高中数学排列组合基本方法与题型解析

高 2023 级 1 班　　谢宇轩

2025 年 2 月 8 日

1　数字问题的常见类型及解法

1.1　组成无重复数字的整数问题

1.1.1　给定数字组成指定位数的数

例 1： 用 $0,1,2,3,4,5$ 这六个数字能组成多少个无重复数字的四位偶数?

分析： 要组成四位偶数，个位数字必须为 $0,2,4$。可分情况讨论：

- 当个位为 0 时，其他三个数位从剩下的 5 个数字中选 3 个进行排列，即 $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 种。
- 当个位为 2 或 4 时，千位有 4 种选法（不能为 0），百位从剩下的 4 个数字中选，十位再从剩下的 3 个数字中选，共有 $2 \times 4 \times A_4^2 = 2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ 种。

答案： 所以共有 $60 + 96 = 156$ 个无重复数字的四位偶数。

例 2： 用 $1,2,3,4,5$ 这五个数字可以组成多少个无重复数字的三位奇数?

分析： 个位必须为 $1,3,5$，有 3 种选法；百位有 4 种选法（不能与个位数字相同），十位有 3 种选法（不能与百位和个位数字相同）。

答案： 根据分步乘法计数原理，共有 $3 \times 4 \times 3 = 36$ 个无重复数字的三位奇数。

1.1.2　组成满足特定条件的数

例： 用 $1,2,3,4,5$ 这五个数字组成无重复数字的五位数，其中大于 23145 的数有多少个?

分析： 可采用分类讨论的方法。

- 当万位为 $3,4,5$ 时，其他 4 个数字全排列，有 $3 \times A_4^4 = 3 \times 24 = 72$ 个。
- 当万位为 2，千位为 4 或 5 时，剩下 3 个数字全排列，有 $2 \times A_3^3 = 2 \times 6 = 12$ 个。
- 当万位为 2，千位为 3 时，百位为 4 或 5，剩下 2 个数字全排列，有 $2 \times A_2^2 = 2 \times 2 = 4$ 个。
- 当万位为 2，千位为 3，百位为 1 时，十位为 5，只有 1 个。

答案： 所以大于 23145 的数共有 $72 + 12 + 4 + 1 = 89$ 个。

1.2 数字排列中的位置关系问题

1.2.1 相邻数字问题

例： 将 $1,2,3,4,5$ 这五个数字排成一排，要求 1 和 2 相邻，有多少种排法?

分析： 将 1 和 2 看作一个整体与 $3,4,5$ 全排列，有 A_4^4 种排法，1 和 2 之间又有 A_2^2 种排法。

答案： 根据分步乘法计数原理，共有 $A_4^4 \times A_2^2 = 48$ 种排法。

1.2.2 不相邻数字问题

例： 在 $1,2,3,4,5$ 这五个数字的排列中，求 1 和 2 不相邻的排法有多少种?

分析： 先排 $3,4,5$，有 A_3^3 种排法，形成 4 个空，将 1 和 2 插入这 4 个空中，有 A_4^2 种排法。

答案： 根据分步乘法计数原理，共有 $A_3^3 \times A_4^2 = 72$ 种排法。

1.3 数字组合问题

例： 从 $0,1,2,3,4,5$ 这六个数字中选取 4 个数字，组成无重复数字且能被 3 整除的四位数，有多少种选法?

分析： 能被 3 整除的数，各位数字之和能被 3 整除。可分为含 0 和不含 0 两类情况讨论。

- 含 0 时，$0,1,2,3$；$0,2,3,4$；$0,3,4,5$；$0,1,3,5$ 这 4 组满足条件，对于每组，0 不能在千位，有 $3 \times A_3^3 = 18$ 种，共 $4 \times 18 = 72$ 种。
- 不含 0 时，$1,2,4,5$ 这一组满足条件，有 $A_4^4 = 24$ 种。

答案： 所以共有 $72 + 24 = 96$ 种选法。

2 捆绑法，插空法与隔板法

2.1 捆绑法

例 1

- **题目：** 有 5 个不同的红球和 3 个不同的白球，将它们排成一排，要求 3 个白球必须相邻，有多少种不同的排法?
- **解析：** 将 3 个白球看成一个整体与 5 个红球进行全排列，有 A_6^6 种排法，同时 3 个白球内部也有 A_3^3 种排法。根据分步乘法计数原理，共有

$$A_6^6 \times A_3^3 = 6! \times 3! = 4320 \text{ 种不同的排法。}$$

例 2

- **题目：** 4 名男生和 3 名女生站成一排，要求女生必须相邻且男生甲不能站在两端，有多少种不同的排法?
- **解析：** 先将 3 名女生看成一个整体，与除甲之外的 3 名男生全排列，有 A_4^4 种排法，女生内部有 A_3^3 种排法。然后将男生甲插入中间 3 个空位中的一个，有 C_3^1 种方法。所以共有

$$A_4^4 \times A_3^3 \times C_3^1 = 4! \times 3! \times 3 = 432 \text{ 种排法。}$$

2.2 插空法

例 1

- **题目：**某晚会有 6 个节目，其中有 3 个小品，2 个唱歌节目和 1 个舞蹈节目。要求 3 个小品互不相邻，且舞蹈节目不放在两端，有多少种不同的演出顺序？
- **解析：**先将 2 个唱歌节目全排列，有 A_2^2 种排法，形成 3 个空。因为舞蹈节目不放在两端，所以我们可以在中间唯一的一个空插入舞蹈节目，有 C_2^1 种方法。此时形成 4 个空，将 3 个小品插入这 4 个空中，有 A_4^3 种排法。我们也可以在两端插入舞蹈节目，有 2 种情况，这时要保证舞蹈节目的一端必有一个小品节目，之后将剩下两个小品塞入三个空中，所以共有

$$A_2^2 \times (C_4^3 \times A_3^3 + 2 \times C_3^1 \times C_3^2 \times A_2^2) = 120 \text{ 种不同的演出顺序。}$$

例 2

- **题目：**一排有 10 个座位，现有 4 个人就坐，要求每人左右两边都有空位，且 4 人互不相邻，有多少种不同的坐法？
- **解析：**先排好 6 个空位，由于空位是相同的，只有 1 种排法。6 个空位形成 5 个空，从中选 4 个空安排 4 个人，有 A_5^4 种排法。所以共有

$$A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \text{ 种不同的坐法。}$$

2.3 隔板法

例 1

- **题目：**将 10 个相同的小球放入 4 个不同的盒子中，要求每个盒子至少有 2 个小球，有多少种不同的放法？
- **解析：**先每个盒子放 1 个球，此时还剩 6 个球。问题转化为将 6 个相同的小球放入 4 个不同的盒子中，每个盒子至少放 1 个球，用隔板法，有

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10 \text{ 种不同的放法。}$$

例 2

- **题目：**把 15 个相同的篮球分给 4 个班级，要求每个班级至少分得 3 个篮球，且任意两个班级分得的篮球数不同，有多少种不同的分法？
- **解析：**先给每个班级分 2 个篮球，共分出去 8 个篮球，还剩 7 个篮球。问题转化为将 7 个相同的篮球分给 4 个班级，每个班级至少分 1 个篮球，且任意两个班级分得的篮球数不同。用隔板法先不考虑限制条件有

$$C_6^3 = 20 \text{ 种分法。}$$

  然后找出有相同数量的情况：$(1,1,1,4)$、$(1,1,2,3)$、$(1,2,2,2)$。对于 $(1,1,1,4)$ 有 $C_4^1 = 4$ 种情况；对于 $(1,1,2,3)$ 有 $A_4^2 = 12$ 种情况；对于 $(1,2,2,2)$ 有 $C_4^1 = 4$ 种情况。所以满足条件的分法有

$$20 - (4 + 12 + 4) = 0 \text{ 种，即不存在这样的分法。}$$

3 排队问题

3.1 排队问题

例题

- **题目：** 有 6 名男生和 4 名女生，按照下列要求排队，分别有多少种不同的排法？
  - 全体站成三排，第一排 3 人，第二排 3 人，第三排 4 人；
  - 全体站成三排，第一排 4 人，第二排 3 人，第三排 3 人，且女生不能站在第一排。
- **解析：**
  - 对于全体站成三排，第一排 3 人，第二排 3 人，第三排 4 人，因为这和站成一排本质上是一样的，所以直接对 10 个人进行全排列，排法有 $A_{10}^{10} = 10! = 3628800$ 种。
  - 对于全体站成三排，第一排 4 人，第二排 3 人，第三排 3 人，且女生不能站在第一排。先从 6 名男生中选 4 人站在第一排，有 A_6^4 种排法；然后剩下 6 人（2 名男生和 4 名女生）进行全排列安排在第二排和第三排，有 A_6^6 种排法。根据分步乘法计数原理，共有

    $$A_6^4 \times A_6^6 = \frac{6!}{(6-4)!} \times 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 6! = 43200$$

    种排法。

3.2 错排问题

例 1

- **题目：** 将编号为 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 的九个球放入编号为 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 的九个盒子中，要求每个盒子放一个球，且球的编号与盒子的编号都不同，有多少种放法？
- **解析：** 根据错排公式

  $$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right),$$

  这里 $n = 9$，则

  $$D_9 = 9!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!}\right).$$

  计算可得

  $$D_9 = 1334961 \text{ 种放法。}$$

例 2

- **题目：** 有 5 个信封和 5 封信，将信装入信封中，恰有 2 封信装对的情况有多少种？
- **解析：** 先从 5 封信中选 2 封信装对，有 C_5^2 种选法。剩下 3 封信装错，根据错排公式

  $$D_3 = 3!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 2 \text{ 种情况。}$$

  所以恰有 2 封信装对的情况有

  $$C_5^2 \times D_3 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times 2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 2 = 20 \text{ 种。}$$

3.3 环形排列问题

例 1

- **题目：** 8 个人围坐在一张圆桌旁，其中甲、乙两人必须相邻，有多少种不同的坐法?
- **解析：** 把甲、乙两人看成一个整体，与其余 6 个人进行环形排列，有 $(7-1)! = 6!$ 种排法。甲、乙两人内部有 $A_2^2 = 2$ 种排法。所以共有

$$6! \times 2 = 1440 \text{ 种不同的坐法。}$$

例 2

- **题目：** 6 个不同颜色的珠子串成一个环形项链，有多少种不同的串法?
- **解析：** 对于环形排列，固定一个珠子的位置，其余 5 个珠子进行全排列，有 $A_5^5 = 5!$ 种排法。但因为项链可以翻转，而翻转后是同一种排列，所以不同的串法有

$$\frac{A_5^5}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ 种。}$$

4 特殊元素特殊位置问题

例 1

- **题目：** 由 0，1，2，3，4，5 这六个数字组成的无重复数字的五位数中，个位数字小于十位数字的有多少个?
- **解析：** 因为首位不能为 0，所以首位是特殊位置。先排首位，从 1，2，3，4，5 这 5 个数字中选 1 个，有 A_5^1 种方法。然后从剩下的 5 个数字中选 4 个排在其余 4 个位置，有 A_5^4 种方法，所以总的排法有 $A_5^1A_5^4$ 种。在这些五位数中，个位数字小于十位数字与个位数字大于十位数字的情况数目相等，所以个位数字小于十位数字的五位数有 $\frac{A_5^1A_5^4}{2} = \frac{5\times5\times4\times3\times2}{2} = 300$ 个。

例 2

- **题目：** 安排 5 名志愿者到 3 个不同的社区参加公益活动，每个社区至少安排 1 名志愿者，其中甲、乙两名志愿者必须在同一个社区，有多少种不同的安排方法?
- **解析：** 把甲、乙看成一个整体，这样就相当于 4 名志愿者分配到 3 个不同的社区，每个社区至少安排 1 名志愿者。之后我们可以写出 $(3, 1, 1)$ 和 $(2, 2, 1)$ 两种分配情况。对于 $(3, 1, 1)$，显然我们要给甲乙再分配一个人，即 C_3^1 。对于 (2,2,1), 我们需要从剩余的 3 名志愿者中组建另一有 2 名志愿者的组，即 C_3^2，同时因为社区不相同，即 A_3^3，所以不同的安排方法数为 $(C_3^1 + C_3^2) \times A_3^3 = 36$ 种。

5 正难则反

例 1

- **题目：** 从 6 名男生和 4 名女生中选出 4 人参加比赛，要求至少有 1 名女生，有多少种不同的选法?

- **解析：** 如果直接求解，需要分情况讨论，即 1 名女生 3 名男生、2 名女生 2 名男生、3 名女生 1 名男生、4 名女生这 4 种情况，比较复杂。采用间接法，先求出从 10 人中选 4 人的所有选法，有 C_{10}^4 种。然后求出没有女生（即 4 名都是男生）的选法，有 C_6^4 种。所以至少有 1 名女生的选法有 $C_{10}^4 - C_6^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} - \frac{6!}{4!(6-4)!} = 210 - 15 = 195$ 种。

例 2

- **题目：** 四面体的顶点和各棱中点共 10 个点，在其中取 4 个不共面的点，有多少种不同的取法？
- **解析：** 直接找 4 个不共面的点情况较多，考虑用间接法。从 10 个点中任取 4 个点的组合数为 C_{10}^4。其中四点共面的情况有三类：第一类，取出的 4 个点位于四面体的同一个面上，有 $4C_6^4$ 种；第二类，取任一条棱上的 3 个点及该棱对棱的中点，这 4 点共面，有 6 种；第三类，由中位线构成的平行四边形（其两组对边分别平行于四面体相对的两条棱），它的 4 个顶点共面，有 3 种。所以 4 个点不共面的取法有 $C_{10}^4 - 4C_6^4 - 6 - 3 = \frac{10!}{4!(10-4)!} - 4 \times \frac{6!}{4!(6-4)!} - 9 = 210 - 60 - 9 = 141$ 种。

6 定序倍缩问题

例 1

- **题目：** 7 个人站成一排，其中甲在乙前面，乙在丙前面（不一定相邻），有多少种不同的排法？
- **解析：** 不考虑甲、乙、丙的顺序，7 个人全排列有 A_7^7 种排法。在这些排法中，甲、乙、丙三人的顺序有 A_3^3 种，而题目要求甲在乙前面，乙在丙前面，只有其中 1 种顺序符合要求，所以满足条件的排法有 $\frac{A_7^7}{A_3^3} = \frac{7!}{3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 840$ 种。

例 2

- **题目：** 用 1，2，3，4，5，6 组成没有重复数字的六位数，要求 1 必须在 2 的左边，3 必须在 4 的左边，5 必须在 6 的左边，有多少种不同的排法？
- **解析：** 不考虑条件限制，6 个数字全排列有 A_6^6 种排法。对于 1 和 2，不考虑顺序有 A_2^2 种排法，其中 1 在 2 左边占一半；同理 3 和 4 不考虑顺序有 A_2^2 种排法，3 在 4 左边占一半；5 和 6 不考虑顺序有 A_2^2 种排法，5 在 6 左边占一半。所以满足条件的排法有 $\frac{A_6^6}{A_2^2A_2^2A_2^2} = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times2\times2} = 90$ 种。

7 分组问题

7.1 平均分组问题

例 1

- **题目：** 将 6 本不同的书平均分成 3 组，每组 2 本，有多少种不同的分法？
- **解析：** 先从 6 本书中选 2 本为一组，有 C_6^2 种选法；再从剩下 4 本中选 2 本为一组，有 C_4^2 种选法；最后剩下 2 本为一组，有 C_2^2 种选法。但这样会有重复，比如 (AB)、(CD)、(EF) 与 (CD)、(AB)、(EF) 等其实是同一种分组情况。平均分组的重复情况是 A_3^3 种，所以不同的分法有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3} = \frac{\frac{6!}{2!(6-2)!}\times\frac{4!}{2!(4-2)!}\times\frac{2!}{2!(2-2)!}}{3!} = \frac{15\times6\times1}{6} = 15$ 种。

例 2

- **题目：** 把 10 名运动员平均分成两组进行对抗赛，有多少种不同的分法？
- **解析：** 从 10 名运动员中选 5 人作为一组，有 C_{10}^{5} 种选法，剩下 5 人自然为另一组。但这里同样存在重复，比如选了 (ABCDE) 为一组，剩下 (FGHIJ) 为另一组，与选了 (FGHIJ) 为一组，剩下 (ABCDE) 为另一组是一样的情况，重复了 A_{2}^{2} 次。所以不同的分法有 $\frac{C_{10}^{5}}{A_{2}^{2}}=\frac{\frac{10!}{5!(10-5)!}}{2!}=\frac{252}{2}=126$ 种。

7.2 部分平均分组问题

例 1

- **题目：** 将 8 本不同的书分成 3 组，一组 4 本，另外两组各 2 本，有多少种不同的分法？
- **解析：** 先从 8 本书中选 4 本作为一组，有 C_{8}^{4} 种选法；然后从剩下 4 本中选 2 本为一组，有 C_{4}^{2} 种选法；剩下 2 本为一组，有 C_{2}^{2} 种选法。但后面两组 2 本的分组有重复，重复情况是 A_{2}^{2} 种。所以不同的分法有 $\frac{C_{8}^{4}C_{4}^{2}C_{2}^{2}}{A_{2}^{2}}=\frac{\frac{8!}{4!(8-4)!}\times\frac{4!}{2!(4-2)!}\times\frac{2!}{2!(2-2)!}}{2!}=\frac{70\times6\times1}{2}=210$ 种。

例 2

- **题目：** 9 个人分成 3 组，一组 3 人，一组 3 人，一组 3 人，其中有 3 人是专业技术人员，要求这 3 人不能在同一组，有多少种不同的分组方法？
- **解析：** 先不考虑 3 个专业技术人员的限制，9 人平均分成 3 组的方法有 $\frac{C_{9}^{3}C_{6}^{3}C_{3}^{3}}{A_{3}^{3}}$ 种。然后计算 3 个专业技术人员在同一组的情况，把这 3 人看作一组，从剩下 6 人中选 3 人一组，再选 3 人一组，有 $\frac{C_{6}^{3}C_{3}^{3}}{A_{2}^{2}}$ 种。所以满足条件的分组方法有 $\frac{C_{9}^{3}C_{6}^{3}C_{3}^{3}}{A_{3}^{3}}-\frac{C_{6}^{3}C_{3}^{3}}{A_{2}^{2}}=\frac{\frac{9!}{3!(9-3)!}\times\frac{6!}{3!(6-3)!}\times\frac{3!}{3!(3-3)!}}{3!}-\frac{\frac{6!}{3!(6-3)!}\times\frac{3!}{3!(3-3)!}}{2!}=280-10=270$ 种。

7.3 不平均分组问题 (和上面没啥区别)

例题

- **题目：** 12 个人分成 5 组，分别有 2 人、2 人、2 人、3 人、3 人，有多少种不同的分法？
- **解析：** 先从 12 人中选 2 人一组，有 (C_{12}^{2}) 种选法；再从剩下 10 人中选 2 人一组，有 (C_{10}^{2}) 种选法；接着从剩下 8 人中选 2 人一组，有 (C_{8}^{2}) 种选法；然后从剩下 6 人中选 3 人一组，有 (C_{6}^{3}) 种选法；最后剩下 3 人一组，有 (C_{3}^{3}) 种选法。其中 3 个 2 人组和 2 个 3 人组都有重复，3 个 2 人组的重复情况是 (A_{3}^{3}) 种，2 个 3 人组的重复情况是 (A_{2}^{2}) 种。所以不同的分法有 $\frac{C_{12}^{2}C_{10}^{2}C_{8}^{2}C_{6}^{3}C_{3}^{3}}{A_{3}^{3}A_{2}^{2}}=\frac{\frac{12!}{2!(12-2)!}\times\frac{10!}{2!(10-2)!}\times\frac{8!}{2!(8-2)!}\times\frac{6!}{3!(6-3)!}\times\frac{3!}{3!(3-3)!}}{3!2!}=1663200\div12=138600$ 种。

8 涂色问题

例 1

- **题目：** 用红、黄、蓝、绿、紫五种颜色给一个圆上的 A、B、C、D、E 五个扇形区域涂色，扇形区域完全等价，要求相邻区域所涂颜色不同，问有多少种不同的涂色方法？

- **答案：** 用公式 $C_n=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$ 计算环形染色问题，其中 n=5 (扇形区域数)，k=5 (颜色数)。因此，共有

$$C_5=(5-1)^5+(-1)^5(5-1)=4^5-4=1024-4=1020$$

种不同的涂色方法。

- **注释：** 在这里，你也可以使用传统的分类讨论去做。但是对于环形染色问题，我们有统一的公式解决。推理方法很好想。首先考虑直线型染色，那么对于 n 个区域，m 种颜色，总方法数为 $n\left(n-1\right)^{m-1}$，当我们将它绕成环时，不难写成数列形式：$a_m+a_{m-1}=n\left(n-1\right)^{m-1}$，稍作变形，得 $a_m-\left(n-1\right)^m=-\left(a_{m-1}-\left(n-1\right)^{m-1}\right)$，讨论得到 $a_m-\left(n-1\right)^m\neq 0$，令 $b_m=a_m-\left(n-1\right)^m$，则 $\frac{b_m}{b_{m-1}}=-1$，为等比数列。则 $b_m=\left(-1\right)^{m-2}\times b_2=\left(-1\right)^m\times b_2$，同时，$b_2=a_2-\left(n-1\right)^2=n\left(n-1\right)-\left(n-1\right)^2=n-1$，有 $b_m=\left(-1\right)^m\times b_2=\left(-1\right)^m\times\left(n-1\right)$，代回原式就可以得到公式 $a_m=\left(n-1\right)^m+\left(-1\right)^m\times\left(n-1\right)$ 。同时，如果环形的中间有一个与所有区域相接的区域（称为「中心区域」)，那么公式将变为 $\left(n+1\right)\times a_m=\left(n+1\right)\times\left[\left(n-1\right)^m+\left(-1\right)^m\cdot\left(n-1\right)\right]$ 。请读者自行思考。

例 2

- **题目：** 将一个四棱锥 S - ABCD 的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法的总数是多少?

- **答案：** 先染顶点 S，有 5 种方法；再染 A 点，有 4 种方法；染 B 点有 3 种方法。若 C 点与 A 点同色，则 D 点有 3 种染法；若 C 点与 A 点不同色，C 点有 2 种染法，D 点有 2 种染法。所以共有 $5\times4\times3\times(1\times3+2\times2)=420$ 种。

9 多面手问题

例 1

- **题目：** 有 9 名工人，其中 4 名能当钳工，3 名能当车工，另外 2 名既能当钳工又能当车工，现要从这 9 名工人中选派 2 名钳工和 2 名车工去完成一项任务，共有多少种不同的选派方法?

- **答案：** 以既能当钳工又能当车工的 2 人被选的人数为分类标准。若这 2 人都不选，钳工从 4 名只会钳工的人中选 2 人，车工从 3 名只会车工的人中选 2 人，有 $C_4^2C_3^2=18$ 种选法；若选 1 人当钳工，有 $C_2^1C_4^1C_3^2=24$ 种选法；若选 1 人当车工，有 $C_2^1C_4^2C_3^1=36$ 种选法；若 2 人都选，当这 2 人分别当钳工和车工时，有 $C_4^1C_3^1=12$ 种选法，当这 2 人都当钳工或都当车工时，有 $C_4^0C_3^2+C_4^2C_3^0=7$ 种选法。所以共有 $18+24+36+12+7=97$ 种选派方法。

例 2

- **题目：** 某外语组有 9 人，每人至少会英语和日语中的一门，其中 7 人会英语，3 人会日语，从中选出会英语和日语的各 1 人，有多少种不同的选法?

- **答案：** 由题可知有 1 人既会英语又会日语。以这个人是否被选到进行分类。若不选这个人，从 6 个只会英语的人中选 1 个学英语，从 2 个只会日语的人中选 1 个学日语，有 $C_6^1C_2^1=12$ 种选法；若选这个人学英语，则从 2 个只会日语的人中选 1 个学日语，有 $C_2^1=2$ 种选法；若选这个人学日语，则从 6 个只会英语的人中选 1 个学英语，有 $C_6^1=6$ 种选法。所以共有 $12+2+6=20$ 种选法。

10 分解合成模型问题

例 1

- **题目：** 将 12 个相同的小球放入编号为 1、2、3、4 的四个盒子中，要求每个盒子中的小球数不小于其编号数，问有多少种不同的放法？
- **答案：** 先在编号为 2、3、4 的盒子中分别放入 1、2、3 个小球，此时还剩 $12-(1+2+3)=6$ 个小球。问题转化为将 6 个相同的小球放入 4 个盒子中，每个盒子至少放 0 个小球，用隔板法，有 $C_{6+4-1}^{4-1}=C_9^3=84$ 种放法。

例 2

- **题目：** 将 20 个相同的小球放入编号为 1，2，3，4 的四个盒子中，要求每个盒子中的小球数不少于盒子的编号数，有多少种不同的放法？
- **解析：** 先在编号为 2，3，4 的盒子中分别放入 1，2，3 个球，此时还剩

  $$20-(1+2+3)=14 \text{ 个球。}$$

  问题转化为将 14 个相同的小球放入 4 个不同的盒子中，每个盒子至少放 1 个球，用隔板法，有

  $$C_{13}^3=\frac{13!}{3!(13-3)!}=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286 \text{ 种不同的放法。}$$

11 结语

- 作者：高 2023 级 1 班　谢宇轩
- 你可以在 xyx.1919810.com/star 下载文档源代码。
- 如果有问题，请反馈。