

算法设计与分析 HW 5

李宇哲 SA25011049

T1

ch35-P39(EX3.9)

若将环划分为长度为 j (j 是2的方幂)的连续片断, 则所有这些片断是序等价的(Ex3.9)。

令 $n = 2^k$, 编号集合为

$$V = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

定义:

- $rev_k\{x\}$: 表示把 x 的 k 位二进制反转
- 反转环: $R_n^{rev} = (rev_k(0), rev_k(1), \dots, rev_k(n-1))$

待证明:

取长度 $j = 2^r$ 的连续子片段, 所有这些片段的内部相对顺序一致。

写出整数 i 的 k 位二进制表示: $i = (a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1a_0)_2$

于是可以把 i 分成两部分, 高 $k-r$ 位和低 r 位

$$high(i) = (a_{k-1}\dots a_r)_2, \quad low(i) = (a_{r-1}\dots a_0)_2$$

$$i = high(i) \cdot 2^r + low(i)$$

$$反转k位后, \quad rev_k(i) = rev_r(low(i)) \cdot 2^{k-r} + rev_{k-r}(high(i))$$

取连续 $j=2^r$ 个 i , 这些 i 里 $high(i)$ 相同, $low(i)$ 取遍 $0, \dots, 2^r - 1$

于是对于每段长度 j 对应一个固定 $high$ 部分的集合 $S_g = \{i | high(i) = g\}$

在 i 在判断 S_g 内部按 low 递增排列, 得到 R_n^{rev} 中该段的顺序, 因此该片段集合是

$$B_g = [rev_r(0), rev_r(1), \dots, rev_r(2^r - 1)] \text{整体偏移 } rev_{k-r}(g)$$

不同的 g , 只有加上常数 $rev_{k-r}(g)$ 不同, 而内部排列方式由 $[rev_r(0..2^r - 1)]$ 决定, 对所有 g 相同

序等性只关心元素内部的相对大小关系, 即一个序列是否可以通过单调平移/映射变成一个序列, 所以两者内部相对顺序完全一致, 这是在整体上加了不同常数。

所以得证