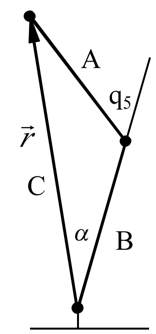
# Nao 的运动学建模

施国强




A: 股关节和膝关节的距离

B: 膝关节和踝关节的距离

C: 股关节和踝关节的距离

$\vec{r}$: 在踝关节的局部坐标系中股关节的坐标向量

C = $\vec{r}$.length

注：这里的角度 $\alpha$ 和 $q_5$ 只考虑大小，不考虑正负。

Hip.Pos = Ankle.Pos + Ankle.R* $\vec{r}$

Ankle.R 指踝关节局部坐标系的旋转矩阵。

Hip.Pos 和 Ankle.Pos 分别指股关节和踝关节在全局坐标系中的位置。

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \text{Ankle.R}^{-} * (\text{Hip.Pos} - \text{Ankle.Pos}) \\ &= \text{Ankle.R}^{\text{T}} * (\text{Hip.Pos} - \text{Ankle.Pos})\end{aligned}$$

注：旋转矩阵的逆矩阵等于其转置矩阵，即 $R^{-} = R^{T}$

$$\cos(\pi - q5) = (A^2 + B^2 - C^2) / (2AB)$$
$$\cos(q5) = (C^2 - A^2 - B^2) / (2AB)$$

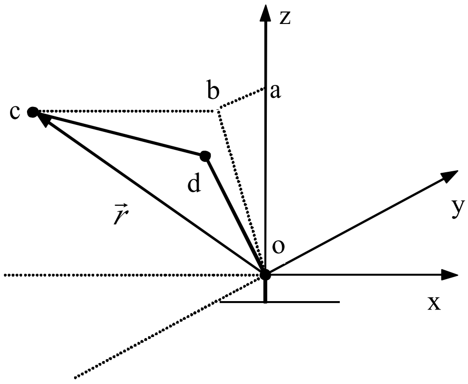
注：在实际的机器人模型中，KneePitch 是小于 0 的，所以 KneePitch=－$q_5$。

根据正弦定理有：$\dfrac{C}{\sin(\pi - q5)} = \dfrac{A}{\sin\alpha}$

$$\alpha = \arcsin(\sin(\pi - q5) * A / C)$$

关于 q6 的计算：以《仿人机器人》P48 图 2.25(c)为例，此时脚必然上翘，故 q6>0，且

$$q6 = \arctan(\vec{r}[1], sign(\vec{r}[2])\sqrt{\vec{r}[0]*\vec{r}[0] + \vec{r}[2]*\vec{r}[2]} + \alpha$$




注：左图是踝关节向下翻时的示意图。其坐标系同《仿人机器人》中的一样，同我们仿真系统的坐标系有所不同，设仿真系统坐标系的 x、y、z 的正方向为 sx、sy、sz，则 sx=-y，sy=x，sz=z。

三角形 oab 在 yoz 平面上，bc // x，ab // y，$bc \perp oab$，$bc \perp ob$，$\vec{r}$ 在 yoz 平面上的投影即为 ob。$ob = \sqrt{\vec{r}.y^2 + \vec{r}.z^2}$ 。

在直角三角形 obc 中，满足 $\angle boc = \arctan 2(bc, ob) = \arctan 2(-\vec{r}.x, \sqrt{\vec{r}.y^2 + \vec{r}.z^2})$

$\angle bod = \angle boc - \angle cod = \angle boc - \alpha = \arctan 2(-\vec{r}.x, \sqrt{\vec{r}.y^2 + \vec{r}.z^2}) - \alpha$

由于此时 q6 为负值，故 $q6 = \arctan 2(\vec{r}.x, \sqrt{\vec{r}.y^2 + \vec{r}.z^2}) + \alpha$

在我们的仿真系统中，由于坐标系的不同， $q6 = \arctan 2(\vec{r}.y, \sqrt{\vec{r}.x^2 + \vec{r}.z^2}) + \alpha$

注：以上关于 q6 的求解是针对图中的那种情况，其他情况可以类推。

$q7 = -\arctan(\vec{r}[0],\ \vec{r}[2])$

注：为什么有负号？

以左脚向外张开为例， $\vec{r}[0] > 0\ \ \&\&\ \vec{r}[2] > 0\ \&\&\ \arctan(\vec{r}[0],\ \vec{r}[2]) > 0$

而实际上左脚向外张开，q7 为负值，所以要人为的添加负号。
其他情况可以类推。

Rodrigues 矩阵：

$$
\begin{aligned}
e^{\hat{a}\theta} &= E + \hat{a}\sin\theta + \hat{a}^2(1-\cos\theta) \\
&= \begin{pmatrix}
\cos\theta + a_x^2(1-\cos\theta) & a_x a_y(1-\cos\theta) - a_z\sin\theta & a_y\sin\theta + a_x a_z(1-\cos\theta) \\
a_z\sin\theta + a_x a_y(1-\cos\theta) & \cos\theta + a_y^2(1-\cos\theta) & -a_x\sin\theta + a_y a_z(1-\cos\theta) \\
-a_y\sin\theta + a_x a_z(1-\cos\theta) & a_x\sin\theta + a_y a_z(1-\cos\theta) & \cos\theta + a_z^2(1-\cos\theta)
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$，这是个斜对称矩阵，满足 $\hat{a}^T = -\hat{a}$

左脚的逆运动学解析法：

LLeg1 的旋转矩阵：

$\vec{a}$ = Axis = (-0.7071, 0, -0.7071)

$\theta$ = q2

带入 Rodrigues 矩阵，得：

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+c2) & 0.7071*s2 & \frac{1}{2}(1-c2) \\ -0.7071*s2 & c2 & 0.7071*s2 \\ \frac{1}{2}(1-c2) & -0.7071*s2 & \frac{1}{2}(1+c2) \end{pmatrix}$$

LLeg2 的旋转矩阵：

$\vec{a}$ = Axis = (0, 1, 0)

$\theta$ = q3

带入 Rodrigues 矩阵，得：

$$M_3 = \begin{pmatrix} c3 & 0 & s3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s3 & 0 & c3 \end{pmatrix}$$

LLeg3 的旋转矩阵：

$\vec{a}$ = Axis = (1, 0, 0)

$\theta$ = q4

带入 Rodrigues 矩阵，得：

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c4 & -s4 \\ 0 & s4 & c4 \end{pmatrix}$$

$M_{234} = M_2 * M_3 * M_4 = M_2 * (M_3 * M_4)$

$$M_{34} = M_3 * M_4 = \begin{pmatrix} c3 & s3*s4 & s3*c4 \\ 0 & c4 & -s4 \\ -s3 & c3*s4 & c3*c4 \end{pmatrix}$$

$$M_{234} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+c2) & 0.7071*s2 & \frac{1}{2}(1-c2) \\ -0.7071*s2 & c2 & 0.7071*s2 \\ \frac{1}{2}(1-c2) & -0.7071*s2 & \frac{1}{2}(1+c2) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c3 & s3*s4 & s3*c4 \\ 0 & c4 & -s4 \\ -s3 & c3*s4 & c3*c4 \end{pmatrix}$$

$M_{234}[0,0] = \frac{1}{2}(1+c2)*c3-\frac{1}{2}(1-c2)*s3$

$M_{234}[0,1] = \frac{1}{2}(1+c2)*s3*s4+0.7071*s2*c4+\frac{1}{2}(1-c2)*c3*s4$

$M_{234}[0,2] = \frac{1}{2}(1+c2)*s3*c4-0.7071*s2*s4+\frac{1}{2}(1-c2)*c3*c4$

$M_{234}[1,0] = -0.7071*s2*(c3+s3)$

$M_{234}[2,0] = \frac{1}{2}(1-c2)*c3-\frac{1}{2}(1+c2)*s3$

$M_{234}[2,1] = \frac{1}{2}(1-c2)*s3*s4-0.7071*s2*c4+\frac{1}{2}(1+c2)*c3*s4$

$M_{234}[2,2] = \frac{1}{2}(1-c2)*s3*c4+0.7071*s2*s4+\frac{1}{2}(1+c2)*c3*c4$

$$\frac{\mathrm{M}_{234}[0,1]+\mathrm{M}_{234}[2,1]}{\mathrm{M}_{234}[0,2]+\mathrm{M}_{234}[2,2]} = \frac{(c3+s3)*s4}{(c3+s3)*c4} = \frac{s4}{c4} = Tan(\mathrm{HipPitch})$$

$$\mathrm{HipPitch=q4=ArcTan2}(\mathrm{M}_{234}[0,1]+\mathrm{M}_{234}[2,1],\ \ \mathrm{M}_{234}[0,2]+\mathrm{M}_{234}[2,2])$$

$$c4=\cos(\mathrm{HipPitch})$$

$$\frac{\mathrm{M}_{234}[0,2]+\mathrm{M}_{234}[2,2]}{c4} = \frac{(c3+s3)*c4}{c4} = c3+s3 = add\_cs3$$

$$\frac{\mathrm{M}_{234}[0,0]-\mathrm{M}_{234}[2,0]}{add\_cs3} = \frac{c2*(c3+s3)}{c3+s3} = c2 = \cos(\mathrm{HipYawPitch})$$

$$\frac{\mathrm{M}_{234}[1,0]}{-0.7071*(c3+s3)} = \frac{-0.7071*s2*(c3+s3)}{-0.7071*(c3+s3)} = s2 = \sin(\mathrm{HipYawPitch})$$

注：HipYawPitch 的范围：-90 to 0，这里用反正弦、反余弦、反正切都可以，但要对所求得的 HipYawPitch 值的大小进行判断，必要时加减 180°，使之在正确的范围之内，并且 $s2<0\ \&\&\ c2>0$。

$$2*\mathrm{M}_{234}[0,0]-c2*(c3+s3) = c3-s3 = sub\_cs3$$

$$c3=(add\_cs3+sub\_cs3)/2.0$$

$$s3=(add\_cs3-sub\_cs3)/2.0$$

右脚的逆运动学解析法：
注：左右脚只有 Leg1 的关节轴矢量不同
RLeg1 的旋转矩阵：

$\vec{a}$ = Axis = (-0.7071, 0, 0.7071)

$\theta$ = q2

带入 Rodrigues 矩阵，得：

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+c2) & -0.7071*s2 & -\frac{1}{2}(1-c2) \\ 0.7071*s2 & c2 & 0.7071*s2 \\ -\frac{1}{2}(1-c2) & -0.7071*s2 & \frac{1}{2}(1+c2) \end{pmatrix}$$

$$M_{234} = M_2 * M_{34} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+c2) & -0.7071*s2 & -\frac{1}{2}(1-c2) \\ 0.7071*s2 & c2 & 0.7071*s2 \\ -\frac{1}{2}(1-c2) & -0.7071*s2 & \frac{1}{2}(1+c2) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c3 & s3*s4 & s3*c4 \\ 0 & c4 & -s4 \\ -s3 & c3*s4 & c3*c4 \end{pmatrix}$$

$$M_{234}[0,0] = \frac{1}{2}(1+c2)*c3 + \frac{1}{2}(1-c2)*s3$$

$$M_{234}[0,1] = \frac{1}{2}(1+c2)*s3*s4 - 0.7071*s2*c4 - \frac{1}{2}(1-c2)*c3*s4$$

$$M_{234}[0,2] = \frac{1}{2}(1+c2)*s3*c4 + 0.7071*s2*s4 - \frac{1}{2}(1-c2)*c3*c4$$

$$M_{234}[1,0] = 0.7071*s2*(c3-s3)$$

$$M_{234}[2,0] = -\frac{1}{2}(1-c2)*c3 - \frac{1}{2}(1+c2)*s3$$

$$M_{234}[2,1] = -\frac{1}{2}(1-c2)*s3*s4 - 0.7071*s2*c4 + \frac{1}{2}(1+c2)*c3*s4$$

$$M_{234}[2,2] = -\frac{1}{2}(1-c2)*s3*c4 + 0.7071*s2*s4 + \frac{1}{2}(1+c2)*c3*c4$$

$$\frac{M_{234}[0,1]-M_{234}[2,1]}{M_{234}[0,2]-M_{234}[2,2]} = \frac{(s3-c3)*s4}{(s3-c3)*c4} = \frac{s4}{c4} = Tan(\text{HipPitch})$$

$$\text{HipPitch=q4=ArcTan2}(M_{234}[0,1]-M_{234}[2,1],\ \ M_{234}[0,2]-M_{234}[2,2])$$

$$c4 = \cos(\text{HipPitch})$$

$$\frac{M_{234}[2,2]-M_{234}[0,2]}{c4} = \frac{(c3-s3)*c4}{c4} = c3-s3 = sub\_cs3$$

$$\frac{M_{234}[0,0]+M_{234}[2,0]}{sub\_cs3} = \frac{c2*(c3-s3)}{c3-s3} = c2 = \cos(\text{HipYawPitch})$$

$$\frac{\mathrm{M}_{234}[1,0]}{0.7071*(c3-s3)} = \frac{0.7071*s2*(c3-s3)}{0.7071*(c3-s3)} = s2 = \sin(\mathrm{HipYawPitch})$$

$$2*\mathrm{M}_{234}[0,0] - c2*(c3-s3) = c3+s3 = add\_cs3$$

$$c3 = (add\_cs3 + sub\_cs3)/2.0$$

$$s3 = (add\_cs3 - sub\_cs3)/2.0$$