二项式定理专题

高 2023 级 1 班　　谢宇轩

2025 年 2 月 8 日

1　二项式定理的基本内容

- **二项式定理**：对于任意正整数 n，有

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

其中，$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 称为二项式系数，$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ 称为二项展开式的通项公式。

- **基本性质**
  - 对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等，即 $C_n^k = C_n^{n-k}$。
  - 增减性与最大值：
    * 当 $k < \frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数 C_n^k 是递增的；
    * 当 $k > \frac{n+1}{2}$ 时，C_n^k 是递减的；
    * 当 n 为偶数时，中间一项的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大；
    * 当 n 为奇数时，中间两项的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ 与 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等且最大。
  - 各二项式系数的和：

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$$

2　二项式定理的基本方法

- **通项公式法**：这是解决二项式问题最常用的方法。通过通项公式

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

可以求出展开式中的特定项，如常数项、有理项等。例如，在 $(x+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，求常数项。根据通项公式

$$T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_6^k x^{6-2k}$$

令 $6-2k=0$，解得 $k=3$，所以常数项为 $C_6^3 = 20$。

- **赋值法**：给二项式中的字母赋予特定的值，来解决与二项式系数有关的问题。如在

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

中，令 $a=1$，$b=1$，可得

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

令 $a=1$，$b=-1$，可得

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0$$

进而可推出

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$$

- **构造法**：通过构造二项式来解决一些数学问题。比如证明组合数的一些等式

$$C_n^0C_m^r+C_n^1C_m^{r-1}+\cdots+C_n^rC_m^0=C_{n+m}^r$$

可以构造

$$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$$

然后根据二项式展开式中 x^r 的系数相等来证明。

- **杨辉三角法**：对于 n 较小的二项式展开，可以利用杨辉三角来确定二项式系数。杨辉三角的特点是每行两端都是 1，从第三个数起，每个数都等于它“肩上”两个数的和。例如

$$(a+b)^3$$

的展开式，根据杨辉三角第三行 1 3 3 1，可得

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

3 二项式定理的常见题型

- **求展开式中的特定项或特定项的系数**
  - **求常数项**：如求 $(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中的常数项。由通项公式

$$T_{k+1}=C_6^k(2x)^{6-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_6^k2^{6-k}x^{6-k}x^{-\frac{k}{2}}=C_6^k2^{6-k}x^{6-\frac{3k}{2}},$$

令 $6-\frac{3k}{2}=0$，解得 $k=4$，所以常数项为 $C_6^42^2=60$。

  - **求有理项**：求 $(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^9$ 展开式中的有理项。通项为

$$T_{k+1}=C_9^k(\sqrt{x})^{9-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^kC_9^kx^{\frac{9-3k}{2}},$$

当 $k=1,3,5,7,9$ 时，$\frac{9-3k}{2}$ 为整数，所以有理项为

$$T_2=(-1)^1C_9^1x^3=-9x^3,\quad T_4=(-1)^3C_9^3x^0=-84,\quad \text{等。}$$

  - **求指定幂次的项或系数**：求 $(x^2+3x+2)^5$ 展开式中 x 的系数。可将

$$(x^2+3x+2)^5=[(x+1)(x+2)]^5=(x+1)^5(x+2)^5,$$

根据二项式展开式，$(x+1)^5$ 中 x 的系数为 C_5^4，常数项为 C_5^5；$(x+2)^5$ 中 x 的系数为 $C_5^4\times2^4$，常数项为 2^5。所以 x 的系数为

$$C_5^4\times2^5+C_5^4\times2^4=240$$

- **二项式系数的性质及相关问题**
  - **求二项式系数之和：** 如 $(3x-1)^n$ 的展开式中所有二项式系数之和为 64，求 n。根据二项式系数之和为 2^n，可得 $2^n=64$，解得 $n=6$。
  - **求特定二项式系数：** 已知 $(1+2x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等，求 n。根据二项式系数的对称性，$C_n^3=C_n^7$，所以 $n=3+7=10$。
  - **求系数最大项：** 求 $(x+2y)^{10}$ 展开式中系数最大的项。设第 $(k+1)$ 项系数最大，由通项

    $$T_{k+1}=C_{10}^k x^{10-k}(2y)^k=C_{10}^k 2^k x^{10-k}y^k,$$

    解不等式组

    $$C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k-1}2^{k-1}, \quad C_{10}^k 2^k \geq C_{10}^{k+1}2^{k+1},$$

    得 $k=7$，所以系数最大项为

    $$T_8=C_{10}^7 2^7 x^3 y^7=15360x^3y^7$$

- **利用赋值法求系数和**
  - **求所有项系数和：** 对于 $(2x-3y)^5$，令 $x=1$，$y=1$，则展开式中所有项的系数和为

    $$(2-3)^5=-1$$

  - **求奇数项或偶数项系数和：** 设 $(1-2x)^{2025}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2025}x^{2025}$，令 $x=1$ 得

    $$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2025}=(-1)^{2025}=-1$$

    令 $x=-1$ 得

    $$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2024}-a_{2025}=3^{2025}$$

    两式相加除以 2 得奇数项系数和

    $$a_0+a_2+\cdots+a_{2024}=\frac{3^{2025}-1}{2}$$

    两式相减除以 2 得偶数项系数和

    $$a_1+a_3+\cdots+a_{2025}=\frac{-3^{2025}-1}{2}$$

- **二项式定理的应用**
  - **近似计算：** 如计算 1.02^8，可将

    $$1.02^8=(1+0.02)^8$$

    利用二项式定理展开

    $$C_8^0+C_8^1\times 0.02+C_8^2\times 0.02^2+\cdots+C_8^8\times 0.02^8$$

    取前几项进行近似计算，得

    $$1+8\times 0.02+\frac{8\times 7}{2\times 1}\times 0.02^2=1+0.16+0.0112=1.1712$$

- **证明整除问题：** 证明 $3^{2n+2}-8n-9$ 能被 64 整除 $(n\in\mathbb{N}^*)$。展开

$$3^{2n+2}-8n-9=9^{n+1}-8n-9=(8+1)^{n+1}-8n-9$$

  整理后可得

$$64\left(C_{n+1}^{0}8^{n-1}+C_{n+1}^{1}8^{n-2}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\right)+8(n+1)+1-8n-9$$

  即

$$64\left(C_{n+1}^{0}8^{n-1}+C_{n+1}^{1}8^{n-2}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\right)$$

  所以能被 64 整除。

4 结语

- 作者：高 2023 级 1 班　谢宇轩
- 你可以在 xyx.1919810.com/star 下载文档源代码。
- 如果有问题，请反馈。