近似算法 HW2

> SA25011049 李宇哲

T1

Claim：G中最大团的size为α当且仅当G^m里最大团的size是mα（Ex.）

先证明 $\Rightarrow$

假设图 G 的最大团大小为 α，将 G 的第 i 个拷贝记作 $G_i, 1 \leq i \leq m$

在每个子图 G_i 中，取一个最大团 C_i，

于是：$|C_i| = \alpha, C_i \subseteq V(G_i)$

定义：$C^m = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$

因为：

- 对同一个 G_i 中的任意两点 $(u,v) \in E(G_i)$，在图 G^m 中也连边
- 同时对不同 $G_i, G_j (i \neq j)$，图 G^m 的定义中也有 $(u,v) \in E(G^m)$

所以 C^m 中任两点都相连，即 C^m 是 G^m 的团

显然：

$|C^m| = \sum_{i=1}^{m} |C_i| = m\alpha$

再取 G^m 的任意一个团 C'，定义：

$C_i' = C' \bigcap V(G_i)$，则 C_i' 是 G_i 的一个团，故有：$|C_i'| \leq \alpha$

于是，$|C'| = \sum_{i=1}^{m} |C_i'| \leq m\alpha$

因此，C^m 是 G^m 的最大团，且大小为 $m\alpha$

方向 $\Leftarrow$

假设 G^m 的最大团的大小为 $m\alpha'$，设 G 的最大团大小为 α

根据上面的推理，在 G^m 中由 G 的团构成的团大小上限为 $m\alpha$

若 G^m 的最大团能达到 $m\alpha'$，则由可加性推出 $m\alpha = m\alpha'$

于是 $\alpha = \alpha'$

所以，G中最大团的 size 为 $\alpha \Leftrightarrow G^m$ 中最大团的 size 为 $m\alpha$

T2

多机调度

设最优调度使得每台机器恰有2个作业：J_i和J_j，则必有$i \le m$, $j > m$。否则若某最优调度O有$i, j \le m$，则定有某台机器上有J_s和J_t，使得$s,t > m$.

∵ $P_i, P_j \ge P_s, P_t$，交换P_j和P_t，则 $P_i+P_t \le P_i+P_j$ $P_s+P_j \le P_i+P_j$

交换后的调度O'的最迟完成时间只可能减少，故O'也是最优调度。对于i,j>m可类似证明。

∴必有最优调度使$J_1, \dots, J_m$分别分配到$M_1, \dots, M_m$上，当将$J_{m+1}, \dots, J_{2m}$分配到M台机器上时，LPT是将长时间的作业分配到轻负载上，必与该最优调度结果相同。

$$\frac{A(I)}{OPT(I)} = 1 \le \frac{4}{3} - \frac{1}{3m} \quad (m \ge 2)$$

Ex. 完善此证明 26

claim：存在一个最优调度，使得每台机器 M_i 上的两个任务分别是：$(J_i, J_{m+i})(1 \le i \le m)$

若在某个最优调度 O 中存在 $i, j \le m$，而有某台机器上有 J_s, J_k 其中 $s, t > m$，那么调换它们不会使最大负载增大，因为 $p_i, p_j \ge p_s, p_t$

交换后：$p_i + p_t \le p_i + p_j, p_s + p_j \le p_i + p_j$

所以新调度只会变得更优或相同。

因此可以保证，存在最优调度使任务配对形式：(J_i, J_{m+i})

claim2：在每台机器恰有两个任务的情况下，LPT 的调度结果与最优调度一致，即 $A(I) = OPT(I)$

定义最优调度表示，用排列 σ_0 表示：$J_i, J_{m+\sigma_0(i)}$分配给 M_i

最优调度：$OPT(I) = max_i(p_i + p_{m+\sigma_0(i)})$

如果存在 $i < j$ 但 $\sigma_0(i) < \sigma_0(j)$，说明 “任务时间较短的机器分配了较短任务”

通过交换这两对不会让最大负载增加。

因此可证明：可以换成另一个“更整齐”的调度：$\sigma`(i) = m - i + 1$

即最优调度可写成：(J_i, J_{2m+1-i}) 配对

LPT 是把最大的任务分到当前最轻负载的机器上。

对于 J_i 较大的任务，会先分配给较空机器，与上面的规律一致，因此它会得到：(J_i, J_{2m+1-i})这样的配对。

这正好与最优调度对应，于是：

$$A(I) = OPT(I)$$

推广到一般情形上 $\frac{A(I)}{OPT(I)\leq\frac{4}{3}-\frac{1}{3m}}$