«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Мегафакультет компьютерных управлений и технологии

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Курсовая работа

по дисциплине дискретной математики:

Синтез комбинационных схем

Часть I

Работа выполнена

студентом группы P3111

Болорболд Аригуун

Преподаватель:

Доцент Поляков Владимир Иванович

г. Санкт-Петербург

2022 год

Булева функция: f = 1 при $(x_3x_4x_5)_{mod5} < x_1x_2$

f = d при $(x_3x_4x_5) = 2$

1. Составление таблицы истинности

№	$x_1x_2x_3x_4x_5$	x_1x_2	$(x_1x_2)_{10}$	$x_3x_4x_5$	$(x_3x_4x_5)_{10}$	$((x_3x_4x_5)_{10})_{mod5}$	*f*
0	0 0 0 0 0	0 0	0	0 0 0	0	0	0
1	0 0 0 0 1	0 0	0	0 0 1	1	1	0
2	0 0 0 1 0	0 0	0	0 1 0	2	2	d
3	0 0 0 1 1	0 0	0	0 1 1	3	3	0
4	0 0 1 0 0	0 0	0	1 0 0	4	4	0
5	0 0 1 0 1	0 0	0	1 0 1	5	0	0
6	0 0 1 1 0	0 0	0	1 1 0	6	1	0
7	0 0 1 1 1	0 0	0	1 1 1	7	2	0
8	0 1 0 0 0	0 1	1	0 0 0	0	0	1
9	0 1 0 0 1	0 1	1	0 0 1	1	1	0
10	0 1 0 1 0	0 1	1	0 1 0	2	2	d
11	0 1 0 1 1	0 1	1	0 1 1	3	3	0
12	0 1 1 0 0	0 1	1	1 0 0	4	4	0
13	0 1 1 0 1	0 1	1	1 0 1	5	0	1
14	0 1 1 1 0	0 1	1	1 1 0	6	1	0
15	0 1 1 1 1	0 1	1	1 1 1	7	2	0
16	1 0 0 0 0	1 0	2	0 0 0	0	0	1
17	1 0 0 0 1	1 0	2	0 0 1	1	1	1
18	1 0 0 1 0	1 0	2	0 1 0	2	2	d
19	1 0 0 1 1	1 0	2	0 1 1	3	3	0
20	1 0 1 0 0	1 0	2	1 0 0	4	4	0
21	1 0 1 0 1	1 0	2	1 0 1	5	0	1
22	1 0 1 1 0	1 0	2	1 1 0	6	1	1
23	1 0 1 1 1	1 0	2	1 1 1	7	2	0
24	1 1 0 0 0	1 1	3	0 0 0	0	0	1
25	1 1 0 0 1	1 1	3	0 0 1	1	1	1
26	1 1 0 1 0	1 1	3	0 1 0	2	2	d
27	1 1 0 1 1	1 1	3	0 1 1	3	3	0
28	1 1 1 0 0	1 1	3	1 0 0	4	4	0
29	1 1 1 0 1	1 1	3	1 0 1	5	0	1
30	1 1 1 1 0	1 1	3	1 1 0	6	1	1
31	1 1 1 1 1	1 1	3	1 1 1	7	2	1

2. Представление булевой функции в аналитическом виде

ККНФ: $f = \overline{x_1}x_2\overline{x_3x_4x_5} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}x_5 \vee x_1\overline{x_2x_3x_4x_5} \vee x_1\overline{x_2x_3x_4}x_5 \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}x_5 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2x_3x_4}x_5 \vee x_1\overline{x_2x_3}x_4x_5 \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4x_5 \vee x_1x_2x_3\overline{x_4}x_5$

КДНФ: $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$ $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})$ $(x_1 \overline{\vee} x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$ $(x_1 \overline{\vee} x_2 \overline{\vee} x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(x_1 \overline{\vee} \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \overline{\vee} \overline{x_2} \overline{\vee} x_3 \vee \overline{x_4} \overline{\vee} x_5)$ $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)$

3. 1. а) Минимизация булевой функции методом Квайна-Мак-Класки

№	$K^0(f) \cup N(f)$		$K^1(f)$			$K^2(f)$			$Z(f)$
1	00010	V	0X010	V	1-4	XX010		1-12 2-8	**XX010**
2	01000	V	X0010	V	1-6	X10X0		3-14 4-8	**X10X0**
3	10000	V	010X0	V	2-4	1X00X		5-13	**1X00X**
4	01010	V	X1000	V	2-7	1X0X0		6-14 7-12	**1X0X0**
5	10001	V	1000X	V	3-5	1XX01		9-18 10-16	**1XX01**
6	10010	V	100X0	V	3-6	1XX10		11-19 12-17	**1XX10**
7	11000	V	1X000	V	3-7	$K^3(f) = \varnothing$			**X1010**
8	01101	V	X1010		4-12				**X1101**
9	10101	V	10X01	V	5-9				**111X1**
10	10110	V	1X001	V	5-11				**1111X**
11	11001	V	10X10	V	6-10				
12	11010	V	1X010	V	6-12				
13	11101	V	1100X	V	7-11				
14	11110	V	110X0	V	7-12				
15	11111	V	X1101		8-13				
16		V	1X101	V	9-13				
17		V	1X110	V	10-14				
18			11X01	V	11-13				
19			11X10	V	12-14				
20			111X1		13-15				
21			1111X		14-15				

1. б) Составление импликантной таблицы

Простые импликанты (максимальные кубы [C_{min}])	0-кубы										
	01000	01101	10000	10001	10101	10110	11000	11001	11101	11110	11111
~~XX010~~		*									
~~X10X0~~	*						*				
1X00X			*	*			*	*			
1X0X0			*				*				
~~1XX01~~		*		*	*			*	*		
~~1XX10~~						*				*	
~~X1010~~											
~~X1101~~		*							*		
111X1									*		*
1111X										*	*

Импликанты 2, 5, 6, 8 — существенные, так как они покрывают соответствующие вершины, непокрытые другими импликантами. Импликанты 1, 7 не покрывают ни одну вершину. Вычеркнем из таблицы строки, соответствующие этим импликантам, а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами, в результате получаем упрощенную импликатную таблицу.

1. в) Определение существенных импликант

Простые импликанты (максимальные кубы[C_{min}])		0-кубы	
		1 0 0 0 0	1 1 1 1 1
		a	b
1X00X	A	*	
1X0X0	B	*	
111X1	C		*
1111X	D		*

Множество существенных импликант (максимальных кубов) образует ядро покрытия как его обязательную часть: $T = \begin{Bmatrix} \mathrm{X10X0} \\ \mathrm{1XX01} \\ \mathrm{1XX10} \\ \mathrm{X1101} \end{Bmatrix}$.

1. г) Определение минимального покрытия

Метод Петрика

Y = (AvB)(CvD)

Выполняя операции попарного логического умножения применительно к термам, содержащим одинаковые буквы, с последующим применением закона поглощения, приведем исходную конъюнктивную форму Y к дизъюнктивной:

Y = ACvBCvADvBD

Возможны следующие варианты покрытия:

$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \end{Bmatrix}$ $C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \end{Bmatrix}$ $C_3 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ D \end{Bmatrix}$ $C_4 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ D \end{Bmatrix}$

$S_1^a = 20;$ $S_2^a = 20;$ $S_3^a = 20;$ $S_4^a = 20;$

$S_1^b = 26$ $S_2^b = 26$ $S_3^b = 26$ $S_4^b = 26$

1. д) Дальнейшее упрощение импликантной таблицы

Дальнейшее упрощение невозможно.

Все покрытия функции являются минимальными, поэтому выберем одну на момент (на выборе может влиять этап факторизации):

$$C_{min}(f) = \begin{Bmatrix} X10X0 \\ 1XX01 \\ 1XX10 \\ X1101 \\ 1X0X0 \\ 1111X \end{Bmatrix}$$

3. 2. а) Нахождение простых имплицент

№	$K^0(f) \cup N(f)$		$K^1(f)$			$K^2(f)$			$K^3(f)$			$Z(f)$
1	00000	V	0000X	V	1-2	000XX	V	1-7 2-4	**00XXX**		1-11 2-6 3-4	**00XXX**
2	00001	V	000X0	V	1-3	00X0X	V	1-11	**0XX1X**		6-19 8-14	**0XX1X**
3	00010	V	00X00	V	1-4	00XX0	V	2-12 3-8	**XX01X**		7-19 9-20 10-16	**XX01X**
4	00100	V	000X1	V	2-5	00XX1	V	4-18 5-15				**0X0X1**
5	00011	V	00X01	V	2-6	**0X0X1**		4-21 6-16				**0X1X0**
6	00101	V	0X001	V	2-8	00X1X	V	7-19 8-15				**XX100**
7	00110	V	0001X	V	3-5	X001X	V	7-26 10-17				**X0X11**
8	01001	V	00X10	V	3-7	0XX10	V	8-22 9-20				**XX011**
9	01010	V	0X010	V	3-9	0X01X	V	9-16				**0X11X**
10	01100	V	X0010	V	3-11	XX010	V	10-23				**01X1X**
11	10010	V	0010X	V	4-6	001XX	V	11-19 12-18	$K^4(f) = \emptyset$			
12	10100	V	001X0	V	4-7	**0X1X0**		12-24 13-20				
13	00111	V	0X100	V	4-10	**XX100**		13-28 14-25				
14	01011	V	X0100	V	4-12	0XX11	V	15-31 16-29				
15	01110	V	00X11	V	5-13	**X0X11**		15-34 17-30				
16	10011	V	0X011	V	5-14	**XX011**		16-35 17-32				
17	11010	V	X0011	V	5-16	**0X11X**		19-33 20-29				
18	11100	V	001X1	V	6-13	**01X1X**		22-31				
19	01111	V	0011X	V	7-13	X101X	V	23-32				
20	10111	V	0X110	V	7-15	1X01X	V	26-32 27-35				
21	11011	V	010X1	V	8-14							
22			01X10	V	9-15							
23			X1010	V	9-17							
24			011X0	V	10-15							
25			X1100	V	10-18							
26			1001X	V	11-16							
27			1X010	V	11-17							
28			1X100	V	12-18							
29			0X111	V	13-19							
30			X0111	V	13-20							
31			01X11	V	14-19							
32			X1011	V	14-21							
33			0111X	V	15-19							
34			10X11	V	16-20							
35			1X011	V	16-21							
36			1101X	V	17-21							

2. б) Составление импликантной таблицы

Простые импликанты (максимальные кубы [C_{min}])	0-кубы																
	00000	00001	00100	00011	00101	00110	01001	01100	10100	00111	01011	01110	10011	11100	01111	10111	11011
~~00XXX~~	*	*	*	*	*	*				*							
0XX1X				*		*				*	*	*			*		
XX01X		*		*		*					*		*				*
~~0X0X1~~		*		*			*				*						
0X1X0			*			*		*	*			*					
~~XX100~~			*					*	*					*			
~~X0X11~~				*						*			*			*	
XX011				*							*		*				*
0X11X						*				*					*		
01X1X											*				*		

Имплиценты 1, 4, 6, 7 — существенные, так как они покрывают соответствующие вершины, непокрытые другими импликантами. Вычеркнем из таблицы строки, соответствующие этим импликантам, а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами, в результате получаем упрощенную импликатную таблицу.

2. в) Определение существенных имплицент

Простые импликанты (максимальные кубы [C_{min}])		0-кубы		
		01110	01111	11011
		a	b	c
0XX1X	A	*	*	
XX01X	B			*
0X1X0	C	*		
XX011	D			*
0X11X	E		*	
01X1X	F		*	

Множество существенных имплицент (максимальных кубов) образует ядро покрытия как его обязательную часть: $T = \begin{Bmatrix} 00XXX \\ 0X0X1 \\ XX100 \\ X0X11 \end{Bmatrix}$.

3. г) Определение минимального покрытия

Метод Петрика

Y = (AvC)(AvEvF)(BvD)

Выполняя операции попарного логического умножения применительно к термам, содержащим одинаковые буквы, с последующим применением закона поглощения, приведем исходную конъюнктивную форму Y к дизъюнктивной:

Y = (AvC(EvF))(BvD) = ABvADvBC(EvF)vDC(EvF) = ABvADvBCEvBCFvDCEvDCF

Возможны следующие варианты покрытия:

$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ B \end{Bmatrix}$ $C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ D \end{Bmatrix}$ $C_3 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \\ E \end{Bmatrix}$ $C_4 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \\ F \end{Bmatrix}$ $C_5 = \begin{Bmatrix} T \\ D \\ C \\ E \end{Bmatrix}$ $C_6 = \begin{Bmatrix} T \\ D \\ C \\ F \end{Bmatrix}$

$S_1^a = 15;$ $S_2^a = 16;$ $S_3^a = 19;$ $S_4^a = 19;$ $S_5^a = 20;$ $S_6^a = 20;$

$S_1^b = 21$ $S_2^b = 22$ $S_3^b = 26$ $S_4^b = 26$ $S_5^b = 27$ $S_6^b = 27$

Минимальное покрытие $\overline{C_{min}}(f) = \begin{Bmatrix} 00XXX \\ 0X0X1 \\ XX100 \\ X0X11 \\ 0XX1X \\ XX01X \end{Bmatrix}$

2. д) Дальнейшее упрощение имплицентной таблицы

Дальнейшее упрощение невозможно.

4. Минимизация булевой функции на картах Карно

а) Определение МДНФ

x_4x_5 x_4x_5

0	01	11	10		00	01	11	10
			d	00	1	1		d
				01		1		1
	1			11		1	1	1
1			d	10	1	1		d

$x_1 = 0$ x_2x_3 $x_1 = 1$

Получаем $C_{min}(f) = \left\{\begin{matrix} 1XX01 \\ 1X0X0 \\ 1XX10 \\ 1111X \\ X10X0 \\ X1101 \end{matrix}\right\}$

МДНФ имеет следующий вид:

$f = x_1\overline{x_4}x_5 \vee x_1x_3\overline{x_5} \vee x_1x_4\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3x_4 \vee x_2\overline{x_3x_5} \vee x_2x_3\overline{x_4}x_5$

б) Определение МКНФ

00	01	11	10		00	01	11	10
			d	00	1	1		d
				01		1		1
	1			11		1	1	1
1			d	10	1	1		d

x_4x_5 x_2x_3 x_4x_5

$x_1 = 0$ $x_1 = 1$

Получаем $C_{min}(f) = \left\{\begin{matrix} 00XXX \\ XX100 \\ 0X0X1 \\ XX01X \\ X0X11 \\ 0XX1X \end{matrix}\right\}$

МДНФ имеет следующий вид:

$$f = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_5})(x_3 \vee \overline{x_4})(x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(x_1 \vee \overline{x_4})$$

5. Преобразование минимальных форм для булевой функции

а) Факторное преобразование для МДНФ:

$$f = x_1\overline{x_4}x_5 \vee x_1x_3\overline{x_5} \vee x_1x_4\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3x_4 \vee x_2\overline{x_3x_5} \vee x_2x_3\overline{x_4}x_5 = \qquad S_Q = 26$$

$$= x_1(\overline{x_4}x_5 \vee x_3\overline{x_5} \vee x_4\overline{x_5} \vee x_2x_3x_4) \vee x_2(\overline{x_3x_5} \vee x_3\overline{x_4}x_5) = \qquad S_Q = 26$$

$$= x_1(x_3(\overline{x_5} \vee x_2x_4) \vee \overline{x_4}x_5 \vee x_4\overline{x_5}) \vee x_2(\overline{x_3x_5} \vee x_3\overline{x_4}x_5) \qquad S_Q = 25$$

б) Факторное преобразование для МКНФ:

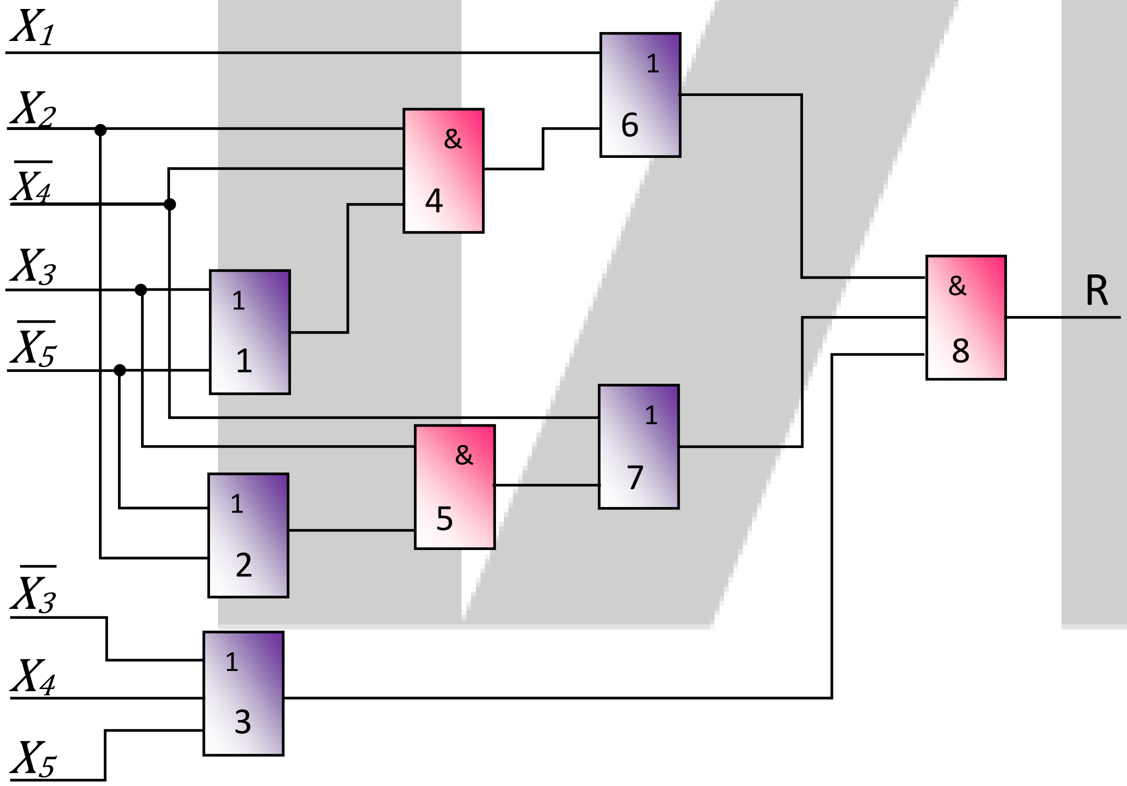
$$f = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_5})(x_3 \vee \overline{x_4})(x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(x_1 \vee \overline{x_4}) = \quad S_Q = 21$$

$$= (x_1 \vee x_2\overline{x_4}(x_3 \vee \overline{x_5}))(\overline{x_4} \vee x_3(x_2 \vee \overline{x_5}))(\overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \qquad S_Q = 19$$

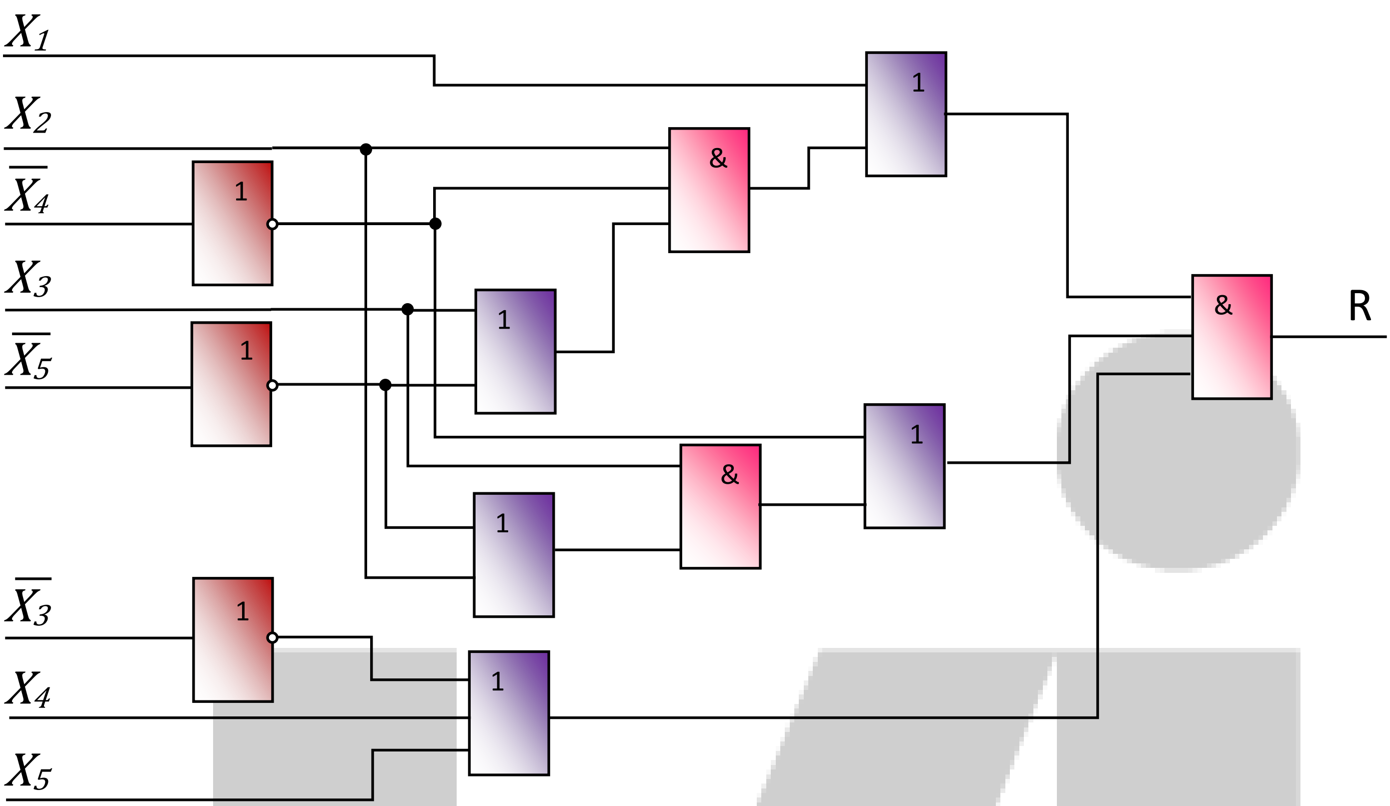
6. Синтез комбинационных схем в булевом базисе

а) Комбинационная схема с парафазными входами:

Цена схемы по Квайну $S_Q = 19$; задержка схемы $T = 4\tau$.



б) Комбинационная схема с однофазными входами:



Цена схемы по Квайну $S_Q = 22$; задержка схемы $T = 5\tau$.

7. Синтез комбинационных схем в универсальных базисах

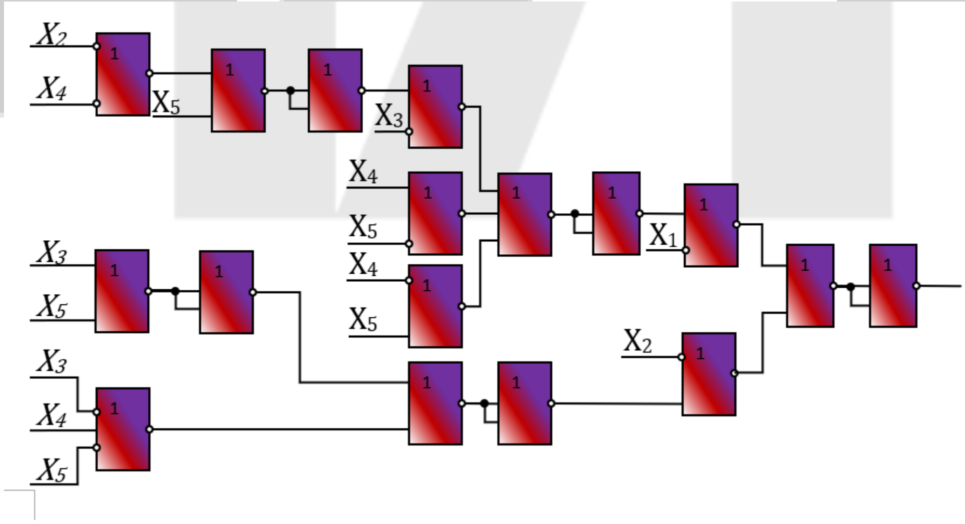
1) Базис (ИЛИ-НЕ)

а) Приведение аналитического выражения к базису (ИЛИ-НЕ) и построение схемы полученного выражения с парафазными входами

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_1\overline{\overline{x_3\overline{\overline{\left(\overline{x_5} \vee \overline{\overline{x_2x_4}}\right)}} \vee \overline{\overline{\overline{x_4}x_5}} \vee \overline{\overline{x_4\overline{x_5}}}}}}} \vee x_2\overline{\overline{\left(\overline{\overline{\overline{\overline{x_3x_5}}} \vee \overline{\overline{x_3\overline{x_4}x_5}}}}\right)}}}} =$$

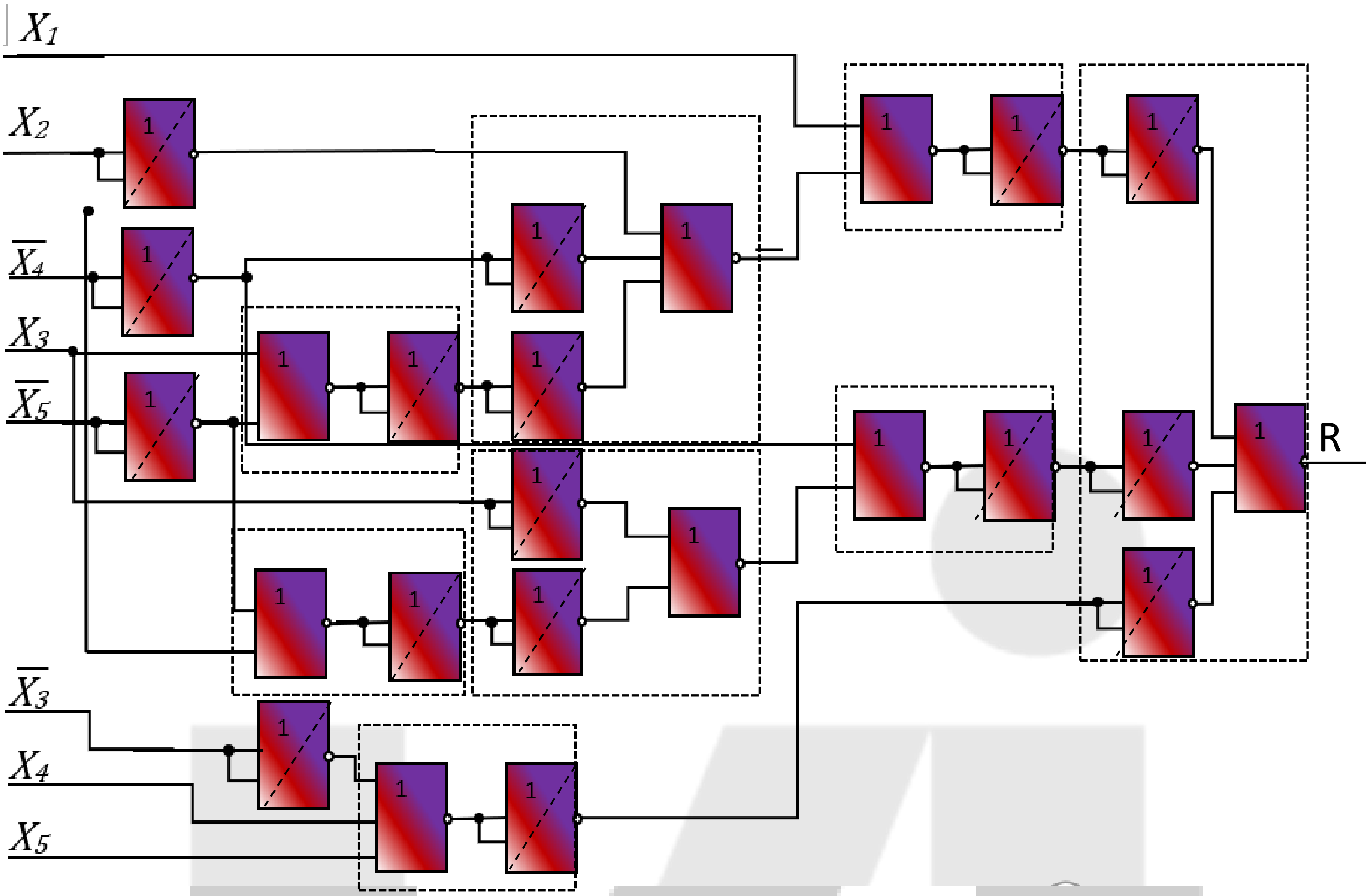
$$= \overline{(\overline{x_1} \downarrow \overline{(\overline{x_3} \downarrow (\overline{(x_5 \downarrow (\overline{x_2} \downarrow \overline{x_4}))} \downarrow (x_4 \downarrow \overline{x_5}) \downarrow (\overline{x_4} \downarrow x_5)))}} \downarrow$$

$$\downarrow \overline{(\overline{x_2} \downarrow \overline{((\overline{x_3 \downarrow x_5}) \downarrow (\overline{x_3} \downarrow x_4 \downarrow \overline{x_5}))})}$$



Цена схемы по Квайну $S_Q = 36$; задержка схемы $T = 9\tau$.

б) Преобразование схемы из булева базиса в универсальный



Цена схемы по Квайну $S_Q = 36$; задержка схемы $T = 9\tau$.

После исключения лишних инверторов получим окончательную схему в базисе (ИЛИ-НЕ).

2) Базис (И-НЕ)

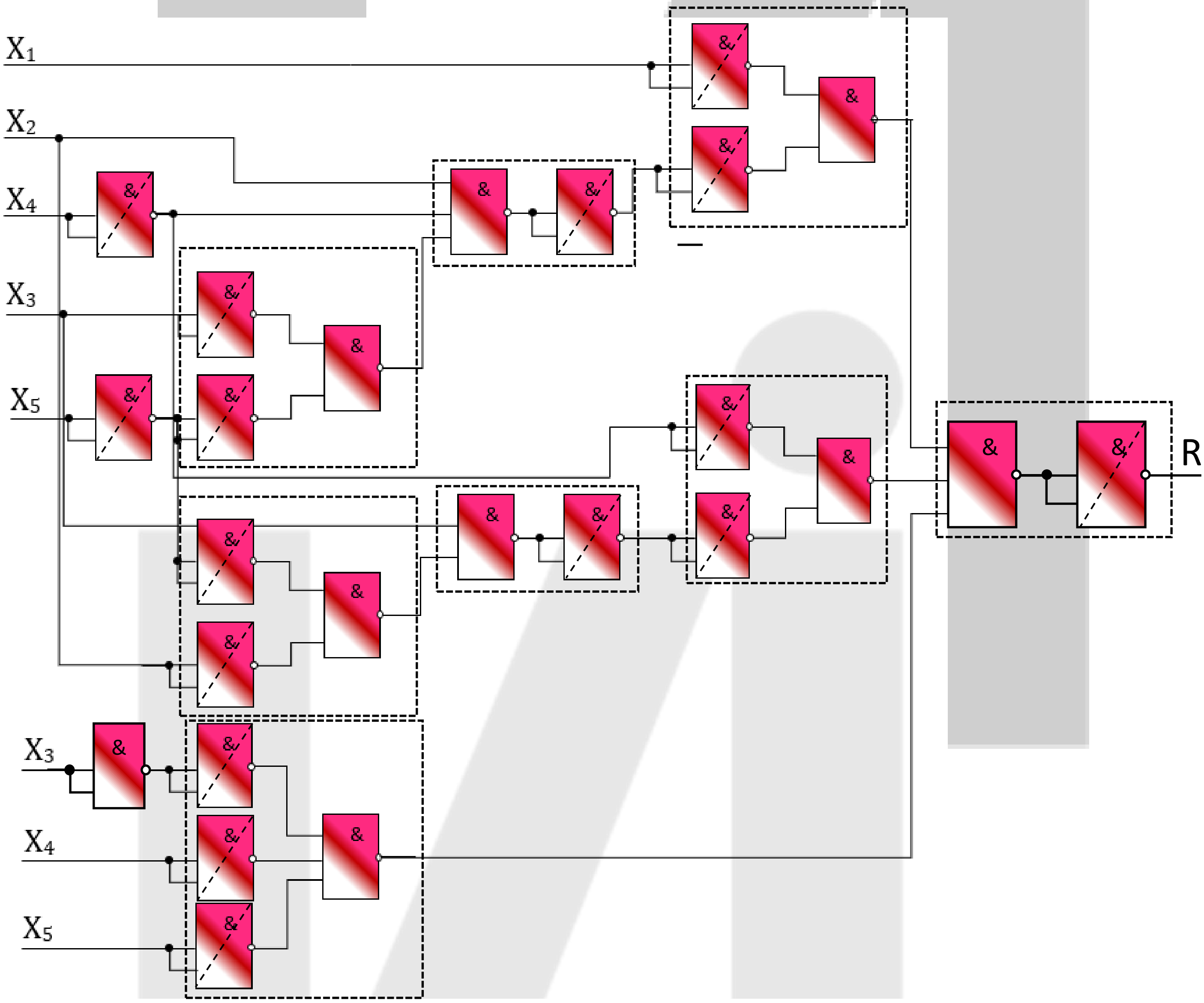
а) Приведение аналитического выражения к базису (И-НЕ) и построение схемы полученного выражения с парафазными входами

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{(x_1 \vee \overline{\overline{\overline{\overline{x_2\overline{x_4}}}\,\overline{\overline{(x_3 \vee \overline{x_5})}}}})}}\;\overline{\overline{(\overline{x_4} \vee \overline{\overline{x_3\overline{\overline{(x_2 \vee \overline{x_5})}}}})}}\;\overline{\overline{(\overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)}}}}} =$$

$$= \overline{(\overline{x_1}|\overline{((\overline{x_2|\overline{x_4}})|(\overline{x_3}|x_5))})|\overline{(x_4|(\overline{x_3|(x_2|\overline{x_5}}))})|(x_3|\overline{x_4}|\overline{x_5})}$$

Цена схемы по Квайну $S_Q = 28$; задержка схемы $T = 6τ$.

б) Преобразование схемы из булева базиса в универсальный



Цена схемы по Квайну $S_Q = 28$; задержка схемы $T = 6τ$.

После исключения лишних инверторов получим окончательную схему в базисе (И-НЕ).

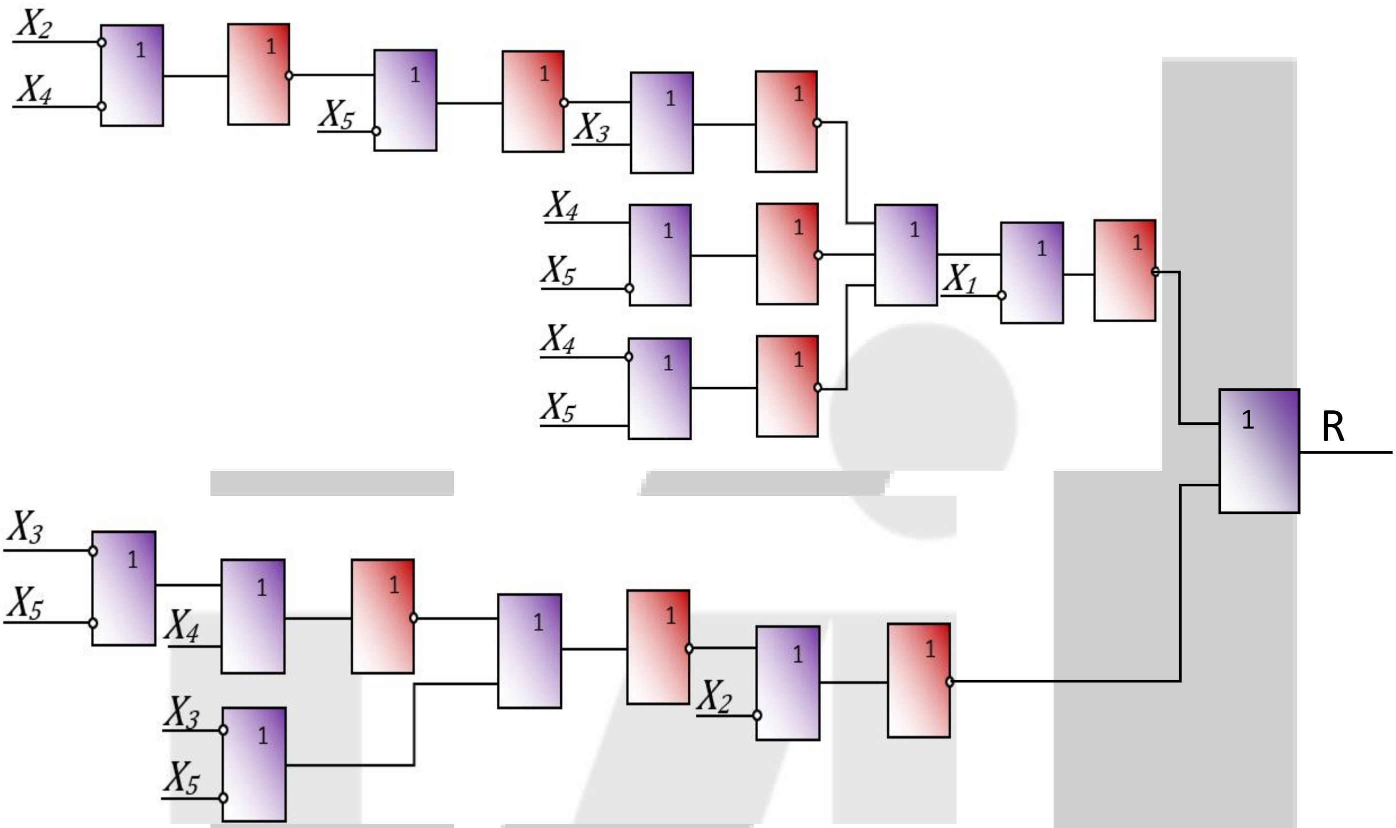
8. Синтез комбинационных схем в сокращенных булевых базисах

8.1. Базис (ИЛИ, НЕ)

$$f = x_1(x_3(\overline{x_5} \lor x_2x_4) \lor \overline{x_4}x_5 \lor x_4\overline{x_5}) \lor x_2(\overline{x_3x_5} \lor x_3\overline{x_4}x_5) =$$

$$= \overline{\overline{x_1(\overline{\overline{x_3(\overline{x_5} \lor \overline{\overline{x_2x_4}})}} \lor \overline{\overline{\overline{x_4}x_5}} \lor \overline{\overline{x_4\overline{x_5}}})}} \lor \overline{\overline{x_2(\overline{x_3x_5} \lor \overline{\overline{x_3\overline{x_4}x_5}})}} =$$

$$=\overline{(\overline{x_1} \lor \overline{(\overline{x_3} \lor \overline{(\overline{x_5} \lor \overline{(\overline{x_2} \lor \overline{x_4})})})} \lor \overline{(x_4 \lor \overline{x_5})} \lor \overline{(\overline{x_4} \lor x_5)})} \lor \overline{(\overline{x_2} \lor \overline{(\overline{x_3} \lor \overline{x_5})} \lor \overline{(\overline{x_3} \lor x_4 \lor \overline{x_5})})}$$



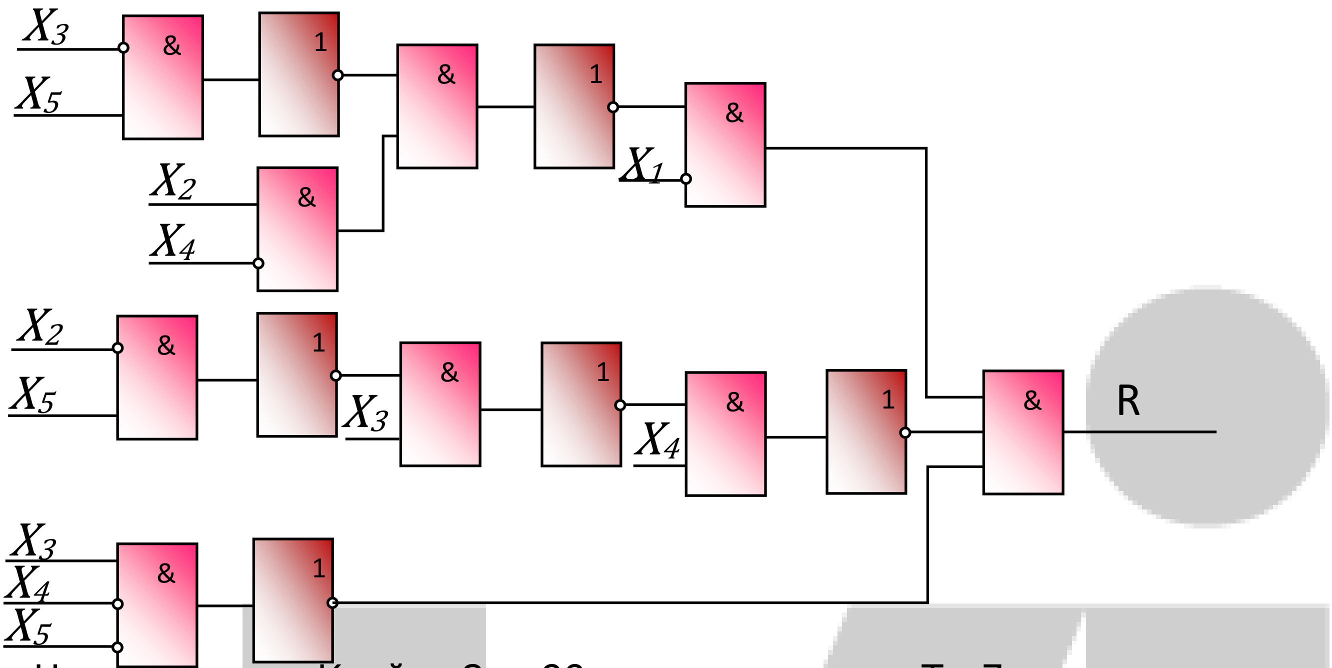
Цена схемы по Квайну S_Q = 36; задержка схемы T = 9τ.

8.2. Базис (И, НЕ)

$$f = (x_1 \lor x_2x_4(x_3 \lor x_5))(x_4 \lor x_3(x_2 \lor x_5))(x_3 \lor x_4 \lor x_5) =$$

$$= \overline{\overline{(x_1 \lor x_2\overline{x_4}\overline{\overline{(x_3 \lor \overline{x_5})}})}}\,\overline{\overline{(\overline{x_4} \lor x_3\overline{\overline{(x_2 \lor \overline{x_5})}})}}\,\overline{\overline{(\overline{x_3} \lor x_4 \lor x_5)}} =$$

$$= \overline{(\overline{x_1}\,\overline{(x_2\overline{x_4}\,\overline{(x_3\overline{x_5})})})}\,\overline{(x_4\overline{(x_3\overline{(x_2x_5)})})}\,\overline{(x_3x_4x_5)}$$

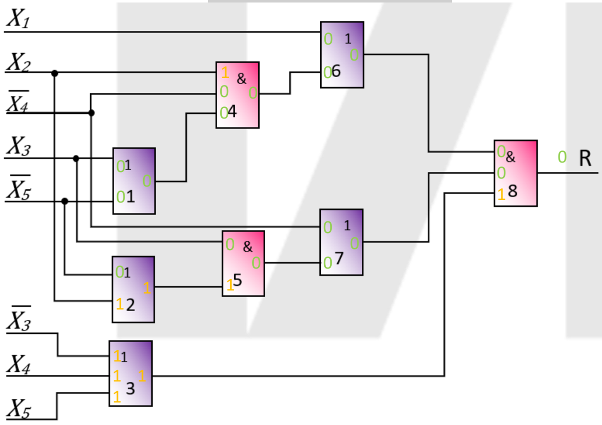


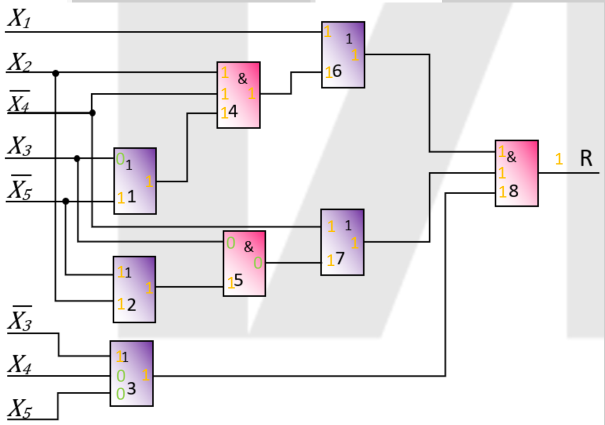
Цена схемы по Квайну $S_Q = 26$; задержка схемы $T = 7\tau$.

9. Анализ комбинационных схем

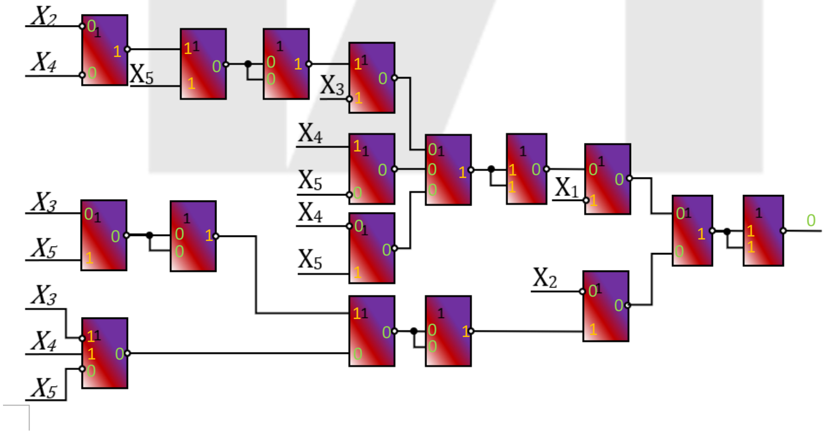
Определение реакции схемы на входные наборы: 01011 и 01000

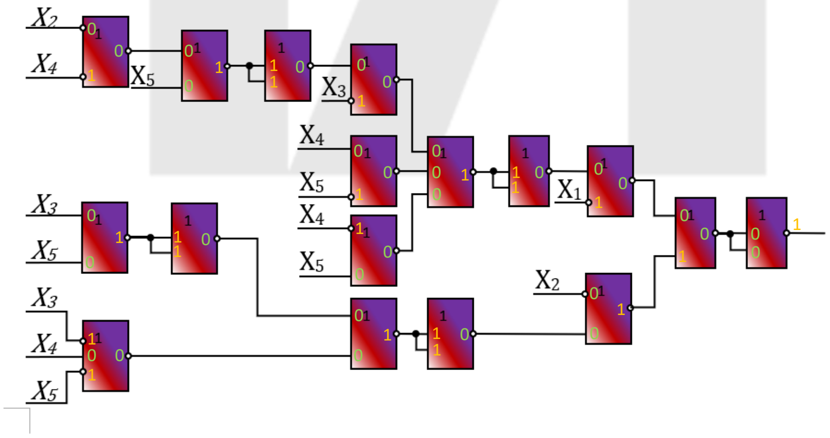
Для булева базиса с парафазными входами:





Для Базиса(ИЛИ-НЕ):





Для базиса (И-НЕ):