网络流

- 本质是线性规划：有向图(V,E)，存在源点$S \in V$和汇点$T \in V$，$S \neq T$，每条边$\langle u,v \rangle$还有一个容量c。
- 容量限制：每条边的流量f是变量，需要满足$0 \leq f \leq c$。
- 流量平衡：对于每个非源汇点，流入流量总和等于流出流量总和。
- 流量：显然S的流出流量与T的流入流量相等，称为网络的流量$flow$。
- 最大流问题即为最大化网络的流量。

费用流

- 费用流的模型与网络流差不多，只是每条边还多了一个单位费用p，流量为f则会对总费用有$p \times f$的贡献。
- 最小费用流：最小化总费用。
- 最小费用最大流：在最大化流量的前提下最小化总费用。
- 最大费用：把费用取负数，可以证明若初始时不存在负环则增广过程中也不会出现负环。

最小割

- 有向图(V,E)，每条边$\langle u,v\rangle$还有边权c，存在源点$S\in V$和汇点$T\in V$，$S\neq T$。
- 你需要把V划分成两个集合$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{T}$，使得$S\in\boldsymbol{S},T\in\boldsymbol{T}$，最小化：

$$cut=\sum_{u\in S,v\in T,\langle u,v\rangle\in E} c_{\langle u,v\rangle}$$

最大流=最小割

- 最大流与最小割实际上是线性规划的对偶问题所以又相等的解。
- 实际上可以简单的证明如下：
  - 显然最大流不会超过最小割
  - 考虑一个最大流流量网络，只考虑$f < c$的边和$f > 0$的边的反向边，则从S可达的点构成的集合为S集合，其余为T集合。显然此时S,T不可能连通，否则会存在增光路，与最大流矛盾。此时所有跨越S,T的边都是满流的，于是在这种情况下有最大流=最小割。
- 综上有最大流=最小割。

最小割建模

平面图最小割
最大权闭合图
黑白染色
集合划分模型
离散变量模型

- 做出决策→最优化线性函数。
- 最小割建图来描述决策：
  - 节点放在集合S还是T。
  - 一条边割与不割。
- 用边权描述线性函数。
- 套用最大流算法求解。

BZOJ 1001: [BeiJing2006]狼抓兔子

- N*M的网格，每个格子还有一条左上到右下的边，求删去总权值最少的边使左上角到右下角不连通。
- N,M 1000.
- 平面图最小割等于对偶图最短路。

NOI2010 海拔

- 一个N*M的网格，每条边的两个方向都有一定数目的人流，每个格点都有海拔，一个人爬坡需要付出高度差的代价，下坡不付出代价。左下角高度为0，右上角高度为1，求安排其他点高度最小化总代价。
- N,M 500.
- 调整法证明高度一定是01且构成一个割。

最大权闭合子图

- 有n个物品，每个物品有一个价值V_i（可负），你需要选出一个物品的集合，最大化其中物品的总价值，并满足m个限制(x_i, y_i)：选了x_i就必须选择y_i。

- 正价值物品与S连边，负价值物品与T连边，使用容量无穷的边来限制选了x_i就必须选择y_i。

CEOI 2008 order

- 有N个工作，M种机器，每种机器你可以租或者买过来
- 每个工作需要一些机器，完成可以获得花费
- 求最大获利
- N,M 1200.

- 只有买过来算是选取，租用则算是最大权闭合子图的违反代价（代替inf）。

NOI2009 植物大战僵尸

- N*M棋盘的植物大战僵尸，每个植物有一个保护位置，僵尸从右边进入保护位置就会被立即杀死，僵尸进入植物的格子且不被立即杀死就会吃掉植物，获得分数并解除其保护的格子的防护，问僵尸最多能获得多少分数（分数可负）。
- N 20; M 30.

- 先Tarjan求出所有不可攻击的植物，剩余的做最大权闭合子图。

完美理论

- 给定两个编号都是从1到N的树，你需要选{1,2,…,N}的一个子集，最大化选到的元素权值（可负）的和，同时你选的集合在两棵树上都是连通子图。
- N 100.
- 枚举根，选x必须选x的父亲，最大权闭合子图。

SRM577Hard BoardPainting

- 一个有障碍的N*N的网格，每次粉刷一横列或者一纵列，不可重复粉刷，求最少的粉刷次数粉刷所有非障碍格。
- N 50.

- 每个格子当成变量，$x_i = 0$表示横向粉刷这个格子，$x_i = 1$表示纵向粉刷，横着相邻的两个格子若在同一个集合就可以一起粉刷获得收益，纵向亦然。最大权闭合图模型。

SRM577Hard BoardPainting

- 另一种做法：连接所有相邻格子，从横向边界到纵向边界做最小割，除以二就是答案。
- 证明：涂色法对应割，一条染色用割掉两端的边表示。
- 极小割对应涂色法，极小割对元素有唯一划分，与横边界相连的横涂与纵边界相连的纵涂。

黑白染色

- 很多时候涉及到两个变量的二元函数的代价，并且有联系的变量之间的连边构成二分图，这时候可以考虑黑白染色。
- 比较典型的时候有集合划分模型中划分到相同集合需要付出代价的时候。
- 还有离散变量模型中对两个变量的和进行限制。

集合划分模型

- 考虑如下整数规划：
- $x_i \in \{0,1\}$，$\text{Minimize } P = \sum p_i x_i + \sum w_{i,j} \max(x_i - x_j, 0)$
- 即除了每个元素取0,1会有代价的差异之外，若两个变量取值不等则会付出额外的代价，且根据谁选择1代价可变。
- 根据x_i的取值把元素划分成两个集合，可以容易的建立出最小割模型，采用最大流求解。
- 集合划分模型只处理不同集合的元素对之间的代价，若要相同集合付出代价，需是二分图黑白染色后处理。

Biologist

- 有n个已经有初值的0/1变量，改变一个变量需要vi的花费。有m个需求，要求某个集合的变量均为0/1，满足需求得到w_i的收益。求最大收益。
- n,m 100.
- 集合划分模型+最大权闭合子图模型

二分图最大独立集

- 这个模型也可以用最小割来思考吗？
- 想想……
- 建图和最大流完全一样。
- 最大独立集=点数-最大匹配 的新证法

SRM589Medium GearsDiv1

- N个齿轮每个齿轮有颜色（RGB），有些齿轮之间会咬合，你需要删除尽量少的齿轮并给每种颜色安排方向使得咬合齿轮不同向。问最多保留多少个齿轮。保证不存在两个相同颜色的齿轮咬合。
- N 50.
- 注意到三中颜色都同向可以把一个反向答案不会变差，不妨枚举哪一种反向，剩下两种颜色做二分图最大独立集。

SRM594Medium FoxAndGo3

- 一个N*N围棋棋盘，任意两个白子不相邻，你要加入若干个黑子并提出白子，最大化空格数目。
- N 50.

- 注意到与白子与相邻的空格最终不可能都为空格，于是连边，接着做最大点独立集，显然是二分图。

最优选择

- 给出一张n个点的无向图，每条边的边权定义为所连接两点点权的异或。有些点权确定，有些没有，请确定所有点点权，使得边权和最小
- n 100.

- 每一位分开考虑，除固定权值外，此位置不同才付出代价，集合划分模型。

文理分科

- 一个N*M的矩阵的同学选择文理科，要最大化满意值。
- 1.若第 i 行第 j 列的同学选择了文科，则他将获得$art_{i,j}$的满意值，如果选择了理科，将得到$science_{i,j}$的满意值。
  2.如果第 i 行第 j 列的同学选择文科，并且他相邻的同学全部选择文科，则他会增加$same_art_{i,j}$的满意值。
  3.如果第 i 行第 j 列的同学选择理科，并且他相邻的同学全部选择理科，则他会增加$same_science_{i,j}$的满意值。
- N,M 500.
- 建立新点表示周围是否都选了文/理，集合划分模型。

圈地计划

- N×M块小区域。将这些区域分为商业区和工业区来开发。对于第i行第j列的区域，建造商业区将得到$A_{i,j}$收益，建造工业区将得到$B_{i,j}$收益。另外不同的区域连在一起可以得到额外的收益，即如果区域(i,j)相邻有K块类型不同于(i,j)的区域，则这块区域能增加k×$C_{i,j}$收益。收益矩阵A,B,C都已经知道了。求出一个收益最大的方案么？
- N,M 100.

- 相同集合付出代价，需要黑白染色。

SRM558Hard Surrounding Game

- 一个人在一个N,M的棋盘上放旗子，在(i,j)放棋子有$C_{i,j}$的代价，一个格子被占领当且仅当其上有棋子或者其所有相邻格都有棋子，(i,j)被占领会获得$B_{i,j}$的收益，求最大收益（要减去代价）。
- N,M 20.
- 每个格子建立两个点，第一个点表示是否被占领，第二个点表示周围格子是否全部被占领，为避免重复统计收益，还要黑白染色厚在这两个点之间要连边。

离散变量模型

- 离散变量型网络流一般解决如下问题：
- 每个变量有若干个不同的取值$x_i = \{0,1,2,\cdots,m_i\}$，并且两个变量之间会对代价产生贡献。
- 一般贡献会和两个变量的差有关。
- 建图方式一般为，对一个点x_i，拆m_i+1个点并连成从S到T的链，割哪一条边就代表取哪个值，贡献用两条链之间的连边表达。

HNOI2013 切糕

- N*M*H的蛋糕，每个位置都要选一个高度切开，每个位置的每个高度都有一个不和谐值，同时相邻格子切开的高度差不能超过D，最小化总代价。
- N,M,H 40.
- 每个格子切口的高度就是离散变量，相邻两条链之间跨度为D的值之间连边+inf来满足高度差不超过D。

Codechef DEC 14 RIN

- N门课M个学期，第i门课第j个学期学习的收益是$X_{i,j}$(可以为负无穷)，有的课之间有依赖关系，即必须先学a再学b，求最大收益。
- N,M 100.
- 离散变量模型，依旧用横跨边来限制差。

SRM590Hard FoxAndCity

- 一张N个点无向图，边权都为1，你需要添加若干条边，最小化$\sum(a_i-b_i)^2$，b_i是输入的，a_i是1号点到i的最短路。
- N 30.

- a_i就是离散变量，显然加边不可能让最短路变长，同时原本就有边的两个点最短路差不超过1.

矩阵

- 给你一个N×M的矩阵，你要往矩阵内的每个格子都放入一个0~9之间的数字，使得任意两个相邻元素的和都不会超过一个给定的数，且所有数字之和最大。
- N,m 50
- 与切糕类似，注意差变成了和，需要黑白染色。

SRM627Hard LaserTowers

- 你有一个N*N的矩阵，有些位置有方向固定的激光塔，激光塔能选择这个方向的一个敌人攻击，每个敌人有一个收益，两个激光塔的激光不能相交，求最大收益。
- N 50.
- 离散变量为第几个敌人，横向到纵向的割，拆点保证不转多次弯。

BJOI2016 水晶

- 六边形网格中如图分布着能量源，还有N个特定位置的水晶（可在能量源上），你需要炸掉一些水晶使得剩下的水晶不能组成三元环且没有两个水晶分列一个能量源的两侧，最大化剩余水晶

- N 10000.
- 考虑每个在能量源的水晶，把无能量源的点黑白染色，则要不炸掉能量源，要不炸掉全黑，要不炸掉全白，离散变量有三个取值，S=val>白=inf>A=1.1val>B=inf>黑=val>T。