三角函数

定义

在平面直角坐标系 xOy 中，任意角 α 的终边交单位圆于点 $P(x,y)$ 时，设 $OP=r$，则：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},$$
$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\cot\alpha=\frac{x}{y},$$
$$\csc\alpha=\frac{r}{y},\sec\alpha=\frac{r}{x}.$$

在Rt三角形中，则：

$$\sin A=\frac{a}{c},$$
$$\cos A=\frac{b}{c},$$
$$\tan A=\frac{a}{b},$$
$$\cot A=\frac{b}{a}.$$

(a为对边，b为邻边，c为斜边)

性质

同角三角函数关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha,$$
$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha.$$

诱导公式（仅展示前六个）

将角 $\frac{n\pi}{2}\pm\alpha$ 的三角函数转化为角 α 的三角函数.

公式一:设 α 为任意角，终边相同的角的同一三角函数的值相等:

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha(k\in Z),$$
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha(k\in Z),$$
$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha(k\in Z),$$
$$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha(k\in Z).$$

公式二:设 α 为任意角，$\pi+\alpha$ 的三角函数值与 α 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha,$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha.$$

公式三:任意角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha.$$

公式四:利用公式二和公式三可以得到 $\pi-\alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha,$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha.$$

公式五:利用公式一和公式三可以得到 $2\pi-\alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha,$$
$$\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha.$$

公式六: $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系:

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha,$
$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha,$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha,$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha,$
$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha,$
$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha,$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha,$
$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha.$

奇变偶不变，函数看象限:

$$\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin\alpha(n\text{为偶数})\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha(n\text{为奇数})\end{cases},$$

$$\cos(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\cos\alpha(n\text{为偶数})\\(-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\alpha(n\text{为奇数})\end{cases}.$$

图像性质

正弦(sine)

$y=\sin x(x\in R)$:

值域：$[-1,1]$

周期：$2k\pi$

单调区间：

增：$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$

减：$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$

对称中心：$(k\pi,0)$

对称轴：$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

余弦(cosine)

$y=\cos x(x\in R)$:

值域：$[-1,1]$

周期：$2k\pi$

单调区间：

增：$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$

减：$[2k\pi,2k\pi+\pi]$

对称中心：$(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$

对称轴：$x=k\pi$

正切(tangent)

$y=\tan x(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$

值域：R

周期：$k\pi$

单调区间：

增：$\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$

对称中心：$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$

余切(cotangent)

$y=\cot x(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$

值域：R

周期：$k\pi$

单调区间：

减：$\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$

对称中心：$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$

图像变换

上下平移

$y=f(x)$ 图像平移 $|k|$ 得 $y=f(x)+k$ 图像，$k>0$ 向上，$k<0$ 向下。

左右平移

$y=f(x)$ 图像平移 $|\varphi|$ 得 $y=f(x+\varphi)$ 图像，$\varphi>0$ 向左，$\varphi<0$ 向右。

伸缩变换

$y=f(x)$ 图像各点把横坐标变为原来的 ω 倍得 $y=f(\frac{1}{\omega}x)$ 的图像。
$y=f(x)$ 图像各点把纵坐标变为原来的 A 倍得 $y=Af(x)$ 的图像。

对称变换

中心对称:$y=f(x)$图像关于点 (a,b) 对称图像的解析式是 $y=2b-f(2a-x)$.
轴对称:$y=f(x)$图像关于直线 $x=a$ 对称图像的解析式是 $y=f(2a-x)$.

变换公式

正弦

和角与差角公式：$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

二倍角公式：$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
$\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

余弦

和角与差角公式：$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

二倍角公式：$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$,
$\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$,
$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$,
$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

正切

和角与差角公式：$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$.

二倍角公式：$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

正弦定理

原定理

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$（R为外接圆半径）

变形

$a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC.$

类型

三角形两边和一边对角、三角形两角与一边.

影射定理

$a=b\cos C+c\cos B,$
$b=a\cos C+c\cos A,$
$c=a\cos B+b\cos A.$

余弦定理

原定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$

变形

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}-1.$$

类型

两边及一角（一角为夹角时直接使用、一角为一边对角时列方程）、三边.

三角恒等式

对于任意非$Rt\triangle$中,如$\triangle ABC$,总有$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

正切定理

对于边长为a,b,c而相应角为A,B,C的三角形，有：

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}}.$$

面积公式

基本公式

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B.$$

导出公式

$$S=\frac{abc}{4R},$$
$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

(R为外接圆半径,r为内接圆半径).

三角恒等式

两角和与差

$$\cos\alpha\pm\beta=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin\alpha\pm\beta=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan\alpha\pm\beta=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

和差化积

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

积化和差

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin\alpha+\beta-\sin\alpha-\beta]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin\alpha+\beta+\sin\alpha-\beta]$$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos\alpha+\beta+\cos\alpha-\beta]$
$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos\alpha+\beta-\cos\alpha-\beta]$

二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{\tan\alpha+\cot\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

$$\sec 2\alpha = \frac{\sec^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\csc 2\alpha = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2}\sec\alpha\csc\alpha$$

半角公式

$$sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$$

$$cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}$$

$$tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}} = \frac{sin\alpha}{1+cos\alpha} = \frac{1-cos\alpha}{sin\alpha} = csc\alpha - cot\alpha$$

$$cot(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}} = \frac{1+cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{sin\alpha}{1-cos\alpha} = csc\alpha + cot\alpha$$

$$sec(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{2sec\alpha}{sec\alpha+1}}$$

$$csc(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{2sec\alpha}{sec\alpha-1}}$$

数学方程式

数关系

$$\tan\alpha\cot\alpha = 1,$$
$$\sin\alpha\csc\alpha = 1,$$
$$\cos\alpha\sec\alpha = 1.$$

商关系

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

平方关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$
$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,$
$1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$

函数名不变，符号看象限

$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,$
$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha,$
$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha,$
$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha,$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha,$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha,$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$
$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha,$
$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha,$
$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,$
$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha,$
$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha,$
$\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha.$

奇变偶不变，符号看象限

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,$
$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$
$\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha,$
$\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha,$
$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha,$
$\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,$
$\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha,$
$\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha,$
$\sin(270^\circ-\alpha)=-\cos\alpha,$
$\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha,$
$\tan(270^\circ-\alpha)=\cot\alpha,$
$\cot(270^\circ-\alpha)=\tan\alpha,$
$\sin(270^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,$

$$\cos(270^\circ+\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\tan(270^\circ+\alpha)=-\cot\alpha,$$
$$\cot(270^\circ+\alpha)=-\tan\alpha.$$

复数区间的三角函数

$$\sin a+bi=\sin a\cos bi+\sin bi\cos a=\sin a\,\mathrm{ch}\,b+i\,\mathrm{sh}\,b\cos a,$$
$$\cos a-bi=\cos a\cos bi+\sin bi\sin a=\cos a\,\mathrm{ch}\,b+i\,\mathrm{sh}\,b\sin a,$$
$$\tan a+bi=\frac{\sin a+bi}{\cos a+bi},$$
$$\cot a+bi=\frac{\cos a+bi}{\sin a+bi},$$
$$\sec a+bi=\frac{1}{\cos a+bi},$$
$$\csc a+bi=\frac{1}{\sin a+bi}.$$

三角函数值

α大小	弧度制	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

α大小	弧度制	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-
360°	2π	0	1	0