

Q1. (10+10=20 分)

1. 对于关键字集合 $\{3, 6, 9, 2, 4, 5, 13, -3\}$, 其对应的二叉搜索树 (定义见 Topic_5-1.pdf, 第 6 页) 的最大树高 H_{max} 为多少? 最小树高 H_{min} 为多少? 并分别画出一个树高为 H_{max} 和一个树高为 H_{min} 的二叉搜索树;
2. 对于关键字集合 $\{3, 6, 9, 2, 4, 5, 13, -3\}$, 分别画出两个黑高不同的红黑树 (定义见 Topic_5-1.pdf, 第 27 页), 并标明对应的黑高 H_{black} 。

Q2. (5+10+5+ (3+3+4) =30 分)

1. 参考算法 INORDERTREEWALK (见 Topic_5-1.pdf, 第 7 页), 并在其基础上修改, 得到算法 INORDERTREEWALK-LEAF (只输出叶子节点的关键字);
2. 考虑某个关键字 k , 已知关键字 k 在算法 INORDERTREEWALK 的输出中出现且仅出现了 1 次, 且在 INORDERTREEWALK-LEAF 的输出中出现。现在请设计算法 TREESearch-SET(x, k) (给出伪代码), 输入为二叉搜索树的根节点 $root$ 以及关键字 k , 输出三个集合 S_{path} , S_{left} , S_{right} , 其中 S_{path} 为算法 TREESearch(x, k) (见 Topic_5-1.pdf, 第 12 页) 查找路径上的关键字集合, S_{left} 为查找路径左边的关键字集合, S_{right} 为查找路径右边的关键字集合 (例如, 对于下图 TREESearch-SET($root, 9$) 的输出为 $S_{path} = \{8, 9, 10\}$, $S_{left} = \{0, 1, 6\}$, $S_{right} = \{12, 20, 52\}$);

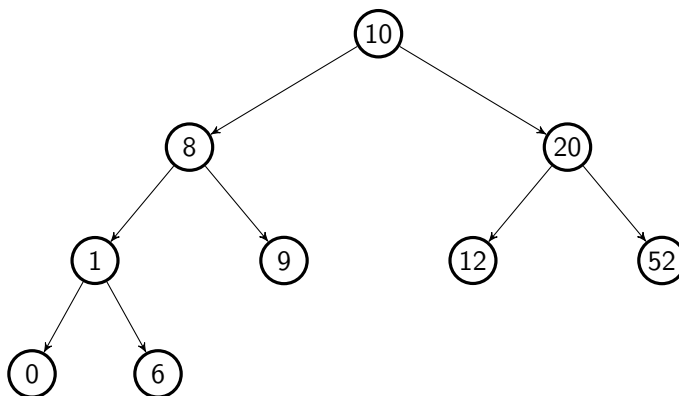


图 1: TREESearch-SET 示例

3. 对你设计的算法 $\text{TREESEARCH-SET}(x, k)$ 的时间复杂度进行分析;
4. 已知 $S_{\text{path}}, S_{\text{left}}, S_{\text{right}}$ 为算法 $\text{TREESEARCH-SET}(\text{root}, k)$ 的输出, 请问以下命题是否正确:
- $\forall a \in S_{\text{left}}, \forall b \in S_{\text{right}}, a \leq b.$
 - $\forall a \in S_{\text{left}}, \forall b \in S_{\text{right}}, a \leq k \leq b.$
 - $\forall a \in S_{\text{left}}, \forall b \in S_{\text{right}}, \forall c \in S_{\text{path}}, a \leq c \leq b.$

若正确, 请简要证明; 若不正确, 请给出反例。

Q3. (15 分)

证明: 任何一棵含 n 个结点的二叉搜索树可以通过 $O(n)$ 次旋转, 转变为其他任何一棵含 n 个结点的二叉搜索树。

Q4. (15 分)

假设用 RB-INSERT 将一个结点 z 插入一棵红黑树, 紧接着又用 RB-DELETE 将它从树中删除。结果的红黑树与初始的红黑树是否一样? 若一样, 请证明; 若不一样, 请给出反例。

Q5. (20 分)

给出下图中的斐波那契堆调用 EXTRACT-MIN 后得到的斐波那契堆。

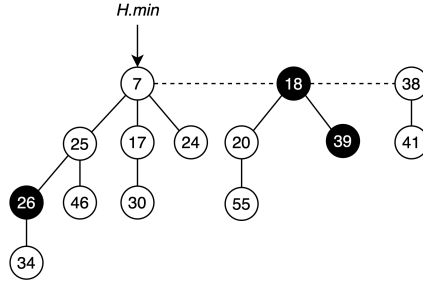


图 2: 斐波那契堆