Q1.（25 分）

Floyd-Warshall 算法的空间需求是 $\Theta(n^3)$，因为要计算 $d_{ij}^{(k)}$，其中 i，j，k = 1，1，2，...，n。有同学提出可以将 Floyd-Warshall 算法修改为如下形式，从而将 Floyd-Warshall 算法的空间需求降低到 $\Theta(n^2)$。请问新的 Floyd-Warshall-New 算法是否正确，如正确，请证明，否则，请给出反例。

Algorithm 1 FLOYD-WARSHALL-NEW(W)

```
n = W.rows
D = W
for k = 1 to n do
    for i = 1 to n do
        for j = 1 to n do
            d_ij = min(d_ij, d_ik + d_kj)
        end for
    end for
end for
Return D
```

解：

正确。

当有上标时，所作计算是 $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$

当无上标时，可能做的是 $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$ 或 $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k)})$ 或 $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k)} + d_{kj}^{(k)})$。

在这三种情况下，所计算的是从 i 到 j 的中间节点在 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 中的最短路径的权重。如果用 $d_{ik}^{(k)}$ 替代 $d_{ik}^{(k-1)}$，级计算从 i 到 k 的中间节点在 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 中的子路径的权重。因为此路径中间节点不能含有 k，否则会产生换，所以有 $d_{ik}^{(k)} = d_{ik}^{(k-1)}$，同理 $d_{kj}^{(k)} = d_{kj}^{(k-1)}$。从而得到的计算结果与有上标时相同，算法正确。

Q2.（25 分）

给定一个带权有向图 $G = (V, E, w)$ 和顶点 $s \in V$。图 G 具有以下性质，对于每个顶点 $v \in V$，从 s 到 v 的某个最小权重路径最多经过 k 条边，请描述一个时间复杂度为 $O(|V| + k|E|)$ 的算法来计算从 s 到每个 $v \in V$ 的最短路径权重。

解：

将 Bellman-Ford 算法的松弛操作次数从 $|V|-1$ 修改为 k 次即可。算法初始化所需时间 $\Theta(V)$，松弛循环 k 次，每次运行时间为 $\Theta(E)$，时间复杂度为 $O(|V|+k|E|)$。

Q3.（15 分）

假定在一个权重函数为 w 的有向图 G 上运行 Johnson 算法。证明：如果图 G 包含一条权重为 0 的环路 c，那么对于环路 c 上的每条边 (u,v)，$\hat{w}(u,v)=0$。

证：

设 0 权重的环 c 包含 k 个节点 $v_1,v_2,\ldots,v_k$，重赋值后环的新权重

$$
\begin{aligned}
&\hat{w}(v_1,v_2)+\hat{w}(v_2,v_3)+\cdots+\hat{w}(v_k,v_1)\\
=&[w(v_1,v_2)+h(v_2)-h(v_1)]+[w(v_2,v_3)+h(v_3)-h(v_2)]+\cdots+\\
&[w(v_k,v_1)+h(v_1)-h(v_k)]\\
=&w(v_1,v_2)+w(v_2,v_3)+\cdots+w(v_k,v_1)\\
=&0
\end{aligned}
$$

又因 $\hat{w}\geq 0$，故环 c 中每条边 $\hat{w}=0$。

Q4.（35 分）

小曹同学有一辆自行车，他想参加一年一度的自行车登山赛。他手里有一张地图，上面描绘了：

- n 个站点，每个站点 x_i 都标有其正整数海拔高度 e_i 和是否包含补给站；
- 连接它们之间的 r 条道路，每条道路 r_j 都标有正整数 t_j，表示小曹沿任一方向行驶所需的行驶时间。

站点连接多条道路，但每个站点连接的平均道路数小于 5，即 $(r\leq 5n)$。小曹需要从起点 s 到终点 t，同时要满足以下条件：

- 小曹的体力值为正整数 $g<n$：他最多有 g 单位的体力（开始时体力值是满的）。他可以在沿途任何标有补给站的站点进行休息并恢复体力（任何整数单位）。他每恢复一单位体力需要休息 t_G 的时间。
- 骑车只有在上坡时才消耗体力。具体来说，如果他从海拔高度分别为 e_i 和 e_j 的站点 x_i 驾驶到交叉点 x_j，如果 $e_j>e_i$，小曹将使用 e_j-e_i 单位的体力值，否则将不消耗体力。

给定自行车登山赛的地图，请描述一个 $O(n^2 \log n)$ 时间复杂度的算法，以返回一条到达终点的最快路线，并始终保持比赛过程中严格保留正量的体力值（假定一定存在这样的路线）。

解:

构建图 G:

点集：对于每个站点 x_i，构建 g 个点 $\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ig}\}$，表示小曹在点 x_i 是对应的不同体力值。

边集：

- 下坡边：若 $e_i > e_j$，增加权重为 $t(x_i, x_j)$（表示从站点 x_i 到 x_j 的时间）的边 (v_{ik}, v_{jk}) $k \in 1, 2, \ldots, g$
- 等高度边：若 $e_i = e_j$，增加权重为 $t(x_i, x_j)$（表示从站点 x_i 到 x_j 的时间）的边 (v_{ik}, v_{jk}) $k \in 1, 2, \ldots, g$ 和 (v_{jk}, v_{ik}) $k \in 1, 2, \ldots, g$
- 上坡边：若 $e_i - e_j = -l$，增加权重为 $t(x_i, x_j)$（表示从站点 x_i 到 x_j 的时间）的边 $(v_{ik}, v_{j(k-l)})$ $k \in l+1, l+2, \ldots, g$
- 补给边：对于有补给站的站点 x_i，增加权重为 t_G（表示补给 1 单位体力值的时间）的边 $(v_{ik}, v_{i(k+1)})$ $k \in 1, 2, \ldots, g-1$

下坡边数 gr，等高边 + 上坡边数至多 gr，补给边数至多 $(g-1)n$，所以图 G 至多 gn 个点，$O(g(r+n))$ 条边。边权重大于 0，无负环，可以用 Dijkstra 算法求解。

$2r < 5n$，$g < n$，图 G 的点数为 $O(n^2)$，边数为 $O(n^2)$，构建时间为 $O(n^2)$。Dijkstra 算法的时间为 $O(n^2 \log(n^2) + n^2) = O(n^2 \log n)$。