组合数求和

高 2023 级 1 班　　谢宇轩

2025 年 2 月 9 日

1　组合数求和的定义

- 组合数 C_n^k 表示从 n 个不同元素中取出 k 个元素的组合数，其计算公式为

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

组合数求和就是对一系列组合数进行相加的运算，例如 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$ 表示对 k 从 0 到 n 的所有 C_n^k 进行求和。

根据二项式定理可知

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

当 $a = b = 1$ 时，可得

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

这是组合数求和的一个重要结论。与此同时，还有：令 $a = 1$，$b = -1$，可得

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

进而可推出

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$$

2　组合数求和题目

- **例 1**
  - **题目**：计算 $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$
  - **分析**：本题不能直接利用常见的组合数求和公式，需要对组合数进行变形处理。
  - **解答**：根据组合数的性质 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$，则

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} = n \cdot 2^{n-1}$$

  - **附录**: 证明组合数的性质 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

$$kC_n^k = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$= k \times \frac{n!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

$$nC_{n-1}^{k-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

由前面的推导可知

$$kC_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}, \quad nC_{n-1}^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

所以

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

该性质得证。

- **例 2**
  - **题目**：计算 $\sum_{i=1}^{n} C_n^i \times i^2$
  - **分析**：模仿例 1 的过程。
  - **解答**：
    * 容易得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} C_n^i \times i^2 &= n\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} + n\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!(i-1)}{(n-i)!(i-1)!} \\
&= n2^{n-1} + n\sum_{i=1}^{n} C_{n-1}^{i-1}(i-1) \\
&= n2^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} C_{n-1}^{i-1}(i-1) \\
&= n2^{n-1} + n(n-1)\sum_{i=2}^{n} C_{n-2}^{i-2} \\
&= n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\
&= n(n+1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

即证。

- **例 3**
  - **题目**：计算 $\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k$
  - **分析**：可考虑利用组合数的递推公式 $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ 来进行求解。
  - **解答**：根据组合数的递推公式 $C_{m+k}^k = C_{m+k+1}^k - C_{m+k}^{k-1}$，有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k &= C_m^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + \cdots + C_{m+n}^n \\
&= C_{m+1}^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + \cdots + C_{m+n}^n \quad (\text{因为}C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1) \\
&= C_{m+2}^1 + C_{m+2}^2 + \cdots + C_{m+n}^n \\
&= \cdots \\
&= C_{m+n+1}^n
\end{aligned}$$

- **例 4**
  - **题目**：计算 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^{n-k}$
  - **分析**：可从组合意义的角度或者利用二项式定理来思考。
  - **解答**：从组合意义上看，$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^{n-k}$ 表示从 $n+m$ 个元素中选取 n 个元素的组合数，即 C_{n+m}^{n}。

    也可以通过二项式定理来证明，$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$，$(1+x)^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$，所以

    $$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n \cdot (1+x)^m$$

    根据多项式乘法规则，x^n 的系数为 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^{n-k}$，而 $(1+x)^{n+m}$ 展开式中 x^n 的系数为 C_{n+m}^{n}，所以

    $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^{n-k} = C_{n+m}^{n}$$
  - **注释**：这其实是很著名的范德蒙恒等式。
  - **特殊情况**：

    $$\sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2 = C_{2n}^{n}$$

    上述式子由范德蒙恒等式 $m=n$ 的情况得来。
- **例 5**
  - **题目**：求证 $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} C_i^m = C_{n+1}^{m+1}$
  - **注意**：下面的 C_n^m 都将由 $\binom{n}{m}$ 替代。
  - **解答**：

    $$\begin{aligned}
    \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m) &= (m+1)! \sum_{k=1}^{n} \binom{k+m}{m+1} \\
    &= (m+1)! \sum_{k=m+1}^{n+m} \binom{k}{m+1} \\
    &= (m+1)! \left[\sum_{k=0}^{n+m} \binom{k}{m+1} - \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m+1} \right] \\
    &= (m+1)! \binom{n+m+1}{m+2} \\
    &= \frac{n\cdots(n+m)(n+m+1)}{m+2} \\
    &= \binom{n+1}{m+1} \\
    &= C_{n+1}^{m+1}
    \end{aligned}$$
  - **注释**：这其实是很著名的朱世杰恒等式。
- **拓展**
  - **李善兰恒等式**：$\displaystyle\binom{n+k}{k}^2 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k}$

3 结语

- 作者：高 2023 级 1 班　谢宇轩
- 你可以在 xyx.1919810.com/star 下载文档源代码。
- 如果有问题，请反馈。