极值点偏移,排列组合,解析几何,二项式定理与数列不等式

姓名：___________ 用时：___________ 难度：___________

一、单选题

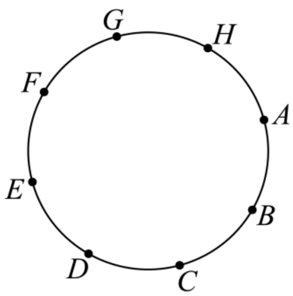
1．将 20 个大小，材质均相同的小球分别编号为 1，2，3，…，20，将这 20 个小球随机分装到甲，乙两个盒子中，每个盒子装 10 个小球，设甲盒中小球的最小编号为 a，最大编号为 b，乙盒中小球的最小编号为 c，最大编号为 d，则“$b-a=d-c=12$”的概率为（　）

A．$\frac{6}{C_{20}^{10}}$　　B．$\frac{8}{C_{20}^{10}}$　　C．$\frac{12}{C_{20}^{10}}$　　D．$\frac{24}{C_{20}^{10}}$

2．若数轴上有一个质点位于 $x=0$ 处，每次运动它都等可能地向左或向右移动一个单位，已知它在第 10 次运动后首次到达 $x=6$ 处，则它在运动过程中没有重返过原点的概率为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{13}{27}$　　C．$\frac{28}{45}$　　D．$\frac{7}{15}$

3．有一个游戏，规则如下：如图，在圆上有 A，B，C，D，E，F，G，H 共八个点，一枚棋子起始位置在点 A 处，抛掷一枚均匀的骰子，若骰子正面向上的点数为 $i\left(i=1,2,\cdots,6\right)$．则棋子前进 i 步，每步从一个点按顺时针方向前进到相邻的另一个点，可以循环进行，抛掷三次骰子后，游戏结束.若此时棋子在点 A 处，则游戏过关. 试问游戏结束时过关的概率为（　）



A．$\frac{1}{18}$　　B．$\frac{1}{12}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{8}$

4．化简 $\frac{C_{25}^{0}}{1\times 2}+\frac{C_{25}^{1}}{2\times 3}+\frac{C_{25}^{2}}{3\times 4}+\cdots+\frac{C_{25}^{24}}{25\times 26}+\frac{C_{25}^{25}}{26\times 27}$ 结果为（　）

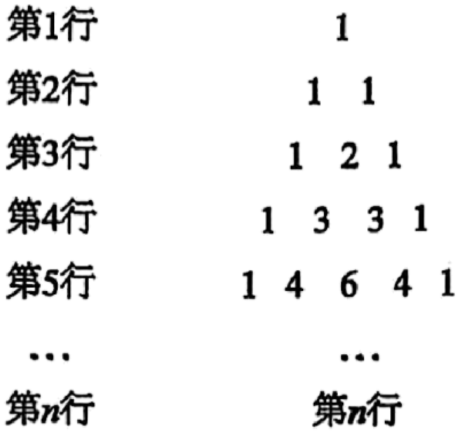
A．$\frac{2^{26}-26}{650}$　　B．$\frac{2^{26}-27}{650}$　　C．$\frac{2^{27}-27}{702}$　　D．$\frac{2^{27}-28}{702}$

5．在打结计时赛中，现有 5 根绳子，共有 10 个绳头，每个绳头只打一次结，且每个结仅含两个绳头，所有绳头打结完毕视为结束．则这 5 根绳子恰好能围成一个圈的概率为（　）

A．$\frac{64}{315}$　　B．$\frac{256}{315}$　　C．$\frac{32}{315}$　　D．$\frac{128}{315}$

二、多选题

6．如图，“杨辉三角”是我国古代的伟大发明，其中$a_{(i,j)}$表示第i行的第j个数$(j \le i)$,S_i表示第i行所有数字之和，例如$a_{(3,2)}=2, S_3=4$．则下列说法正确的是（　）



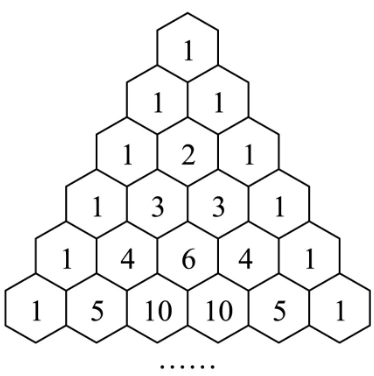
A．$a_{(20,19)}=19$

B．$a_{(n,3)}=\dfrac{n(n+1)}{2}(n \ge 3)$

C．若$b_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$，则数列$\{b_n\}$的前n和为$2^{n+1}-n-2$

D．若$\sum\limits_{i=1}^{n-1}S_i+\sum\limits_{j=1}^{m}a_{(n,j)}=1079$，则$\{(n,m)\mid n=11,m=3\}$

7．在我国南宋数学家杨辉1261年所著的《详解九章算法》一书里出现了如图所示的数字图形（见下图），即杨辉三角，这是数学史上的一个伟大成就．在杨辉三角中，第n行的所有数字之和为2^{n-1}，若去除所有为1的项，依次构成数列$\{a_n\}$：2，3，3，4，6，4，5，10，10，5，…，则下列说法正确的是（　）



A．$a_{12}=a_{14}$

B．$S_{15}=104$

C．第$\dfrac{n^2-n+2}{2}$项为$n+1, n\in\mathbf{N}^*$

D．从杨辉三角的图中抽取一斜线的数列 1，3，6，10，15，…，得到其倒数和 S，则 $S=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}+\cdots>2$

8．现有数字$0,1,1,1,2,3,4,5$下列说法正确的是（　）

A．可以组成600个没有重复数字的六位数

B．可以组成288个没有重复数字的六位偶数

C．可以组成3240个六位数

D．可以组成2160个相邻两个数字不相同的八位数

9．已知曲线$C:\sin(x+2y)=2x-y$，$P\left(x_0,y_0\right)$为曲线C上任一点，则下列说法中正确的有（　）

A．曲线C与直线$y=x+1$恰有四个公共点

B．曲线C与直线$y=2x-1$相切

C．y_0是关于x_0的函数

D．x_0是关于y_0的函数

三、填空题

10．已知$\triangle ABC$面积为 1，边AC,AB上的中线为BD,CE，且$BD=\dfrac{4}{3}CE$，则边AC的最小值为________.

11．将杨辉三角中的每一个数C_n^r都换成分数$\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^r}$，就得到一个如下图所示的分数三角形，称为莱布尼茨三角形，从莱布尼茨三角形可看出$\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^r}+\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^x}=\dfrac{1}{n\mathrm{C}_{n-1}^r}$，其中$x=$______，令$a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{60}+\cdots+\dfrac{1}{n\mathrm{C}_{n-1}^{n-3}}+\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_n^{n-2}}(n\geq 2)$，则$\{a_n\}$前 n 项和$S_n=$______.

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{7}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{140}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{7}$$

……

12．在一个正六边形的六个顶点上放置数字，要求每个顶点上放置一个数字，且任意相邻两个顶点上的数字之和不能为 5 或 7.若已经在三个相邻顶点上放置了数字 1、2、3，则共有__种不同的放置方法（数字可以重复使用），在所有符合上述要求的放置方法中，六个顶点上的数字之和的最小值是_____.

13．把3个红球和33个白球随机排成一圈，则连续排列的白球个数不超过13个的概率是_

14．将编号为$1,2,3,4,5$的5个小球随机放置在圆周的5个等分点上，每个等分点上各有一个小球.则使圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和最小的放法的概率为________.

15．已知动直线l_1与圆$x^2+(y-9)^2=1$相切，并与圆$x^2+(y-9)^2=4$相交于点A,B，点P为抛物线$y^2=2x$上一动点，O为坐标原点，则$\left|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$的取值范围为________.

四、解答题

16．已知正实数a,b满足:$2a+b=1$.

(1)求$\dfrac{2}{a}+\dfrac{9}{b}$的最小值;

(2)求$\dfrac{2b+1}{a}+\dfrac{a+4}{b}$的最小值;

(3)求$a^2+2b^2+\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{4b}$的最小值.

17．已知函数$f(n,x)=\left(\dfrac{2}{m}+mx\right)^n\ (m>0,x>0)$.

(1)当$m=2$时，求$f(5,x)$的展开式中二项式系数最大的项；

(2)若$f(10,x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，且$a_3=960$.

①求$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}$的值；

②求$a_i\left(0\le i\le 10, i\in \mathbf{N}\right)$的最大值．

18．若一个数列由两个变量k和n共同控制，则称这样的数列为“双数列”，当$k\le n$时，可记为a_n^k，在研究这样的数列问题时，一般将一个变量视为固定值，已知数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=na_n$，给定双数列$b_n^k=\dfrac{a_n}{a_k a_{n+1-k}}$．

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)现固定n的值且$n\ge 2$，求$\sum\limits_{k=1}^{n} b_n^k$；

(3)设双数列$T_n^k=\dfrac{k\cdot b_{n+1}^{k+1}\cdot a_{k+1}}{n^{k+1}}$，固定$n$的值且满足$4n+1=\left(2t+1\right)^2$，$t\in \mathbf{N}^*$，则当$k$取何值时，$T_n^k$取得最大值.（结果用含$t$的表达式表达）

19．已知关于x的函数$f\left(x\right)=x-\ln\left(x+1\right)$，其图象与直线$y=m$相切.

(1)求m的值；

(2)证明：$f\left(x\right)\geq 0$；

(3)设数列$a_n=\dfrac{1}{\ln\left(n+1\right)}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，证明：$S_n>\dfrac{2n}{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

20．已知点M到点$N(1,0)$的距离比到y轴的距离大1，M的轨迹为C．点$P_1(t,t+1)(t\geq 0)$在C上，过P_1作斜率为-1的直线交C于另一点Q_1，设P_2与Q_1关于x轴对称，过P_2作斜率为-1的直线交C于另一点Q_2，设P_3与Q_2关于x轴对称，……，以此类推，设$P_n\left(x_n,y_n\right)$.

(1)求C的方程；

(2)设数列$\left\{\dfrac{1}{x_n+y_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$\dfrac{1}{3}\leq T_n<\dfrac{1}{2}$；

(3)求$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积.

21．在平面直角坐标系中，已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{225}+y^2=1$．

(1)椭圆C的左、右焦点分别为F_1、F_2，点P在椭圆上运动，证明：$|PF_1|\cdot|PF_2|+\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$为定值，并求出该定值；

(2)对于给定的正整数n，经过点$(n,0)$的动直线和椭圆C交于A、B两点，O为坐标原点，设$\triangle AOB$面积的最大值为S_n．

（i）求S_{2025}；

（ii）证明：$\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{S_1^2}+\dfrac{1}{S_2^2}+\dfrac{1}{S_3^2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{10}^2}<\dfrac{5}{3}$．

22．已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax$（e是自然对数的底数）．

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若$g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)-a\ln x+f(x)$有两个零点分别为$x_1,x_2$．

①求实数a的取值范围；

②求证：$x_1x_2>\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^{x_1+x_2}}$.

23．已知函数$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}-ax$.

(1)若$f\left(x\right)\le -1$，求实数a的取值范围；

(2)若$f\left(x\right)$有 2 个不同的零点$x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，求证：$2x_1^2+3x_2^2>\frac{12}{5a}$.

24．已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-\ln a}-\sin x$，

(1)当$a=\mathrm{e}$时，求$y=f\left(x\right)$在$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程；

(2)若$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)\ge 0$恒成立，求$a$的范围；

(3)若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 内有两个不同零点 x_1、x_2，求证：$\dfrac{\pi}{2}<x_1+x_2<\pi$.

25．若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 $x_1,x_2\left(a<x_1<x_2<b\right)$，使得 $f'\left(x_1\right)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$，$f'\left(x_2\right)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$，则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的“双中值函数”，其中 x_1,x_2 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的中值点.

(1)判断函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是否是 $[-1,3]$ 上的“双中值函数”，并说明理由；

(2)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x\ln x-ax$，存在 $m>n>0$，使得 $f(m)=f(n)$，且 $f(x)$ 是 $[n,m]$ 上的“双中值函数”，x_1,x_2 是 $f(x)$ 在 $[n,m]$ 上的中值点.

（i）求 a 的取值范围；

（ii）证明：$x_1+x_2>2$.

26．已知函数 $f\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}+a\sin x$.

(1)当 $a=0$ 时，求证： $\dfrac{f\left(x\right)}{x}>x+1$ ；

(2)若 $f\left(x\right)>0$ 对于 $x\in\left(0,\pi\right)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3)若存在 $x_1,x_2\in\left(0,\pi\right)$ ，使得 $f\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)=0$ ，求证： $x_1<2x_2$.

27．已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x-ax^2-2x$.

(1)讨论导函数 $f'\left(x\right)$ 的零点个数情况；

(2)若 $f\left(x\right)$ 有两个不同极值点 x_1 、 x_2 .当 $x_1>4x_2$ 时，证明： $x_1x_2^2>16\mathrm{e}^3$.

28．已知函数 $f\left(x\right)=\left(2\mathrm{e}-x\right)\ln x$，其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数．

(1)讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2)若 $x_1,x_2\in\left(0,1\right)$，且 $x_2\ln x_1-x_1\ln x_2=2\mathrm{e}x_1x_2\left(\ln x_1-\ln x_2\right)$，证明：$2\mathrm{e}<\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<2\mathrm{e}+1$．

29．（1）我们学过组合恒等式 $\mathrm{C}_{n+1}^{m}=\mathrm{C}_{n}^{m}+\mathrm{C}_{n}^{m-1}$，实际上可以理解为 $\mathrm{C}_{n+1}^{m}=\mathrm{C}_{n}^{m}\mathrm{C}_{1}^{0}+\mathrm{C}_{n}^{m-1}\mathrm{C}_{1}^{1}$，请你利用这个观点快速求解：$\mathrm{C}_{10}^{0}\mathrm{C}_{5}^{5}+\mathrm{C}_{10}^{1}\mathrm{C}_{5}^{4}+\mathrm{C}_{10}^{2}\mathrm{C}_{5}^{3}+\mathrm{C}_{10}^{3}\mathrm{C}_{5}^{2}+\mathrm{C}_{10}^{4}\mathrm{C}_{5}^{1}+\mathrm{C}_{10}^{5}\mathrm{C}_{5}^{0}$．（计算结果用组合数表示）

（2）（i）求证：$\dfrac{1}{n}\mathrm{C}_{n}^{k}=\dfrac{1}{k}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$；

（ii）求值：$\sum\limits_{n=0}^{1012}\dfrac{(-1)^n}{2025-n}\mathrm{C}_{2025-n}^{n}$．

30．定义：对一个棱锥的各个顶点染色，若每一条棱的两个端点均不同色，则称之为“多彩棱锥”.若用y（$y\geq 4$）种颜色给某x（$x\geq 3$）棱锥染色，出现“多彩棱锥”的数量记作$N\left(x,y\right)$.

(1)当$x=4$，$y=6$时，试求$N\left(4,6\right)$的值；

(2)当$x=5$，$y=6$时，试求$N\left(5,6\right)$的值；

(3)结合前两问的解题思路，对任意的正整数x（$x\geq 3$）y（$y\geq 4$），请写出$N\left(x,y\right)$的运算公式，并证明.

《极值点偏移, 排列组合, 解析几何, 二项式定理与数列不等式》参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
答案	C	B	D	D	D	ACD	AC	ACD	BD	

1．C

【来源】皖豫名校联盟2024-2025学年高二下学期4月期中考试数学试题

【分析】先求出将这20个小球随机分为两组放入甲，乙两个盒子中的方法数，再假设1号在甲盒中，推出编号从1到7的小球，13号小球在甲盒中，情况数为$C_4^2=6$，甲盒与乙盒互换，同样有6种情况，共有12种满足要求，从而计算出概率.

【详解】将这20个小球随机分为两组放入甲，乙两个盒子中，共有C_{20}^{10}种方法，

假设1号在甲盒中，则甲盒中小球的最大编号为13，故20号小球在乙盒中，

乙盒中小球最小编号为8，从而编号从1到7的小球均在甲盒中，

9,10,11,12号小球有任意2个在甲盒中，满足要求的情况数为$C_4^2=6$，

将甲盒与乙盒互换，同样有6种情况，综上，共有$6+6=12$种，满足要求，

所以“$b-a=d-c=12$”的概率为$\dfrac{12}{C_{20}^{10}}$.

故选：C

2．B

【来源】2025届浙江省强基联盟高三三模数学试题

【分析】把左称记为-1，右称记为$+1$，要达到$x=6$处，记10次运动为一个有序数组，满足首次和为6的所有可能，这里组合数来确定所有可能性，同时再研究没有返回原点的所有可能性，最后利用古典概型求解即可.

【详解】设第i次向右运动赋值为$x_i=1$，第i次向左运动赋值为$x_i=-1$.

则10次运动路径可以表示为有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_{10})$，其中$x_i\in\{-1,1\}$，$i=1,2,\cdots,10$.

记10次运动后首次到达$x=6$处的路径为$(y_1,y_2,\cdots,y_{10})$，

则$\forall 1\le i\le 9$，$\sum\limits_{k=1}^{i}y_k\le 5$且$\sum\limits_{k=1}^{10}y_k=6$，可得$y_{10}=1$且$\sum\limits_{k=1}^{9}y_k=5$，

而$\sum\limits_{k=1}^{8}y_k\le 5$故$y_9=1$，$\sum\limits_{k=1}^{8}y_k=4$.由$\begin{cases}\sum\limits_{7}^{k=1}y_k\le 5,\\ \sum\limits_{6}^{k=1}y_k\le 5,\end{cases}$得$y_6$，$y_7$不可能全为－1，

而$\forall 1\le i\le 5$，$\sum_{k=1}^{i} y_k \le 5$恒成立，

因此$\begin{cases} y_i\text{中有且仅有两个}-1, \\ y_9=y_{10}=1, \\ y_7,y_8\text{不同时为}-1, \end{cases}$ 共有$C_8^2-1=27$种不同路径.

记 10 次运动后首次到达$x=6$处且过程中没有重返原点的路径为$(z_1,z_2,\cdots,z_{10})$，

同理可得$\begin{cases} z_i\text{中有且仅有两个}-1, \\ z_1=z_2=z_9=z_{10}=1, \\ z_3,z_4\text{不同时为}-1, \\ z_7,z_8\text{不同时为}-1, \end{cases}$ 共有$C_6^2-2=13$种不同路径.

所以题中所求概率为$\dfrac{13}{27}$，

故选:B.

【点睛】方法点睛：把运动问题转化为有序数组，再根据有序数组的和来求解各种可能性，从而利用古典概型来求概率即可.

3．D

【来源】广东省广州市八区 2023-2024 学年高二下学期期末教学质量检测数学试卷

【分析】根据题意棋子在点A处，可得三次骰子点数之和为8或16，再利用列举法以及古典概型的概率公式计算可得.

【详解】举出在点数中能够使得三次数字和为8或16的有：

$(1,2,5),(1,3,4),(1,1,6),(2,2,4),(2,3,3)$，$(4,6,6),(5,5,6)$，共有 7 种组合，

前 2 种组合$(1,2,5),(1,3,4)$每种情况可以排列出$A_3^3=6$种结果，共有$2A_3^3=2\times 6=12$种结果；

后 5 种组合各有 3 种结果，共有$5\times 3=15$种结果，

由分类加法计数原理知，共有$12+15=27$种结果；

抛3次骰子共有$6\times 6\times 6=216$种结果，

故抛掷三次骰子后棋子恰好又回到点A处的概率$P=\dfrac{27}{216}=\dfrac{1}{8}$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题关键是分析出三次骰子点数之和为8或16，列出所有可能得组合，在分析相应的排列数，最后由古典概型的概率公式计算.

4．D

【来源】江苏省镇江中学 2023-2024 学年高二下学期期末监测数学试卷

【分析】由排列数、组合数的运算性质计算求解即可.

【详解】$\frac{C_{25}^{0}}{1\times 2}+\frac{C_{25}^{1}}{2\times 3}+\frac{C_{25}^{2}}{3\times 4}+\cdots+\frac{C_{25}^{24}}{25\times 26}+\frac{C_{25}^{25}}{26\times 27}$

$=\frac{A_{25}^{0}}{2!}+\frac{A_{25}^{1}}{3!}+\frac{A_{25}^{2}}{4!}+\cdots+\frac{A_{25}^{24}}{26!}+\frac{A_{25}^{25}}{27!}$,

$=\frac{A_{27}^{25}A_{25}^{0}}{27!}+\frac{A_{27}^{24}A_{25}^{1}}{27!}+\frac{A_{27}^{23}A_{25}^{2}}{27!}+\cdots+\frac{A_{27}^{1}A_{25}^{24}}{27!}+\frac{A_{25}^{25}}{27!}$,

$=\frac{C_{27}^{25}A_{25}^{25}}{27!}+\frac{C_{27}^{24}A_{25}^{25}}{27!}+\frac{C_{27}^{23}A_{25}^{25}}{27!}+\cdots+\frac{C_{27}^{1}A_{25}^{25}}{27!}+\frac{C_{27}^{0}A_{25}^{25}}{27!}$,

$=\frac{C_{27}^{25}}{26\times 27}+\frac{C_{27}^{24}}{26\times 27}+\frac{C_{27}^{23}}{26\times 27}+\cdots+\frac{C_{27}^{1}}{26\times 27}+\frac{C_{27}^{0}}{26\times 27}$,

$=\frac{C_{27}^{27}+C_{27}^{26}+C_{27}^{25}+C_{27}^{24}+C_{27}^{23}+\cdots+C_{27}^{1}+C_{27}^{0}-28}{26\times 27}$,

$=\frac{2^{27}-28}{26\times 27}=\frac{2^{27}-28}{702}$,

故选：D

【点睛】关键点睛：本题解题的关键是利用排列数和组合数性质将$\frac{C_{25}^{n}}{n\times(n+1)}$依次巧妙变形

得$\frac{A_{25}^{n}}{(n+1)!}=\frac{A_{27}^{25-n}A_{25}^{n}}{27!}=\frac{C_{27}^{25-n}A_{25}^{25}}{27!}$，然后根据此式依次变形计算即可求解.

5．D

【来源】江西省景德镇一中 2024-2025 学年高二上学期期中考试数学试题（20 班）

【分析】可以把问题看做 10 个绳头平均分成 5 组，按平均分组问题求总的基本事件，再求恰好能围成一个圆的基本事件数，结合古典概型计算.

【详解】10 个绳头，每个绳头只打一次结，且每个结仅含两个绳头，所有的打结方式有：

$\frac{C_{10}^{2}C_{8}^{2}C_{6}^{2}C_{4}^{2}C_{2}^{2}}{A_{5}^{5}}=945$种.

其中恰好能围成一个圈的打结方式有：$C_{8}^{1}C_{6}^{1}C_{4}^{1}C_{2}^{1}=384$种.

所以 5 根绳子恰好能围成一个圈的概率为：$P=\frac{384}{945}=\frac{128}{315}$.

故选：D

【点睛】方法点睛：（1）10 个绳头打结，按要求，每次打结都减少 2 个绳头，所以可以把问题看成平均分组来解决.

（2）恰好围成一个圆时，先选 1 根绳子，不能两端打结，只能从其余的 8 个绳头选 1 个打结，完成后，这段绳子不能两端打结，再从其余的 6 个绳头选 1 个…，最后这段绳子两端打

结.

6．ACD

【来源】安徽省鼎尖联考2024-2025学年高二下学期4月月考数学试题

【分析】根据二项式系数的概念可判断AB的真假；根据二项式系数的性质结合等比数列的求和公式可判断CD的真假.

【详解】对A：因为$a_{(20,19)}=C_{19}^{18}=19$，故A正确；

对B：因为$a_{(n,3)}=C_{n-1}^{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\neq\frac{n(n+1)}{2}$，故B错误；

对C：因为$S_n=2^{n-1}$，所以$b_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

所以数列$\{b_n\}$的前n项和为：

$(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n=2^{n+1}-2-n$，故C正确；

对D：当$n=11$，$m=3$时，$\sum_{i=1}^{10}S_i+\sum_{j=1}^{3}a_{(11,3)}=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^9)+(C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2)$

$=2^{10}-1+56=1079$，故D正确.

故选：ACD

7．AC

【来源】黑龙江省齐齐哈尔市2024-2025学年高三下学期第三次模拟考试数学试题

【分析】将数列数列2、3、3、4、6、4、5、10、10、5、$\cdots$变成数阵，确定数阵第$n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$行有$n$个数，从左向右分别为$\mathbf{C}_n^1,\mathbf{C}_n^2,\cdots,\mathbf{C}_n^{n-1}$.对于A，确定$a_{12},a_{14}$分别在该数阵第5行的第2个和第4个即可判断；对于B，确定a_{15}位于该数阵第5行第5个数即可求和；对于C，确定第$\frac{n^2-n+2}{2}$项为第$n-1$行第1个即可；对于D，根据杨辉三角得到$S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$，利用裂项相消求和法求和即可.

【详解】将数列2、3、3、4、6、4、5、10、10、5、$\cdots$变成以下数阵：

第1行　　　　　　2

第2行　　　　3　　　3

第3行　　4　　　6　　　4

第4行　5　　10　　10　　5

…　　　　…

则该数阵第$n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$行有$n$个数，从左向右分别为$\mathrm{C}_{n+1}^{1},\mathrm{C}_{n+1}^{2},\cdots,\mathrm{C}_{n+1}^{n}$，

第n行最后一项位于原数列第$1+2+\cdots+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$项，

对于A，因为$10=\frac{4\times5}{2}<12<14<\frac{5\times6}{2}=15$，所以$a_{12},a_{14}$分别在该数阵第$5$行的第2个和第4个，故$a_{12}=\mathrm{C}_6^2=15,a_{14}=\mathrm{C}_6^4=15$，即$a_{12}=a_{14}$，选项A正确；

对于B，因为$\frac{5\times6}{2}=15$，所以a_{15}位于该数阵第5行第5个数，

由题意可知，该数阵第$n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$行所有数为“杨辉三角”数阵中第$n+2$行去掉首、尾两个$1$得到，而“杨辉三角”中第$n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$行所有数之和为$2^{n-1}$，

所以，该数阵第$n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$行所有数之和为$2^{n+1}-2$，

所以$S_{15}=T_{57}=\left(2^2-2\right)+\left(2^3-2\right)+\left(2^4-2\right)+\left(2^5-2\right)+\left(2^6-2\right)=114$，选项B错误；

对于C，因为$\frac{n^2-n+2}{2}=\frac{\left(n-1\right)n}{2}+1$，所以第$\frac{n^2-n+2}{2}$项为第$n$行第1个，即$\mathrm{C}_{n+1}^{1}=n+1$，选项C正确；

对于D，根据杨辉三角知，

$$S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$$，选项D错误.

故选：AC.

8．ACD

【来源】广东省清远市2023-2024学年高二下学期期末教学质量检测数学试题

【分析】对于A，根据分步乘法计数原理即可求解；对于B，根据分类加法计数原理即可求解；对于C，分析出六位数中可能有1个1，2个1，3个1三种情况，再根据分类加法计数原理即可求解；对于D，利用插空法和分步乘法计数原理，并减去0在首位的情况即可求解.

【详解】对于A，由题意，可选取的数字为：0，1，2，3，4，5，　且首位不能为0，

第一步，先排首位有$C_5^1=5$种不同排法，

第二步，再排其他5位数，有$A_5^5=120$种排法，

所以由分步乘法计数原理可知，

可以组成$C_5^1A_5^5=600$个没有重复数字的六位数，故A正确；

对于B，由题意，末位只能为：0，2，4，

当末位为0时，有$A_5^5=120$种排法；

当末位为2时，有$C_4^1A_4^4=96$种排法；

当末位为4时，有$C_4^1A_4^4=96$种排法，

所以由分类加法计数原理可知，

可以组成312个没有重复数字的六位偶数，故B错误；

对于C，由题意，六位数中可能有1个1，2个1，3个1三种情况.

当六位数中有1个1时，由A选项知有600种排法；

当六位数中有2个1时，分为有0与无0两种情况，

有0时，有$C_5^1C_5^2A_4^3=1200$种排法，

无0时，有$C_6^2A_4^4=360$种排法；

当六位数中有3个1时，分为有0与无0两种情况，

有0时，有$C_5^1C_5^3A_4^2=600$种排法，

无0时，有$C_6^3A_4^3=480$种排法，

所以由分类加法计数原理可知，

可以组成$600+1200+360+600+480=3240$个六位数，故C错误；

对于D，因为相邻两个数字不相同，即3个1不能相邻，故用插空法：

第一步，先排，除1外的5个数字，有$A_5^5=120$种排法，每种排法留出6个空位，

第二步，再将3个1插入6个空位，有$C_6^3=20$种排法，

所以由分步乘法计数原理可知，共有2400种排法，

又因为0不能在首位，而0在首位时，有$A_4^4C_5^3=240$种排法，

所以可以组成$2400-240=2160$个相邻两个数字不相同的八位数，故D正确.

故选：ACD.

【点睛】关键点点睛：本题考查有限制条件的排列、组合和不相邻问题，解题关键是遵循特殊位置优先排、不相邻问题插空排.

9．BD

【来源】湖北省武汉市2025届高中毕业生四月调研考试数学试卷

【分析】对于A，构造$s\left(x\right)=\sin\left(3x+2\right)-x+1$，利用导数讨论其在$\left[0,2\right]$上的零点个数为3后可判断其正误，对于B，利用导数可判断可判断其正误，对于C，结合零点存在定理可判断其正误，对于D，利用导数判断函数的单调性后可得其正误.

【详解】对于A，由消元法可得$\sin(x+2x+2)=2x-x-1$，所以$\sin(3x+2)=x-1$，

当$x>2$或$x<0$时，$x-1<-1$或$x-1>1$，故此时$\sin(3x+2)=x-1$无解，

下面考虑$\left[0,2\right]$上方程$\sin(3x+2)=x-1$的解的个数，

设$s\left(x\right)=\sin\left(3x+2\right)-x+1$，其中$s'\left(x\right)=3\cos\left(3x+2\right)-1$，

设$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$且$\cos\theta=\frac{1}{3}$，则$s'\left(x\right)=0$的解为$x_1=\frac{2\pi-\theta-2}{3}$，$x_2=\frac{2\pi+\theta-2}{3}$，

而$s'\left(0\right)=3\cos 2-1<0$，

故当$0<x<x_1$或$x_2<x<2$时，$s'\left(x\right)<0$，当$x_1<x<x_2$时，$s'\left(x\right)>0$，

故$s\left(x\right)$在$\left(0,x_1\right)$，$\left(x_2,2\right)$上为减函数，在$\left(x_1,x_2\right)$$\left(x_3,2\right)$上为增函数，

而$s\left(0\right)=\sin 2+1>0$，$x_2>1$且$s\left(1\right)=\sin 5<0$，

$s\left(\frac{9}{5}\right)=\sin\frac{37}{5}-\frac{4}{5}$，而$\frac{7\pi}{3}<\frac{37}{5}<\frac{5\pi}{2}$，故$\sin\frac{37}{5}-\frac{4}{5}>\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{5}>0$，

故$s\left(\frac{9}{5}\right)>0$，$s\left(2\right)=\sin 8-1<0$，

故$s\left(x\right)$在$\left[0,2\right]$有3个不同的实数根，故A错误；

对于B，由$\begin{cases}y=2x-1\\\sin\left(x+2y\right)=2x-y\end{cases}$可得$\sin(5x-2)=1$，故$x=\dfrac{2+\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5},k\in Z$，

对$\sin(x+2y)=2x-y$两边求关于x的导数，

则$\cos(x+2y)\left(1+2y'\right)=2-y'$，

故当 $x=\dfrac{2+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}{5},k\in Z$ 时，有 $\cos(5x-2)\left(1+2y'\right)=0=2-y'$，

当 $x=\dfrac{2+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}{5},k\in Z$， $y'=2$，而直线 $y=2x-1$ 的斜率为 2，

故曲线 C 与直线 $y=2x-1$ 相切，故 B 正确.

对于 C，取 $x=\pi$，考虑 $\sin(\pi+2y)=2\pi-y$ 即方程 $y-\sin 2y=2\pi$ 的解的个数，

设 $s\left(x\right)=x-\sin 2x-2\pi$，则 $s\left(5\right)=5-\sin 10-2\pi<0$， $s\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)=\dfrac{7\pi}{4}-2\pi+1=-\dfrac{\pi}{4}+1>0$，

$s\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}-1<0$， $s\left(3\pi\right)=\pi>0$，

故 $s\left(x\right)$ 至少有两个零点，故 $y-\sin 2y=2\pi$ 有两个不同的解，

故 y_0 不是关于 x_0 的函数，故 C 错误；

对于 D，$u\left(x\right)=\sin(x+2y)-2x+y$，则 $u'\left(x\right)=\cos(x+2y)-2<0$，

故 $u\left(x\right)$ 为 R 的减函数，且当 $x\to+\infty$ 时，$u\left(x\right)\to-\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$u\left(x\right)\to+\infty$，

故对任意 $y\in R$，方程 $\sin(x+2y)-2x+y=0$ 即 $\sin(x+2y)=2x-y$ 有唯一解，

故 x_0 是关于 y_0 的函数，故 D 正确；

故选：BD.

10．$\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

【来源】2025 届浙江省杭州第二中学高三模拟预测数学试题

【分析】设 $BD\cap CE=G$，$CG=3x$，$\angle CGD=\theta$，由三角形面积公式得到 $x^2=\dfrac{1}{18\sin\theta}$，再由余弦定理得到 $AC=2\sqrt{\dfrac{13-12\cos\theta}{18\sin\theta}}$，令 $z=\dfrac{13-12\cos\theta}{\sin\theta}$，得到 $13=12\cos\theta+z\sin\theta$，结合柯西不等式进而可求解.

【详解】设 $BD\cap CE=G$，

易知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

又 $BD=\dfrac{4}{3}CE$，由重心为中线三等分点可得：$BG=\dfrac{4}{3}CG$，

同时 $S_{\triangle BGC}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{3}$，

设 $CG=3x$，$\angle CGD=\theta$，

则 $BG=4x,GD=2x$，

则 $S_{\triangle BGC}=\frac{1}{2}(3x)(4x)\sin(\pi-\theta)=6x^2\sin\theta=\frac{1}{3}$，

所以 $x^2=\frac{1}{18\sin\theta}$，

由余弦定理可得：$AC=2CD=2\sqrt{4x^2+9x^2-12x^2\cos\theta}=2\sqrt{\frac{13-12\cos\theta}{18\sin\theta}}$，

令 $z=\frac{13-12\cos\theta}{\sin\theta}$，求其最小值即可，

上式化简可得：$13=12\cos\theta+z\sin\theta\le\sqrt{(12^2+z^2)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\sqrt{12^2+z^2}$，

也即 $z^2\ge 13^2-12^2=25$ 当且仅当 $5\sin\theta+12\cos\theta=13$ 时取得等号，

所以 $AC=2\sqrt{\frac{13-12\cos\theta}{18\sin\theta}}\ge 2\sqrt{\frac{5}{18}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{10}}{3}$

11. $r+1$ $\frac{n^2-n}{2(n+1)}$

【来源】福建省福州第十一中学 2024-2025 学年高二下学期期中考试数学试卷

【分析】由莱布尼茨三角形中数据规律可知 $x=r+1$，将 a_n 的表达式进行化简变形可得 $a_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，再由裂项相消求和计算可得结果.

【详解】根据莱布尼茨三角形可看出，下一行两个分数之和等于肩上的上一行的那个分数，故可得 $x=r+1$；

又 $a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{nC_{n-1}^{n-3}}+\frac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{nC_{n-1}^{2}}+\frac{1}{(n+1)C_n^{2}}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(n-1)C_{n-2}^{1}}-\frac{1}{nC_{n-1}^{1}}\right]+\left[\frac{1}{nC_{n-1}^{1}}-\frac{1}{(n+1)C_n^{1}}\right]$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)C_n^1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$；

所以 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{n}{2}-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{n}{2}-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{2}-\frac{n}{n+1}=\frac{n^2-n}{2(n+1)}$.

故答案为：$r+1$；$\frac{n^2-n}{2(n+1)}$

12．　72　6

【来源】河北省保定市部分地区2024-2025学年高三上学期9月模拟考试数学试卷

【分析】分析已知三点的数字分布，由题意分析出已知三点中两端的相邻点的可能得数字，这两个点的数字可能相同也可能不同，所以分类讨论出结果，再相加即得答案；第二个空即可从前面的答案中找到数字最小的情况再相加即可.

【详解】数字包含了：0、1、2、3、4、5、6、7、8、9共十个，

∵相邻两个顶点数字之和不能为5或7，

∴2和3不相邻，即三个点分布为3、1、2或2、1、3，

∵正六边形是对轴称图形，故上述两种情况相同，记一种结果，

由题意可知：

与2相邻的另一个点的数字可能是：0、1、2、4、6、7、8、9，

与3相邻的另一个点的数字可能是：0、1、3、5、6、7、8、9，

1)当这两个点所选数字相同时，共有$C_6^1=6$种取法，

此时，与剩余点相邻的数字相同，只需考虑2种不符合题意的数字，

∴最后一个点共有$C_8^1=8$种取法，

∴共计$C_6^1C_8^1=48$种不同的放置方法；

2)当这两个点所选数字不同时，则有$C_2^1C_2^1=4$种取法，

此时，与剩余点相邻的数字不同，即2、3；2、5；4、3；4、5不存在差为2的情况，

所以每种结果都需排除4个不符合题意的数字，

∴最后一个点共有$C_6^1=6$种取法，

∴共计$C_2^1C_2^1C_6^1=24$种不同的放置方法；

综上所述，共有$1\times\left(C_6^1C_8^1+C_2^1C_2^1C_6^1\right)=72$种不同的放置方法.

在所有符合上述要求的放置方法中，六个点上的数字分别为2、1、3、0、0、0时和最小，

∴最小值为：6

故答案为：①72 ；②6.

【点睛】思路点睛：本题的关键在于分析第四和第五个点相同与否会影响到第六个点的取值

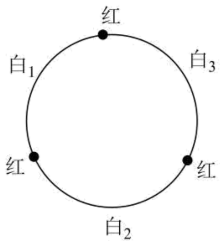
情况，所以在这里需要分类谈论.

13．$\frac{4}{85}$

【来源】广东省湛江市2024-2025学年高三上学期11月大联考数学试题

【分析】根据题意，由条件可得满足方程$x+y+z=33$的解共有C_{35}^{2}组，然后分$x=13$，$x=12$，$x=11$，$x=10,\cdots,x\le 6$，讨论，逐一计算，即可得到结果.

【详解】



如图，位于红球之间的白球个数记为白$_1=x$,白$_2=y$,白$_3=z,x,y,z\in\mathbf{N}$，

故满足方程$x+y+z=33$的解共有$C_{35}^{2}=595$组，

满足$x,y,z\le 13$时的解有以下情形：

①若$x=13$时，有$(13,13,7),(13,12,8),(13,11,9),(13,10,10)$，$(13,9,11),(13,8,12),(13,7,13)$，共7种；

同理，$y=13$时，有7种；$z=13$时，有7种，

$\therefore$去掉重复的共有18种，

②若$x=12$时，有$(12,12,9),(12,11,10),(12,10,11),(12,9,12)$，共4种；

同理，$y=12$时，有4种；$z=12$时，有4种，$\therefore$去掉重复的共有9种，

③若$x=11$，有$(11,11,11)$，此时只有1种，

④若$x=10$，有$(10,10,13)$，与前面重复，舍去，

⑤若$x=9$，有$(9,12,12),(9,11,13),(9,13,11)$，与前面重复，舍去，

⑥若$x=8$，有$(8,12,13),(8,13,12)$，与前面重复，舍去，

⑦若$x=7$，有$(7,13,13)$，与前面重复，舍去，

⑧若$x\le 6$，不存在，

$\therefore$共有$18+9+1=28$种，

$\therefore$连续排列的白球个数不超过 13 个的概率是 $\frac{28}{595}=\frac{4}{85}$.

故答案为：$\frac{4}{85}$.

【点睛】关键点睛：本题解答本题的关键在于将问题转化为方程 $x+y+z=33$ 的正整数解问题，然后分类讨论求解.

14．$\frac{1}{3}$

【来源】湖北省武汉市江汉区 2025 届高三 7 月新起点摸底考试数学试卷

【分析】先求出基本事件的总个数，设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是依次排列于这段弧上的小球号码，根据绝对值不等式可得 $|1-x_1|+|x_1-x_2|+\cdots+|x_k-5|$ 的最小值及取最小值时 $x_1,x_2,\cdots,x_k 1,5$ 的关系，再结合古典概型即可得出答案.

【详解】五个编号不同的小球放在圆周的五个等分点上，

每点放一个相当于五个不同元素在圆周上的一个圆形排列，共有 $\frac{A_5^5}{5}=4!$ 种放法，

考虑到翻转因素，故本质不同的放法有 $\frac{4!}{2}$ 种，

下求使圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和最小的放法数：

在圆周上，从 1 到 5 有优弧和劣弧两条路径，对其中任一条路径，

设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是依次排列于这段弧上的小球号码，

则 $|1-x_1|+|x_1-x_2|+\cdots+|x_k-5|\geq|(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_k-5)|=|1-5|=4$，

当且仅当 $1<x_1<x_2<\cdots<x_k<5$ 时，上式等号成立，即每段弧上的小球编号均为由 1 到 5 递增排列，

因此圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和的最小值为 $2\times4=8$，

由上，知当每段弧上的球号 $\{1,x_1,x_2,\cdots,x_k,5\}$ 确定之后，达到最小值的排序方案便唯一确定，

在 1，2，…，5 中，除 1 与 5 外，剩下三个球号 2，3，4，

将它们分为两个子集，元素较少的一个子集共有 $C_3^0+C_3^1=4$ 种情形，

每种情形对应着圆周上使圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为最小的唯一排法，即事件总数为 4 种，

故所求概率 $P=\frac{4}{\frac{4!}{2}}=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$

【点睛】关键点点睛：设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是依次排列于这段弧上的小球号码，根据绝对值不等式可得$\left|1-x_1\right|+\left|x_1-x_2\right|+\cdots+\left|x_k-5\right|$的最小值及取最小值时 $x_1,x_2,\cdots,x_k 1,5$ 的关系，是解决本题的关键.

15．$\left[6\sqrt{5}-2,+\infty\right)$

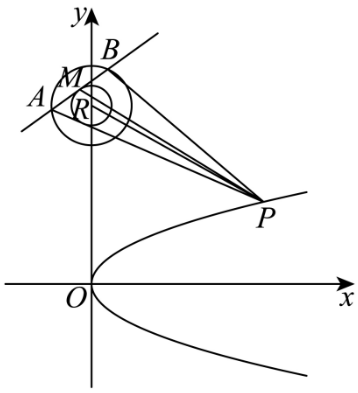
【来源】湖南省长沙市第一中学2025届高三下学期一模数学试题

【分析】设线段 AB 的中点为 M，设 $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$，则 Q 点在圆 $x^2+(y-6)^2=\frac{4}{9}$，根据$\left|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|\geq 3\left(\left|\overrightarrow{PR}\right|-\frac{2}{3}\right)$，进而计算可求得$\left|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$的取值范围.

【详解】设线段 AB 的中点为 M，根据圆的对称性可知点 M 在圆 $x^2+(y-9)^2=1$ 上，

设 $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$，则 Q 点在圆 $\frac{9}{4}x^2+\left(\frac{3}{2}y-9\right)^2=1$ 上，即圆 $x^2+(y-6)^2=\frac{4}{9}$，

圆心为 $R\left(0,6\right)$，半径为 $\frac{2}{3}$，



则$\left|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=\left|\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PM}\right|=3\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{PO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}\right|=3\left|\overrightarrow{PQ}\right|\geq 3\left(\left|\overrightarrow{PR}\right|-\frac{2}{3}\right)$，

当且仅当点 Q 在线段 PQ 上时，等号成立，

设 $P\left(x_0,y_0\right)$，则 $|PR|^2=x_0^2+\left(y_0-6\right)^2=\frac{y_0^4}{4}+y_0^2-12y_0+36$，

设 $f\left(y\right)=\frac{1}{4}y^4+y^2-12y+36$，则 $f'\left(y\right)=y^3+2y-12$，

注意到 $f'\left(2\right)=0$，故 $f(y)_{\min}=f\left(2\right)=20$，即 $\left|PR\right|\geq 2\sqrt{5}$，当且仅当 $P\left(2,2\right)$ 时等号成立，

故 $|\overrightarrow{PQ}|_{\min}=2\sqrt{5}-\frac{2}{3}$.因此$\left|\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$的取值范围是$\left[6\sqrt{5}-2,+\infty\right)$.

故答案为：$\left[6\sqrt{5}-2,+\infty\right)$.

16．(1)25

(2) $6+6\sqrt{3}$

(3) $\frac{737}{36}$

【来源】陕西省西安市西安工业大学附属中学2024-2025学年高一上学期第一次月考数学试卷

【分析】（1）利用常值代换法和基本不等式即可求得；

（2）利用“1”的妙用，将所求式整理后运用基本不等式求解即可；

（3）利用柯西不等式求得 a^2+2b^2 的最小值，再利用常值代换法求得 $\frac{8}{a}+\frac{1}{4b}$ 的最小值，且两式都在 $a=4b$ 时取等，故得所求式的最小值.

【详解】（1）$\because a,b>0,2a+b=1$，

（1）$\frac{2}{a}+\frac{9}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{9}{b}\right)(2a+b)=13+\frac{2b}{a}+\frac{18a}{b}\geq 13+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{18a}{b}}=25$，

当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{18a}{b}$，即 $a=\frac{1}{5},b=\frac{3}{5}$ 时，$\frac{2}{a}+\frac{9}{b}$ 的最小值为25.

（2）$\frac{2b+1}{a}+\frac{a+4}{b}=\frac{2b+2a+b}{a}+\frac{a+8a+4b}{b}=\frac{2a+3b}{a}+\frac{9a+4b}{b}$

$=6+\frac{3b}{a}+\frac{9a}{b}\geq 6+2\sqrt{\frac{3b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}=6+6\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{3b}{a}=\frac{9a}{b}$，

即 $a=2-\sqrt{3},b=2\sqrt{3}-3$ 时，$\frac{2b+1}{a}+\frac{a+4}{b}$ 的最小值是 $6+6\sqrt{3}$.

（3）由柯西不等式（下面提供证明）可知:$\left(4+\frac{1}{2}\right)\left(a^2+2b^2\right)\geq\left(2a+b\right)^2=1$，

即 $a^2+2b^2\geq\frac{2}{9}$,当且仅当 $2\sqrt{2}b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 时，即 $a=4b$ 时，等号成立.

又 $\frac{8}{a}+\frac{1}{4b}=(\frac{8}{a}+\frac{1}{4b})(2a+b)=16+\frac{1}{4}+\frac{8b}{a}+\frac{a}{2b}\geq\frac{65}{4}+2\sqrt{\frac{8b}{a}\cdot\frac{a}{2b}}=\frac{81}{4}$,

当且仅当 $\frac{8b}{a}=\frac{a}{2b}$ 时，即 $a=4b$ 时，等号成立.

故 $a^2+2b^2+\frac{8}{a}+\frac{1}{4b}\geq\frac{2}{9}+\frac{81}{4}=\frac{737}{36}$，

即 $a=\frac{4}{9},b=\frac{1}{9}$ 时，$a^2+2b^2+\frac{8}{a}+\frac{1}{4b}$ 的最小值是 $\frac{737}{36}$.

【附注】柯西不等式：$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq(ac+bd)^2$，当且仅当 $ad=bc$ 时，等号成立.

证明：由 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)$

$=a^2d^2-2abcd+b^2c^2=(ad-bc)^2\geq 0$，当且仅当$ad=bc$时，等号成立，故得证.

17．(1) $T_3=40x^2$ 或 $T_4=80x^3$；

(2)①393660；②15360

【来源】重庆市重点中学“大一联盟”2024-2025学年高二下学期期中考试数学试题

【分析】（1）根据二项展开式可知二项式系数最大的项为第三项或第四项，结合通项公式可得结果.

（2）①根据通项公式可求得m的值，通过求导可得结果.

②根据$\begin{cases}a_k\geq a_{k-1}\\ a_k\geq a_{k+1}\end{cases}$，解不等式组可得结果.

【详解】（1）当$m=2$时，$f(5,x)=\left(1+2x\right)^5$，二项式系数为$C_5^0,C_5^1,C_5^2,C_5^3,C_5^4,C_5^5$，其中最大值为$C_5^2,C_5^3$，

$\therefore f(5,x)$的展开式中二项式系数最大的项为第三项或第四项.

$\because T_3=C_5^2(2x)^2=40x^2$，$T_4=C_5^3(2x)^3=80x^3$，

$\therefore f(5,x)$的展开式中二项式系数最大的项为$T_3=40x^2$或$T_4=80x^3$.

（2）①由题意得，$f(10,x)=\left(\dfrac{2}{m}+mx\right)^{10}$，通项为

$T_{k+1}=C_{10}^k\left(\dfrac{2}{m}\right)^{10-k}\left(mx\right)^k=2^{10-k}\cdot m^{2k-10}\cdot C_{10}^kx^k$，

当$k=3$时，$T_4=2^7\cdot m^{-4}\cdot C_{10}^3x^3$，

$\because a_3=960$，$\therefore 2^7\cdot m^{-4}\cdot C_{10}^3=960$，解得$m=\pm 2$，

$\because m>0$，$\therefore m=2$，故$f(10,x)=\left(1+2x\right)^{10}$，

$\because f(10,x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，

$\therefore f'(10,x)=a_1+2a_2x+\cdots+10a_{10}x^9=20(1+2x)^9$，

令$x=1$，得$a_1+2a_2+\cdots+10a_{10}=20\left(1+2\right)^9=393660$（或$20\times 3^9$）.

②由①得，$f(10,x)$的通项为$T_{k+1}=2^{10-k}\cdot 2^{2k-10}\cdot C_{10}^kx^k=2^k\cdot C_{10}^kx^k$，

$\therefore a_k = 2^k \cdot C_{10}^k \left(0 \le k \le 10, k \in \mathbf{N}\right)$.

设 $a_k = 2^k \cdot C_{10}^k$ 为 $a_i \left(0 \le i \le 10, i \in \mathbf{N}\right)$ 中的最大值，

则 $\begin{cases} 2^k C_{10}^k \ge 2^{k-1} C_{10}^{k-1} \\ 2^k C_{10}^k \ge 2^{k+1} C_{10}^{k+1} \end{cases}$，故 $\begin{cases} 2(11-k) \ge k \\ k+1 \ge 2(10-k) \end{cases}$，解得 $\dfrac{19}{3} \le k \le \dfrac{22}{3}$，

$\because k \in \mathbf{N}$，$\therefore k = 7$，

$\therefore a_i$ 的最大值为 $a_7 = 2^7 \times C_{10}^7 = 15360$.

18．(1) $a_n = \left(n-1\right)!$

(2) 2^{n-1}

(3) $\dfrac{t\left(n-1\right)!}{n^t\left(n-t\right)!}$

【来源】广东省部分学校 2024-2025 学年高二下学期 4 月期中联考数学试题

【分析】（1）由题意得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = n$，结合累乘法可求得数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）由（1）可得 $b_n^k = C_{n-1}^{k-1}$，结合二项式定理可求得 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_n^k$；

（3）求出 T_n^k 的表达式，因为 n 值被固定，故其可视为常数，记作 N，计算出 T_n^1、T_n^n，当 $k \ge 2$ 时，设 T_n^k 最大，可得出 $\begin{cases} T_n^k \ge T_n^{k+1} \\ T_n^k \ge T_n^{k-1} \end{cases}$，求出 k 的范围，然后分析 $\left\{T_n^k\right\}$ 的单调性，可得出结果.

【详解】（1）由题意得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = n$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = n-1$，$\cdots$，$\dfrac{a_2}{a_1} = 1$，

故当 $n \ge 2$ 时，$a_n = a_1 \cdot \dfrac{a_2}{a_1} \cdot \dfrac{a_3}{a_2} \cdot \dfrac{a_4}{a_3} \cdot \cdots \cdot \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times \left(n-1\right) = \left(n-1\right)!$，

$a_1 = 1 = 0!$ 也满足 $a_n = \left(n-1\right)!$，故对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，$a_n = \left(n-1\right)!$.

（2）因为 $k \le n$，由题意可得 $b_n^k = \dfrac{a_n}{a_k a_{n+1-k}} = \dfrac{\left(n-1\right)!}{\left(k-1\right)!\left(n-k\right)!} = C_{n-1}^{k-1}$，

故 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_n^k = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}$，

又因为 $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1} = \left(1+1\right)^{n-1} = 2^{n-1}$，故 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_n^k = 2^{n-1}$.

（3）因为 $4n+1 = \left(2t+1\right)^2$，$t \in \mathbf{N}^*$，可得 $n \ge 2$，

由题意得$T_n^k=\dfrac{k\cdot b_{n+1}^{k+1}\cdot a_{k+1}}{n^{k+1}}=\dfrac{k\cdot \mathrm{C}_n^k\cdot k!}{n^{k+1}}=\dfrac{k\cdot n!\cdot k!}{n^{k+1}\cdot k!(n-k)!}=\dfrac{k(n-1)!}{n^k(n-k)!}$,

因为n值被固定，故其可视为常数，记作N，

当$k=1$时，$T_n^1=\dfrac{1}{n}$，当$k=n$时，$T_n^n=\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}$，

当$k\geq 2$时，要有T_n^k取得最大值，则有$\begin{cases}T_n^k\geq T_n^{k+1}\\T_n^k\geq T_n^{k-1}\end{cases}$，即$\dfrac{T_n^k}{T_n^{k+1}}\geq 1$，$\dfrac{T_n^k}{T_n^{k-1}}\geq 1$，

$$\frac{T_n^k}{T_n^{k-1}}=\frac{T_N^k}{T_N^{k-1}}=\frac{\dfrac{k\cdot(N-1)!}{N^k\cdot(N-k)!}}{\dfrac{(k-1)\cdot(N-1)!}{N^{k-1}\cdot(N-k+1)!}}=\frac{k(N-k+1)}{(k-1)N}\geq 1,$$

$$\frac{T_n^k}{T_n^{k+1}}=\frac{T_N^k}{T_N^{k+1}}=\frac{\dfrac{k\cdot(N-1)!}{N^k\cdot(N-k)!}}{\dfrac{(k+1)\cdot(N-1)!}{N^{k+1}\cdot(N-k-1)!}}=\frac{Nk}{(k+1)(N-k)}\geq 1,$$

当$n=k$时，由于$k\leq n$，不存在T_N^{k+1}，

故分母不可能为0，即$\begin{cases}-k^2+k+N\geq 0\\-k^2-k+N\leq 0\end{cases}$,

有$\Delta=\sqrt{1+4N}>1$，分析可得当$k\leq\dfrac{\sqrt{1+4N}+1}{2}$时，$T_n^k\geq T_n^{k-1}\geq\cdots\geq T_n^2$，

而$\dfrac{T_n^2}{T_n^1}=\dfrac{2(n-1)}{n}\geq 1$，

故在此之前数列一直递增，$k\geq\dfrac{\sqrt{1+4N}-1}{2}$时，$T_n^k\geq T_n^{k+1}\geq\cdots\geq T_n^{n-1}$，而

$\dfrac{T_n^{n-1}}{T_n^n}=n-1\geq 1$，

故在此之后数列一直递减，即$\dfrac{\sqrt{1+4N}-1}{2}\leq k\leq\dfrac{\sqrt{1+4N}+1}{2}$，

又题干中n满足$4n+1=(2t+1)^2$，$t\in\mathbf{N}^*$，故$t\leq k\leq t+1$，

因此，当$k=t$或$k=t+1$时，T_n^k取得最大值$\dfrac{t(n-1)!}{n^t(n-t)!}$.

19．(1) 0

(2)证明见解析

(3)证明见解析

【来源】四川省凉山州西昌市2024-2025学年高二下学期期中检测数学试题

【分析】（1）由$f'(x)=0$可求出切点的横坐标，即可得出切点的坐标，由此可求得实数m的值；

（2）利用导数求出$f(x)_{\min}=0$，即可证得结论成立；

（3）由（2）得出$0<\ln(x+1)<x$，结合不等式的基本性质得出$\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n}$，由此得出$a_n>2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，然后利用放缩法可证得结论成立.

【详解】（1）函数$f(x)=x-\ln(x+1)$的图象与$y=m$轴相切，

则$f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}=0$，得$x=0$，代入可得$f(0)=0$，

所以，切点坐标为$(0,m)$，所以$m=0$.

（2）由（1）知$f'(x)=\dfrac{x}{x+1}$，

则$f'(x)>0$，得$x>0$，$f'(x)<0$，得$-1<x<0$，

所以$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

则$f(x)_{\min}=f(0)=0$，所以，$f(x)\geq 0$得证.

（3）由（2）知，当$x>0$时，$0<\ln(x+1)<x$，所以，$\dfrac{1}{\ln(x+1)}>\dfrac{1}{x}$，

即当$n>0$时，$\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n}$，

当$n\geq 1$时，$n(n+1)\geq 2n>0$，所以，$\dfrac{1}{n+1}\geq\dfrac{1}{2n}\geq\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

则$\dfrac{1}{n}\geq 2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，$n\geq 1$，所以$\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n}\geq 2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，即$a_n>2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

累加得$S_n=\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}+\cdots+\dfrac{1}{\ln n}+\dfrac{1}{\ln(n+1)}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

所以$\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\cdots+\dfrac{1}{\ln n}+\dfrac{1}{\ln(n+1)}>2\left[\left(1\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\dfrac{2n}{n+1}$.

故对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>\dfrac{2n}{n+1}$.

20．(1) $y^2=4x$或$y=0(x\leq 0)$；

(2)证明见解析；

(3)16．

【来源】2025届江西省赣州市高三二模数学试题

【分析】（1）讨论M在y轴左侧或右侧，分别求出对应轨迹方程即可；

（2）由题设得$t=1$，$P_n(x_n,y_n),Q_n(x_{n+1},-y_{n+1})$，结合斜率求得$y_{n+1}-y_n=4$，根据等差数列的定义写出通项公式得$\frac{1}{x_n+y_n}=\frac{1}{4n^2-1}$，应用裂项相消法求$T_n$，即可证；

（3）由（2）得$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=(4,8n),\overrightarrow{P_nP_{n+2}}=(8,8(2n+1))$，再由$S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}|^2|\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|^2(1-\cos^2\angle P_{n+2}P_nP_{n+1})}$，结合向量模长、数量积的坐标表示化简求值即可.

【详解】（1）当M在y轴左侧时，M在x轴的非正半轴上，C的方程为$y=0(x\le 0)$；

当M在y轴右侧时，M的轨迹是以N为焦点，$x=-1$为准线的抛物线，方程为$y^2=4x$，

综上，C的方程为$y^2=4x$或$y=0(x\le 0)$；

（2）因为P_1在C上，所以$(t+1)^2=4t$，可得$t=1$，

依题意$P_n(x_n,y_n),Q_n(x_{n+1},-y_{n+1})$，则$k_{P_nQ_n}=\frac{-y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{-y_{n+1}-y_n}{\frac{y_{n+1}^2}{4}-\frac{y_n^2}{4}}=-\frac{4}{y_{n+1}-y_n}=-1$，

所以$y_{n+1}-y_n=4$，故数列$\{y_n\}$是首项为2，公差为4的等差数列，

所以$y_n=2+4(n-1)=4n-2$，则$x_n=\frac{y_n^2}{4}=(2n-1)^2$，

$\frac{1}{x_n+y_n}=\frac{1}{(2n-1)^2+4n-2}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

所以$T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$，

显然T_n关于$n\in\mathrm{N}^*$单调递减，则$\frac{1}{3}\le T_n<\frac{1}{2}$；

（3）由（2）得$P_n(4n-2,(2n-1)^2),P_{n+1}(4n+2,(2n+1)^2),P_{n+2}(4n+6,(2n+3)^2)$，

所以$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=(4,8n),\overrightarrow{P_nP_{n+2}}=(8,8(2n+1))$，而$S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}||\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|\sin\angle P_{n+2}P_nP_{n+1}$，

所以$S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}|^2|\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|^2\sin^2\angle P_{n+2}P_nP_{n+1}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}|^2|\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|^2(1-\cos^2\angle P_{n+2}P_nP_{n+1})}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{P_nP_{n+1}}||\overrightarrow{P_nP_{n+2}}|)^2-(\overrightarrow{P_nP_{n+1}}\cdot\overrightarrow{P_nP_{n+2}})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(16+64n^2)[64+64(2n+1)^2]-[32+64n(2n+1)]^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{16\times 64\times[(2n+1)^2-4n(2n+1)+4n^2]}$

$=16$.

21．(1)证明见解析，定值为2

(2)（i）$\frac{15}{2}$；（ii）证明见解析

【来源】重庆市第一中学校2025届高三下学期5月高考适应性月考卷数学试题

【分析】（1）$|PF_1|=p$，$|PF_2|=q$，$\angle F_1PF_2=\theta$，则$p+q=2a=30$，对点P是否在x轴上进行分类讨论，结合椭圆定义、平面向量数量积的定义计算即可证得结论成立；

（2）分析可知，直线AB不与x轴重合，设直线AB的方程为$x=my+n$，设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，将该直线方程与椭圆方程联立，列出韦达定理，利用三角形的面积公式可得出$S_{\triangle AOB}$关于n的表达式，结合二次函数的基本性质可求出S_n的表达式.

（i）由S_n的表达式可得出S_{2025}的值；（ii）分析得出$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n^2}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{225-n^2}$，结合放缩法可证得结论成立.

【详解】（1）设$|PF_1|=p$，$|PF_2|=q$，$\angle F_1PF_2=\theta$，则$p+q=2a=30$，

当点P不在x轴上时，由余弦定理可得

$$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=pq\cos\theta=pq\cdot\frac{p^2+q^2-(2c)^2}{2pq}=\frac{p^2+q^2-4c^2}{2},$$

此时$|PF_1|\cdot|PF_2|+\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=pq+\frac{p^2+q^2-4c^2}{2}=\frac{(p+q)^2-4c^2}{2}=\frac{4a^2-4c^2}{2}=2b^2$；

当点P在x轴上时，由对称性，不妨设点P为椭圆的右顶点，

此时$|PF_1|\cdot|PF_2|+\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(a+c)(a-c)+(a+c)(a-c)\cos 0=2b^2$.

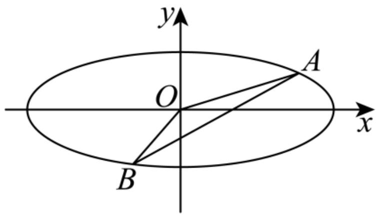
综上所述，$|PF_1|\cdot|PF_2|+\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2b^2=2$为定值.

（2）若直线AB与x轴重合，则直线AB经过原点O，此时，A、B、O不能构成三角形，不合乎题意.

设直线AB的方程为$x=my+n$，设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my+n\\ \dfrac{x^2}{225}+y^2=1\end{cases}$可得$\left(m^2+225\right)y^2+2mny+\left(n^2-225\right)=0$，

则$\Delta=4mn^2-4\left(m^2+225\right)\left(n^2-225\right)>0$，可得$m^2+225>n^2$，



由韦达定理可得$y_1+y_2=-\dfrac{2mn}{m^2+225}$，$y_1y_2=\dfrac{n^2-225}{m^2+225}$，

原点O到直线AB的距离为$d=\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$，

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\frac{|n|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{2}|n|\cdot|y_1-y_2|$$

$$=\frac{1}{2}|n|\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{2mn}{m^2+225}\right)^2-\frac{4\left(n^2-225\right)}{m^2+225}}\cdot|n|=\frac{15n\sqrt{m^2-n^2+225}}{m^2+225}，$$

设$t^2=m^2+225$，则$S_{\triangle AOB}=\dfrac{15n\sqrt{t^2-n^2}}{t^2}=15n\sqrt{-\dfrac{n^2}{t^4}+\dfrac{1}{t^2}}$，

设$u=\dfrac{1}{t^2}$，则$S_{\triangle AOB}=15n\sqrt{-n^2u^2+u}$，

因为二次函数$y=-n^2u^2+u$的图象开口向下，对称轴为直线$u=\dfrac{1}{2n^2}$，

故$S_{\triangle AOB}\le 15n\sqrt{-n^2\cdot\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)^2+\dfrac{1}{2n^2}}=\dfrac{15}{2}$，

当且仅当$u=\dfrac{1}{2n^2}$时，即当$m^2+225=2n^2$时，等号成立，

由于$m^2+225\ge 225$且$m^2+225>n^2$，

所以$2n^2\ge 225$且$2n^2>n^2$，只需$2n^2\ge 225$，所以$n\ge 11$且$n\in\mathbf{N}^*$，

此时$S_{\triangle AOB}$可取到最大值$\dfrac{15}{2}$，

当$n\in\{1,2,3,\cdots,10\}$时，此时$n^2<\dfrac{225}{2}$，此时$m^2+225-n^2>0$恒成立，即$\Delta>0$恒成立，

此时，只需满足$t^2=m^2+225\ge 225$即可，即$u=\dfrac{1}{t^2}\in\left(0,\dfrac{1}{225}\right]$，

所以，当$u=\frac{1}{225}$时，$S_{\triangle AOB}$的最大值为$\frac{n\sqrt{225-n^2}}{15}$，

综上所述，$S_n=\begin{cases}\frac{15}{2},n\geq 11,n\in\mathbf{N}^*\\ \frac{n\sqrt{225-n^2}}{15},n\leq 10,n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$.

（i）因为$2025>11$，故$S_{2025}=\frac{15}{2}$；

（ii）当$n\leq 10$且$n\in\mathbf{N}^*$时，$S_n=\frac{n\sqrt{225-n^2}}{15}$，则$\frac{1}{S_n^2}=\frac{225}{n^2\left(225-n^2\right)}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{225-n^2}$，

$\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2}>1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{10\times 11}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{5}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{11}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{11}=\frac{3}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{11}=\frac{3}{2}-\frac{1}{132}$，

$\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{225-n^2}>\frac{10}{225-1^2}=\frac{10}{224}=\frac{5}{112}>\frac{1}{132}$，

所以，$\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n^2}=\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{225-n^2}>\frac{3}{2}$，

由于$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}$，

所以$\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2}<1+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{19}-\frac{2}{21}\right)=\frac{5}{3}-\frac{2}{21}$，

$\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{225-n^2}<\frac{10}{225-10^2}=\frac{10}{125}=\frac{2}{25}<\frac{2}{21}$，

所以$\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n^2}=\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{225-n^2}<\frac{5}{3}$.

综上所述，$\frac{3}{2}<\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}+\cdots+\frac{1}{S_{10}^2}<\frac{5}{3}$.

22．(1)答案见解析

(2)①$(\mathrm{e},+\infty)$；②证明见解析

【来源】第五章　导数与偏移　专题四　零点偏移　微点 3　零点偏移（三）

【分析】（1）根据题意，求导即可得到结果；

（2）①根据题意，将问题转化为$g\left(x\right)=x\mathrm{e}^x-a\left(\ln x+x\right)=x\mathrm{e}^x-a\ln\left(x\mathrm{e}^x\right)\left(x>0\right)$有两个零点，然后利用导数，分类讨论即可得到$a$的取值范围；

②根据题意，将问题转化为$\ln\left(x_1\mathrm{e}^{x_1}\right)+\ln\left(x_2\mathrm{e}^{x_2}\right)>2$，再由①中的结论，即只需证$\ln t_1+\ln t_2>2$，然后构造函数求导即可得到证明.

【详解】（1）由题意可得，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

当$a \le 0$时，$f'(x) = e^x - a > 0$，$f(x)$在R上单调递增；

当$a > 0$时，由$f'(x) = e^x - a > 0$解得$x > \ln a$，由$f'(x) = e^x - a < 0$解得$x < \ln a$，

所以，$f(x)$在$(-\infty, \ln a)$上单调递减，在$(\ln a, +\infty)$上单调递增.

综上，当$a \le 0$时，$f(x)$在R上单调递增；

当$a > 0$时，$f(x)$在$(-\infty, \ln a)$上单调递减，在$(\ln a, +\infty)$上单调递增.

（2）①等价于$g(x) = xe^x - a(\ln x + x) = xe^x - a\ln(xe^x)(x > 0)$有两个零点，

令$t = xe^x$，则$t' = (x+1)e^x > 0$，在$x > 0$时恒成立，$\therefore t = xe^x$在$x > 0$时单调递增，

$\therefore g(x) = xe^x - a\ln(xe^x)$有两个零点，等价于$g(t) = t - a\ln t$有两个零点.

$\because g'(t) = 1 - \frac{a}{t} = \frac{t-a}{t}$，$\therefore$当$a \le 0$时，$g'(t) > 0$，$g(t)$单调递增，不可能有两个零点；

当$a > 0$时，令$g'(t) > 0$，得$t > a$，$g(t)$单调递增，

令$g'(t) < 0$，得$0 < t < a$，$g(t)$单调递减，$\therefore g(t)_{\min} = g(a) = a - a\ln a$，

若$g(a) > 0$，得$0 < a < e$，此时$g(t) > 0$恒成立，没有零点；

若$g(a) = 0$，得$a = e$，此时$g(t)$有一个零点；

若$g(a) < 0$，得$a > e$，$\because g(1) = 1 > 0$，$g(e) = e - a < 0$，

记$m(x) = e^x - x^2, x > e$，则$m'(x) = e^x - 2x$，

记$n(x) = e^x - 2x, x > e$，则$n'(x) = e^x - 2 > 0$，

所以$n(x)$在$(e, +\infty)$上单调递增，所以$n(x) > n(e) = e^e - 2e > 0$，即$m'(x) > 0$，

故$m(x)$在$(e, +\infty)$上单调递增，所以$m(a) = e^a - a^2 > m(e) = e^e - e^2 > 0$，

即$g(e^a) = e^a - a^2 > 0$，

$\therefore g(t)$在$(1, e)$，(e, e^a)上各存在一个零点，符合题意，

综上，a的取值范围为$(e, +\infty)$.

②因为$x_1x_2 > \frac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$，不等式两边同时取对数化简可得$\ln x_1 + \ln x_2 > 2 - (x_1 + x_2)$，

要证$\ln x_1 + \ln x_2 > 2 - (x_1 + x_2)$即证：$x_1 + \ln x_1 + x_2 + \ln x_2 > 2$，

即证$\ln\left(x_1e^{x_1}\right)+\ln\left(x_2e^{x_2}\right)>2$，由（2）中①知$t_1=x_1e^{x_1}$，$t_2=x_2e^{x_2}$，$\therefore$只需证$\ln t_1+\ln t_2>2$.

$\because a\ln t_1=t_1$，$a\ln t_2=t_2$，$\therefore a\left(\ln t_2-\ln t_1\right)=t_2-t_1$，$a\left(\ln t_2+\ln t_1\right)=t_2+t_1$，

$\therefore \ln t_2+\ln t_1=\dfrac{t_2+t_1}{t_2-t_1}\left(\ln t_2-\ln t_1\right)=\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}$，只需证$\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}>2$.

设$0<t_1<t_2$，令$m=\dfrac{t_2}{t_1}$，则$m>1$，$\therefore$只需证 $\ln m>2\dfrac{m-1}{m+1}$，即证 $\ln m+\dfrac{4}{m+1}-2>0$，

令$h(m)=\ln m+\dfrac{4}{m+1}-2$，$m>1$，则 $h'(m)=\dfrac{1}{m}-\dfrac{4}{(m+1)^2}=\dfrac{(m-1)^2}{m(m+1)^2}>0$，$h(m)>h(1)=0$，

即当$m>1$时，$\ln m+\dfrac{4}{1+1}-2>0$ 成立.$\therefore\ln t_1+\ln t_2>2$，即$\ln x_1+\ln x_2>2-(x_1+x_2)$.

【点睛】关键点睛：第 2 问的第①小问关键在于将$g(x)$变形，结合$t=xe^x$的单调性，将问题转化为$g(t)=t-a\ln t$有两个零点，然后利用导数讨论单调性，结合零点存在性定理即可求得a的取值范围.第②小问关键在于取对数转化目标不等式，再通过换元将二元问题转化为一元问题即可得证.

23．(1)$[1,+\infty)$

(2)证明见解析

【来源】专题 5 极值点偏移问题-【勤径学升】2024-2025 学年高中数学选择性必修第二册同步练测（人教版 2019）

【分析】（1）求解函数定义域，参变分离得到$a\geq\dfrac{\ln x+x}{x^2}$，构造$h(x)=\dfrac{\ln x+x}{x^2}$，利用导函数得到其单调性，极值和最值情况，得到$a\geq h(1)=1$；

（2）转化为$a=\dfrac{\ln x}{x^2}$有 2 个不同的实数根，构造$F(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，得到其单调性，得到$1<x_1<\sqrt{e}<x_2$，且$a\in\left(0,\dfrac{1}{2e}\right)$，求出$\dfrac{x_2^2}{x_1^2}=\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}$，换元后即证$\ln t-\dfrac{12\left(t^2-1\right)}{5\left(3t^2+2\right)}>0$，构造$G(t)=\ln t-\dfrac{12\left(t^2-1\right)}{5\left(3t^2+2\right)}(t>1)$，求导后得到$G(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$G(t)>G(1)=0$，得到证明.

【详解】（1）因为函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，所以$f(x)\leq-1$成立，等价于$a\geq\dfrac{\ln x+x}{x^2}$成

立.

令$h\left(x\right)=\frac{\ln x+x}{x^2}$，则$h'\left(x\right)=\frac{1-x-2\ln x}{x^3}$，

令$g\left(x\right)=1-x-2\ln x$，则$g'\left(x\right)=-1-\frac{2}{x}<0$，所以$g\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$内单调递减，

又因为$g\left(1\right)=0$，所以当$x\in\left(0,1\right)$时，$h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$单调递增；当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，

$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$单调递减，

所以$y=h\left(x\right)$在$x=1$处取极大值也是最大值.

因此$a\geq h\left(1\right)=1$，即实数a的取值范围为$\left[1,+\infty\right)$.

（2）$f\left(x\right)$有 2 个不同的零点等价于$a=\frac{\ln x}{x^2}$有 2 个不同的实数根.

令$F\left(x\right)=\frac{\ln x}{x^2}$，则$F'\left(x\right)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，当$F'\left(x\right)=0$时，解得$x=\sqrt{\mathrm{e}}$.

所以当$x\in\left(0,\sqrt{\mathrm{e}}\right)$时，$F'\left(x\right)>0$，$F\left(x\right)$单调递增，

当$x\in\left(\sqrt{\mathrm{e}},+\infty\right)$时，$F'\left(x\right)<0$，$F\left(x\right)$单调递减，

所以$y=F\left(x\right)$在$x=\sqrt{\mathrm{e}}$处取极大值为$F\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

又因为$F\left(1\right)=0$，当$x\in\left(0,1\right)$时，$F\left(x\right)<0$，当$x>1$时，$F\left(x\right)>0$.

且$x\to+\infty$时，$F\left(x\right)\to 0$.

所以$1<x_1<\sqrt{\mathrm{e}}<x_2$，且$a\in\left(0,\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$.

因为x_1,x_2是方程$a=\frac{\ln x}{x^2}$的 2 个不同实数根，即$\begin{cases}\ln x_1=ax_1^2\\ \ln x_2=ax_2^2\end{cases}$.

将两式相除得$\frac{x_2^2}{x_1^2}=\frac{\ln x_2}{\ln x_1}$，

令$t=\frac{x_2}{x_1}$，则$t>1$，$t^2=\frac{\ln\left(x_1t\right)}{\ln x_1}$，变形得$\ln x_1=\frac{\ln t}{t^2-1}$，$\ln x_2=\frac{t^2\ln t}{t^2-1}$.

又因为$x_1^2=\frac{\ln x_1}{a}$，$x_2^2=\frac{\ln x_2}{a}$，因此要证$2x_1^2+3x_2^2>\frac{12}{5a}$，只需证$\frac{2\ln x_1}{a}+\frac{3\ln x_2}{a}>\frac{12}{5a}$.

因为$a>0$，所以只需证$2\ln x_1+3\ln x_2>\frac{12}{5}$，即证$\frac{3t^2\ln t}{t^2-1}+\frac{2\ln t}{t^2-1}>\frac{12}{5}$.

因为$t>1$，即证$\ln t-\frac{12\left(t^2-1\right)}{5\left(3t^2+2\right)}>0$.

令$G(t)=\ln t-\frac{12\left(t^2-1\right)}{5\left(3t^2+2\right)}(t>1)$，则$G'(t)=\frac{\left(3t^2-2\right)^2}{t\left(3t^2+2\right)^2}\geq 0$，

所以$G(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$G(t)>G(1)=0$，

即当$t>1$时，$\ln t-\frac{12\left(t^2-1\right)}{5\left(3t^2+2\right)}>0$成立，命题得证.

【点睛】极值点偏移问题中，若等式中含有参数，则消去参数，由于两个变量的地位相同，将特征不等式变形，如常常利用$\ln x_1-\ln x_2=\ln\frac{x_1}{x_2}$进行变形，可构造关于$t=\frac{x_1}{x_2}$的函数，利用导函数再进行求解.

24．(1) $y=\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right)x+\mathrm{e}^{-1}$

(2)$\left(0,\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\right]$

(3)证明见解析

【来源】陕西省宝鸡市2025届高三下学期高考模拟检测（二）数学试题

【分析】（1）当$a=\mathrm{e}$时，求出$f(0)$、$f'(0)$的值，利用导数的几何意义可得出所求切线的方程；

（2）由已知不等式结合参变量分离法可得$\frac{1}{a}\geq\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x}$，利用导数求出函数$h(x)=\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x}$在$(0,+\infty)$上的最大值，即可求出实数$a$的取值范围；

（3）分析可知$0<x_1<\frac{\pi}{4}<x_2<\pi$，要证所证不等式成立，即证$x_2<\pi-x_1$且$x_2>\frac{\pi}{2}-x_1$，要证$x_2<\pi-x_1$，即证$h(x_2)>h(\pi-x_1)$，利用诱导公式结合指数函数的单调性即可证明；要证$x_2>\frac{\pi}{2}-x_1$，即证$\tan x_1<\mathrm{e}^{2x_1-\frac{\pi}{2}}$，构造函数$t(x)=\frac{\tan x}{\mathrm{e}^{2x-\frac{\pi}{2}}}$，只需证$t(x)<1$，利用导数分析函数$t(x)$的单调性，即可证得结论成立.

【详解】（1）当$a=\mathrm{e}$时，$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\sin x$，则$f'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\cos x$，

所以，$f'(0)=\mathrm{e}^{-1}-1$，$f(0)=\mathrm{e}^{-1}$.

故切线方程为 $y-\mathrm{e}^{-1}=\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right)x$，即 $y=\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right)x+\mathrm{e}^{-1}$，

（2）因为 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-\ln a}-\sin x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{a}-\sin x\geq 0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

进而 $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{a}\geq\sin x$，即 $\dfrac{1}{a}\geq\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^{x}}$．

令 $h\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^{x}}$，其中 $x>0$，则 $h'\left(x\right)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\mathrm{e}^{x}}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)}{\mathrm{e}^{x}}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$\dfrac{3\pi}{4}<x+\dfrac{3\pi}{4}<\pi$，则 $h'\left(x\right)>0$，此时，函数 $h\left(x\right)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 时，$\pi<x+\dfrac{3\pi}{4}<2\pi$，则 $h'\left(x\right)<0$，此时，函数 $h\left(x\right)$ 单调递减，

当 $x>\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$h\left(x\right)<\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{4}}}$，因为 $h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}}}$，因此 $h\left(x\right)_{\max}=h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以，$\dfrac{1}{a}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}$，故 $0<a\leq\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$，

因此，实数 a 的取值范围是 $\left(0,\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\right]$.

（3）因为函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 内有两个不同零点 x_1、x_2，

则方程 $h\left(x\right)=\dfrac{1}{a}$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 内有两个根 x_1、x_2，即 $h\left(x_1\right)=h\left(x_2\right)=\dfrac{1}{a}$，

由（2）知，当 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时，函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 单调递增，$\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 单调递减.

故 $0<x_1<\dfrac{\pi}{4}<x_2<\pi$，欲证 $x_1+x_2<\pi$，即证 $x_2<\pi-x_1$，

由于 $\begin{cases}x_2>\dfrac{\pi}{4}\\ \pi-x_1>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ 且函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 单调递减．所以只需证明 $h\left(x_2\right)>h\left(\pi-x_1\right)$，

即证 $h\left(x_1\right)>h\left(\pi-x_1\right)$，欲证 $h\left(x_1\right)>h\left(\pi-x_1\right)$，即证 $\dfrac{\sin x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}>\dfrac{\sin\left(\pi-x_1\right)}{\mathrm{e}^{\pi-x_1}}$，即 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_1}}>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\pi-x_1}}$，

即证 $\mathrm{e}^{\pi-x_1}>\mathrm{e}^{x_1}$，即证 $x_1<\dfrac{\pi}{2}$，而该式显然成立，

欲证 $x_1+x_2>\dfrac{\pi}{2}$，即证 $x_2>\dfrac{\pi}{2}-x_1$，且 $\dfrac{\pi}{2}-x_1\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，即证 $h\left(x_2\right)<h\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$，

即证 $h\left(x_1\right)<h\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$，即证 $\dfrac{\sin x_1}{\mathrm{e}}<\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-x_1}}$，即证 $\tan x_1<\mathrm{e}^{2x_1-\frac{\pi}{2}}$，

令 $t(x)=\dfrac{\tan x}{e^{2x-\frac{\pi}{2}}}$，只需证 $t(x)<1$，

$$t(x)=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}e^{2x-\frac{\pi}{2}}-2\tan x\cdot e^{2x-\frac{\pi}{2}}}{\left(e^{2x-\frac{\pi}{2}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}2\tan x}{e^{2x-\frac{\pi}{2}}},$$

令 $k(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\tan x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos^2 x}\geq 0$，

所以 $t'(x)\geq 0$，即函数 $t(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，所以，$t(x)<t\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，故原不等式得证.

【点睛】结论点睛：利用参变量分离法求解函数不等式恒（能）成立，可根据以下原则进行求解：

（1）$\forall x\in D$，$m\leq f(x)\Leftrightarrow m\leq f(x)_{\min}$；

（2）$\forall x\in D$，$m\geq f(x)\Leftrightarrow m\geq f(x)_{\max}$；

（3）$\exists x\in D$，$m\leq f(x)\Leftrightarrow m\leq f(x)_{\max}$；

（4）$\exists x\in D$，$m\geq f(x)\Leftrightarrow m\geq f(x)_{\min}$.

25．(1)是，理由见解析；

(2) a 的取值范围为 $(0,+\infty)$；证明见解析.

【来源】上海市杨浦高级中学 2024-2025 学年高三下学期期初摸底考数学试卷

【分析】（1）利用定义及导数的计算法则计算即可；

（2）①根据定义知 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，利用导数研究导函数的单调性及最值计算范围即可；

②根据条件先转化问题为 $x_2>1-\ln x_1$，构造差函数 $h(x)=g(x)-g(1-\ln x)$，利用多次求导判定其单调性去函数符号即可证明.

【详解】（1）是，理由如下：

根据条件易知 $f(3)=1,f(-1)=-3,\therefore\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=1$，

又 $f'(x)=3x^2-6x=1$，可得 $x_1=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},x_2=1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

显然 $-1<x_1=1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<x_2=1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<3$，符合“双中值函数”定义，

即函数$f(x)=x^3-3x^2+1$是$[-1,3]$上的“双中值函数”；

（2）①因为$f(m)=f(n)$，所以$\dfrac{f(m)-f(n)}{m-n}=0$.

因为$f(x)$是$[n,m]$上的“双中值函数”，所以$f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)=0$.

由题意可得$f'\left(x\right)=x-\ln x-a-1$.

设$g\left(x\right)=f'\left(x\right)=x-\ln x-a-1$，则$g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

当$x\in\left(0,1\right)$时，$g'\left(x\right)<0$，则$g\left(x\right)$为减函数，即$f'\left(x\right)$为减函数；

当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，则$g\left(x\right)$为增函数，即$f'\left(x\right)$为增函数.

故$f'\left(x\right)_{\min}=f'\left(1\right)=-a$.

因为$f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)=0$，且$x\to 0$时，$f\left(x\right)\to+\infty,x\to+\infty$时，$f\left(x\right)\to+\infty$，

所以$-a<0$，所以$a>0$，即a的取值范围为$\left(0,+\infty\right)$；

②证明：不妨设$0<x_1<1<x_2$，

则$x_1-\ln x_1-a-1=0$，$x_2-\ln x_2-a-1=0$，即$x_1-\ln x_1=a+1$，$x_2-\ln x_2=a+1$.

要证$x_1+x_2>2$，可证$x_1+x_2>a+2$，即证$x_2>a+2-x_1=1-\ln x_1$.

设$h(x)=g(x)-g(1-\ln x)=x-1+\ln(1-\ln x)(0<x<1)$，

则$h'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x\left(1-\ln x\right)}(0<x<1)$.

设$\varphi(x)=x(1-\ln x)(0<x<1)$，则$\varphi'\left(x\right)=-\ln x>0$，

所以$\varphi\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递增，所以$0<\varphi(x)<\varphi(1)=1$，

所以$h'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x\left(1-\ln x\right)}<0$，则$h(x)$在$\left(0,1\right)$上单调递减.

因为$h(1)=g(1)-g(1)=0$，所以$h(x)>0$，即$g(x)>g(1-\ln x)$.

因为$0<x_1<1$，所以$g\left(x_1\right)>g\left(1-\ln x_1\right)$.

因为$g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=0$，所以$g\left(x_2\right)>g\left(1-\ln x_1\right)$.

因为$0<x_1<1$，所以$1-\ln x_1>1$.

由①可知$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$x_2>1-\ln x_1$，即$x_1+x_2>a+2>2$得证.

【点睛】思路点睛：新定义问题审清题意，转化为已有经验、知识处理即可，本题第二问第一小问，可转化为存在导函数两个零点求参问题，利用导数研究其单调性与最值即可；第二小问，可利用等量关系消元转化证明$x_2>1-\ln x_1$，类似极值点偏移，构造差函数研究其单调性即可证明.

26．(1)证明见解析

(2)$\left[-1,+\infty\right)$

(3)证明见解析

【来源】江苏省南京市、盐城市2024-2025学年高三下学期第一次模拟考试数学试题

【分析】（1）由由$a=0$，得$f\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}$，构造函数$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，求解单调性，证明结果;

（2）求解$f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}+a\cos x,$令$m\left(x\right)=f'\left(x\right)$，则$m'\left(x\right)=\left(x+2\right)\mathrm{e}^{x}-a\sin x$，分类讨论求解$a$的范围;

（3）由（2）知$a<-1$，设$x_0=x_2$，判断$f\left(x\right)$单调性，$f\left(x_1\right)=0$，所以只需证$f\left(2x_2\right)>0$，

由$\left(x_2+1\right)\mathrm{e}^{x_2}+a\cos x_2=0$，即$a=-\dfrac{\left(x_2+1\right)\mathrm{e}^{x_2}}{\cos x_2}$，只需证

$x_2\mathrm{e}^{x_2}-\left(x_2+1\right)\sin x_2>0,x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$（*）进而证明结果.

【详解】（1）由$a=0$，得$f\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}$.

要证$\dfrac{f\left(x\right)}{x}>x+1$，只需证$\mathrm{e}^{x}-x-1>0$.

令$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，则$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-1$.

当$x\in\left(-\infty,0\right)$时，$g'\left(x\right)<0$，则$g\left(x\right)$单调递减，

当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，则$g\left(x\right)$单调递增，

所以$g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$，故$\mathrm{e}^{x}>x+1$，

因此$\dfrac{f\left(x\right)}{x}>x+1$.

（2）$f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}+a\cos x,$

令$m\left(x\right)=f'\left(x\right)$，则$m'\left(x\right)=\left(x+2\right)\mathrm{e}^{x}-a\sin x$

①当 $a \geq 0$ 时，由 $x \in (0,\pi)$，得 $x\mathrm{e}^{x} > 0, a\sin x \geq 0$，

因此 $f(x) > 0$，满足题意.

②当 $a < 0$ 时，由 $x \in (0,\pi)$，得 $(x+2)\mathrm{e}^{x} > 0, -a\sin x > 0$，

因此 $m'(x) > 0$，则 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增.

1° 若 $-1 \leq a < 0$，则 $f'(x) > f'(0) = 1 + a \geq 0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，

所以 $f(x) > f(0) = 0$，满足题意；

2° 若 $a < -1$，则 $f'(0)\left\langle 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle 0$，

因此 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

当 $0 < x < x_0$ 时，$f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减，

当 $x_0 < x < \pi$ 时，$f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x_0) < f(0) = 0$，不合题意.

综上，a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

（3）由（2）知 $a < -1$，设 $x_0 = x_2$，

则 $f(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递减，在 (x_2,π) 上单调递增，

注意到 $f(0) = 0, f(x_2)\left\langle f(0) = 0, f(\pi) = \pi\mathrm{e}^{\pi}\right\rangle 0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一的零点 $x_1, x_1 \in (x_2,\pi)$.

注意到 $x_1, 2x_2 \in (x_2,\pi)$，且 $f(x)$ 在 (x_2,π) 上单调递增.

要证明 $x_1 < 2x_2$，只需证 $f(x_1) < f(2x_2)$，

因为 $f(x_1) = 0$，所以只需证 $f(2x_2) > 0$，

即证 $2x_2\mathrm{e}^{2x_2} + a\sin 2x_2 > 0$.

因为$\left(x_2+1\right)\mathrm{e}^{x_2}+a\cos x_2=0$，即$a=-\frac{\left(x_2+1\right)\mathrm{e}^{x_2}}{\cos x_2}$，

所以，只需证$2x_2\mathrm{e}^{2x_2}-\frac{\left(x_2+1\right)\mathrm{e}^{x_2}}{\cos x_2}\sin 2x_2>0$，

只需证$x_2\mathrm{e}^{x_2}-\left(x_2+1\right)\sin x_2>0, x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$（*）

由（1）得$\mathrm{e}^{x_2}>x_2+1$，

因此$x_2\mathrm{e}^{x_2}-\left(x_2+1\right)\sin x_2>x_2{}^2+x_2-\left(x_2+1\right)\sin x_2=\left(x_2+1\right)\left(x_2-\sin x_2\right)$，

设$h\left(x\right)=x-\sin x, 0<x<\frac{\pi}{2}$，

则$h'\left(x\right)=1-\cos x>0$，所以$h\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

所以$h\left(x\right)>h\left(0\right)=0$，

从而$h\left(x_2\right)>0$，即$x_2-\sin x_2>0$，因此（*）得证，

从而$x_1<2x_2$.

27．(1)答案见解析

(2)证明见解析

【来源】福建省莆田市莆田第一中学2024-2025学年高二下学期第一次月考数学试卷

【分析】（1）由$f'\left(x\right)$结合参变分离得$2a=\frac{\ln x-1}{x}$，利用导数分析函数$g\left(x\right)$的单调性与极值，数形结合可得出实数a在不同取值下，函数$f'\left(x\right)$的零点个数；

（2）由题意可得$\begin{cases}\ln x_1-2ax_1-1=0\\ \ln x_2-2ax_2-1=0\end{cases}$得$2a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，要证明$x_1x_2^2>16\mathrm{e}^3$，只需证明$\ln x_1+2\ln x_2>4\ln 2+3$，设$t=\frac{x_1}{x_2}\left(x_1>4x_2\right)$，则$t>4$，即证$\ln t-4\ln 2\cdot\frac{t-1}{t+2}>0\left(t>4\right)$即可，令$h\left(t\right)=\ln t-4\ln 2\cdot\frac{t-1}{t+2}\left(t>4\right)$，利用导数分析函数$g\left(t\right)$的单调性，结合函数$g\left(t\right)$的单调性可证得结论成立.

【详解】（1）因为函数$f\left(x\right)=x\ln x-ax^2-2x$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，

且$f'\left(x\right)=\ln x+1-2ax-2=\ln x-1-2ax$，由$f'\left(x\right)=0$可得$2a=\frac{\ln x-1}{x}$，

令 $g\left(x\right)=\frac{\ln x-1}{x}$，其中 $x>0$，则 $g'\left(x\right)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\left(\ln x-1\right)}{x^2}=\frac{2-\ln x}{x^2}$，

由 $g'\left(x\right)=0$ 可得 $x=\mathrm{e}^2$，列表如下：

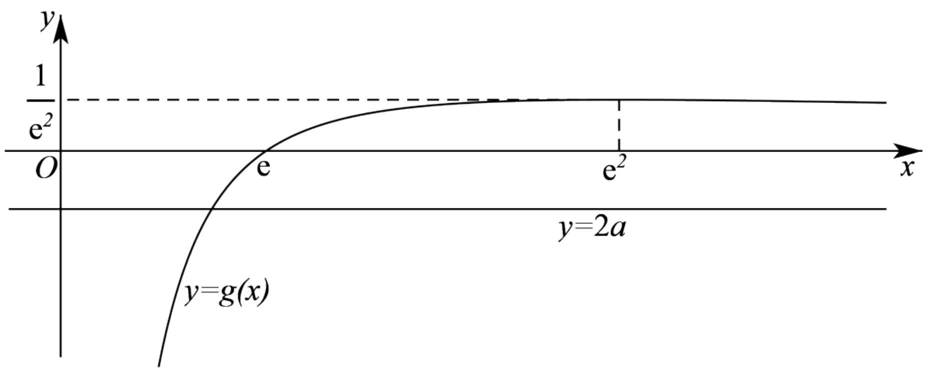
x	$\left(0,\mathrm{e}^2\right)$	e^2	$\left(\mathrm{e}^2,+\infty\right)$
$g'\left(x\right)$	$+$	0	$-$
$g\left(x\right)$	增	极大值	减

所以，函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^2\right)$ 上单调递增，在 $\left(\mathrm{e}^2,+\infty\right)$ 上单调递减，

所以，$g\left(x\right)$ 的极小值为 $g\left(\mathrm{e}^2\right)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

且当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g\left(x\right)=\frac{\ln x-1}{x}<0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g\left(x\right)=\frac{\ln x-1}{x}>0$.

如下图所示：



当 $2a\le 0$ $2a=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ 时，即当 $a\in\left(-\infty,0\right]\cup\left\{\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right\}$ 时，直线 $y=2a$ 与函数 $g\left(x\right)$ 只有一个公共点，

当 $0<2a<\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ 时，即当 $a\in\left(0,\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right)$ 时，直线 $y=2a$ 与函数 $g\left(x\right)$ 有两个公共点，

当 $2a>\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ 时，即当 $a\in\left(\frac{1}{2\mathrm{e}^2},+\infty\right)$ 时，直线 $y=2a$ 与函数 $g\left(x\right)$ 无交点.

综上所述，当 $a\in\left(-\infty,0\right]\cup\left\{\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\right\}$ 时，函数 $f'\left(x\right)$ 只有一个零点；

当 $a\in\left(\frac{1}{2\mathrm{e}^2},+\infty\right)$ 时，函数 $f'\left(x\right)$ 有两个零点；

当 $a\in\left(\frac{1}{2\mathrm{e}^2},+\infty\right)$ 时，函数 $f'\left(x\right)$ 无零点.

（2）由 $\begin{cases}\ln x_1-2ax_1-1=0\\ \ln x_2-2ax_2-1=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\ln x_1=2ax_1+1\\ \ln x_2=2ax_2+1\end{cases}$，得 $2a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

要证明$x_1x_2^2>16\mathrm{e}^3$，只需证明$\ln x_1+2\ln x_2>4\ln 2+3$，

而$\ln x_1+2\ln x_2=2a\left(x_1+2x_2\right)+3=\left(x_1+2x_2\right)\cdot\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}+3=\left(\dfrac{x_1}{x_2}+2\right)\cdot\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{\dfrac{x_1}{x_2}-1}+3$，

令$t=\dfrac{x_1}{x_2}\left(x_1>4x_2\right)$，则$t>4$，欲证明$\ln x_1+2\ln x_2>4\ln 2+3$，

即证明$(t+2)\cdot\dfrac{\ln t}{t-1}>4\ln 2(t>4)$，只需证明$\ln t-4\ln 2\cdot\dfrac{t-1}{t+2}>0(t>4)$即可，

令$h(t)=\ln t-4\ln 2\cdot\dfrac{t-1}{t+2}(t>4)$，

求导得$h'(t)=\dfrac{1}{t}-4\ln 2\cdot\dfrac{3}{(t+2)^2}=\dfrac{t^2+4t+4-12\ln 2\cdot t}{t(t+2)^2}=\dfrac{t+4+\dfrac{4}{t}-12\ln 2}{(t+2)^2}$，

令$\varphi(t)=t+4+\dfrac{4}{t}-12\ln 2$，当$t>4$时，$\varphi'(t)=1-\dfrac{4}{t^2}=\dfrac{t^2-4}{t^2}>0$，

则$\varphi(t)$在$(4,+\infty)$单调递增，故$\varphi(t)>\varphi(4)=9-12\ln 2>0$，

则$h'(t)>0$，令$h(t)$在$(4,+\infty)$时单调递增，则$h(t)>h(4)=\ln 4-4\times\dfrac{1}{2}\times\ln 2=0$，

因此$(t+2)\cdot\dfrac{\ln t}{t-1}>4\ln 2(t>4)$，即$\ln x_1+2\ln x_2>4\ln 2+3$，所以$x_1x_2^2>16\mathrm{e}^3$.

28．(1) $f(x)$的增区间是$(0,\mathrm{e})$，减区间是$(\mathrm{e},+\infty)$.

(2)证明见解析

【来源】专题 5 极值点偏移问题-【勤径学升】2024-2025 学年高中数学选择性必修第二册同步练测（人教版 2019）

【分析】（1）直接求导，求得导函数的零点，即可讨论出$f(x)$的单调性；

（2）先把等式变形为题干函数的形态得$f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)=f\left(\dfrac{1}{x_2}\right)$，再分别证明左右两个不等式，注意构造函数的技巧以及多次求导.

【详解】(1)由题可知$f'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}}{x}-(1+\ln x)(x>0)$，而在$(0,+\infty)$上$y=\dfrac{2\mathrm{e}}{x}$是减函数，$y=1+\ln x$是增函数，

$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，又$\because f'(\mathrm{e})=0$，

$\therefore x\in(0,\mathrm{e})$时，$f'(x)>f'(\mathrm{e})=0, f(x)$单调递增；$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$f'(x)<f'(\mathrm{e})=0, f(x)$单调递减.

所以 $f(x)$ 的增区间是 $(0,\mathrm{e})$，减区间是 $(\mathrm{e},+\infty)$.

（2）由题意得 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}-\dfrac{\ln x_2}{x_2}=2\mathrm{e}\ln x_1-2\mathrm{e}\ln x_2$，

即 $\left(2\mathrm{e}-\dfrac{1}{x_1}\right)\ln x_1=\left(2\mathrm{e}-\dfrac{1}{x_2}\right)\ln x_2$，亦即 $\left(2\mathrm{e}-\dfrac{1}{x_1}\right)\ln\dfrac{1}{x_1}=\left(2\mathrm{e}-\dfrac{1}{x_2}\right)\ln\dfrac{1}{x_2}$.

设 $\dfrac{1}{x_1}=a_1,\dfrac{1}{x_2}=a_2$，则由 $x_1,x_2\in(0,1)$，得 $a_1,a_2\in(1,+\infty)$，且 $f(a_1)=f(a_2)$.

不妨设 $a_1<a_2$，则即证 $2\mathrm{e}<a_1+a_2<2\mathrm{e}+1$，

先证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>2\mathrm{e}$.

由 $f(2\mathrm{e})=0$ 及 $f(x)$ 的单调性知，$1<a_1<\mathrm{e}<a_2<2\mathrm{e}$.

令 $F(x)=f(x)-f(2\mathrm{e}-x),1<x<\mathrm{e}$，

则 $F'(x)=f'(x)+f'(2\mathrm{e}-x)=\dfrac{4\mathrm{e}^2}{x(2\mathrm{e}-x)}-2-\ln\left[x(2\mathrm{e}-x)\right]$.

$\because x(2\mathrm{e}-x)\le\mathrm{e}^2$，

$\therefore F'(x)>\dfrac{4\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2}-2-\ln\mathrm{e}^2=0$，即 $F(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，故 $F(x)<F(\mathrm{e})=0$，

$\therefore f(x)<f(2\mathrm{e}-x)$，取 $x=a_1$，则 $f(a_1)<f(2\mathrm{e}-a_1)$.

又 $f(a_1)=f(a_2)$，则 $f(a_2)<f(2\mathrm{e}-a_1)$.

又 $2\mathrm{e}-a_1>\mathrm{e},a_2>\mathrm{e}$，且 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore a_2>2\mathrm{e}-a_1$，即 $a_1+a_2>2\mathrm{e}$.

下证：$a_1+a_2<2\mathrm{e}+1$.

（i）当 $a_2<\mathrm{e}+1$ 时，由 $a_1<\mathrm{e}$，得 $a_1+a_2<2\mathrm{e}+1$；

（ii）当 $\mathrm{e}+1\le a_2<2\mathrm{e}$ 时，令 $G(x)=f(x)-f(2\mathrm{e}+1-x),\mathrm{e}+1\le x<2\mathrm{e}$，

则 $G'(x)=f'(x)+f'(2\mathrm{e}+1-x)=\dfrac{2\mathrm{e}}{x}-1-\ln x+\dfrac{2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}+1-x}-1-\ln(2\mathrm{e}+1-x)$

$=\dfrac{2\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1)}{-x^2+(2\mathrm{e}+1)x}-2-\ln\left[-x^2+(2\mathrm{e}+1)x\right]$.

记$t=-x^2+(2\mathrm{e}+1)x,\mathrm{e}+1\le x<2\mathrm{e}$，则$G'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1)}{t}-2-\ln t$.

又$t=-x^2+(2\mathrm{e}+1)x$在$[\mathrm{e}+1,2\mathrm{e})$上为减函数，

$\therefore t\in(2\mathrm{e},\mathrm{e}^2+\mathrm{e}]$，$\dfrac{2\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1)}{t}-2$在$(2\mathrm{e},\mathrm{e}^2+\mathrm{e}]$上单调递减，$\ln t$在$(2\mathrm{e},\mathrm{e}^2+\mathrm{e}]$上单调递增，

$\therefore\dfrac{2\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1)}{t}-2-\ln t$单调递减，从而，$G'(x)$在$[\mathrm{e}+1,2\mathrm{e})$单调递增.

又$G'(2\mathrm{e})=\dfrac{2\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1)}{2\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1-2\mathrm{e})}-2-\ln 2\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1-2\mathrm{e})=2\mathrm{e}-1-\ln 2\mathrm{e}$，

对于$h(x)=x-1-\ln x$，则$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

所以$x>1$时，$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$，故$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$h(x)>h(1)=0$，

故$x>1$时，$x-1-\ln x>0$，$\therefore G'(2\mathrm{e})>0$.

又$G'(\mathrm{e}+1)=\dfrac{2\mathrm{e}(2\mathrm{e}+1)}{(\mathrm{e}+1)(2\mathrm{e}+1-\mathrm{e}-1)}-2-\ln(\mathrm{e}+1)(2\mathrm{e}+1-\mathrm{e}-1)=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}-\ln(\mathrm{e}+1)<0$，

从而，由零点存在定理得，存在唯一$x_0\in(\mathrm{e}+1,2\mathrm{e})$，使得$G'(x_0)=0$，

当$x\in[\mathrm{e}+1,x_0)$时，$G'(x)<G'(x_0)=0\Rightarrow G(x)$单调递减;

当$x\in(x_0,2\mathrm{e})$时，$G'(x)>G'(x_0)=0\Rightarrow G(x)$单调递增，

所以$G(x)\le\max\{G(\mathrm{e}+1),G(2\mathrm{e})\}$.

又$G(\mathrm{e}+1)=f(\mathrm{e}+1)-f(2\mathrm{e}+1-\mathrm{e}-1)=f(\mathrm{e}+1)-f(\mathrm{e})=(\mathrm{e}-1)\ln(\mathrm{e}+1)-\mathrm{e}$，

对函数$u(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$u'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

故当$0<x<\mathrm{e}$时，$u'(x)>0$，函数$u(x)=\dfrac{\ln x}{x}$单调递增，

当$x>\mathrm{e}$时，$u'(x)<0$，函数$u(x)=\dfrac{\ln x}{x}$单调递减，所以$u(x)=\dfrac{\ln x}{x}\le u(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

由$\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}\Rightarrow\ln x\le\dfrac{x}{\mathrm{e}}\Rightarrow\ln(\mathrm{e}+1)\le\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}$，所以$G(\mathrm{e}+1)<(\mathrm{e}-1)\cdot\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}=\dfrac{-1}{\mathrm{e}}<0$.

显然$G(2\mathrm{e})=f(2\mathrm{e})-f(2\mathrm{e}+1-2\mathrm{e})=0-0=0$，

所以$G(x)<0$，即$f(x)-f(2\mathrm{e}+1-x)<0$.

取$x=a_2\in[\mathrm{e}+1,2\mathrm{e})$，则$f(a_2)<f(2\mathrm{e}+1-a_2)$.

又 $f\left(a_1\right)=f\left(a_2\right)$，则 $f\left(a_1\right)<f\left(2\mathrm{e}+1-a_2\right)$.

结合 $2\mathrm{e}+1-a_2<2\mathrm{e}+1-(\mathrm{e}+1)=\mathrm{e}, a_1<\mathrm{e}$，以及 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，

得到 $a_1<2\mathrm{e}+1-a_2$，从而 $a_1+a_2<2\mathrm{e}+1$.

综上所述，$2\mathrm{e}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2\mathrm{e}+1$.

【点睛】方法点睛：处理双变量问题首先是根据问题所给的等式变形为题干中函数的形态，找出两个变量的联系，再分别构造出函数去证明不等式，并转化为极值点偏移问题，有时还需结合隐零点方法综合使用.

29.（1）C_{15}^{5}；（2）（i）证明见解析；（ii）$-\frac{2}{2025}$

【来源】浙江省宁波市九校 2023-2024 学年高二下学期期末联考数学试题

【分析】（1）依题意，将已知式拆开，使其可利用组合恒等式，通过多次提取系数运用恒等式即可求得；

（2）（i）利用组合数公式与排列数公式之间的关系推理即得；

（ii）将所求和式展开后，拆项，利用（i）式化简，通过构造数列建立和式之间的递推关系，分析得到数列的周期性，从而利用周期求的结果.

【详解】（1）解法一：$\mathrm{C}_{10}^{0}\mathrm{C}_{5}^{5}+\mathrm{C}_{10}^{1}\mathrm{C}_{5}^{4}+\mathrm{C}_{10}^{2}\mathrm{C}_{5}^{3}+\mathrm{C}_{10}^{3}\mathrm{C}_{5}^{2}+\mathrm{C}_{10}^{4}\mathrm{C}_{5}^{1}+\mathrm{C}_{10}^{5}\mathrm{C}_{5}^{0}$

$=\mathrm{C}_{10}^{0}+\mathrm{C}_{10}^{1}+4\mathrm{C}_{10}^{1}+4\mathrm{C}_{10}^{2}+6\mathrm{C}_{10}^{2}+6\mathrm{C}_{10}^{3}+4\mathrm{C}_{10}^{3}+4\mathrm{C}_{10}^{4}+\mathrm{C}_{10}^{4}+\mathrm{C}_{10}^{5}$

$=\mathrm{C}_{11}^{1}+4\mathrm{C}_{11}^{2}+6\mathrm{C}_{11}^{3}+4\mathrm{C}_{11}^{4}+\mathrm{C}_{11}^{5}=\mathrm{C}_{11}^{1}+\mathrm{C}_{11}^{2}+3\mathrm{C}_{11}^{2}+3\mathrm{C}_{11}^{3}+3\mathrm{C}_{11}^{3}+3\mathrm{C}_{11}^{4}+\mathrm{C}_{11}^{4}+\mathrm{C}_{11}^{5}$

$=\mathrm{C}_{12}^{2}+3\mathrm{C}_{12}^{3}+3\mathrm{C}_{12}^{4}+\mathrm{C}_{12}^{5}=\mathrm{C}_{12}^{2}+\mathrm{C}_{12}^{3}+2\mathrm{C}_{12}^{3}+2\mathrm{C}_{12}^{4}+\mathrm{C}_{12}^{4}+\mathrm{C}_{12}^{5}$

$=\mathrm{C}_{13}^{3}+2\mathrm{C}_{13}^{4}+\mathrm{C}_{13}^{5}=\mathrm{C}_{13}^{3}+\mathrm{C}_{13}^{4}+\mathrm{C}_{13}^{4}+\mathrm{C}_{13}^{5}=\mathrm{C}_{14}^{4}+\mathrm{C}_{14}^{5}=\mathrm{C}_{15}^{5}$；

解法二：设置情境，原式等价于从 15 个相同的球中取出 5 个，共有 C_{15}^{5} 种选法，

所以原式 $=\mathrm{C}_{15}^{5}$；

（2）（i）$\frac{1}{n}\mathrm{C}_{n}^{k}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{A}_{n}^{k}}{k!}=\frac{\frac{\mathrm{A}_{n}^{k}}{n}}{k!}=\frac{\mathrm{A}_{n-1}^{k-1}}{k!}=\frac{1}{k}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$；

（ii）$\sum_{n=0}^{1012}\frac{(-1)^{n}}{2025-n}\mathrm{C}_{2025-n}^{n}=\frac{1}{2025}\mathrm{C}_{2025}^{0}-\frac{1}{2024}\mathrm{C}_{2024}^{1}+\frac{1}{2013}\mathrm{C}_{2023}^{2}-\frac{1}{2012}\mathrm{C}_{2022}^{3}+\cdots+\frac{1}{1013}\mathrm{C}_{1013}^{1012}$

$=\frac{1}{2025}\left[\mathrm{C}_{2025}^{0}-\frac{2025}{2024}\mathrm{C}_{2024}^{1}+\frac{2025}{2023}\mathrm{C}_{2023}^{2}-\frac{2025}{2022}\mathrm{C}_{2022}^{3}+\cdots+\frac{2025}{1013}\mathrm{C}_{1013}^{1012}\right]$

$=\frac{1}{2025}[(C_{2025}^{0}-C_{2024}^{1}+C_{2023}^{2}+C_{2022}^{3}+\cdots+C_{1013}^{1012})$

$-(\frac{1}{2024}C_{2024}^{1}-\frac{2}{2023}C_{2023}^{2}+\frac{3}{2022}C_{2022}^{3}-\cdots-\frac{1012}{1013}C_{1013}^{1012})]$

由（i）得 $\frac{k}{n}C_{n}^{k}=C_{n-1}^{k-1}$，

则有 $\frac{1}{2024}C_{2024}^{1}=C_{2023}^{0},\frac{2}{2023}C_{2023}^{2}=C_{2022}^{1},\ldots,\frac{1012}{1013}C_{1013}^{1012}=C_{1012}^{1011}$，

原式 $=\frac{1}{2025}\left[\left(C_{2025}^{0}-C_{2024}^{1}+C_{2023}^{2}-C_{2022}^{3}+\cdots+C_{1013}^{1012}\right)-\left(C_{2023}^{0}-C_{2022}^{1}+C_{2021}^{2}-\cdots-C_{1012}^{1011}\right)\right]$

构造数列 $\left\{a_{n}\right\}$，令 $a_{n}=C_{n}^{0}-C_{n-1}^{1}+C_{n-2}^{2}-C_{n-3}^{3}+\cdots$，

则 $a_{n+1}=C_{n+1}^{0}-C_{n}^{1}+C_{n-1}^{2}-C_{n-2}^{3}+\cdots$，

所以 $a_{n+1}-a_{n}=\left(C_{n+1}^{0}-C_{n}^{1}+C_{n-1}^{2}-C_{n-2}^{3}+\cdots\right)-\left(C_{n}^{0}-C_{n-1}^{1}+C_{n-2}^{2}-C_{n-3}^{3}+\cdots\right)$

$=\left(C_{n+1}^{0}-C_{n}^{0}\right)-\left(C_{n}^{1}-C_{n-1}^{1}\right)+\left(C_{n-1}^{2}-C_{n-2}^{2}\right)-\left(C_{n-2}^{3}-C_{n-3}^{3}\right)+\cdots$

$=-C_{n-1}^{0}+C_{n-2}^{1}-C_{n-3}^{2}+\cdots=-a_{n-1}$

所以 $a_{n+1}=a_{n}-a_{n-1}$，即 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_{n}=\left(a_{n}-a_{n-1}\right)-a_{n}=-a_{n-1}$，

即 $a_{n+3}=-a_{n}$，所以 $a_{n+6}=-a_{n+3}=a_{n}$，即数列 $\left\{a_{n}\right\}$ 是周期为 6 的数列.

又因为 $a_{1}=1,a_{2}=0,a_{3}=-1,a_{4}=-1,a_{5}=0,a_{6}=1,\cdots,a_{2023}=a_{1}=1,a_{2025}=a_{3}=-1$，

所以 $\sum_{1012}^{n=0}\frac{(-1)^{n}}{2025-n}C_{2025-n}^{n}=\frac{1}{2025}\left(a_{2025}-a_{2023}\right)=\frac{1}{2025}\left(a_{3}-a_{1}\right)=-\frac{2}{2025}$.

【点睛】关键点点睛：本题主要考查组合恒等式的应用和利用构造数列求解和式问题，属于难题.

解题关键在于熟悉组合数与排列数的阶乘计算公式，掌握组合数的性质，并能根据和式组成的规律性，构造对应的数列，运用数列的相关性质求解问题.

30．(1)1560

(2)6120

(3) $N\left(x,y\right)=y\left(y-2\right)\left[\left(y-2\right)^{x-1}+\left(-1\right)^{x}\right]$，证明见解析

【来源】山西省 2023-2024 学年高二下学期 4 月期中调研测试数学试卷

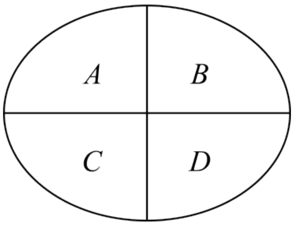
【分析】（1）根据排列组合的染色问题，根据分步计算原理，即可求解；

（2）根据排列组合的染色问题，根据分步计算原理，即可求解；

（3）根据（1），（2）类比递推$N(x,y)$的运算公式，证分两类，都需证明.

【详解】（1）题目等同于“用六种不同的颜色给一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，

并使同一条棱的两个端点异色”，



设顶点为S，底面4点为A，B，C，D.

首先对顶点S进行涂色，共有6种选择；

第二步，对A点进行涂色，共有5种涂色方法；

第三步，需要对BC是否同色进行分类：

若BC同色，则共有$6\times5\times4\times1\times4=480$种情况；

若BC不同色，则共有$6\times5\times4\times3\times3=1080$种情况；

因此，$N(4,6)=480+1080=1560$种情况.

（2）题目等同于“用六种不同的颜色给一个五棱锥的每个顶点染上一种颜色，

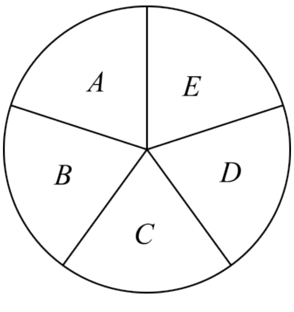
并使同一条棱的两个端点异色”，

设顶点为S，底面五点为A，B，C，D，E.

首先对顶点S进行涂色，共有6种选择；

此时$ABCDE$五点共有五种不同颜色可供选择.

故问题转化为如图A，B，C，D，E五个区域，



有5种不同的颜色可用，要求相邻区域不能涂同一种颜色，即5色5区域的环状涂色问题.

若按照A，B，C，D，E的顺序分步涂色，暂不考虑AE同色的情况，

则共有$5\times4\times4\times4\times4=1280$种情况；其中包含了$AE$同色.

当AE同色时，相当于（1）中$ABCD$四个点的涂色问题，即有1560种；

因此，$N(5,6)=6\times1280-1560=6120$.

（3）题目等同于"用y种不同的颜色给一个x棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两个端点异色"，

设顶点为S，底面五点为A_1，A_2，A_3，$\cdots$，A_x

首先对顶点S进行染色，共有y种选择；

设A_1，A_2，A_3，$\cdots$，A_x的染色方法共有a_x种，

下面考虑a_n的递推关系：

若从A_1开始染色，则A_1有$(y-1)$种染法，

继而A_2，A_3，$\cdots$，A_{x-1}分别均有$(y-2)$种染法，最后对A_x染色，

如果仅要求A_x与A_{x-1}异色（不要求A_x与A_1异色），则仍有$(y-2)$种染法.

于是，总共有$(y-1)(y-2)^{x-1}$种染法.

上述$(y-1)(y-2)^{x-1}$种染法可分为以下两类：

一类是A_x与A_1异色，这是符合要求的，有a_x种染法；

另一类是A_x与A_1同色，这不符合要求，

这时可将A_x与A_1合并成一点，得出a_{x-1}种符合题设的染法.

于是$a_x+a_{x-1}=(y-1)(y-2)^{x-1}$（$x>3$），

即$a_x-(y-2)^x=-\left[a_{x-1}-(y-2)^{x-1}\right]$.

故$a_x-(y-2)^x=-\left[a_{x-1}-(y-2)^{x-1}\right]=(-1)^2\left[a_{x-2}-(y-2)^{x-2}\right]$

$=\cdots=(-1)^{x-3}\left[(y-1)(y-2)(y-3)-(y-2)^3\right]$

$=(-1)^{x-2}(y-2)=(-1)^x(y-2)$

得$a_x=(y-2)\left[(y-2)^{x-1}+(-1)^x\right]$

故$N(x,y)=y(y-2)\left[(y-2)^{x-1}+(-1)^x\right]$.