HW1

Q1.

1.

正确

$$\text{由}f_i(n)=O(g(n)),\text{得}\exists c>0,n_i>0$$
$$\text{当}n\ge n_i\text{时，}0\le f_i(n)\le cg(n)$$
$$\text{对}\forall i\text{均成立}$$
$$\text{取}n_0=max\{n_1,n_2,\cdots,n_m\}$$
$$n\ge n_0\text{时，}F_m(n)=\sum_{i=1}^{m}f_i(n)\le cmg(n)$$
$$\text{即}\exists C=cm,n_0=max\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}\text{使之成立，故正确}$$

2.

错误

$$f_i(n)=n,g(n)=n\log n$$
$$\text{但}F(n)=n^2\text{显然不满足题意}$$

3.

正确

$$\text{对}f_1(n)=n,g(n)=n^2$$
$$1\text{与}2\text{之间存在无穷个实数}a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots<2$$
$$\text{使}f_i=n^{a_i}=o(n^{a_{i+1}})$$

4.

正确

$$\text{由题，}\exists c\text{与}n_0\text{使对}\forall n\ge n_0,\text{有}f(n)+g(n)\ge ch(n)$$
$$\text{假设}f(n)\notin\Omega(h(n))$$
$$\text{那么对于}\forall\text{给定从}c\text{和}n_0,\text{存在一个足够大的}n\ge n_0$$
$$\text{使}f(n)<ch(n)f(n)+g(n)<ch(n)+g(n)$$
$$\text{若}f(n)+g(n)=\Omega(h(n))\text{则只要}f(n)\le ch(n),f(n)+g(n)>ch(n)\text{矛盾}$$
$$\text{所以，}f(n)\text{和}g(n)\text{中至少有一个属于}\Omega(f(n))$$

5.

错误

构造反例：

$$f(n)=\begin{cases}n^{\alpha} & n\text{为奇数}\\ n^{\beta} & n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$\text{有}f(n)=\Omega(n^{\alpha}),f(n)=O(n^{\beta})$$

$$\text{但}f(n+1)=\Theta(f(n)),n\text{为奇数时，有}$$

$$c_1n^{\alpha}\leq(n+1)^{\beta}\leq c_2n^{\alpha}$$

$$\text{则}c_1\leq(\frac{(n+1)^{\beta}}{n^{\alpha}})\leq c_2$$

$$\text{中间关于}n\text{的数列显然是发散的，故假设不成立}$$

Q2.

(1)

$$\text{归纳假设，对}\forall n$$

$$\text{当}m=0\text{时，}A(0,n)=n+1\text{显然终止}$$

$$A(1,0)=A(0,1)=2$$

$$m=1\text{时，}A(1,n)=A(0,n+1)=n+2\text{显然终止}$$

$$\text{故对}\forall n\in N,\text{有}A(1,n)\text{可以终止}$$

$$\text{假设}m=k\text{时，对}\forall n,A(k,n)\text{可以终止}$$

$$\text{则}m=k+1\text{时，有}$$

$$A(k+1,n)=A(k,A(k+1,n-1))=A(k,A(k,A(k+1,n-2)))=\cdots$$

$$\text{最终会到达}A(k+1,0)=A(k,1)\text{会终止，所以上述所有项都是有限的}$$

$$\text{所以}A(k+1,n)\text{也会终止}$$

$$\text{由归纳证明，}A(m,n)\text{的递归总能终止}$$

(2)

$$\text{对}\forall n\in N,A(0,n)=n+1$$

$$\text{当}n_1>n_2\text{，}A(0,n_1)=n_1+1>n_2+1=A(0,n_2)\text{，对}n\text{显然单增}$$

$$m=1\text{时，对}\forall n,A(1,n_1)=A(0,n_1+1)=n_1+2>n_2+2=A(1,n_2)\text{，显然也是单增的}$$

$$\text{在}m\text{固定时,}A(m,n)\text{关于}n\text{单增是显然的，下证在}n\text{固定时对}m\text{单增}$$

$$\text{满足归纳假设的前提，我们假设}$$

$$m=k\text{时，对}\forall n,A(k,n)>A(1,n)=n+2$$

$$\text{有}A(k,n)>n+2,\text{可以视}n\text{为一个变量}$$

$$m=k+1\text{时，}A(k+1,n)=A(k,A(k+1,n-1))>A(k+1,n-1)+2>\cdots$$

$$\text{有}A(k+1,n)>A(k+1,0)+2n>n+2$$

$$\text{可以先得到所有的}A(m,n)>n+2$$

$$A(k+1,n)=A(k,A(k+1,n-1)),\text{由}A(k+1,n-1)>n-1+2=n+1\text{及对}n\text{的单调性}$$

$$\text{有}A(k+1,n)>A(k,n)\text{，满足归纳假设条件}$$

$$\text{故}A(m,n)\text{对}m\text{也是单增的}$$

(3)

$$
\begin{gathered}
\text{不妨假设}\alpha(x)=O(1),\text{则存在正的常数}c\text{，}s.t.\alpha(x)\leq c\\
A(n,n)\leq A(c,c)\\
\text{取}x=A(c+1,c+1)\text{，}\alpha(x)=c+1,\text{与}\alpha(x)\leq c\text{矛盾}\\
\text{故}\alpha(x)\text{不能为}O(1)\text{，也即只能有一个下界}\\
\text{即}\alpha(x)=\omega(1)\\
\text{要证明}\alpha(x)=O(lg^*x)\text{，需要证明存在常数}c\text{和}n_0\text{，使得对于所有的}x\geq n_0\text{，有}\alpha(x)\leq c\cdot lg^*x\\
A(n,n)\text{的值随}n\text{的增加而单调递增。因此，当}n>lg^*x\text{时，}A(n,n)\text{必然大于}x\\
\text{考虑}n_0=lg^*x\text{，对于}x\geq n_0\text{，我们有：}\\
A(\alpha(x),\alpha(x))\leq x\\
\text{由于}A(\alpha(x),\alpha(x))\leq x\text{，根据题目中定义的}\alpha(x)\text{，我们知道}\alpha(x)\text{是使得}A(n,n)\leq x\text{的最大自然数}n\\
\text{因此，}\alpha(x)\leq\alpha(x)\text{。这说明}\alpha(x)\text{是一个上界}\\
\text{开始归纳假设}\\
m=1\text{时，}A(1,n)=n+2\text{，有}\alpha(x)<\lg^*x\\
\text{假设}m=k\text{时，}\alpha(x)<\lg^*x\\
m=k+1\text{时，}A(k+1,n)=A(k,A(k+1,n-1))<2^{A(k+1,n-1)}\\
\alpha(x)<\lg^*x\\
\text{故}\alpha(x)=O(\lg^*x)
\end{gathered}
$$

Q3.

(1)

1.

$$
\begin{gathered}
f(n)=n^2>n^{\log_2 3}\\
T(n)=\Theta(n^2)
\end{gathered}
$$

2.

$$
\begin{gathered}
f(n)=n^2,n^{\log_2 4}=n^2\\
T(n)=\Theta(n^2\lg n)
\end{gathered}
$$

3.

$$
\begin{gathered}
n^{log_2 1}=n^0=1,f(\frac{n}{2})=2^n,\text{无法用}n^{log_2 1+-\epsilon}\text{或}n^{log_2 1 lg^k n}\text{表示}\\
\text{故不能使用主定理得到渐进阶}
\end{gathered}
$$

4.

$$T(n)=\Theta(n^n lgn)$$

5.

$$T(n)=\Theta(n^2)$$

6.

$$T(n) = \Theta(nlg^2n)$$

7.

$$f(n) = \frac{n}{\lg n}$$
$$\text{无法使用主定理得到渐进阶，原因同3}$$

8.

$$T(n) = \Theta(n^{0.51})$$

9.

$$a < 1\text{无法使用主定理得到渐进阶}$$

10.

$$f(n) = n!\text{，无法用}n^{\alpha}, n^{\alpha} \lg^k n\text{等表示}$$
$$\text{无法使用主定理得到渐进阶}$$

11.

$$\text{无法使用主定理得到渐进阶，原因同3.}$$

12.

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$$

13.

$$T(n) = \Theta(n)$$

14.

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

15.

$$f(n) = \Omega(n^{log_4 3+\epsilon})$$
$$T(n) = \Theta(nlgn)$$

16.

$$T(n) = \Theta(nlgn)$$

17.

$$f(n) = \Omega(n^{log_3 6+\epsilon}), 6f(\frac{n}{3}) = \frac{2}{3} * n^2(lgn - lg4) < n^2lgn$$
$$T(n) = \Theta(n^2lgn)$$

18.

$$f(n) = \frac{n}{lgn}\text{无法在多项式意义下比较，故无法使用主定理}$$

19.

$$由于f(n)不是渐进正函数，所以不能使用主定理$$

20.

$$T(n)=\Theta(n^2)$$

21.

$$T(n)=\Theta(n^2)$$

22.

$$T(n)=n(2-cosn)$$

23.

$$不存在\epsilon使得f(n)=\Omega(n^{1+\epsilon})，故不能使用主定理$$

24.

$$n^{\log_2 2}=n,不存在\epsilon，使得f(n)=\Omega(n^{1+\epsilon})$$
$$故不能使用主定理$$

25.

$$n^{log_2 2}=n，且不存在\epsilon使得f(n)=\Omega(n^{1+\epsilon})或f(n)=O(n^{1-\epsilon})，所以不能使用主定理$$

(2)

7.

$$e_0=1,e_1=-1$$
$$\vec{e}=(1,-1),\alpha=1,cpow(e)=0,cord(e)=2$$
$$T(n)=\Theta(nlglgn)$$

23.

$$\alpha=log_2 2=1$$
$$e_0=1,e_1=1,e_2=1$$
$$\vec{e}=(1,1,1),m=2$$
$$e_0=1=\alpha,cpow(e)=e_1=1>-1$$
$$T(n)=\Theta(n(lgn)^2lglgn)$$

24.

$$\vec{e}=(1,0,r),m=2,e_0=1=\alpha=log_2 2=1$$
$$e_0=1=\alpha T(n)=\Theta(nlgn(lglgn)^r)$$

25.

$$\vec{e}=(1,-1,-1,s),\alpha=1$$
$$当s=-1,cpow(e)=0>-1,cord(e)=4,T(n)=\Theta(nlg^{(4)}n)$$
$$当s>-1,cpow(e)=s>-1,cord(e)=3,T(n)=\Theta(n(lg^{(3)}n)^{s+1})$$
$$当s\le -1，T(n)=\Theta(n^\alpha)$$

Q4.

(1)

算法1：

$$
\begin{gathered}
\text{输入} n \text{和} f \in F_n' \\
\text{计算} m = [\frac{n}{f}] \\
\text{则} a = (m-1) \cdot f + 1 \\
b = mf \\
\text{输出} < a, b >
\end{gathered}
$$

算法2:

$$
\begin{gathered}
\text{输入} n \text{和} < a, b > \in S_n \\
f = \frac{b-a+1}{b+a}\text{，输出} f
\end{gathered}
$$

算法1和算法2可以构成双射，代入验证

(2)

正确性证明：

$$
\begin{gathered}
\text{由素数及唯一分解定理} \\
n = 2^{k_0} p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \\
\text{奇因子} q = n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n}, 0 \leq r_i \leq k_i \\
r_i \text{取值跑遍0到} k_i \text{共} k_i + 1 \text{种，} S \times (k_i + 1) \\
\text{循环结束后, 如果} n \neq 1, \text{则} n \text{为素数，} \times 2 \text{则此时结果即为} |S_n|
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
m - 1 \leq \lg n < m, 2^{m-1} \leq n < 2^m \\
\text{当} n \text{为素数时，} p^2 = n \text{终止循环，由时间复杂度} \Theta(2^{\frac{m}{2}}) \\
\text{由} Bertrand \text{公设，} 2^{m-1} \text{与} 2^m \text{之间存在素数} p \\
\text{故} n = p \text{时，取最坏情况}
\end{gathered}
$$

(3)

(3.1)

不能断言这一算法的最坏时间复杂度是 $\Omega(2^{\alpha m})$

无法确定下界，上界为 $O(2^{\beta m})$

同样不能断言这一算法的平均时间负责度是 $\Theta(2^{\beta m})$

(3.2)

不会