蒙日圆专题

高 2023 级 1 班　　谢宇轩

2025 年 2 月 9 日

1　蒙日圆的定义与推导

1.1　蒙日圆的定义

过圆锥曲线外一点作两条互相垂直的切线，那么这一点的轨迹是一个圆，这个圆被称为蒙日圆，又叫外准圆。对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其蒙日圆方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$。

1.2　以椭圆为例的证明方法

- **解析法 + 韦达定理**：
  - **当两条切线斜率均存在且不为 0 时**：设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a,y_0\neq\pm b)$，过 P 的椭圆的切线方程为
  $$y-y_0=k(x-x_0)$$
  联立椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，消去 y 得到一个关于 x 的一元二次方程，由判别式 $\Delta=0$，可得
  $$(x_0^2-a^2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-b^2=0$$
  因为 k_{PA},k_{PB} 是这个关于 k 的一元二次方程的两个根，所以
  $$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}$$
  又因为 $PA\perp PB$，所以
  $$k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$$
  即
  $$\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}=-1$$
  整理可得
  $$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$$
  - **当两条切线有斜率不存在或斜率为 0 时**：可得点 P 的坐标为 $(\pm a,\pm b)$，此时点 P 也在圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上。
- **几何法**：设椭圆中心为 O，焦点是 F_1,F_2，焦点到中心距离为 c。PM,PN 是椭圆两条切线，且互相垂直，连 OP，作 $OG\perp PM$，$OH\perp PN$，并做 $F_1D\perp PM$，做 $F_1K\perp OG$，记 $\angle OF_1K=k$，则
  $$DG=F_1K=c\cdot\cos k$$

由勾股定理，有

$$OG^2 = OD^2 - DG^2 = a^2 - c^2\cos^2 k$$

考虑另一焦点 F_2，做 $F_2E \perp PN$，$F_2L \perp OH$，仿上得

$$OH^2 = a^2 - c^2\sin^2 k$$

进而得到

$$OP^2 = OH^2 + OG^2 = a^2 + (a^2 - c^2) = a^2 + b^2$$

所以

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$$

双曲线的蒙日圆方程为

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2 \quad (a > b > 0)$$

双曲线的证明过程与椭圆类似。

1.3 抛物线两条互相垂直切线的交点轨迹推导过程

抛物线 $y^2 = 2px$ 的两条互相垂直的切线的交点在其准线上。

设抛物线方程为 $y^2 = 2px(p > 0)$，设抛物线上一点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，且满足 $y_1^2 = 2px_1$，$y_2^2 = 2px_2$。

对 $y^2 = 2px$ 求导，根据求导公式 $(X^n)' = nX^{n-1}$ 可得：

$$2y \cdot y' = 2p$$

则

$$y' = \frac{p}{y}$$

所以在点 A 处的切线斜率为

$$k_1 = \frac{p}{y_1}$$

在点 B 处的切线斜率为

$$k_2 = \frac{p}{y_2}$$

因为两条切线垂直，所以

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

即

$$\frac{p}{y_1} \cdot \frac{p}{y_2} = -1$$

可得

$$y_1 y_2 = -p^2$$

设两切线交点为 $P(x_0, y_0)$，根据点斜式写出过点 A 的切线方程为

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$$

因为 $y_1^2 = 2px_1$，所以切线方程可化为

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - \frac{y_1^2}{2p})$$

即

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2}$$

同理，过点 B 的切线方程为

$$y = \frac{p}{y_2}x + \frac{y_2}{2}$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 是两条切线的交点，所以

$$\begin{cases} y_0 = \frac{p}{y_1}x_0 + \frac{y_1}{2} \\ y_0 = \frac{p}{y_2}x_0 + \frac{y_2}{2} \end{cases}$$

两式相减可得：

$$0 = \left(\frac{p}{y_1} - \frac{p}{y_2}\right)x_0 + \frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2}$$

即

$$x_0 = -\frac{y_1 y_2}{2p}$$

将 $y_1 y_2 = -p^2$ 代入可得

$$x_0 = -\frac{-p^2}{2p} = \frac{p}{2}$$

所以抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 两条互相垂直切线的交点轨迹方程是

$$x = -\frac{p}{2}$$

即交点在抛物线的准线上。

2 椭圆蒙日圆的性质

- **性质 1** 圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上的动点 P 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的两条切线 PA、PB，则 $PA \perp PB$。
- **性质 2** 设 P 为圆 $O : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上一点，过点 P 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两条切线，切点分别为 A、B，延长 PA、PB 交圆 O 于两点 C、D，则：
  - C、O、D 三点共线。
  - $CD \parallel AB$。
  - $k_{OP} \cdot k_{CD} = -\frac{b^2}{a^2}$，$k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$，$k_{OA} \cdot k_{PA} = -\frac{b^2}{a^2}$，$k_{OB} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$。
  - $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{b^4}{a^4}$。
- **性质 3** 过圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上的动点 P 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的两条切线，O 为原点，则 PO 平分椭圆的切点弦 AB（由性质 2 中的 $k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 可证）。

3 例题

- **例 0** 设椭圆 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的蒙日圆为 O：$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$，过蒙日圆 O 上一点 P 作椭圆 C 的两条切线 PA、PB，切点分别为 A、B，直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于 M、N 两点，求 $\triangle MON$ 面积的最小值。

- **解析** 设 $P(x_0,y_0)$，满足 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$。同样可得到直线 AB 的方程为
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$
则点 M 的坐标为 $\left(\frac{a^2}{x_0},0\right)$，点 N 的坐标为 $\left(0,\frac{b^2}{y_0}\right)$。
$\triangle MON$ 的面积为
$$S=\frac{1}{2}\left|OM\right|\cdot\left|ON\right|=\frac{a^2b^2}{2\left|x_0y_0\right|}$$
由条件 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2\geq 2\left|x_0y_0\right|$，可以得到
$$\left|x_0y_0\right|\leq\frac{a^2+b^2}{2}$$
所以
$$S=\frac{a^2b^2}{2\left|x_0y_0\right|}\geq\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$
当且仅当 $|x_0|=|y_0|=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 时，面积取等号。
因此，$\triangle MON$ 的面积的最小值为
$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$
- **例 1** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，P 为圆 $x^2+y^2=5$ 上的一个动点，过 P 的切线与椭圆 C 相切于 A，B 两点，与圆相交于 C，D 两点，求证：$AB\parallel CD$。
- **答案**见解析。
- **解析**
设 AB 与 OP 交于点 M。由性质 2 可知，M 为 AB 中点；由性质 1 可知，$\angle APB=90^\circ$，所以 $MA=MB=MP$。由圆的性质可知，$OP=OC=OD$，因此 $\angle PAM=\angle APM=\angle CPO=\angle PCO$，所以 $AB\parallel CD$。
- **例 2** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，离心率 $\frac{\sqrt{5}}{3}$。
  - **问题**
    * 求椭圆 C 的标准方程。
    * 若动点 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆 C 外一点，且点 P 到椭圆 C 的两条切线相互垂直，求点 P 的轨迹方程。
  - **答案**
    * $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$。
    * $x^2+y^2=13$。
  - **解析**
    * 由 $c=\sqrt{5}$, $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, 可得 $a=3$, $b^2=a^2-c^2=4$, 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$。
    * **解法 1：构造同构式；**设两切线为 l_1, l_2。当 $l_1\perp x$ 轴或 $l_1\parallel x$ 轴时, 对应 $l_2\parallel x$ 轴或 $l_2\perp x$ 轴，可知 $P(\pm3,\pm2)$；当 l_1 与 x 轴不垂直且不平行时，$x_0\neq\pm3$，设 l_1 的斜率为 k，则 $k\neq0$，l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$。l_1 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，联立 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，根据直线与椭圆相切 $\Delta=0$，可得 $(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4=0$，$k$ 和 $-\frac{1}{k}$ 是该方程的两个根，所以 $k\cdot(-\frac{1}{k})=\frac{y_0^2-4}{x_0^2-9}=-1$，整理得 $x_0^2+y_0^2=13$（$x_0\neq\pm3$）。综上，点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=13$。

    * **解法 2：利用椭圆的光学性质；** 设椭圆的中心为 O，F_1、F_2 分别为椭圆的左右焦点，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$。设椭圆的两条切线为 PA、PB，M、N 分别为 F_1 关于 PA、F_2 关于 PB 的对称点。由椭圆的光学性质知 F_2、A、M 及 F_1、B、N 分别三点共线，由椭圆定义有 $MF_2=NF_1=2a$。设 F_1M 交直线 PA 于点 Q，F_2N 交直线 PB 于点 S，分别延长 MF_1、NF_2 交于点 R。则 $OQ=\frac{1}{2}MF_2=\frac{1}{2}NF_1=OS=a=3$，$OR=\frac{1}{2}F_1F_2=c=\sqrt{5}$，在矩形 $PQRS$ 中，由平面几何知识知 $OP^2+OR^2=OQ^2+OS^2$，代入得 $OP^2=OQ^2+OS^2-OR^2=9+9-5=13$，所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=13$。

- **例 3** 给定椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，称圆心在原点 O，半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圆是椭圆 C 的“准圆”。若椭圆 C 的一个焦点为 $F(\sqrt{2},0)$，其短轴上的一个端点到 F 的距离为 $\sqrt{3}$。
  - **问题**
    * 求椭圆 C 的方程和其“准圆”方程。
    * 点 P 是椭圆 C 的“准圆”上的动点，过点 P 作椭圆的切线 l_1，l_2 交“准圆”于点 M，N。证明：当点 P 为“准圆”与 y 轴正半轴的交点时，$l_1\perp l_2$；求证：线段 MN 的长为定值。
  - **答案**
    * 椭圆方程 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，“准圆”方程 $x^2+y^2=4$。
    * 见解析。
  - **解析**
    * 根据题意 $c=\sqrt{2}$，$a=\sqrt{3}$，所以 $b=1$，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，“准圆”方程为 $x^2+y^2=4$。
    * “准圆” $x^2+y^2=4$ 与 y 轴正半轴的交点为 $P(0,2)$。设过点 $P(0,2)$ 且与椭圆相切的直线为 $y=kx+2$，联立 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$，由 $\Delta=144k^2-4\times 9(1+3k^2)=0$，解得 $k=\pm 1$，所以 l_1，l_2 的方程分别为 $y=x+2$，$y=-x+2$，因为 $k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-1$，所以 $l_1\perp l_2$。
    * 当直线 l_1，l_2 中有一条斜率不存在时，设直线 l_1 斜率不存在，则 $l_1:x=\pm\sqrt{3}$，当 $l_1:x=\sqrt{3}$ 时，l_1 与“准圆”交于点 $(\sqrt{3},1)$，$(\sqrt{3},-1)$，此时 l_2 为 $y=1$（或 $y=-1$），直线 l_1，l_2 垂直；同理当 $l_1:x=-\sqrt{3}$ 时，直线 l_1，l_2 垂直。
    * 当 l_1，l_2 斜率存在时，设点 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0^2+y_0^2=4$。设经过点 $P(x_0,y_0)$ 与椭圆相切的直线为 $y=t(x-x_0)+y_0$，由 $\Delta=0$ 化简整理得 $(3-x_0^2)t^2+2x_0y_0t+1-y_0^2=0$，因为 $x_0^2+y_0^2=4$，所以 $(3-x_0^2)t^2+2x_0y_0t+(x_0^2-3)=0$。设 l_1，l_2 的斜率分别为 t_1，t_2，因为 l_1，l_2 与椭圆相切，所以 t_1，t_2 满足 $(3-x_0^2)t^2+2x_0y_0t+(x_0^2-3)=0$，所以 $t_1\cdot t_2=-1$，即 l_1，l_2 垂直。
    * 结合前面情况，因为 l_1，l_2 经过点 $P(x_0,y_0)$，又分别交其“准圆”于点 M，N，且 l_1，l_2 垂直，所以线段 MN 为“准圆” $x^2+y^2=4$ 的直径，$|MN|=4$ 为定值。

- **例 4** 已知圆 $C:x^2+y^2=1$，若直线 $y=kx+2$ 上存在点 P 使得过点 P 与圆 C 相切的两切线互相垂直，则实数 k 的取值范围是?
  - **答案** $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

- **解析：** 圆的蒙日圆为 $x^2+y^2=2$（可将圆看成 a,b 相等的椭圆），由题意可知，直线 $y=kx+2$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 有公共点。根据点到直线距离公式，$\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}\le\sqrt{2}$，解得 $k\ge1$ 或 $k\le-1$。

- **例 5** 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 $l:mx+y-3m-2=0$，若直线上存在点 P 使得过点 P 总能作两条互相垂直的切线，则实数 m 的取值范围是？
  - **答案** $[-\frac{12}{5},0]$
  - **解析：** 椭圆的蒙日圆为 $x^2+y^2=a^2+b^2$，这里应该是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其蒙日圆为 $x^2+y^2=7$，所有满足条件的点都在蒙日圆上。由题意可知，直线与圆有公共点，由 $\frac{|3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}\le2$，得 $-\frac{12}{5}\le m\le0$。

- **例 6** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$l:x+y=4$，由动点 M 向椭圆引两条切线 l_1，l_2，且 l_1，l_2 夹角为钝角，则动点 M 到直线 l 的距离的取值范围是？
  - **答案** $[2\sqrt{2}-\sqrt{7},2\sqrt{2}+\sqrt{7}]$
  - **解析：** 椭圆的蒙日圆为 $x^2+y^2=7$，当 M 在蒙日圆内部时，由 M 向椭圆引两条切线 l_1，l_2，则 l_1，l_2 夹角为钝角，故 M 所在区域为图中阴影部分（文档中应有对应图形辅助理解）。由图可知，当 M 分别在 A，B 时，M 到直线 l 的距离分别取得最大值和最小值，而 A，B 到直线 l 的距离分别为 $2\sqrt{2}+\sqrt{7}$ 和 $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$，故所求范围是 $[2\sqrt{2}-\sqrt{7},2\sqrt{2}+\sqrt{7}]$。

- **例 7** 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 上一点 P 及坐标原点 O 作直线 l 与圆 $x^2+y^2=a^2+1$ 交于 A，B 两点。若存在一点 P 满足 $a^2=|PA|\cdot|PB|+1$，则实数 a 的取值范围是？
  - **答案** $[\sqrt{2},+\infty)$
  - **解析：** 根据圆幂定理 $a^2=|PA|\cdot|PB|+1=(\sqrt{a^2+1}-|OP|)(\sqrt{a^2+1}+|OP|)+1=a^2+2-|OP|^2$，故 $|OP|=\sqrt{2}$，又 $|OP|\le a$，故 $a\ge\sqrt{2}$，所以实数 a 的取值范围是 $[\sqrt{2},+\infty)$。

- **例 8** 已知圆 $O:x^2+y^2=34$，椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，若点 P 在圆 O 上，线段 OP 的垂直平分线经过椭圆的右焦点，求点 P 的横坐标。

- **答案** $\frac{17}{4}$

- **解析：** 设点 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2=34$。椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点 $F(4,0)$，因为点 F 在线段 OP 的垂直平分线上，所以 $|PF|=|OF|$，即 $(x_0-4)^2+(y_0-0)^2=4^2$，$x_0^2-8x_0+y_0^2=0$。联立

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=34\\x_0^2-8x_0+y_0^2=0\end{cases}$$

解得 $x_0=\frac{17}{4}$，所以点 P 的横坐标为 $\frac{17}{4}$。

- **例 9** 一般结论为："过圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上任意一点 $Q(m,n)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条切线，则这两条切线互相垂直"。

- **证明**: 当过点 Q 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切的一条切线的斜率不存在时，此时切线方程为 $x=\pm a$。因为点 Q 在圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上，所以 $Q(\pm a,\pm b)$ ，此时另一条切线斜率为 0，两切线

互相垂直。当过点 $Q(m,n)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切的切线的斜率存在时，可设切线方程为 $y-n=k(x-m)$，联立

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y-n=k(x-m)\end{cases}$$

得 $b^2x^2+a^2[k(x-m)+n]^2-a^2b^2=0$，整理得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2k(n-km)x+a^2(n-km)^2-a^2b^2=0$$

因为直线与椭圆相切，所以 $\Delta=4a^4k^2(n-km)^2-4(b^2+a^2k^2)[a^2(n-km)^2-a^2b^2]=0$，整理得

$$(m^2-a^2)k^2-2mnk+(n^2-b^2)=0$$

设两切线斜率为 k_1，k_2，则 $k_1k_2=\frac{n^2-b^2}{m^2-a^2}$。又因为 $m^2+n^2=a^2+b^2$，即 $n^2-b^2=a^2-m^2$，所以

$$k_1k_2=\frac{a^2-m^2}{m^2-a^2}=-1$$

两切线互相垂直。综上所述，命题成立。

- **例 10** 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+y^2=1(m>1)$，若存在过 $(1,2)$ 且相互垂直的直线 l_1，l_2 使得 l_1，l_2 与椭圆 C 均无公共点，则该椭圆离心率的取值范围是?

- **答案** $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$

- **解析：** 椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+y^2=1(m>1)$，显然 l_1，l_2 中一条斜率不存在和另一条斜率为 0 时，两直线与椭圆相交。可设 $l_1:y-2=k(x-1)$，即 $y=kx+2-k$，联立椭圆方程可得

$$(1+mk^2)x^2+2km(2-k)x+m(2-k)^2-m=0$$

由直线和椭圆无交点，可得 $\Delta=4k^2m^2(2-k)^2-4(1+mk^2)[m(2-k)^2-m]<0$，化为

$$(m-1)k^2+4k-3<0$$

解得 $\frac{-2-\sqrt{3m+1}}{m-1}<k<\frac{-2+\sqrt{3m+1}}{m-1}$。由两直线垂直的条件，将 k 换为 $-\frac{1}{k}$，即有

$$\frac{m-1}{k^2}-\frac{4}{k}-3<0$$

化为

$$3k^2+4k-m+1>0$$

解得 $k>\frac{-2+\sqrt{3m+1}}{3}$ 或 $k<\frac{-2-\sqrt{3m+1}}{3}$。由题意可得 $\frac{-2+\sqrt{3m+1}}{3}<\frac{-2+\sqrt{3m+1}}{m-1}$，$m>1$，可得 $1<m<4$。则

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{m}}\in(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$$

- **例 11** 已知从圆 $C:x^2+y^2=r^2(r>0)$ 上一点 $Q(0,r)$ 作两条互相垂直的直线与椭圆 $\tau:\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切，同时圆 C 与直线 $l:mx+y-\sqrt{3}m-1=0$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为?

- **选项**：A. $2\sqrt{3}$　B. 4　C. $4\sqrt{3}$　D. 8

- **答案**：C

- **解析**：设其中一条切线的斜率为 k，则另一条切线的斜率为 $-\frac{1}{k}$，切线方程分别为 $y=kx+r$，$y=-\frac{1}{k}x+r$。将 $y=kx+r$ 与椭圆方程联立可得 $x^2+3(kx+r)^2-12=0$，整理得 $(1+3k^2)x^2+6krx+3r^2-12=0$，则 $\Delta_1=36k^2r^2-4(1+3k^2)(3r^2-12)=0$ 。同理将 $y=-\frac{1}{k}x+r$ 与椭圆方程联立并整理可得 $(1+\frac{3}{k^2})x^2-\frac{6r}{k}x+3r^2-12=0$，则 $\Delta_2=\frac{36r^2}{k^2}-4(1+\frac{3}{k^2})(3r^2-12)=0$ 。由 联立可得 $k=\pm1$，$r=4$，故圆 C 的方程为 $x^2+y^2=16$。注意到直线 $l:mx+y-\sqrt{3}m-1=0$ 过定点 $P(\sqrt{3},1)$，故要使 $|AB|$ 最小，则 $PC\perp AB$。又 $|PC|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$，故此时 $|AB|=2\sqrt{16-4}=4\sqrt{3}$，故选 C。

- **例 12** 设椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两条互相垂直的切线的交点轨迹为 C，曲线 C 的两条切线 PA，PB 交于点 P，且与 C 分别切于 A，B 两点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值。

- **答案**：$9(2\sqrt{2}-3)$

- **解析**：设两切线为 l_1，l_2。当 $l_1\perp x$ 轴或 $l_1\parallel x$ 轴时，对应 $l_2\parallel x$ 轴或 $l_2\perp x$ 轴，可知 $P(\pm\sqrt{5},\pm2)$；当 l_1 与 x 轴不垂直且不平行时，$x_0\neq\pm\sqrt{5}$，设 l_1 的斜率为 k，则 $k\neq0$，l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$。l_1 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，联立 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 可得 $(5k^2+4)x^2+10(y_0-kx_0)kx+5(y_0-kx_0)^2-20=0$。因为直线与椭圆相切，所以 $\Delta=0$，即 $5(y_0-kx_0)^2k^2-(5k^2+4)[(y_0-kx_0)^2-4]=0$，化简得 $-20k^2+4[(y_0-kx_0)^2-4]=0$，进一步得到 $(x_0^2-5)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4=0$。所以 k 是方程 $(x_0^2-5)x^2-2x_0y_0x+y_0^2-4=0$ 的一个根，同理 $-\frac{1}{k}$ 是该方程的另一个根，所以 $k\cdot(-\frac{1}{k})=\frac{y_0^2-4}{x_0^2-5}$，得 $x_0^2+y_0^2=9$（$x_0\neq\pm\sqrt{5}$）。又因为 $P(\pm\sqrt{5},\pm2)$ 满足上式，所以点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=9$。设 $PA=PB=x$，$\angle APB=\theta$，在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle APB$ 中应用余弦定理：$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cdot\cos\angle APB$，即 $3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos(180^\circ-\theta)=x^2+x^2-2x\cdot x\cdot\cos\theta$，化简得 $x^2=\frac{9(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$。$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cos\angle APB=x\cdot x\cos\theta=\frac{9(1+\cos\theta)\cos\theta}{1-\cos\theta}$。令 $t=1-\cos\theta\in(0,2]$，则 $\cos\theta=1-t$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{9(2-t)(1-t)}{t}=\frac{9(t^2-3t+2)}{t}=9\cdot(t+\frac{2}{t}-3)\geq9\cdot(2\sqrt{t\cdot\frac{2}{t}}-3)=9(2\sqrt{2}-3)$，当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，即 $t=\sqrt{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值 $9(2\sqrt{2}-3)$。

4 结语

- 作者：高 2023 级 1 班　谢宇轩
- 你可以在 xyx.1919810.com/star 下载文档源代码。
- 如果有问题，请反馈。