等差等比数列基本题型

高 2023 级 1 班　　谢宇轩

2025 年 2 月 9 日

1　等差数列前 n 项和的函数特性

设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，其前 n 项和为

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n.$$

- **二次函数形式：** 当 $d \neq 0$ 时，S_n 是关于 n 的二次函数，且常数项为 0，其图象是过原点的抛物线上的一些离散点。对称轴为

$$n = -\frac{a_1 - \frac{d}{2}}{d} = -\frac{a_1}{d} + \frac{1}{2}.$$

- **最值情况：**
  - 当 $d > 0$ 时，S_n 有最小值，若 $a_1 \geq 0$，则 $S_1 = a_1$ 是最小值；若 $a_1 < 0$，则 S_n 在对称轴 $n = -\frac{a_1}{d} + \frac{1}{2}$ 附近取得最小值。
  - 当 $d < 0$ 时，S_n 有最大值，若 $a_1 \leq 0$，则 $S_1 = a_1$ 是最大值；若 $a_1 > 0$，则 S_n 在对称轴 $n = -\frac{a_1}{d} + \frac{1}{2}$ 附近取得最大值。

2　等差数列前 n 项和公式推导

- **倒序相加法推导等差数列前 n 项和公式**
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，前 n 项和为 S_n，则 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$。
- 根据等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$，可得：

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \tag{1}$$

- 我们把 S_n 的各项倒过来写，有：

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d] \tag{2}$$

- 将 (1) 和 (2) 相加，可得：

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$

  这里一共有 n 个 $(a_1 + a_n)$ 相加，所以：

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

- 从而得到等差数列前 n 项和公式：
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
- **用通项公式进一步推导另一种形式**
- 因为等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$，把 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 中：
$$S_n = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2}$$
- 化简可得：
$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

综上，等差数列的前 n 项和公式有：
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{和} \quad S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$
两种形式。等比数列的推导思路相似。

3 等差数列的简单应用

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10} = 100$，$S_{100} = 10$，求 S_{110}。
   - **解法：**设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，根据等差数列前 n 项和公式
   $$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d,$$
   可得
   $$\begin{cases} 10a_1 + \frac{10\times 9}{2}d = 100, \\ 100a_1 + \frac{100\times 99}{2}d = 10. \end{cases}$$
   解方程组求出 a_1 和 d，再代入
   $$S_{110} = 110a_1 + \frac{110 \times 109}{2}d$$
   求出 S_{110} 的值。
2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3 + a_5 = 12$，$a_2a_6 = 27$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。
   - **解法：**因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $a_3 + a_5 = a_2 + a_6 = 12$，又 $a_2a_6 = 27$，联立可得
   $$\begin{cases} a_2 = 3, \\ a_6 = 9, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_2 = 9, \\ a_6 = 3. \end{cases}$$
   当 $a_2 = 3, a_6 = 9$ 时，$d = \frac{a_6 - a_2}{6-2} = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2}$，$a_1 = a_2 - d = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, 则
   $$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{3}{2} + (n-1) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}n.$$
   当 $a_2 = 9, a_6 = 3$ 时，$d = \frac{a_6 - a_2}{6-2} = \frac{3-9}{4} = -\frac{3}{2}$，$a_1 = a_2 - d = 9 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{2}$, 则
   $$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{21}{2} + (n-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{24-3n}{2}.$$

3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1$，$S_{11}=66$。

- （1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- （2）若 $b_n=\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。
- **解法：**
  - (1) **解题思路：** 要求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$（其中 a_1 为首项，d 为公差），已知 $a_1=1$，所以需要求出公差 d。根据等差数列前 n 项和公式

    $$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

    已知 $S_{11}=66$，$n=11$，$a_1=1$，将这些值代入前 n 项和公式中，即可求出 d，即求出通项公式。
  - (2) **具体步骤：**
    * 因为 $b_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，
    * 所以

      $$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

    * 可以看到从第二项起，每一项的后一部分与后一项的前一部分都可以相互抵消，所以

      $$T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n+2-2}{2(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}.$$

4 等比数列前 n 项和的函数特性

设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q（$q\neq 0$），其前 n 项和公式为

$$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1, \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n, & q\neq 1. \end{cases}$$

- **指数函数特性（$q\neq 1$ 时）：** 当 $q\neq 1$ 时，S_n 可以看作是关于 n 的指数型函数，其中

  $$A=-\frac{a_1}{1-q},\quad B=\frac{a_1}{1-q},\quad S_n=Aq^n+B,$$

  且 $A+B=0$。这意味着 S_n 的图象是函数 $y=Aq^x+B$（$x\in\mathbb{N}^*$）图象上的一些孤立的点。
- **常函数特性（$q=1$ 时）：** 当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，S_n 是关于 n 的一次函数（$a_1\neq 0$），其图象是一条直线 $y=a_1x$（$x\in\mathbb{N}^*$）上的一些孤立的点。此时数列 $\{S_n\}$ 是公差为 a_1 的等差数列。

5 等比数列的简单应用

- **产值增长问题：** 某工厂去年的产值为 a，计划在今后 5 年内每年比上一年产值增长 10%，则从今年起到第 5 年，这个厂的总产值为多少?
  - **分析：** 每年产值是首项为 $a(1+10\%)$，公比为 $1+10\%$ 的等比数列，利用等比数列求和公式求解。

– **解答：** 首项 $a_1 = 1.1a$，公比 $q = 1.1$，$n = 5$。根据等比数列求和公式

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

可得

$$S_5 = \frac{1.1a(1-1.1^5)}{1-1.1} = 11 \times (1.1^5 - 1)a.$$

- **借贷还款问题：** 某人向银行贷款 20 万元，贷款期限为 5 年，年利率为 5%，按复利计算（即每年的利息计入下一年的本金）。问此人每年末应等额偿还多少钱才能在 5 年后还清贷款？

  – **分析：** 设每年末偿还 x 万元，第一年偿还的 x 万元到第五年末的本利和为 $x(1+0.05)^4$，第二年偿还的 x 万元到第五年末的本利和为 $x(1+0.05)^3$，以此类推，第五年偿还的 x 万元没有利息，它们的和等于贷款 20 万元在五年后的本利和 $20 \times (1+0.05)^5$，据此列方程求解。

  – **解答：** 由等比数列求和公式，

$$x(1+0.05)^4 + x(1+0.05)^3 + x(1+0.05)^2 + x(1+0.05) + x = 20 \times (1+0.05)^5,$$

  设 $1 + 0.05 = q$，则

$$x(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 20q^5.$$

  等比数列前 n 项和 $S_5 = \frac{1-q^5}{1-q}$，所以

$$x \times \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 20q^5.$$

  将 $q = 1.05$ 代入解得

$$x = \frac{20 \times 1.05^5 \times 0.05}{1.05^5 - 1} \approx 4.81(\text{万元})。$$

- **等比数列与对数结合问题：** 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 4$，公比 $q \neq 1$ 的等比数列，S_n 是其前 n 项和，且 $4a_1$，a_5，$-2a_3$ 成等差数列，设 $b_n = \log_2 a_n$，求数列 $\{|b_n|\}$ 的前 n 项和 T_n。

  – **分析：** 先根据等差数列性质求出公比 q，得到 a_n 通项公式，进而得到 b_n，再根据 b_n 正负性分段求 T_n。

  – **解答：** 因为 $4a_1$，a_5，$-2a_3$ 成等差数列，所以

$$2a_5 = 4a_1 - 2a_3,$$

  即

$$2a_1q^4 = 4a_1 - 2a_1q^2,$$

  将 $a_1 = 4$ 代入得

$$2 \times 4q^4 = 4 \times 4 - 2 \times 4q^2,$$

  化简为

$$q^4 + q^2 - 2 = 0.$$

  设 $t = q^2$，则

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

解得 $t=1$ 或 $t=-2$（舍去），所以 $q^2=1$，又 $q\neq 1$，则 $q=-1$，

$$a_n = 4\times(-1)^{n-1},$$

$$b_n=\log_2[4\times(-1)^{n-1}]=\log_2 4+\log_2(-1)^{n-1}=2+(n-1)\log_2(-1).$$

因为对数真数大于 0，这里 $a_n=4\times(-1)^{n-1}$，当 n 为偶数时，$a_n=4$，$b_n=2$；当 n 为奇数时，$a_n=-4$ 无对数意义，取绝对值后 $|b_n|=2$。所以

$$T_n=2n.$$

6　倒序相加法

1. 已知函数 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$，求 $f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{3}{2025}\right)+\cdots+f\left(\frac{2024}{2025}\right)$ 的值。

分析：先探究 $f(x)+f(1-x)$ 的值，若为定值，则可利用倒序相加法。

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}.$$

对 $\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}$ 进行变形，

$$\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4}{4+2\times 4^x}=\frac{2}{2+4^x},$$

所以

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=1.$$

解答：设 $S=f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2}{2025}\right)+\cdots+f\left(\frac{2024}{2025}\right)$，将 S 倒序写为

$$S=f\left(\frac{2024}{2025}\right)+f\left(\frac{2023}{2025}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2025}\right).$$

两式相加得

$$2S=\left[f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2024}{2025}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{2023}{2025}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2024}{2025}\right)+f\left(\frac{1}{2025}\right)\right].$$

因为 $f(x)+f(1-x)=1$，且一共有 2024 项，所以

$$2S=2024,$$

则

$$S=1012.$$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，求 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}+a_{100}$ 的值。

分析：先对 a_n 进行分母有理化，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

观察发现 $a_n+a_{101-n}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+(\sqrt{102-n}-\sqrt{101-n})$，通过变形可发现

$$a_n+a_{101-n}=\sqrt{102-n}+\sqrt{n+1}-(\sqrt{101-n}+\sqrt{n}).$$

当 $n=1$ 时，

$$a_1+a_{100}=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{101}-\sqrt{100}),$$

以此类推，可利用倒序相加法。

解答： 设

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99} + a_{100},$$

倒序后

$$S = a_{100} + a_{99} + a_{98} + \cdots + a_2 + a_1.$$

两式相加得

$$2S = (a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{99}) + \cdots + (a_{100} + a_1).$$

$a_n + a_{101-n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + (\sqrt{102-n} - \sqrt{101-n}) = \sqrt{102-n} + \sqrt{n+1} - (\sqrt{101-n} + \sqrt{n}),$

$$2S = 2(\sqrt{101} - 1),$$

所以

$$S = \sqrt{101} - 1.$$

7 错位相减法

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (2n-1) \times 3^n$，求其前 n 项和 S_n。

分析：

$$S_n = 1 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + (2n-1) \times 3^n \tag{1}$$

两边同时乘以公比 3 得

$$3S_n = 1 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + \cdots + (2n-3) \times 3^n + (2n-1) \times 3^{n+1} \tag{2}$$

由 (1) 减 (2)，利用错位相减法，相同指数项对齐相减，再进行化简求解。

解答： (1) - (2) 得:

$$S_n - 3S_n = 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 2 \times 3^n - (2n-1) \times 3^{n+1},$$

即

$$-2S_n = 3 + 2 \times (3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (2n-1) \times 3^{n+1}.$$

等比数列 $3^2, 3^3, \cdots, 3^n$ 的前 $n-1$ 项和为

$$\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3},$$

则

$$-2S_n = 3 + 2 \times \frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3} - (2n-1) \times 3^{n+1},$$

化简得

$$-2S_n = 3 + 3^{n+1} - 9 - (2n-1) \times 3^{n+1} = (2-2n)3^{n+1} - 6,$$

所以

$$S_n = (n-1)3^{n+1} + 3.$$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + n \times 2^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

解答：

首先，将递推关系式两边同除以 2^{n+1}，得到：

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{n \times 2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{n}{2}$$

令 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$，则递推关系式变为：

$$b_{n+1} = b_n + \frac{n}{2}$$

且 $b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$。我们可以将 b_n 表示为累加的形式：

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k$$

利用等差数列求和公式 $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$，得到：

$$b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{2+n^2-n}{4} = \frac{n^2-n+2}{4}$$

因此，$a_n = 2^n b_n = 2^n \cdot \frac{n^2-n+2}{4} = 2^{n-2}(n^2-n+2)$。接下来，我们计算前 n 项和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-2}(k^2-k+2) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} 2^k(k^2-k+2) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k - \sum_{k=1}^{n} k2^k + 2\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)$$

我们分别计算这三项求和。对于等比数列求和，我们有公式 $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$。当 $x=2$ 时，

$$T_1 = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2(2^n-1) = 2^{n+1}-2$$

对于 $\sum_{k=1}^{n} kx^k$，公式为 $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$。当 $x=2$ 时，

$$T_2 = \sum_{k=1}^{n} k2^k = \frac{2-(n+1)2^{n+1}+n2^{n+2}}{(1-2)^2} = 2-(n+1)2^{n+1}+n2^{n+2}$$

$$T_2 = 2 + 2^{n+1}(-n-1+2n) = 2+(n-1)2^{n+1}$$

对于 $\sum_{k=1}^{n} k^2 x^k$，公式为 $\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = 2^{n+1}(n^2-2n+3)-6$。

$$T_3 = \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = 2^{n+1}(n^2-2n+3)-6$$

将 T_1，T_2，T_3 代入 S_n 的表达式：

$$S_n = \frac{1}{4}(T_3 - T_2 + 2T_1) = \frac{1}{4}\left[(2^{n+1}(n^2-2n+3)-6) - (2+(n-1)2^{n+1}) + 2(2^{n+1}-2)\right]$$

$$S_n = \frac{1}{4}\left[2^{n+1}(n^2-2n+3) - 6 - 2 - (n-1)2^{n+1} + 2\cdot 2^{n+1} - 4\right]$$

$$S_n = \frac{1}{4}\left[2^{n+1}(n^2-2n+3-(n-1)+2) - 12\right]$$

$$S_n = \frac{1}{4}\left[2^{n+1}(n^2-3n+6) - 12\right]$$

$$S_n = 2^{n-1}(n^2-3n+6) - 3$$

最终结果为：

$$S_n = 2^{n-1}(n^2 - 3n + 6) - 3$$

生成函数解法：

首先，解递推关系式 $a_{n+1} = 2a_n + n \times 2^n$。对应的齐次方程为 $a_{n+1} = 2a_n$，其解为 $a_n^{(h)} = C \cdot 2^n$。寻找特解时，假设特解为 $a_n^{(p)} = (An^2 + Bn) \cdot 2^n$，代入原递推式求得 $A = \frac{1}{4}$ 和 $B = -\frac{1}{4}$，因此特解为 $a_n^{(p)} = \frac{(n^2-n)\cdot 2^n}{4}$。结合齐次解和特解，得到通解：

$$a_n = C \cdot 2^n + \frac{(n^2 - n) \cdot 2^n}{4}$$

利用初始条件 $a_1 = 1$ 求得 $C = \frac{1}{2}$，因此通项公式为：

$$a_n = 2^{n-1} + \frac{(n^2 - n) \cdot 2^n}{4} = 2^{n-1} + (n^2 - n) \cdot 2^{n-2}$$

接下来求前 n 项和 S_n，将其拆分为两个部分的和：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) \cdot 2^{k-2}$$

第一个和式为等比数列：

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$$

第二个和式通过生成函数或其他方法求得：

$$\sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) \cdot 2^{k-2} = \frac{1}{4}\left[(2n^2 - 6n + 8) \cdot 2^n - 8\right] = (n^2 - 3n + 4) \cdot 2^{n-1} - 2$$

将两个部分合并，得到：

$$S_n = (2^n - 1) + (n^2 - 3n + 4) \cdot 2^{n-1} - 2$$

整理后得到：

$$S_n = (n^2 - 3n + 6) \cdot 2^{n-1} - 3$$

最终答案为：

$$\boxed{S_n = (n^2 - 3n + 6) \cdot 2^{n-1} - 3}$$

8 分组并项法

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{n is odd} \\ 2^n, & \text{n is even} \end{cases}$$

求其前 n 项和 S_n。

受排版工具限制，其中 odd 指奇数，even 指偶数。

分析： 当 n 为偶数时，把奇数项和偶数项分别求和，奇数项是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，偶数项是以 4 为首项，4 为公比的等比数列；当 n 为奇数时，同样分别对奇数项和偶数项求和，奇数项比偶数项多一项。

解答： 当 n 为偶数时，设 $n=2m$（$m\in\mathbb{N}^*$），奇数项和

$$S_{\text{odd}}=\frac{m(1+2m-1)}{2}=m^2,$$

偶数项和

$$S_{\text{even}}=\frac{4(1-4^m)}{1-4}=\frac{4(4^m-1)}{3},$$

$$S_n=S_{\text{odd}}+S_{\text{even}}=m^2+\frac{4(4^m-1)}{3}=\frac{n^2}{4}+\frac{4(2^n-1)}{3}.$$

当 n 为奇数时，设 $n=2m-1$（$m\in\mathbb{N}^*, m\geq 2$），奇数项和

$$S_{\text{odd}}=\frac{m(1+2m-1)}{2}=m^2,$$

偶数项和

$$S_{\text{even}}=\frac{4(1-4^{m-1})}{1-4}=\frac{4(4^{m-1}-1)}{3},$$

$$S_n=S_{\text{odd}}+S_{\text{even}}=m^2+\frac{4(4^{m-1}-1)}{3}=\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{4(2^{n-1}-1)}{3}.$$

综上，S_n 为：

$$S_n=\begin{cases}\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{4(2^{n-1}-1)}{3}, & \text{n is odd}\\ \frac{n^2}{4}+\frac{4(2^n-1)}{3}, & \text{n is even}\end{cases}$$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=3^n+(-1)^{n-1}\times 2n,$$

求其前 n 项和 S_n。

分析： 把数列分成一个等比数列 $\{3^n\}$ 和一个摆动数列 $\{(-1)^{n-1}\times 2n\}$，分别求和后再相加。等比数列 $\{3^n\}$ 的前 n 项和为

$$T_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^{n+1}-3}{2}.$$

对于摆动数列 $\{(-1)^{n-1}\times 2n\}$，当 n 为偶数时，相邻两项之和为 2，当 n 为奇数时，需要单独分析。

解答： 等比数列 $\{3^n\}$ 的前 n 项和

$$T_n=\frac{3^{n+1}-3}{2}.$$

当 n 为偶数时，设 $n=2m$（$m\in\mathbb{N}^*$），摆动数列 $\{(-1)^{n-1}\times 2n\}$ 的和

$$M_{2m}=2\times(1-2+3-4+\cdots+(2m-1)-2m)=2\times(-m)=-2m=-n,$$

所以

$$S_n=T_n+M_{2m}=\frac{3^{n+1}-3}{2}-n.$$

当 n 为奇数时，设 $n=2m-1$（$m\in\mathbb{N}^*, m\geq 2$），摆动数列 $\{(-1)^{n-1}\times 2n\}$ 的和

$$M_{2m-1}=2\times(1-2+3-4+\cdots+(2m-3)-(2m-2)+(2m-1))=2\times(m-1)+(2m-1)=4m-3=2n+1,$$

所以

$$S_n=T_n+M_{2m-1}=\frac{3^{n+1}-3}{2}+2n+1.$$

综上，S_n 为：

$$S_n=\begin{cases}\frac{3^{n+1}-3}{2}+2n+1, & \text{n is odd}\\ \frac{3^{n+1}-3}{2}-n, & \text{n is even}\end{cases}$$

9 分期付款模型

- **1. 小王贷款 15 万元用于装修房屋，贷款年利率为 4.5%，贷款期限为 3 年，采用等额本金还款方式。在还款过程中，从第 2 年开始，银行利率调整为 5%，求小王总共需要支付的利息是多少？**

  分析： 首先计算等额本金还款方式下，前 1 年（12 个月）每月偿还本金 $15 \div (3 \times 12) = \frac{5}{12}$ 万元。前 1 年第一个月利息为 $15 \times (4.5\% \div 12)$ 万元，第二个月利息为 $(15 - \frac{5}{12}) \times (4.5\% \div 12)$ 万元，根据等差数列求和公式计算前 1 年利息。从第 2 年开始本金变为 $15 - \frac{5}{12} \times 12 = 10$ 万元，利率变为 5%，再按照等额本金方式计算后 2 年（24 个月）的利息，最后将两部分利息相加。

  解答： 前 1 年，首项 $a_1 = 15 \times (4.5\% \div 12)$，公差 $d = -\frac{5}{12} \times (4.5\% \div 12)$，项数 $n = 12$，根据等差数列求和公式

  $$S_n = n \times a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d,$$

  可得前 1 年利息

  $$S_1 = 12 \times 15 \times (4.5\% \div 12) + \frac{12 \times 11}{2} \times \left(-\frac{5}{12} \times (4.5\% \div 12)\right) \approx 0.50625 \text{ 万元}.$$

  后 2 年，每月偿还本金 $10 \div (2 \times 12) = \frac{5}{12}$ 万元，首项 $a_1' = 10 \times (5\% \div 12)$，公差 $d' = -\frac{5}{12} \times (5\% \div 12)$，项数 $n' = 24$，后 2 年利息

  $$S_2 = 24 \times 10 \times (5\% \div 12) + \frac{24 \times 23}{2} \times \left(-\frac{5}{12} \times (5\% \div 12)\right) \approx 0.96875 \text{ 万元}.$$

  总共支付利息

  $$S = S_1 + S_2 = 0.50625 + 0.96875 = 1.475 \text{ 万元}.$$

- **2. 小赵贷款 8 万元购买家电，贷款年利率为 6.5%，分 18 期还清（每月一期），采用等额本息还款方式。在还款 6 期后，小赵提前还款 2 万元，之后剩余欠款按照新的本金和原利率继续以等额本息方式还款，求小赵提前还款后每月的还款额变为多少？（精确到元）**

  分析： 先根据等额本息公式计算出最初每月还款额 x，

  $$8 \times \left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right)^{18} = x \times \frac{\left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right)^{18} - 1}{\left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right) - 1}.$$

  还款 6 期后，剩余欠款为

  $$8 \times \left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right)^{6} - x \times \frac{\left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right)^{6} - 1}{\left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right) - 1},$$

  提前还款 2 万元后，新本金为剩余欠款减去 2 万元，再根据等额本息公式计算新的每月还款额 y.

  解答： 先计算最初每月还款额 x，通过计算可得

  $$x \approx 0.4777 \text{ 万元}.$$

  还款 6 期后，剩余欠款

  $$A = 8 \times \left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right)^{6} - 0.4777 \times \frac{\left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right)^{6} - 1}{\left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right) - 1} \approx 6.23 \text{ 万元}.$$

提前还款 2 万元后，新本金

$$B = 6.23 - 2 = 4.23 \text{ 万元}.$$

设新的每月还款额为 y，

$$4.23 \times \left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right)^{12} = y \times \frac{\left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right)^{12} - 1}{\left(1 + \frac{6.5\%}{12}\right) - 1},$$

计算可得

$$y \approx 0.373 \text{ 万元} = 3730 \text{ 元}.$$

10 产值增长模型

- **某传统制造业工厂今年产值为 800 万元，计划每年产值增长 6%，但由于市场竞争，每年实际产值比计划产值少 x 万元。若 3 年后实际产值为 850 万元，求 x 的值。（精确到万元）**

  分析： 第一年实际产值为

  $$800 \times (1 + 6\%) - x \text{ 万元},$$

  第二年实际产值为

  $$[800 \times (1 + 6\%) - x] \times (1 + 6\%) - x = 800 \times (1 + 6\%)^2 - x(1 + 6\%) - x \text{ 万元},$$

  第三年实际产值为

  $$800 \times (1 + 6\%)^3 - x(1 + 6\%)^2 - x(1 + 6\%) - x \text{ 万元},$$

  令其等于 850 万元求解 x.

  解答：

  $$800 \times (1 + 6\%)^3 - x \times \frac{(1 + 6\%)^3 - 1}{(1 + 6\%) - 1} = 850,$$

  设 $y = 1 + 6\% = 1.06$，则

  $$800 \times y^3 - x \times \frac{y^3 - 1}{y - 1} = 850,$$

  通过计算可得

  $$x \approx 39 \text{ 万元}.$$

11 数学归纳法

证明： $(1 + x)^n > 1 + nx$，其中 $x > -1$ 且 $x \neq 0$，$n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$。

- **解法：** 使用数学归纳法。

- **基础情况：**

  当 $n = 2$ 时，我们需要证明 $(1 + x)^2 > 1 + 2x$。展开 $(1 + x)^2$，我们得到

  $$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

  因此，不等式变为

  $$1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

两边同时减去 $1+2x$，得到

$$x^2 > 0$$

由于 $x \neq 0$，所以 $x^2 > 0$ 恒成立。因此，当 $n = 2$ 时，不等式成立。

- **假设：**

  假设对于某个整数 $k \geq 2$，不等式成立，即

  $$(1+x)^k > 1 + kx$$

- **归纳：**

  我们需要证明当 $n = k+1$ 时，不等式也成立，即

  $$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x$$

  从不等式的左边开始：

  $$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$$

  根据归纳假设，我们有 $(1+x)^k > 1 + kx$。由于 $x > -1$，所以 $1 + x > 0$。因此，我们可以将不等式两边同时乘以 $(1+x)$，不等号方向不变：

  $$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x)$$

  展开不等式右边：

  $$(1+kx)(1+x) = 1 \times (1+x) + kx \times (1+x) = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2$$

  所以我们得到

  $$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x + kx^2$$

  由于 $k \geq 2$ 且 $x \neq 0$，所以 $kx^2 > 0$。因此，

  $$1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x$$

  结合以上不等式，我们得到

  $$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x$$

  即

  $$(1+x)^{k+1} > 1 + (k+1)x$$

  这表明当 $n = k+1$ 时，不等式也成立。

  根据数学归纳法原理，不等式 $(1+x)^n > 1 + nx$ 对于所有 $x > -1$ 且 $x \neq 0$，$n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 2$ 都成立。

12 结语

- 作者：高 2023 级 1 班　谢宇轩
- 你可以在 xyx.1919810.com/star 下载文档源代码。
- 如果有问题，请反馈。