# 三角函数

## 定义

在平面直角坐标系 xOy 中,任意角 lpha 的终边交单位圆于点 P(x,y) 时,设 OP=r,则:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r},$$
 $\tan \alpha = \frac{y}{x}, \cot \alpha = \frac{x}{y},$ 
 $\csc \alpha = \frac{r}{y}, \sec \alpha = \frac{r}{x}.$ 

#### 在Rt三角形中,则:

$$\sin A = rac{a}{c},$$
  $\cos A = rac{b}{c},$   $\tan A = rac{a}{b},$   $\cot A = rac{b}{a}.$ 

(a为对边,b为邻边,c为斜边)

# 性质

## 同角三角函数关系

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha,$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha.$$

## 诱导公式 (仅展示前六个)

将角 
$$\dfrac{n\pi}{2}\pm lpha$$
 的三角函数转化为角  $lpha$  的三角函数.

#### 公式一:设 $\alpha$ 为任意角,终边相同的角的同一三角函数的值相等:

```
\sin(2k\pi+lpha)=\sinlpha(k\in Z), \ \cos(2k\pi+lpha)=\coslpha(k\in Z), \ \tan(2k\pi+lpha)=\tanlpha(k\in Z), \ \cot(2k\pi+lpha)=\cotlpha(k\in Z).
```

#### 公式二:设 $\alpha$ 为任意角, $\pi + \alpha$ 的三角函数值与 $\alpha$ 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$
  
 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$   
 $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha,$   
 $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha.$ 

#### 公式三:任意角 $\alpha$ 与 $-\alpha$ 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$
  
 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$   
 $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha,$   
 $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$ 

#### 公式四:利用公式二和公式三可以得到 $\pi-\alpha$ 与 $\alpha$ 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$
  
 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$   
 $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha,$   
 $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$ 

#### 公式五:利用公式一和公式三可以得到 $2\pi - \alpha$ 与 $\alpha$ 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha,$$
  
 $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha,$   
 $\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha,$   
 $\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$ 

# 公式六: $\dfrac{\pi}{2}\pm lpha$ 与 lpha 的三角函数值之间的关系:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha,$$
 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha,$ 
 $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha,$ 
 $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha,$ 
 $\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha,$ 
 $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha,$ 
 $\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha,$ 
 $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha.$ 

#### 奇变偶不变,函数看象限:

$$\sin(rac{n\pi}{2}+lpha) = egin{cases} rac{n}{2}\sinlpha(n$$
为偶数)  $rac{n-1}{2}\coslpha(n$ 为奇数)

$$\cos(\frac{n\pi}{2} + \alpha) = \begin{cases} \frac{n}{2} \cos \alpha (n \text{为偶数}) \\ \frac{n+1}{2} \sin \alpha (n \text{为奇数}) \end{cases}.$$

## 图像性质

#### 正弦(sine)

 $y = \sin x (x \in R)$ :

值域: [-1,1]

周期:  $2k\pi$ 

单调区间:

增:
$$\left[-rac{\pi}{2}+2k\pi,rac{\pi}{2}+2k\pi
ight]$$

减:
$$\left[rac{\pi}{2}+2k\pi,rac{3\pi}{2}+2k\pi
ight]$$

对称中心:  $(k\pi,0)$ 

对称轴: $x=k\pi+rac{\pi}{2}$ 

## 余弦(cosine)

 $y = \cos x (x \in R)$ :

值域: [-1,1]

周期:  $2k\pi$ 

单调区间:

增:  $[-\pi+2k\pi,2k\pi]$ 

减 $: [2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 

对称中心:  $(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$ 

对称轴: $x = k\pi$ 

#### 正切(tangent)

 $y = an x (x 
eq k\pi + rac{\pi}{2})$ 

值域:R

周期: $k\pi$ 

单调区间:

增: $\left[-rac{\pi}{2}+k\pi,rac{\pi}{2}+k\pi
ight]$ 

对称中心: 
$$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$$

#### 余切(cotangent)

$$y=\cot x(x
eq k\pi+rac{\pi}{2})$$

值域:R

周期: $k\pi$ 

单调区间:

减:
$$\left[-rac{\pi}{2}+k\pi,rac{\pi}{2}+k\pi
ight]$$

对称中心:  $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$ 

## 图像变换

#### 上下平移

y=f(x) 图像平移 |k| 得 y=f(x)+k 图像,k>0 向上, k<0 向下。

#### 左右平移

y=f(x) 图像平移 |arphi| 得 y=f(x+arphi) 图像, arphi>0 向左,arphi<0 向右。

#### 伸缩变换

y=f(x) 图像各点把横坐标变为原来的  $\omega$  倍得  $y=f(rac{1}{\omega}x)$  的图像。 y=f(x) 图像各点把纵坐标变为原来的 A 倍得 y=Af(x) 的图像。

#### 对称变换

中心对称:y=f(x)图像关于点(a,b)对称图像的解析式是y=2b-f(2a-x). 轴对称:y=f(x)图像关于直线x=a对称图像的解析式是y=f(2a-x).

# 变换公式

## 正弦

和角与差角公式:  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ 

二倍角公式:  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

## 余弦

和角与差角公式:  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ 

二倍角公式:  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ,

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

## 正切

和角与差角公式:  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ .

二倍角公式:  $an 2lpha = rac{2 anlpha}{1- an^2lpha}$ .

# 正弦定理

#### 原定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
(R为外接圆半径)

## 变形

$$a=2RsinA, b=2RsinB, c=2RsinC.$$

## 类型

三角形两边和一边对角、三角形两角与一边.

## 影射定理

 $a = b\cos C + c\cos B,$ 

 $b = a\cos C + c\cos A,$ 

 $c = a\cos B + b\cos A.$ 

# 余弦定理

#### 原定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
  
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$ 

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

#### 变形

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} - 1.$$

#### 类型

两边及一角(一角为夹角时直接使用、一角为一边对角时列方程)、三边.

# 三角恒等式

对于任意非Rt $\triangle$ 中,如 $\triangle ABC$ ,总有an A + an B + an C = an A an B an C.

## 正切定理

对于边长为a, b, c而相应角为A, B, C的三角形,有:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}.$$

# 面积公式

## 基本公式

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B.$$

## 导出公式

$$S=rac{abc}{4R},$$
  $S=rac{1}{2}(a+b+c)r.$   $(R$ 为外接圆半径, $r$ 为内接圆半径).

# 三角恒等式

## 两角和与差

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$
$$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
$$\tan \alpha \pm \beta = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

## 和差化积

$$\sin lpha \pm \sin eta = 2 \sin rac{lpha \pm eta}{2} \cos rac{lpha \mp eta}{2} \ \cos lpha + \cos eta = 2 \cos rac{lpha + eta}{2} \cos rac{lpha - eta}{2} \ \cos lpha - \cos eta = -2 \sin rac{lpha + eta}{2} \sin rac{lpha - eta}{2}$$

## 积化和差

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin \alpha + \beta - \sin \alpha - \beta]$$
$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin \alpha + \beta + \sin \alpha - \beta]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos \alpha + \beta + \cos \alpha - \beta]$$
$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos \alpha + \beta - \cos \alpha - \beta]$$

## 二倍角公式

$$\sin 2lpha = 2\sin lpha \cos lpha = rac{2}{ anlpha + \cot lpha}$$
 $\cos 2lpha = \cos^2 lpha - \sin^2 lpha = 2\cos^2 lpha - 1 = 1 - 2\sin^2 lpha$ 
 $an 2lpha = rac{2 anlpha}{1 - an^2 lpha}$ 
 $an 2lpha = rac{\cot^2 lpha - 1}{2\cot lpha}$ 
 $an 2lpha = rac{\cot^2 lpha - 1}{2\cot lpha}$ 
 $an 2lpha = rac{\sec^2 lpha}{1 - an^2 lpha}$ 
 $an 2lpha = rac{1}{2\sin lpha \cos lpha} = rac{1}{2}\sec lpha \csc lpha$ 

## 半角公式

$$sin(rac{lpha}{2})=\pm\sqrt{rac{1-coslpha}{2}}$$

$$cos(rac{lpha}{2})=\pm\sqrt{rac{1+coslpha}{2}}$$

$$tan(rac{lpha}{2})=\pm\sqrt{rac{1-coslpha}{1+coslpha}}=rac{sinlpha}{1+coslpha}=rac{1-coslpha}{sinlpha}=csclpha-cotlpha$$

$$cot(rac{lpha}{2})=\pm\sqrt{rac{1+coslpha}{1-coslpha}}=rac{1+coslpha}{sinlpha}=rac{sinlpha}{1-coslpha}=csclpha+cotlpha$$

$$sec(rac{lpha}{2})=\pm\sqrt{rac{2seclpha}{seclpha+1}}$$

$$csc(rac{lpha}{2})=\pm\sqrt{rac{2seclpha}{seclpha-1}}$$

## 数学方程式

#### 数关系

 $\tan\alpha\cot\alpha=1,$ 

 $\sin\alpha\csc\alpha=1,$ 

 $\cos \alpha \sec \alpha = 1.$ 

## 商关系

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$
$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

## 平方关系

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
,  
 $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ ,  
 $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$ .

## 函数名不变,符号看象限

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha,$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot\alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha,$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \cot\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha,$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha,$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha,$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

## 奇变偶不变,符号看象限

$$\sin (90^{\circ} - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\cos (90^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\tan (90^{\circ} - \alpha) = \cot \alpha,$$

$$\cot (90^{\circ} - \alpha) = \tan \alpha,$$

$$\sin (90^{\circ} + \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\cos (90^{\circ} + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\tan (90^{\circ} + \alpha) = -\cot \alpha,$$

$$\cot (90^{\circ} + \alpha) = -\tan \alpha,$$

$$\sin (270^{\circ} - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\cos (270^{\circ} - \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\tan (270^{\circ} - \alpha) = \cot \alpha,$$

$$\cot (270^{\circ} - \alpha) = \cot \alpha,$$

$$\cos (270^{\circ} + \alpha) = \sin \alpha,$$
  

$$\tan (270^{\circ} + \alpha) = -\cot \alpha,$$
  

$$\cot (270^{\circ} + \alpha) = -\tan \alpha.$$

## 复数区间的三角函数

$$\sin a + bi = \sin a \cos bi + \sin bi \cos a = \sin a \cosh b + i \sinh b \cos a,$$

$$\cos a - bi = \cos a \cos bi + \sin bi \sin a = \cos a \cosh b + i \sinh b \sin a,$$

$$\tan a + bi = \frac{\sin a + bi}{\cos a + bi},$$

$$\cot a + bi = \frac{\cos a + bi}{\sin a + bi},$$

$$\sec a + bi = \frac{1}{\cos a + bi},$$

$$\csc a + bi = \frac{1}{\sin a + bi}.$$

# 三角函数值

lpha大小	弧度制	$\sin lpha$	$\cos \alpha$	an lpha
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$rac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-rac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

lpha大小	弧度制	$\sin lpha$	$\cos lpha$	an lpha
180°	$\pi$	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-
360°	$2\pi$	0	1	0