

Q1. (10 分) 请完成参考教材 Kleinberg J, Tardos E. *Algorithm design*[M]. Pearson Education India, 2006. 657 页的习题 11.

Q2. (30 分) 在一个包含 n 个元素的数组 A 中, $A[1] \neq A[n]$ 。我们希望找到一个索引 i , 使 $A[i]$ 与 $A[i+1]$ 不相等。请考虑分治法, 设计时间复杂度不超过 $O(\log(n))$ 的算法解决该问题。给出伪代码, 并分析其运行时间。

Q3. (30 分) 小牛有一个朋友非常喜欢量子计算。ta 告诉小牛 Hadamard 门在量子算法设计中有非常重要的作用, 并出了一道题考考小牛。

现在不考虑酉矩阵的性质, 递归地定义 $2^n \times 2^n$ 矩阵 \bar{H}_n 如下:

$$\bar{H}_0 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \bar{H}_n = \begin{bmatrix} \bar{H}_{n-1} & \bar{H}_{n-1} \\ \bar{H}_{n-1} & -\bar{H}_{n-1} \end{bmatrix}$$

。

给定一个 2^n 维的向量 v , 求解 $\bar{H}_n v$ 。

请考虑分治法, 帮助小牛设计一个时间复杂度不超过 $O(n2^n)$ 的算法进行求解。给出伪代码, 并分析其运行时间。

Q4. (30 分) 虽然小牛做算法基础的作业题时常感到力不从心, 但幸运的是, 他有一群很友善的同学可以请教。由于同学们都有各自的事情要忙, 只能简单告诉 ta 是否做对 (是或者否)。提交了几次作业后, 小牛发现有的同学判断相比其他同学会更准确。无疑, 小牛想要寻找最能够帮助到 ta 的同学。可惜的是, 他无法预先知道谁对他的帮助最大。为此, 他考虑了这样一种策略: 每做一道练习题, 便去询问所有候选同学, 采取“大多数权重”的意见:

1. 初始时, 每个候选同学的权重均为 1;
 2. 每次询问完后, 采纳总权重更大的意见 (是或者否);
 3. 在发现自己做的练习题是否正确后, 将进行错误判断同学的权重减半。
- (a) 请你告诉小牛使用这种策略至多会判断错误 $\frac{1}{2-\log_2 3}(m + \log_2 n)$ 次。其中 n 是候选同学的数目, m 是对小牛帮助最大的同学会判断错的数目。
- (b) 使用随机策略的话, 小牛可以做的更好。我们修改上述策略如下:
1. 按概率采纳一位候选同学的意见, 其中概率与候选同学的权重成正比;

2. 对判断错误的候选同学的权重乘上因子 $0 < \beta < 1$ 。

请证明若小牛采取这种随机策略, 判断错误的期望次数至多为

$$\frac{m \ln 1/\beta + \ln n}{1 - \beta}$$

◦