde{m} + \boldsymbol{\varepsilon}$ – соответственно *нижней* и *верхней доверительными границами*.

Величина $d = 2\varepsilon$ характеризует длину доверительного интервала, а ε – длину половины доверительного интервала и называется *полуинтервалом*. Величина

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\tilde{m}} 100\% \qquad (7)$$

показывает относительную погрешность оценки математического ожидания $\tilde{m}$ с заданной доверительной вероятностью p, т.е. с вероятностью p относительная погрешность полученной оценки $\tilde{m}$ находится в пределах $\pm\delta\%$.

Таким образом, задача оценки точности и надежности результата, полученного в процессе имитационного моделирования, сводится к определению длины полуинтервала ε и, в конечном счете, доверительных границ $m_{\text{н}}$ и $m_{\text{в}}$ при заданной доверительной вероятности p.

Положим, что в процессе имитационного моделирования на основе n измерений случайной величины X рассчитаны состоятельные несмещенные оценки математического ожидания $\tilde{m}$ и дисперсии $\tilde{D}$ по формулам (6).

Определим доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности p, для математического ожидания m случайной величины X.

Оценка математического ожидания $\tilde{m}$ представляет собой случайную величину, полученную как сумма n независимых одинаково распределенных случайных величин X_i, и, согласно центральной предельной теореме, при достаточно большом n ее закон распределения близок к нормальному. На практике даже при нескольких десятках слагаемых закон распределения суммы близок к нормальному. Тем более это справедливо для оценки математического ожидания, полученной в процессе имитационного моделирования на основе сотен тысяч и более измерений. Таким образом, можно утверждать, что точечная оценка математического ожидания, рассматриваемая как случайная величина, $\tilde{m}$ распределена по нормальному закону.

Плотность и функция распределения нормального закона имеют вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right);$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение нормального распределения соответственно равны: $M[x]=m$, $D[x]=\sigma^2$ и $\sigma[x]=\sigma$.

Заметим, что функция $\Phi(x)$ представляет собой функцию распределения нормального закона с параметрами $m=0$ и $\sigma=1$ и называется стандартной функцией распределения.

Функция $\Phi(x)$, как и любая функция распределения, обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(-\infty)=0$;

2) $\Phi(+\infty)=1$;

3) $\Phi(x)$ – неубывающая функция.

Из симметричности нормального распределения с параметрами $m=0$ и $\boldsymbol{\sigma}=1$ относительно начала координат следует, что

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x). \qquad (8)$$

Вероятность попадания, случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $(a;b)$:

$$\Pr(a<x<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \qquad (9)$$

Математическое ожидание и дисперсия нормального распределения согласно закону больших чисел (теореме Чебышева) с учетом (2) и (3) соответственно равны m и $\frac{D}{n}$. Положим, что величина D известна, и найдём такую величину ε_p для которой

$$\Pr(|\tilde{m}-m|<\varepsilon_p)=p. \qquad (10)$$

Выразим вероятность в левой части (10) через нормальную функцию распределения с учетом (8) и (9):

$$\Pr(|\tilde{m}-m|<\varepsilon_p)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon_p}{\sigma_m}\right)-1. \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_m=\sqrt{\frac{D}{n}}$ – среднеквадратическое отклонение оценки $\tilde{m}$.

Из уравнения

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon_p}{\sigma_m}\right)-1=p$$

находим значение $\boldsymbol{\varepsilon}_p$:

$$\varepsilon_p = \sigma_m \breve{\Phi}\left(\frac{1+p}{2}\right), \tag{12}$$

где $\breve{\Phi}(z)$ – функция, обратная $\Phi(x)$, позволяющая определить такое значение аргумента x, при котором значение нормальной функции распределения равно z.

Поскольку точное значение дисперсии D, необходимое для определения σ_m, неизвестно, в качестве приближенного значения (оценки среднеквадратического отклонения) можно воспользоваться оценкой $\tilde{D}$, рассчитанной по формуле (4):

$$\tilde{\sigma}_m = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}. \tag{13}$$

Таким образом, приближенно получим доверительный интервал:

$(\tilde{m} - \varepsilon_p;\ \tilde{m} + \varepsilon_p)$,

где ε_p определяется формулой (12).

Поскольку невозможно в явной аналитической форме выразить обратную функцию $\breve{\Phi}\left(\frac{1+p}{2}\right)$, на практике используют специальную таблицу, по которой находят значения этой функции в зависимости от p (табл. 1):

$$t_p = \breve{\Phi}\left(\frac{1+p}{2}\right).$$

Таблица 1

p	t_p	p	t_p
0,80	1,282	0,91	1,694
0,81	1,310	0,92	1,750
0,82	1,340	0,93	1,810
0,83	1,371	0,94	1,880
0,84	1,404	0,95	1,960
0,85	1,439	0,96	2,053
0,86	1,475	0,97	2,169
0,87	1,513	0,98	2,325
0,88	1,554	0,99	2,576
0,89	1,597	0,9973	3,000
0,90	1,643	0,999	3,290

Тогда отклонение ε_p рассчитывается как $\varepsilon_p = t_p \tilde{\sigma}_m$.

Величина t_p определяет число среднеквадратических отклонений от оценки $\tilde{m}$, если $t_p \geq 1$, или долю среднеквадратического отклонения, если $t_p < 1$, которые нужно отложить влево и вправо от $\tilde{m}$ для того, чтобы вероятность попадания в полученный интервал была равна p.

Окончательно, доверительный интервал, выраженный через t_p, будет иметь вид: .$(\tilde{m} - t_p \tilde{\sigma}_m;\ \tilde{m} + t_p \tilde{\sigma}_m)$

Пример 1. В результате измерений некоторой случайной величины получено 250 значений, на основе которых по формулам (1) и (4) рассчитаны оценки математического ожидания и дисперсии: $\tilde{m} = 50{,}29$, $\tilde{D} = 816{,}45$ и, соответственно, оценка среднеквадратического отклонения $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\tilde{D}} = 28{,}57$. По формуле (13) рассчитано среднеквадратические отклонения оценки математического ожидания: $\tilde{\sigma}_m = 1{,}81$.

В табл.2 представлены результаты расчета нижних $m_\text{н} = \tilde{m} - t_p \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m$ и верхних $m_\text{в} = \tilde{m} + t_p \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m$ границ доверительных интервалов оценки математического ожидания $\tilde{m}$ при изменении доверительной вероятности p от 0,80 до 0,99, а также величин, на основе которых выполнены расчеты доверительных границ:

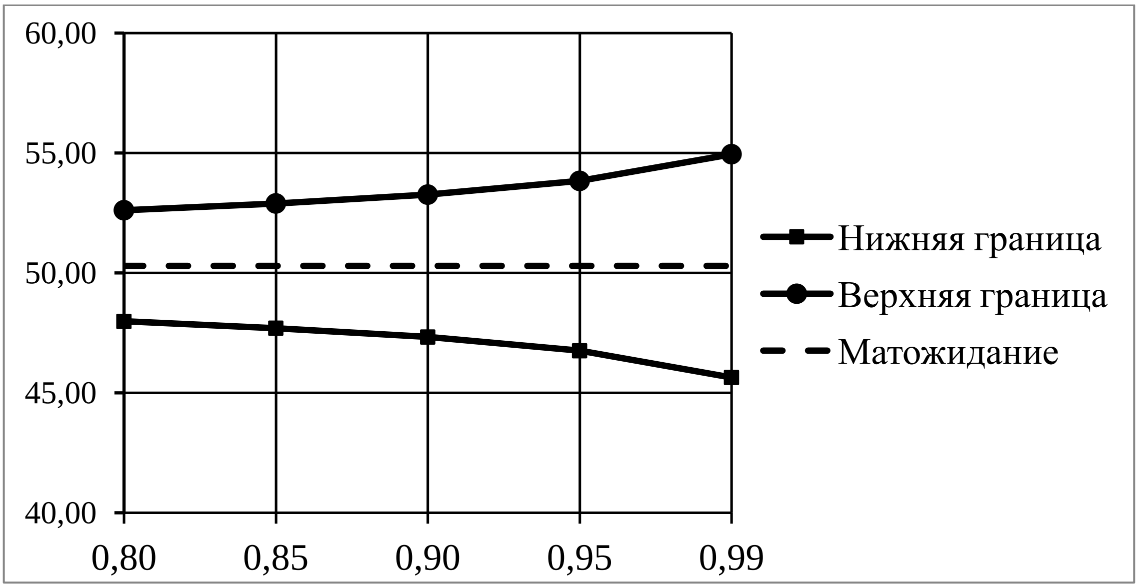
- значения коэффициента t_p, найденные по табл. 1 в зависимости от значения доверительной вероятности p;
- длины полуинтервала $\varepsilon_p = t_p \tilde{\sigma}_m$.

Таблица 2

Доверительная вер-ть	p	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
Коэффициент	t_p	1,282	1,439	1,643	1,960	2,576
Длина полуинтервала	$\varepsilon_p = t_p \tilde{\sigma}_m$	2,32	2,60	2,97	3,54	4,66
Нижняя граница	$m_\text{н}$	47,97	47,69	47,32	46,75	45,64
Верхняя граница	$m_\text{в}$	52,61	52,89	53,26	53,83	54,95
Относит. погрешность	δ	4,6%	5,2%	5,9%	7,0%	9,3%

Относительная погрешность δ в последней строке таблицы рассчитана по формуле (7).

На рисунке иллюстрируется изменение верхней и нижней границы доверительного интервала в зависимости от доверительной вероятности. Как видно из рисунка, с увеличением доверительной вероятности p увеличивается доверительный интервал. Здесь же пунктирной линией показана оценка математического ожидания, рассчитанная на основе 250 измерений.



Рисунок