

noip solution

Idvz

October 24, 2017

Content

1	Noip 2012 Day 1	II
1.1	Vigenere 密码	II
1.1.1	题目大意	II
1.1.2	数据范围	II
1.1.3	思路	II
1.2	国王游戏	II
1.2.1	题目大意	II
1.2.2	数据范围	II
1.2.3	思路	II
1.3	开车旅行	III
1.3.1	题目大意	III
1.3.2	数据范围	III
1.3.3	思路	III
2	Noip 2012 Day 2	IV
2.1	同余方程	IV
2.1.1	题目大意	IV
2.1.2	数据范围	IV
2.1.3	思路	IV
2.2	借教室	IV
2.2.1	题目大意	IV
2.2.2	数据范围	IV
2.2.3	思路	IV
2.3	疫情控制	V
2.3.1	题目大意	V
2.3.2	数据范围	V
2.3.3	思路	V

3	Noip 2013 Day 1	VI
3.1	转圈游戏	VI
3.1.1	题目大意	VI
3.1.2	数据范围	VI
3.1.3	思路	VI
3.2	火柴排队	VI
3.2.1	题目大意	VI
3.2.2	数据范围	VI
3.2.3	思路	VI
3.3	货车运输	VII
3.3.1	题目大意	VII
3.3.2	数据范围	VII
3.3.3	思路	VII
4	Noip 2013 Day2	VIII
4.1	积木大赛	VIII
4.1.1	题目大意	VIII
4.1.2	数据范围	VIII
4.1.3	思路	VIII
4.2	花匠	VIII
4.2.1	题目大意	VIII
4.2.2	数据范围	VIII
4.2.3	思路	VIII
4.3	华容道	IX
4.3.1	题目大意	IX
4.3.2	数据范围	IX
4.3.3	思路	IX
5	NOIP 2014 Day 1	X
5.1	生活大爆炸版石头剪刀布	X
5.1.1	题目大意	X
5.1.2	数据范围	X
5.1.3	思路	X
5.2	联合权值	X
5.2.1	题目大意	X
5.2.2	数据范围	X
5.2.3	思路	X

5.3	飞扬的小鸟	XI
5.3.1	题目大意	XI
5.3.2	数据范围	XI
5.3.3	思路	XI
6	NOIP 2014 Day 2	XII
6.1	无线网络发射器选址	XII
6.1.1	题目大意	XII
6.1.2	数据范围	XII
6.1.3	思路	XII
6.2	寻找道路	XII
6.2.1	题目大意	XII
6.2.2	数据范围	XII
6.2.3	思路	XII
6.3	解方程	XIII
6.3.1	题目大意	XIII
6.3.2	数据范围	XIII
6.3.3	思路	XIII
7	NOIP 2015 Day 2	XIV
7.1	跳石头	XIV
7.1.1	题目大意	XIV
7.1.2	数据范围	XIV
7.1.3	思路	XIV
7.2	子串	XIV
7.2.1	题目大意	XIV
7.2.2	数据范围	XIV
7.2.3	思路	XIV
7.3	运输计划	XV
7.3.1	题目大意	XV
7.3.2	数据范围	XV
7.3.3	思路	XV
8	NOIp 2016 Day 1	XVI
8.1	玩具谜题	XVI
8.1.1	题目大意	XVI
8.1.2	数据范围	XVI
8.1.3	思路	XVI

8.2	天天爱跑步	XVI
8.2.1	题目大意	XVI
8.2.2	数据范围	XVI
8.2.3	思路	XVI
8.3	换教室	XVII
8.3.1	题目大意	XVII
8.3.2	数据范围	XVII
8.3.3	思路	XVII
9	NOIp 2016 Day 2	XVIII
9.1	组合数问题	XVIII
9.1.1	题目大意	XVIII
9.1.2	数据范围	XVIII
9.1.3	思路	XVIII
9.2	蚯蚓	XVIII
9.2.1	题目大意	XVIII
9.2.2	数据范围	XVIII
9.2.3	思路	XVIII
9.3	愤怒的小鸟	XIX
9.3.1	题目大意	XIX
9.3.2	数据范围	XIX
9.3.3	思路	XIX

1 Noip 2012 Day 1

1.1 Vigenere 密码

1.1.1 题目大意

给出密文以及秘钥，按要求输出明文。

1.1.2 数据范围

$$1 \leq |S| \leq 10^6$$

1.1.3 思路

模拟。

1.2 国王游戏

1.2.1 题目大意

给出 $n + 1$ 个物品，有权值 (a_i, b_i) ，第零个物品不允许动，剩余物品可以任意交换。

定义权值 w_i ($i \geq 1$) 为

$$\left\lfloor \frac{\prod_{d=0}^{i-1} a_d}{b_i} \right\rfloor$$

求最大权值 w_i 的最小值。

1.2.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^3, 1 \leq a_i, b_i < 10^4$$

1.2.3 思路

我们只需要考虑相邻的两个物品即可，考虑他们交换的条件，对于 $(a_i, b_i), (a_{i+1}, b_{i+1})$ ，他们交换之后更优需要满足的条件为

$$\frac{\prod_{d=0}^{i-1} a_d \times a_{i+1}}{b_i} < \frac{\prod_{d=0}^i a_d}{b_{i+1}}$$

化简之后得到，

$$a_{i+1}b_{i+1} < a_ib_i$$

即按照权值排序即可，按照顺序操作，取最大值即可，这里答案过大需要高精度。

1.3 开车旅行

1.3.1 题目大意

按顺序给出 n 个点，有高度 h_i ，两点之间的距离为 $|h_i - h_j|$ 。

现在从点 1 出发，走到不能走或者超过给定的距离 x 时停止，小 A 每次选择距离第二近的城市走，小 B 每次选择距离最近的城市走，最开始时小 A 先走。

对于给定的 x ，询问从哪个点出发，两人行走的距离比值最小。

m 个询问，给定 x, s (s 表示出发点)，询问两人行走的距离。

1.3.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 10^4, |h_i| \leq 10^9$$

1.3.3 思路

首先，我们用 *set* 处理在每一个点小 A 和小 B 走到的城市，接下来倍增出在每个点走 2^i 次方轮后所到的点，两人各走的距离。

对于询问 1，枚举每一个点，倍增的去走即可。

对于询问 2，同样的倍增即可，不过需要注意最后的时候需要判断小 A 是否还可以继续走。

2 Noip 2012 Day 2

2.1 同余方程

2.1.1 题目大意

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的最小正整数解。

2.1.2 数据范围

$$2 \leq a, b \leq 2 \times 10^9$$

2.1.3 思路

化成不定方程的形式 $ax - by = 1$ ，然后扩展欧几里得算法解一解方程即可。

2.2 借教室

2.2.1 题目大意

给出 n 天，可以提供 a_i 个教室，给出 m 个订单，从 s_i 到 t_i 需要 d_i 个教室。
询问第一个无法满足的订单，或者全部满足。

2.2.2 数据范围

$$1 \leq n, m \leq 10^6$$

2.2.3 思路

二分出答案，然后每次差分维护前缀和，查询即可。时间复杂度 $O(n \log n)$

2.3 疫情控制

2.3.1 题目大意

给出以 1 为根的带权无向树，在 m 个点上有黑点，询问最大的移动距离最小值，使得从 1 到叶子的节点的路径上至少存在一个黑点。

2.3.2 数据范围

$$1 \leq n \leq m \leq 5 \times 10^4$$

2.3.3 思路

继续考虑二分答案，在规定的时间内需要移动黑点满足要求，贪心的想，我们尽量往上走，这样控制的节点数更多，那么我们能够支援其他点的黑点，就是能够到达 1 号节点并且仍然有剩余的时间。

那么，那些不能够到达根节点的点尽量往上走即可，所以我们可以标记出不需要其他点支援的根节点的儿子节点，剩下的只需要考虑能否分配即可。

那么，某些节点能够到达根节点，但是自己所在的子树并没有黑点，那么与其支援，不如直接守住自己所在的子树即可。

剩下的排序后贪心即可。

3 Noip 2013 Day 1

3.1 转圈游戏

3.1.1 题目大意

初始权值为 x ，有 10^k 次操作，每次操作为 $(x + m) \bmod n$ ，求最后权值。

3.1.2 数据范围

$$1 < n < 10^6, 1 \leq m < n, 1 \leq x \leq n, 0 < k \leq 10^9$$

3.1.3 思路

$O(n)$ 递推打表，快速幂求出 $10^k \bmod n$ 的值即可。

或者可以直接求解 $(x + (10^k \bmod n)) \bmod n$ 。

3.2 火柴排队

3.2.1 题目大意

给出互不相同的序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ ，两序列的距离定义为 $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2$ 。

现在可以任意交换两相邻数字，求在最小化代价的前提下的最小交换次数，对 99999997 取模。

3.2.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq a_i, b_i \leq 2^{31} - 1$$

3.2.3 思路

根据贪心的思想，将尽量接近的数字配对，大的数尽量配对大的数，用堆实现贪心。

同时可以处理出 a 序列将要配对 b 序列的哪一个数，将数对 i, pos_i 视作区间，为了使移动次数最少，我们可以将区间内可以移走的全部移出去，观察一下，可以知道这是求序列的逆序对个数。

树状数组 $O(n \log n)$

3.3 货车运输

3.3.1 题目大意

给出 m 条带权无向边, n 个点, q 个询问。

每次询问点对 (x, y) , 询问 (x, y) 路径上权值最小的边最大是多少。

3.3.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^4, 1 \leq m \leq 5 \times 10^4, 1 \leq q \leq 3 \times 10^4$$

3.3.3 思路

要求权值最小的边最大, 那么我们可以做一遍最大生成树, 这样的话, (x, y) 之间路径的最小值即为答案。

现在考虑询问答案, 倍增处理即可。

4 Noip 2013 Day2

4.1 积木大赛

4.1.1 题目大意

给出序列 $\{a_n\}$ ，每次可以选择区间 $[L, R]$ ，将 $[L, R]$ 中的所有数加上 1。
求使得初始值全部为 0 的序列变成给定序列的最小操作次数。

4.1.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5$$

4.1.3 思路

根据贪心的思想，答案为 $\sum_{i=2}^n h_i - h_{i-1} (h_i > h_{i-1})$

4.2 花匠

4.2.1 题目大意

给出序列 $\{h_n\}$ ，现在去掉某些数，要求剩下的序列 $\{g_m\}$ ，满足下面两个条件之一。

$\forall i$ 有 $g_{2i} > g_{2i-1}$ ，且 $g_{2i} > g_{2i-1}$

$\forall i$ 有 $g_{2i} < g_{2i-1}$ ，且 $g_{2i} < g_{2i+1}$

求最多剩下的数量。

4.2.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq h_i \leq 10^6$$

4.2.3 思路

记 f_i 表示前一段为上升的最多留下来的数， g_i 为前一段为下降的最多留下来的数。

$$f_i = \max\{g_j + 1\} \quad (h_i > h_j)$$

$$g_i = \max\{f_j + 1\} \quad (h_i < h_j)$$

发现是一个前缀 \max 的形式，树状数组维护转移即可，注意树状数组中负数的限制。

4.3 华容道

4.3.1 题目大意

给出 $n \times m$ 的棋牌，上有 $n \times m - 1$ 个其中，其中某些不能被移动。

任何与空白的格子相邻的格子上的棋子均可以向空白格子移动。

现在有 q 个询问，每次给出指定棋子，目标格子，空白格子的位置，求最小步数使得指定棋子移到目标格子。

4.3.2 数据范围

$$1 \leq n, m \leq 30, 1 \leq q \leq 500$$

4.3.3 思路

考虑用最短路处理，发现某个格子上的棋子移到旁边的格子是与空白格子的方向有关，所以我们可以 $O(n^4)$ 预处理出空白格子在四个方位时向四个方位移一格的最小步数。

预处理之后考虑 *spfa*，首先我们需要将空白格子移到指定棋子的旁边，这个用 *bfs* 处理，然后将坐标与空白格子的方位做状态跑最短路，最后在目标格子的四种状态中取最小值即可。

5 NOIP 2014 Day 1

5.1 生活大爆炸版石头剪刀布

5.1.1 题目大意

模拟石头剪刀布

5.1.2 数据范围

$$1 \leq n, n_a, n_b \leq 200$$

5.1.3 思路

直接模拟即可。

5.2 联合权值

5.2.1 题目大意

给定 n 个节点的树，求所有长度为 2 的路径节点 (u, v) 的权值最大值以及和。
权值定义为 (u, v) 的权值为 $w_u \times w_v$ 。

5.2.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq w_i \leq 10^4$$

5.2.3 思路

考虑枚举中点，在树上 Dp 一遍即可。

5.3 飞扬的小鸟

5.3.1 题目大意

给定 $n \times m$ 的矩阵，其中有 k 个横坐标上有 $[1, l], [h, m]$ 的障碍。

每个单位时间小鸟延横坐标向右移动 1 单位距离，在单位时间内可以无限点击，在横坐标为 i 时，点击一次上升 x_i 的距离，如果不点击，则降低 y_i 的距离，最大只能到达 m 的高度。

中途不允许到达 0 或者障碍处。

现在可以从横坐标为 0 处任意位置出发，要求到达横坐标 n 的任意位置，求最小点击次数或者最大通过障碍的数量。

5.3.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^4, 5 \leq m \leq 10^3$$

5.3.3 思路

先列出朴素的方程 $f_i = \min\{f_{i-1-k \times x_i} + k, f_{i-1+y_i}\}$

这样的时间复杂度是 $O(nm^2)$ 的，考虑优化。

可以发现这是一个完全背包的 dp 式，那么就可以类似与完全背包去转移，时间复杂度为 $O(nm)$ 。

不过需要注意的是，在转移的过程中并不需要考虑障碍的问题，只需要在最后将无效状态改成无效，否则不符合背包的转移。

6 NOIP 2014 Day 2

6.1 无线网络发射器选址

6.1.1 题目大意

给出 n 个点，点有权值，可以任意选取某个点，以点为中心 $2d$ 为长的正方形计算权值和。
求最大权值和，以及达到最大权值和的方案数。

6.1.2 数据范围

$$1 \leq n, m, d \leq 20$$

6.1.3 思路

模拟。

6.2 寻找道路

6.2.1 题目大意

给定一张有向图 G ，边的长度均为 1，给定起点和终点。
要求找到长度最小的路径满足，路径上的所有点的出边所指向的点都与终点联通。

6.2.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^4, 1 \leq m \leq 2 \times 10^5$$

6.2.3 思路

我们需要先找出那么不合法的点，将其去掉，那么将边反向，从终点出发 *bfs*，标记出能到达的点，再处理一下就可以找出不合法的点。
最后从终点跑一遍 *spfa* 即可。

6.3 解方程

6.3.1 题目大意

求多项式方程在 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ 在 $[1, m]$ 内的整数解。

6.3.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^2, |a_i| \leq 10^{10000}, 1 \leq m \leq 10^6$$

6.3.3 思路

多选择几个质数，在模意义下计算表达式的值。

最后判断解只需要在模意义下的 x 是否都能使表达式为 0 即可。

7 NOIP 2015 Day 2

7.1 跳石头

7.1.1 题目大意

数轴长度为 l , 给出 n 块石头在数轴上的位置, 现在可以任意移除 m 个石头, 每次跳跃相邻的石头。

求最大的最短跳跃距离。

7.1.2 数据范围

$$0 \leq n, m \leq 5 \times 10^4, 1 \leq l \leq 10^9$$

7.1.3 思路

最小值最大, 二分答案, 贪心 *check*, 从起点出发, 如果距离小于 mid , 移掉石头, 判断是否超过 m 块石头需要移走。

7.2 子串

7.2.1 题目大意

给出长度分别为 n, m 的仅包含小写字母的字符串 A, B 。

求从 A 中选出 k 个互不重叠的子串, 顺序排列与 B 相等的方案数。

7.2.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 2 \times 10^3, 1 \leq m, k \leq 2 \times 10^2$$

7.2.3 思路

定义 $f_{i,j,k,0/1}$ 表示 A 串枚举到 i 位置, B 串匹配到 j 位置, 选择了 k 个子串, A 串第 i 个字母是否选择的方案数。

那么 Dp 转移就很好的列出来了。

$$f_{i,j,k,0} = f_{i-1,j,k,0} + f_{i-1,j,k,1}$$

$$f_{i,j,k,1} = f_{i-1,j-1,k-1,0} + f_{i-1,j-1,k,1} + f_{i-1,j-1,k-1,1} \quad A_i = B_j$$

初始状态为 $f_{0,0,0,0} = 1$ 。

压缩空间, 滚动数组处理一下, 时间复杂度 $O(nmk)$ 。

7.3 运输计划

7.3.1 题目大意

给出节点数为 n 的无向带权树，同时给出 m 条路径 (u, v) 。

现在可以将树上的某条边权值变成 0，求最大路径长度的最小值。

7.3.2 数据范围

$$1 \leq n, m \leq 3 \times 10^5$$

7.3.3 思路

考虑二分答案，二分出最大路径长度，考虑如何 *check*。

我们将所有长度大于 mid 的路径添加进去，那么就是要找到一条所有不满足的路径都经过的边并且 $maxlong - c_i \leq mid$ ，如果存在，删去这条边即可。

那么找到所有路径都经过的边只需要在树上求前缀和即可，在两端处加 1， lca 处减 1，最后扫一遍所有边即可。

需要预处理出 lca 。

时间复杂度 $O(n \log n + m \log \sum_{i=1}^n t_i)$

8 NOIp 2016 Day 1

8.1 玩具谜题

8.1.1 题目大意

给出 n 个小人围成圈, a_i 表示朝内或朝外, 同时给出 m 条指令 (d_i, s_i) , 表示指针向左或右移动 s_i 个人, 求最后指针所指的人的名字。

8.1.2 数据范围

$$1 \leq n, m \leq 10^5$$

8.1.3 思路

直接模拟

8.2 天天爱跑步

8.2.1 题目大意

给出一棵 n 个节点的树, 同时给出 m 条路径 (u, v) , 第 0 秒时所有玩家在起点, 以每秒一条边的速度向 v 走去。

每个节点有 w_i , 询问所有节点在 w_i 时刻, 位于点 i 的玩家的数量。

8.2.2 数据范围

$$1 \leq n, m \leq 3 \times 10^5$$

8.2.3 思路

先从树上的链开始考虑。

我们从深度大的点走向深度浅的点, 对于观测点 j , 出发点 u , 需要满足条件

$$d_u - d_j = w_j$$

变换一下得到, $d_u = w_j + d_j$, 这是一个只和 w_j, d_j 有关的式子, 那么我们只需要查询经过 j 的所有向上走的路径中满足 $d_u = d_j + d_j$ 的路径条数即可, 考虑用线段树维护。

同理, 可以得到在树上深度小的点向深度大的点走需要满足条件

$$d_u - 2d_{lca} = w_j - d_j$$

那么, 我们将路径 (u, v) 拆成两条 $(u, lca), (lca, v)$, 分别用两棵线段树维护即可。

考虑将所有的子树信息合并到父亲, 用线段树合并维护, 同时只能在 (u, lca) 处出现, 那么运用差分的思想, 在 lca 处打上 -1 的标记即可。

为了避免在 lca 处重复考虑, 我们在 lca 处将某一棵线段树 -1 , 再将另外一棵线段树在 lca 的父亲处将标记取消, 保证了在 lca 处只处理一次。

8.3 换教室

8.3.1 题目大意

给出 v 个点, e 条带权无向边, 同时给出 n 节课, 最开始时在 c_i 点上课, 有 m 次提交申请的机会, k_i 的概率申请通过, 通过后将在 d_i 点上课。

求在 m 次申请内的期望路径的最小值。

8.3.2 数据范围

$$1 \leq n, m \leq 2 \times 10^3, 1 \leq v \leq 300$$

8.3.3 思路

先用 *floyd* 跑一遍最短路, 求出任意两点之间的最短距离。

定义 $f_{i,j,0/1}$ 表示前 i 次课, 提交了 j 次申请, 这一次是否提交。

考虑这一次选不选, 由上一次选不选, 选了是否通过来转移。

9 NOIp 2016 Day 2

9.1 组合数问题

9.1.1 题目大意

给出 t, k , 有 t 次询问, 给定 n, m 。

询问对于所有的 $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \min(i, m)$ 有多少对 (i, j) 满足 C_i^j 是 k 的倍数。

9.1.2 数据范围

$$1 \leq n, m \leq 2 \times 10^3, 2 \leq k \leq 21$$

9.1.3 思路

先用杨辉三角形求出模 k 意义下的组合数, 再通过二维前缀和处理一下即可。

9.2 蚯蚓

9.2.1 题目大意

一开始有 n 只蚯蚓, 给定常数 p ($0 < p < 1$) 对于长度为 x 的蚯蚓, 将会被切成 $\lfloor px \rfloor$ 与 $x - \lfloor px \rfloor$ 两段, 剩下的蚯蚓将会增加 q 的长度。

给出 m 次操作, 每次将从所有蚯蚓中选出最长的蚯蚓切成两段。

求 m 秒内每次被切断的蚯蚓的长度, 以及最后时刻所有的蚯蚓的长度。

9.2.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 7 \times 10^6$$

9.2.3 思路

要求线性复杂度, 考虑单调队列处理, 需要先证明其单调性。

设 x, k 为两个连续被切的蚯蚓, 其中 k 已经包含了增加值 q 。

满足 $k - x \leq q$, 否则 k 将在 x 之前被切。

被切之后产生 $d_1 = \lfloor px \rfloor + q, d_2 = \lfloor pk \rfloor$

可以得到 $d_2 \leq \lfloor p(x + q) \rfloor = \lfloor px + pq \rfloor$ 。

很容易得到, $d_1 \geq d_2$, 另一种切法同样可以证明。

那么只需要维护三个单调队列, 同时维护增长量, 每次取三个队列的队头最大值切, 还原出真实数值, 切完后与增长值作差再插入到相应的队列中即可。

时间复杂度 $O(n \log n + m)$

9.3 愤怒的小鸟

9.3.1 题目大意

给出二维平面上 n 只小猪的坐标 (x_i, y_i) 。

现在可以用经过点 $(0, 0)$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a < 0$) 将所有在抛物线上的小猪打下来。

求将所有小猪打下来的最少抛物线条数。

9.3.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 18$$

9.3.3 思路

考虑状压 Dp, 记 f_s 表示已经打下来集合为 s 的小猪需要的最少抛物线条数。

同时需要预处理 g_{ij} 表示打下 i, j 两只猪的抛物线能打下来的猪的集合。

若直接转移复杂度为 $O(n^2 2^n)$ 。

考虑优化, 每次将猪打下来, 如果前面的某只猪不打, 直接打后面的猪, 到时候还是需要回过来打这一只猪, 那么我们不妨每次选集合的第一个没有被打下来的猪转移。

这样的时间复杂度为 $O(n 2^n)$ 。