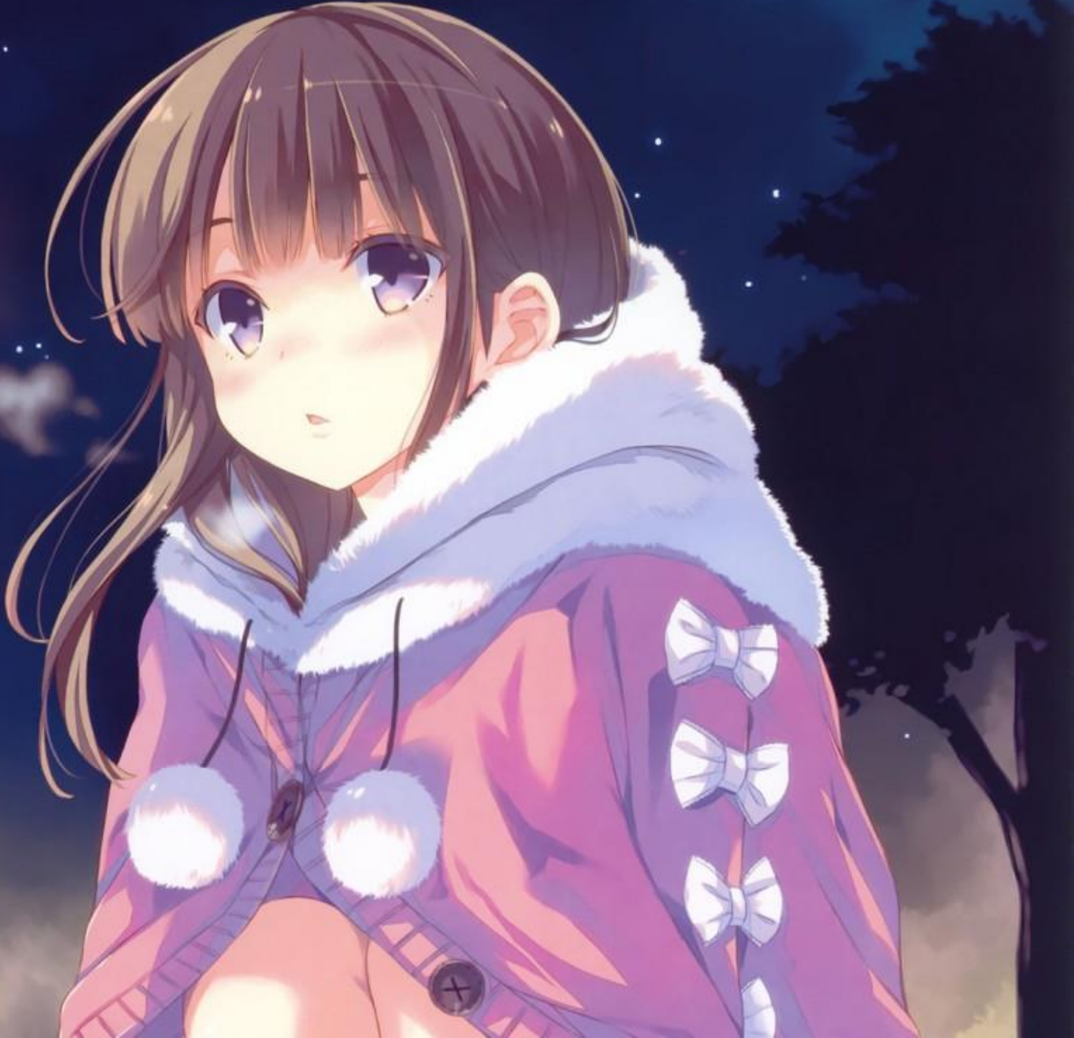
网络流基础建模

安师大附中 罗哲正



网络流建模

- 最小割
  - 平面图最小割
  - 最大权闭合子图
  - 黑白染色
  - 集合划分模型
  - 离散变量模型
- 最大流+费用流
  - 流量分配和匹配模型
  - 二维模型
  - 流量平衡
  - 带上下界的网络流
  - 一维差分模型
  - 线性规划

网络流

- 本质是线性规划：有向图(V,E)，存在源点$S\in V$和汇点$T\in V$，$S\neq T$，每条边$\langle u,v\rangle$还有一个容量c。
- 容量限制：每条边的流量f是变量，需要满足$0\le f\le c$。
- 流量平衡：对于每个非源汇点，流入流量总和等于流出流量总和。
- 流量：显然S的流出流量与T的流入流量相等，称为网络的流量$flow$。
- 最大流问题即为最大化网络的流量。

费用流

- 费用流的模型与网络流差不多，只是每条边还多了一个单位费用p，流量为f则会对总费用有$p \times f$的贡献。
- 最小费用流：最小化总费用。
- 最小费用最大流：在最大化流量的前提下最小化总费用。
- 最大费用：把费用取负数，可以证明若初始时不存在负环则增广过程中也不会出现负环。

最小割

- 有向图(V,E)，每条边$\langle u,v\rangle$还有边权c，存在源点$S\in V$和汇点$T\in V$，$S\neq T$。
- 你需要把V划分成两个集合$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{T}$，使得$S\in\boldsymbol{S},T\in\boldsymbol{T}$，最小化：

$$cut=\sum_{u\in S,v\in T,\langle u,v\rangle\in E} c_{\langle u,v\rangle}$$

最大流=最小割

- 最大流与最小割实际上是线性规划的对偶问题所以又相等的解。
- 实际上可以简单的证明如下：
  - 显然最大流不会超过最小割
  - 考虑一个最大流流量网络，只考虑$f < c$的边和$f > 0$的边的反向边，则从S可达的点构成的集合为S集合，其余为T集合。显然此时S,T不可能连通，否则会存在增光路，与最大流矛盾。此时所有跨越S,T的边都是满流的，于是在这种情况下有最大流=最小割。
- 综上有最大流=最小割。

最小割建模

平面图最小割
最大权闭合图
黑白染色
集合划分模型
离散变量模型

- 做出决策→最优化线性函数。
- 最小割建图来描述决策：
  - 节点放在集合S还是T。
  - 一条边割与不割。
- 用边权描述线性函数。
- 套用最大流算法求解。

BZOJ 1001: [BeiJing2006]狼抓兔子

- N*M的网格，每个格子还有一条左上到右下的边，求删去总权值最少的边使左上角到右下角不连通。
- N,M 1000.

- 平面图最小割等于对偶图最短路。

NOI2010 海拔

- 一个N*M的网格，每条边的两个方向都有一定数目的人流，每个格点都有海拔，一个人爬坡需要付出高度差的代价，下坡不付出代价。左下角高度为0，右上角高度为1，求安排其他点高度最小化总代价。
- N,M 500.
- 调整法证明高度一定是01且构成一个割。

最大权闭合子图

- 有n个物品，每个物品有一个价值V_i（可负），你需要选出一个物品的集合，最大化其中物品的总价值，并满足m个限制(x_i, y_i)：选了x_i就必须选择y_i。

- 正价值物品与S连边，负价值物品与T连边，使用容量无穷的边来限制选了x_i就必须选择y_i。

CEOI 2008 order

- 有N个工作，M种机器，每种机器你可以租或者买过来
- 每个工作需要一些机器，完成可以获得花费
- 求最大获利
- N,M 1200.

- 只有买过来算是选取，租用则算是最大权闭合子图的违反代价（代替inf）。

NOI2009 植物大战僵尸

- N*M棋盘的植物大战僵尸，每个植物有一个保护位置，僵尸从右边进入保护位置就会被立即杀死，僵尸进入植物的格子且不被立即杀死就会吃掉植物，获得分数并解除其保护的格子的防护，问僵尸最多能获得多少分数（分数可负）。
- N 20; M 30.

- 先Tarjan求出所有不可攻击的植物，剩余的做最大权闭合子图。

完美理论

- 给定两个编号都是从1到N的树，你需要选{1,2,…,N}的一个子集，最大化选到的元素权值（可负）的和，同时你选的集合在两棵树上都是连通子图。
- N 100.

- 枚举根，选x必须选x的父亲，最大权闭合子图。

SRM577Hard BoardPainting

- 一个有障碍的N*N的网格，每次粉刷一横列或者一纵列，不可重复粉刷，求最少的粉刷次数粉刷所有非障碍格。
- N 50.

- 每个格子当成变量，$x_i = 0$表示横向粉刷这个格子，$x_i = 1$表示纵向粉刷，横着相邻的两个格子若在同一个集合就可以一起粉刷获得收益，纵向亦然。最大权闭合图模型。

SRM577Hard BoardPainting

- 另一种做法：连接所有相邻格子，从横向边界到纵向边界做最小割，除以二就是答案。
- 证明：涂色法对应割，一条染色用割掉两端的边表示。
- 极小割对应涂色法，极小割对元素有唯一划分，与横边界相连的横涂与纵边界相连的纵涂。

黑白染色

- 很多时候涉及到两个变量的二元函数的代价，并且有联系的变量之间的连边构成二分图，这时候可以考虑黑白染色。
- 比较典型的时候有集合划分模型中划分到相同集合需要付出代价的时候。
- 还有离散变量模型中对两个变量的和进行限制。

集合划分模型

- 考虑如下整数规划：
- $x_i \in \{0,1\}$，$\text{Minimize } P = \sum p_i x_i + \sum w_{i,j} \max(x_i - x_j, 0)$
- 即除了每个元素取0,1会有代价的差异之外，若两个变量取值不等则会付出额外的代价，且根据谁选择1代价可变。
- 根据x_i的取值把元素划分成两个集合，可以容易的建立出最小割模型，采用最大流求解。
- 集合划分模型只处理不同集合的元素对之间的代价，若要相同集合付出代价，需是二分图黑白染色后处理。

Biologist

- 有n个已经有初值的0/1变量，改变一个变量需要vi的花费。有m个需求，要求某个集合的变量均为0/1，满足需求得到w_i的收益。求最大收益。
- n,m 100.
- 集合划分模型+最大权闭合子图模型

二分图最大独立集

- 这个模型也可以用最小割来思考吗？
- 想想……
- 建图和最大流完全一样。
- 最大独立集=点数-最大匹配 的新证法

SRM589Medium GearsDiv1

- N个齿轮每个齿轮有颜色（RGB），有些齿轮之间会咬合，你需要删除尽量少的齿轮并给每种颜色安排方向使得咬合齿轮不同向。问最多保留多少个齿轮。保证不存在两个相同颜色的齿轮咬合。
- N 50.
- 注意到三中颜色都同向可以把一个反向答案不会变差，不妨枚举哪一种反向，剩下两种颜色做二分图最大独立集。

SRM594Medium FoxAndGo3

- 一个N*N围棋棋盘，任意两个白子不相邻，你要加入若干个黑子并提出白子，最大化空格数目。
- N 50.
- 注意到与白子与相邻的空格最终不可能都为空格，于是连边，接着做最大点独立集，显然是二分图。

最优选择

- 给出一张n个点的无向图，每条边的边权定义为所连接两点点权的异或。有些点权确定，有些没有，请确定所有点点权，使得边权和最小
- n 100.
- 每一位分开考虑，除固定权值外，此位置不同才付出代价，集合划分模型。

文理分科

- 一个N*M的矩阵的同学选择文理科，要最大化满意值。
- 1.若第 i 行第 j 列的同学选择了文科，则他将获得$art_{i,j}$的满意值，如果选择了理科，将得到$science_{i,j}$的满意值。
  2.如果第 i 行第 j 列的同学选择文科，并且他相邻的同学全部选择文科，则他会增加$same_art_{i,j}$的满意值。
  3.如果第 i 行第 j 列的同学选择理科，并且他相邻的同学全部选择理科，则他会增加$same_science_{i,j}$的满意值。
- N,M 500.
- 建立新点表示周围是否都选了文/理，集合划分模型。

圈地计划

- N×M块小区域。将这些区域分为商业区和工业区来开发。对于第i行第j列的区域，建造商业区将得到$A_{i,j}$收益，建造工业区将得到$B_{i,j}$收益。另外不同的区域连在一起可以得到额外的收益，即如果区域(i,j)相邻有K块类型不同于(i,j)的区域，则这块区域能增加k×$C_{i,j}$收益。收益矩阵A,B,C都已经知道了。求出一个收益最大的方案么？
- N,M 100.
- 相同集合付出代价，需要黑白染色。

SRM558Hard Surrounding Game

- 一个人在一个N,M的棋盘上放旗子，在(i,j)放棋子有$C_{i,j}$的代价，一个格子被占领当且仅当其上有棋子或者其所有相邻格都有棋子，(i,j)被占领会获得$B_{i,j}$的收益，求最大收益（要减去代价）。
- N,M 20.
- 每个格子建立两个点，第一个点表示是否被占领，第二个点表示周围格子是否全部被占领，为避免重复统计收益，还要黑白染色厚在这两个点之间要连边。

离散变量模型

- 离散变量型网络流一般解决如下问题：
- 每个变量有若干个不同的取值$x_i=\{0,1,2,\cdots,m_i\}$，并且两个变量之间会对代价产生贡献。
- 一般贡献会和两个变量的差有关。
- 建图方式一般为，对一个点x_i，拆m_i+1个点并连成从S到T的链，割哪一条边就代表取哪个值，贡献用两条链之间的连边表达。

HNOI2013 切糕

- N*M*H的蛋糕，每个位置都要选一个高度切开，每个位置的每个高度都有一个不和谐值，同时相邻格子切开的高度差不能超过D，最小化总代价。
- N,M,H 40.

- 每个格子切口的高度就是离散变量，相邻两条链之间跨度为D的值之间连边+inf来满足高度差不超过D。

Codechef DEC 14 RIN

- N门课M个学期，第i门课第j个学期学习的收益是$X_{i,j}$(可以为负无穷)，有的课之间有依赖关系，即必须先学a再学b，求最大收益。
- N,M 100.
- 离散变量模型，依旧用横跨边来限制差。

SRM590Hard FoxAndCity

- 一张N个点无向图，边权都为1，你需要添加若干条边，最小化$\sum(a_i-b_i)^2$，b_i是输入的，a_i是1号点到i的最短路。
- N 30.

- a_i就是离散变量，显然加边不可能让最短路变长，同时原本就有边的两个点最短路差不超过1.

矩阵

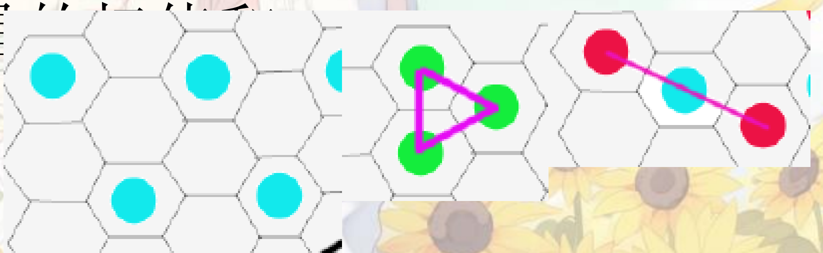
- 给你一个N×M的矩阵，你要往矩阵内的每个格子都放入一个0~9之间的数字，使得任意两个相邻元素的和都不会超过一个给定的数，且所有数字之和最大。
- N,m 50
- 与切糕类似，注意差变成了和，需要黑白染色。

SRM627Hard LaserTowers

- 你有一个N*N的矩阵，有些位置有方向固定的激光塔，激光塔能选择这个方向的一个敌人攻击，每个敌人有一个收益，两个激光塔的激光不能相交，求最大收益。
- N 50.
- 离散变量为第几个敌人，横向到纵向的割，拆点保证不转多次弯。

BJOI2016 水晶

- 六边形网格中如图分布着能量源，还有N个特定位置的水晶（可在能量源上），你需要炸掉一些水晶使得剩下的水晶不能组成三元环且没有两个水晶分列一个能量源的两侧，最大化剩余水晶
- N 10000.



- 考虑每个在能量源的水晶，把无能量源的点黑白染色，则要不炸掉能量源，要不炸掉全黑，要不炸掉全白，离散变量有三个取值，S=val>白=inf>A=1.1val>B=inf>黑=val>T。

最大流+费用流

流量分配和匹配模型
二维模型
流量平衡
带上下界的网络流
一维差分模型
线性规划

- 技巧主要有：
- 拆点
- 容量限制
- 流量平衡
- 建立超级源汇
- 动态加点
- 线性规划不等式变形（比如差分）
- 线性规划转对偶

流量分配和匹配模型

- 包括：流量分配，二分图匹配，路径覆盖，动态加点，下凸函数费用。

圆桌问题

- 来自n个不同国家的代表开会，每个国家代表数为c_i
- 会场有m张圆桌，每张桌子可容纳m_i人
- 不希望有同一个国家的代表在同一张桌子上就餐
- 设计一个合法方案
- n,m 300.

K-完备匹配

- 给出一个有n个点的二分图
- 问是否存在K个不相交的完备匹配
- 不相交的匹配是指对于同一个节点，每一个匹配中匹配的节点均不相同
- n,k 100.
- Hall定理：若二分图每个点度数均为k则存在k-完备匹配
- 流量分配求k-正则二分图子图

SCOI2012 奇怪的游戏

- 给出一个N*M的棋盘，每个格子上有一个数，可以给相邻的两个数同时+1，相邻指有公共边，求最少多少次操作可以将棋盘上的数变为同一个数。如果不可能输出-1。
- N,M 40, $A_{i,j}$ 10^9.

- 如果知道最后全部变成K怎么做。
- 黑白染色邻点连边做匹配。
- 偶数二分K，奇数直接算出K。

Turning Railways

- 一个N*M的有障碍棋盘，用回路覆盖所有空白格子，最大化有转弯的格子数目。
- N,M 50.

- 黑白染色，每个点拆两个点分别表示横纵，中间建一条边表示违反代价。

SRM575Hard TheTilesDivOne

- 你要在N*M有障碍的网格上放尽量多的L型瓷砖（3个非直线连续格子），不能互相覆盖也不能覆盖到障碍，且中心格子必须在黑格子上（黑白染色）。
- N,M 47.
- 对剩余白格子再进行红蓝染色，则一个L为红→黑→蓝，最大流模型。

SDOI2010 星际竞速

- N个星球，M条带权有向边构成DAG。同时从任意位置瞬移到星球i花费代价为A_i，第一次选择星球开始必须瞬移，要访问每个星球恰好一次，求最小总代价。
- N 800; M 15000.

- 带下界的费用流？
- 路径覆盖模型一般拆点转成类二分图匹配模型。
- 拆点x,x′，连<S,x,1,0>,<x′,T,1,0>,<u,v′,1,w>,<S,v′,1,A_i>

Codechef SEPT 12 PARADE

- N个点，M条带权单向道路，若干个英雄需要在其中游行，游行可以是路径也可以是回路，除了要付出路径的权值外，一个点若没被任何英雄经过，则要付出C的代价，另外如果一个英雄走的是路径，也要付出C送他回家，求最小代价，有K个不同的C。
- N 250; M 30000; K 10000.
- 路径覆盖→二分图匹配，发现额外代价=C(n-flow)。

CF277E Binary Tree on Plane

- 平面上有N个点
- 每个点可以向比他纵坐标小的点连边
- 要求连成一颗二叉树
- 使得所有边长度和最小
- N 400.

- 路径覆盖两边连边容量1限制的是出度入度，如果是二叉树的话左边对出度的限制变成2即可。

CTSC1999 家园

- 地球和月球之间有n个太空站，每个太空站可以容纳任意多人，有m艘太空飞船，第i艘按照$(a_{i1},a_{i2},a_{i3}\ldots a_{ik})$的周期经过第$a_{i1},a_{i2}\ldots$号太空站，每天由当前所在的太空站出发前往下一个，最多能载c_i个人（地球，月球分别看做0号，n+1号太空站）。现在地球上有s个人要到月球去，问最快需要多少天。

- 按时间拆点，动态加点的费用流

HNOI2007 紧急疏散

- 一个N*M的网格上的人要紧急疏散，有的点是障碍有的点是门，初始所有空地都站了一个人，人移动速度是1，疏散开始后一个空地人数无限制，但是门1时间只能进入一个人，求至少多少时间。
- N,M 20.
- 动态加点费用流。

SCOI2007修车+NOI2012美食节

- N个物品M个工人，每个工人做每个物品的时间是不同的，你需要安排工作和工作顺序，最小化最小总等待时间，等待时间是N个物品被加工完成的时间。
- 第i种物品有P_i个。
- N 40; M 100; P_i 800.

- 把物品是对应工人倒数第几个完成的联系起来，费用递增，动态加点。

WC2007 剪刀石头布

- 给一个N个点的混合竞赛图，你要给无向边定向，最大化三元环的数目。
- N 100.

- 三元环数目等于总数-∑C(入度,2)，于是最小化∑C(入度,2)，费用是递增的。

二维模型

- 一般模型是网格形式，对行和列有限制。
- 一般的建图方法是建立二分图，一边是行一边是列，用连接所在行列的边表示对应格子的决策。

Matrix

- 给出一个n*m的0/1矩阵A
- 给出一个长度为n的向量V，一个长度为m的向量U
- 要求构造一个整数矩阵B，满足：
  - ∑A[i][j]*B[i][j]=V[i]
  - ∑A[i][j]*B[i][j]=U[j]
- n,m 100.

- 二维模型的裸题。

流量平衡

- 流量平衡是费用流模型。
- 即利用每个点流入流量等于流出流量来满足等式，如果流入流量-流出流量=常数，可以通过与S,T连边实现。
- 限制原图中点出入度关系：
- 一个点拆成x,x'，连边$\langle S,x,c\rangle\langle x,x',c\rangle\langle x',T,c\rangle$，对于原图中边连边$\langle u,v'\rangle$，做最小费用最大流可以保证一个点的$x'$流入流量等于$x$的流出流量，且最大为$c$，若无上限则$c=inf$.

混合图欧拉回路

- 给一个混合图你要给无向边定向并求出欧拉回路。
- 先随便定向，建立超级源汇，流量平衡保证出入度平衡。

消负环

- 可以使用流量平衡来消负环。
- 首先每个点x拆成x, x'两个点。
- 对于边$\langle u, v, p, w\rangle$，建立$\langle u, v', p, w\rangle$，再对于每个点$x$建立$\langle S, x, inf, 0\rangle\langle x, x', inf, 0\rangle\langle x', T, inf, 0\rangle$.
- 这样做最小费用最大流可以保证每个点的入度等于出度，即若干个环。

CHINA-FINAL16 Mr.Panda and TubeMaster

- 在N*M的网格图里找若干个环，每个点都必须是转角，最大化边权和。
- N,M 30.

- 如果没有转角的限制那就是消负环。
- 有限制的话黑白染色后强制白点只能横向出边黑点只有纵向出边。

WF2011 Chips Challenge

- 在一个N*N的网格里放部件。其中有一些格子已经放置，有一些格子损坏。要求第x行的部件数目等于第x列，同时要求任意行列的部件数不超过总数的A/B。最大化数目
- N 40.
- 二维模型+流量平衡限制，枚举每行每列部件数限制即可。

带上下界的网络流

- 建立超级源超级汇，由下界计算出每个点冗余/亏损多少流量，用和超级源汇连边实现。
- 用新图的流量平衡保证原图流量平衡，注意要在原图上建立T到S的边。

AHOI2014 支线剧情

- JYY现在所玩的RPG游戏中，一共有N个剧情点，由1到N编号，第i个剧情点可以根据JYY的不同的选择，而经过不同的支线剧情，前往K_i种不同的新的剧情点。当然如果K_i为0，则说明i号剧情点是游戏的一个结局了。JYY观看一个支线剧情需要一定的时间。JYY一开始处在1号剧情点，也就是游戏的开始。显然任何一个剧情点都是从1号剧情点可达的。此外，随着游戏的进行，剧情是不可逆的。所以游戏保证从任意剧情点出发，都不能再回到这个剧情点。JYY可以在任何时刻退出游戏并重新开始。
- N 300;K_i 50.

一维差分模型

- 一般的建模方式是建立一条链：
- $S \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \rightarrow T$
- 然后连若干个区间$u, v(u < v)$，从u到v连边。
- 利用流量分配做出决策，利用容量限制和流量平衡满足条件，利用费用求最大收益。

区间选择

- 给出n个区间（值域[1,R]），选择第i个区间会得到收益w_i
- 数轴上每个点最多只能被k个区间覆盖
- 要求选出一些区间，使得收益最大
- N,R 1000.

- 从左向右连一条容量k的链，区间从左端点到右端点连边。

NEERC 16 Delight for a Cat

- 一只猫有n天，第i点选择吃饭可以获得e_i，选择睡觉可以获得s_i，连续k天至少睡觉m_s天至少吃饭m_e天，最大化收益。
- n 1000.
- 不妨假设全部睡觉，从i到i+k连边容量为1，若走这条边表示今天改为吃饭。总流量上限为k-m_s表示最多吃饭的天数，从i到i+1连边容量为k-m_s-m_e表示之前k天至少选择m_e天吃饭否则达不到最大流量，最小费用最大流建模。

线性规划

- 适用于如下线性规划：转标准型之后每个变量在所有等式中恰好出现了两次，系数分别为± 1。建图如下：
- 等式x中的正常数c：连边$\langle S, x, c, 0\rangle$
- 等式x中的负常数c：连边$\langle x, T, -c, 0\rangle$
- 等式x中系数-1等式y中系数1，范围是$[0, c]$，对代价函数贡献wv的变量v，$\langle x, y, c, w\rangle$
- 最小费用最大流求解，若最大流不满则不存在解。
- 若允许带下界，则还可允许只出现一次系数为± 1的变量。

NOI2008志愿者招募

- 奥运会，需要进行n天
- 第i天需要不少于a_i位志愿者
- 有m种志愿者类型，每种可以从s_i天服务至t_i天，每位志愿者需要c_i的费用
- 求满足条件的最小费用
- n 1000;m 10000.

- 对每天列等式，转标准型后对天数差分，直接列网络流。

小R的烦恼

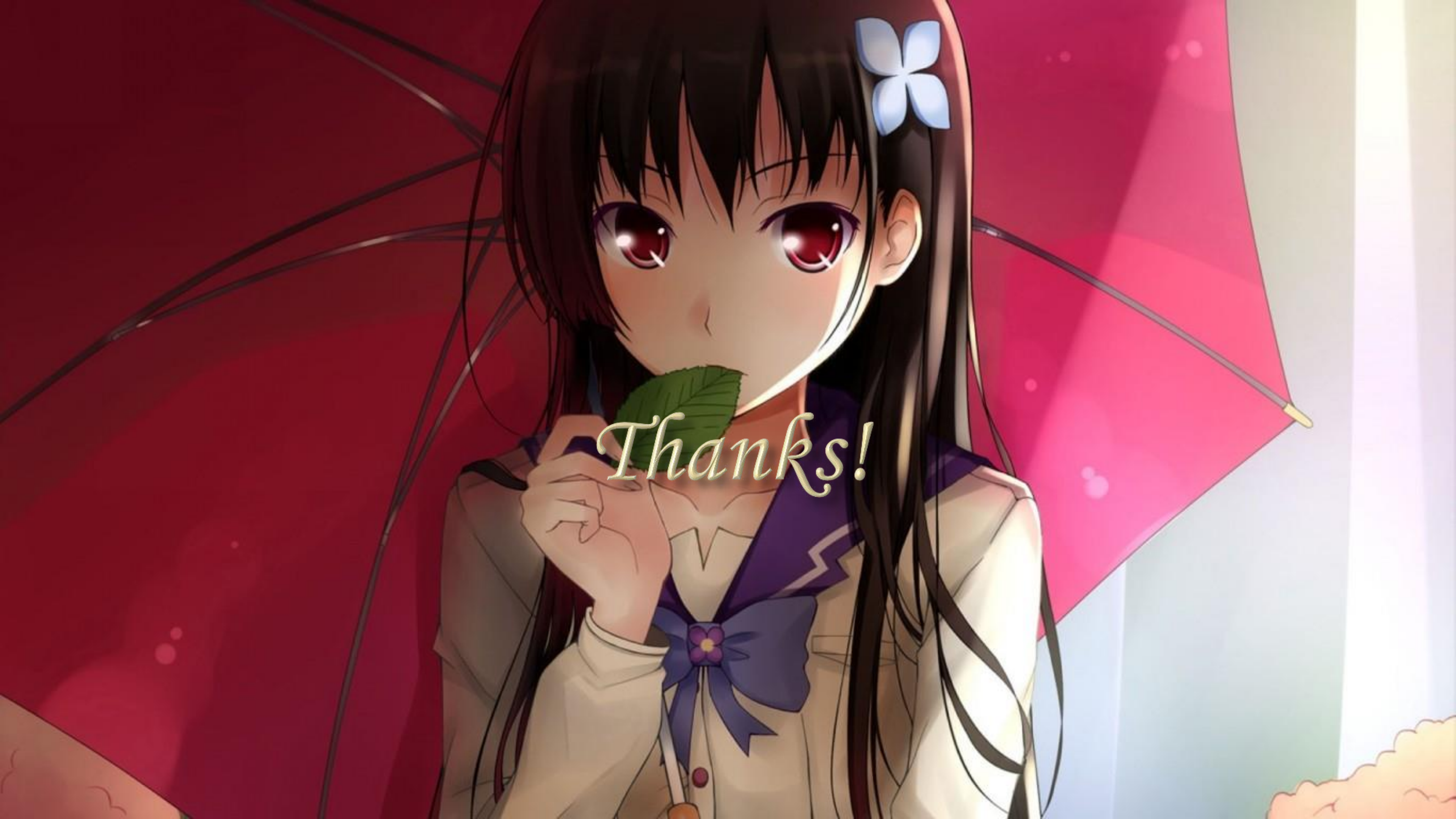
- 实验一共持续n天，第i天需要a_i个研究生。m 所大学，第j所大学共有c_j个研究生，一个研究生需要p_j元钱。
- 一天下来给他搬砖的所有研究生都会进入濒死状态。濒死状态的研究生，毫无疑问，就不能再进行工作了。但是机智的老师早早联系好了k家医院，第i家医院医治一个濒死的研究生需要d_i天,并且需要q_i元钱。最少花多少钱，能够在这 n 天中满足每天的需要呢？他可以不把濒死的研究生送去医院的。
- n,m,k 50.
- 一模一样的建图。

CodeChef June 15 CHEFBOOK

- 你又N个变量M个限制，有2N个变量X_i和Y_i，每个限制形如$L<=X_i-Y_j+W<=R$，最大化$\sum X_i-Y_j+W$。
- N 100; M N^2.
- 转对偶之后可以建图。

题外话

- 最后插一句，我今天讲的大部分题都可以单纯形直接A过去，所以你们就当我今天都在扯淡就好了。


Thanks!