概率算法 HW2

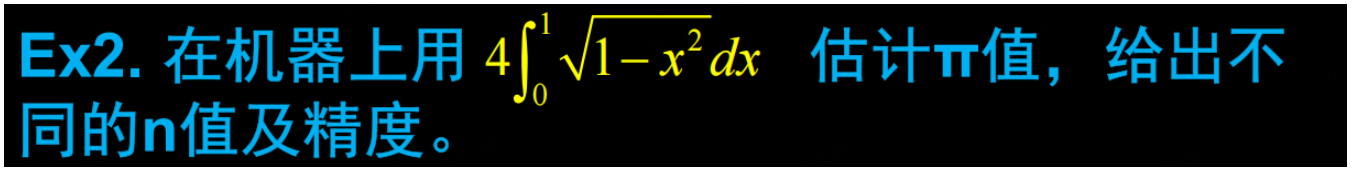
SA25011049 李宇哲

T1

修改算法后，等价于在线段 $y = x, 0 \le x \le 1$ 内随机取点，线段长度为 $\sqrt{2}$，落在圆内的长度为 1。

估值 $\frac{4k}{n} = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

T2




```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <cstdlib>
#include <ctime>
using namespace std;

double f(double x) {
    return sqrt(1 - x * x);
}
double result(int n) {
    double x, y;
    int k = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        x = rand() / (double)RAND_MAX;
        y = rand() / (double)RAND_MAX;
        if (y <= f(x)) {
            k++;
        }
    }
    return 4.0 * k / n;
}
int main(void) {
    srand(time(NULL));

    double result1 = result(10000);
    double result2 = result(100000);
    double result3 = result(1000000);
```

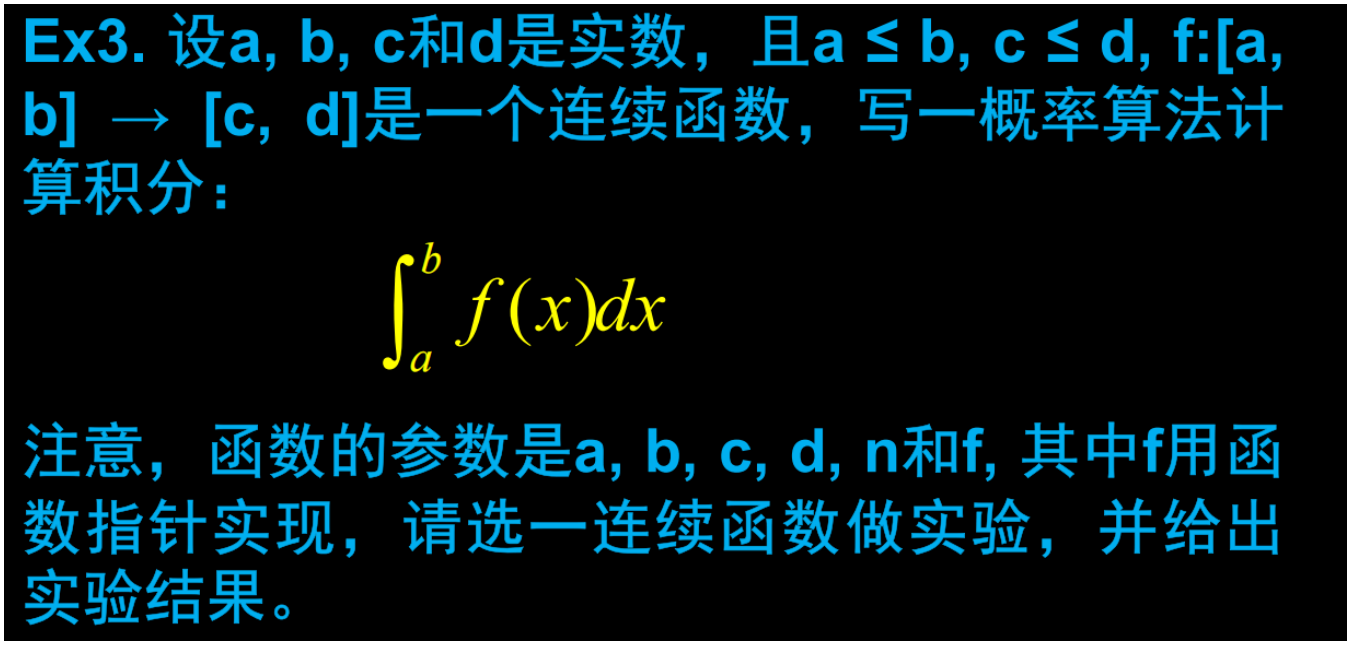
```
    std::cout << "n = 10000, 结果为: " << result1 << std::endl;
    std::cout << "n = 100000, 结果为: " << result2 << std::endl;
    std::cout << "n = 1000000, 结果为: " << result3 << std::endl;

    return 0;
}
```

运行结果如下：

```
innerpeace@innerpeace ~/algorithm/probability ./a.out
n = 10000, 结果为: 3.1388
n = 100000, 结果为: 3.14636
n = 1000000, 结果为: 3.1399
```

T3




```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <cstdlib>
#include <ctime>
using namespace std;

// 被积函数 f(x) = x^2
double f(double x) {
    return x * x;
}

double monte_carlo_integral(double a, double b, int n) {
    if (a >= b) {
        cerr << "错误: a 必须小于 b" << endl;
        return 0.0;
    }
    double max_val = max(f(a), f(b));

```

```cpp
    if (a <= 0 && 0 <= b) {
        max_val = max(max_val, 0.0);
    }

    int k = 0;

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double x = a + (b - a) * (rand() / (double)RAND_MAX);
        double y = max_val * (rand() / (double)RAND_MAX);

        if (y <= f(x)) {
            k++;
        }
    }

    double rectangle_area = (b - a) * max_val;
    return rectangle_area * k / n;
}

int main() {
    srand(time(NULL));

    double a, b;
    int n;

    cout << "请输入积分区间 [a, b]:" << endl;
    cout << "a = ";
    cin >> a;
    cout << "b = ";
    cin >> b;

    cout << "请输入采样点数 n: ";
    cin >> n;

    double result = monte_carlo_integral(a, b, n);
    double exact_value = (b * b * b - a * a * a) / 3.0;  // 精确值: ∫x^2 dx = x^3/3

    cout << "\n蒙特卡洛方法结果: " << result << endl;
    cout << "精确值: " << exact_value << endl;
    cout << "误差: " << abs(result - exact_value) << endl;
    cout << "相对误差: " << abs(result - exact_value) / abs(exact_value) * 100 << "%" <<
endl;

    // 测试不同采样点数
    cout << "\n不同采样点数的结果:" << endl;
    for (int test_n : {1000, 10000, 100000, 1000000}) {
        double test_result = monte_carlo_integral(a, b, test_n);
        cout << "n = " << test_n << ", 结果 = " << test_result
             << ", 误差 = " << abs(test_result - exact_value) << endl;
    }

    return 0;
}
```

```
71
```

选择 $f(x)=x^2, x\in[1,2]$

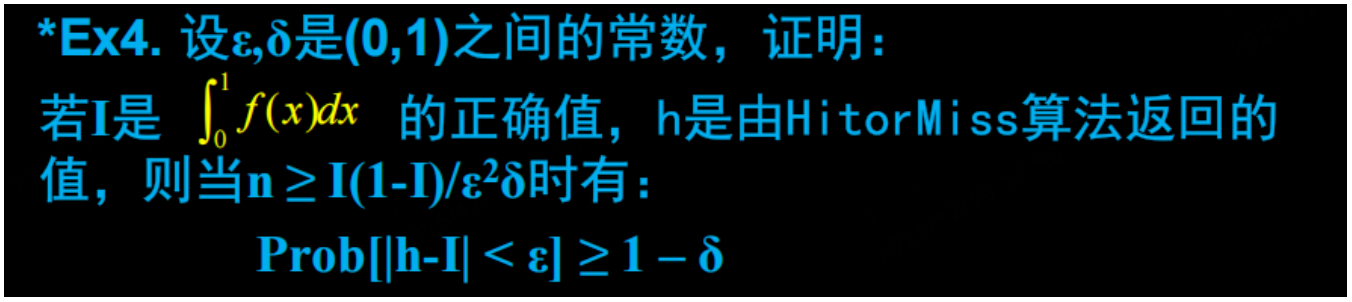
运行结果如下：

```
innerpeace@innerpeace ~/algorithm/probability ./a.out
请输入积分区间 [a, b]:
a = 1
b = 2
请输入采样点数 n: 100000

蒙特卡洛方法结果: 2.33208
精确值: 2.33333
误差: 0.00125333
相对误差: 0.0537143%

不同采样点数的结果:
n = 1000, 结果 = 2.456, 误差 = 0.122667
n = 10000, 结果 = 2.2908, 误差 = 0.0425333
n = 100000, 结果 = 2.32152, 误差 = 0.0118133
n = 1000000, 结果 = 2.33299, 误差 = 0.000345333      /8.3s
```

T4



设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是一个连续函数，记 $I=\int_0^1 f(x)dx$

考虑随机变量 $K\sim B(n,p), p=\frac{I}{1}$

算法面积为 $h=\frac{K}{n}$，有

$$E[h]=E[\frac{K}{n}]=\frac{nI}{n}=I$$

$$Var[h]=Var[\frac{K}{n}]=\frac{1}{n^2}Var[K]=\frac{I(1-I)}{n}$$

由切比雪夫不等式

$$Pr[|h-E[h]|\geq\epsilon]\leq\frac{Var[h]}{\epsilon^2}$$

得到

$$Pr[|h-I|\geq\epsilon]\leq\frac{I(1-I)}{n\epsilon^2}$$

令 $\delta\geq\frac{I(1-I)}{n\epsilon^2}$，有 $n\geq\frac{I(1-I)}{\delta\epsilon^2}$

此时

$$Pr[[h-I]<\epsilon]\geq1-\delta$$

T5

EX. 用上述算法，估计整数子集1~n的大小，并分析n对估计值的影响。

估算算法 $\hat{n} = \frac{2k^2}{n}$，即 $E[\hat{n}] = \frac{2E^2[k]}{n}$

考虑 $E[k]$的渐进表达式 $\sqrt{\frac{\pi n}{2}} + O(1)$，有

$\frac{2E^2[k]}{\pi} = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}n + O(\sqrt{n}))$

相对误差 $= \frac{E[\hat{n}]-n}{n} = \frac{\frac{2E^2[k]}{\pi}-n}{n} = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

相对误差随着 n 的增大而减小

对 n 为 [100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000, 100000] 取 k 的均值平方作为预测结果，每轮实验重复1000次

```python
import random
import math
import statistics
import matplotlib.pyplot as plt

def estimate_set_size(n, trials=1000):
    """用随机取样 + 第一次重复公式估计集合大小
    使用 E[k]² 方法：n_hat = 2 * (mean(k))² / π
    """
    k_values = []

    for _ in range(trials):
        seen = set()
        k = 0
        while True:
            k += 1
            x = random.randint(1, n)
            if x in seen:
                break
            seen.add(x)
        k_values.append(k)

    mean_k = statistics.mean(k_values)
    n_hat = 2 * (mean_k ** 2) / math.pi

    return n_hat

# 测试不同 n 的估计效果
ns = [100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000, 100000]

print("=" * 60)
print(f"{'真实n':<10} {'估计值':<15} {'相对误差':<15}")
print("=" * 60)

```

```python
for n in ns:
    n_hat = estimate_set_size(n, trials=5000)
    error = abs(n_hat - n) / n * 100
    print(f"{n:<10} {n_hat:<15.1f} {error:<15.2f}%")
```

```
innerpeace@innerpeace ~/algorithm/probability python3 5t.py
============================================================
真实n        估计值              相对误差
============================================================
100         111.7           11.74          %
500         524.5           4.90           %
1000        1048.5          4.85           %
5000        5090.0          1.80           %
10000       10040.8         0.41           %
50000       50435.5         0.87           %
100000      100042.9        0.04           %
```

T6

Ex. 分析dlogRH的工作原理，指出该算法相应的u和v

对于给定的 g，a，p和随机选择的r，有

$$\log_{g,p} c \equiv \log_{g,p} a + \log_{g,p} b \pmod{p-1}$$

$$\log_{g,p} a \equiv \log_{g,p} c - \log_{g,p} b \pmod{p-1}$$

$$\log_{g,p} a \equiv \log_{g,p} c - r \pmod{p-1}$$

因此

$$u(a,r) = ag^r \pmod{p}, v(r,y) = (y-r) \pmod{p-1}$$

T7

Ex. 写一Sherwood算法C，与算法A, B, D比较，给出实验结果。

67

改写后的算法C

```c
int val[MAXN];
int ptr[MAXN];
int n;
int compare_count;  // 全局变量：统计比较次数

int Search(int x, int i) {
    while (i < n && x > val[i]) {
        compare_count += 2;
```

```
        i = ptr[i];
    }
    if (i < n) {
        compare_count += 2;
        if (x == val[i]) {
            compare_count++;
        }
    } else {
        compare_count++;
    }
    return i;
}
int C(int x) {
    int r = rand() % n;
    int i = r;
    return Search(x, i);
}

```

对于一个长度 n = 10000 的表，宠物实验100000次后，得到的实验结果如下

```
========================================
n = 10000, 实验次数 = 100000
========================================

算法 A (线性查找):
  平均时间: 0.016 毫秒
  总时间: 1620.672 毫秒
  平均比较次数: 10003
  总比较次数: 1000307360

算法 B (跳跃查找):
  平均时间: 0.017 毫秒
  总时间: 1747.576 毫秒
  平均比较次数: 10042
  总比较次数: 1004206279

算法 D (随机起点查找):
  平均时间: 0.011 毫秒
  总时间: 1114.557 毫秒
  平均比较次数: 6668
  总比较次数: 666834682

算法 C (Sherwood算法):
  平均时间: 0.005 毫秒
  总时间: 539.117 毫秒
  平均比较次数: 3317
  总比较次数: 331711482

========================================
汇总对比:
========================================
算法                 平均时间(ms)    平均比较次数
----------------------------------------
A (线性查找)              0.016           10003
B (跳跃查找)              0.017           10042
D (随机起点)              0.011            6668
C (Sherwood)                0.005            3317
```

T8

Ex. 证明：当放置（k+1)th皇后时，若有多个位置是开放的,则算法QueensLV选中其中任一位置的概率相等。 77

对 nb 纪行归纳假设：

nb = 1时，每个位置被选中的概率相等

假设 nb = n 时，每个位置被选中的概率都相等

当 nb = n + 1 时，对于前 n 个位置，被选中的概率为

$\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

对于第 n+1 个位置，被选中的概率为

$\frac{1}{n+1}$，因此每个位置被选中的概率均相等

T9

Ex. 写一算法，求n=12~20时最优的StepVegas值。

Las Vegas 随机防止前 **setpV** 个皇后，如果中途出现冲突无无法位置，则提前终止。剩余的皇后用 backtrace() 继续搜索，若找到解返回 true，否则false

```
bool backtrace(int n, int k, int col, int l, int r) {
    if (k == n) return true;
    int avial = ((1 << n) - 1) & ~(col | l | r);
    for (int tmp = avial; tmp; tmp -= lowbit(tmp)) {
        int j = lg(lowbit(tmp));
        queen[k + 1] = j;
        int tcol = col | 1 << (j - 1);
        int tl = (l | 1 << (j - 1)) >> 1;
        int tr = (r | 1 << (j - 1)) << 1;
        if (backtrace(n, k + 1, tcol, tl, tr))
            return true;
    }
    return false;
}

/*------------------------------
    Las Vegas 随机 + Backtrace 混合算法
------------------------------*/
bool QueenLV(int n, int stepV) {
    memset(queen, 0, sizeof(queen));
    int col = 0, l = 0, r = 0;
    int k = 0;
    int m = 0;
    int j = 0;

    do {
        m = 0;
        j = 0;
        int avial = ((1 << n) - 1) & ~(col | l | r);
        for (int tmp = avial; tmp; tmp -= lowbit(tmp)) {
            ++m;
            uniform_int_distribution<> dis(1, m);
            int x = dis(gen);
            if (x == 1)
                j = lg(lowbit(tmp));
        }
        if (m > 0) {
            ++k;
            queen[k] = j;
```

```
            col |= 1 << (j - 1);
            l = (l | 1 << (j - 1)) >> 1;
            r = (r | 1 << (j - 1)) << 1;
        }
    } while (m > 0 && k < stepV);

    if (m > 0)
        return backtrace(n, k, col, l, r);
    return false;
}
```

对 n = 12 ~ 20，枚举 **stepV**，各执行 10000 次实验以平滑随机性，总计总运行时间，选择最小值作为最优 stepVegas

```
n       Best stepVegas  Time(s)
-----------------------------------
12      4               0.043
13      5               0.043
14      6               0.055
15      7               0.066
16      8               0.063
17      8               0.078
18      9               0.089
19      10              0.082
20      10              0.116
```

T10

- 习题

PrintPrimes{ //打印1万以内的素数

print 2，3；

n ←5；

repeat

if RepeatMillRab(n, $\lfloor \lg n \rfloor$) then print n;

n ←n+2;

until n=10000;

}

与确定性算法相比较，并给出100~10000以内错误的比例。

146

```cpp
using ull = unsigned long long;
ull modpow(ull a, ull b, ull m) {
    ull res = 1;
    a %= m;
    while (b > 0) {
        if (b & 1) res = (__int128)res * a % m;
        a = (__int128)a * a % m;
        b >>= 1;
    }
    return res;
}
bool MillerRabinTest(ull n, ull a, ull d, int s) {
    ull x = modpow(a, d, n);
    if (x == 1 || x == n - 1) return true;
    for (int r = 1; r < s; ++r) {
        x = (__int128)x * x % n;
        if (x == n - 1) return true;
    }
    return false;
}

// RepeatMillRab(n, t) -- 重复 t 次
bool RepeatMillRab(ull n, int t) {
    if (n < 2) return false;
    if (n == 2 || n == 3) return true;
```

```cpp
    if (n % 2 == 0) return false;

    ull d = n - 1;
    int s = 0;
    while ((d & 1) == 0) {
        d >>= 1;
        ++s;
    }

    random_device rd;
    mt19937_64 gen(rd());
    uniform_int_distribution<ull> dist(2, n - 2);

    for (int i = 0; i < t; ++i) {
        ull a = dist(gen);
        if (!MillerRabinTest(n, a, d, s))
            return false;
    }
    return true;
}

// 确定性素数检测（试除法）
bool DeterministicPrime(int n) {
    if (n < 2) return false;
    if (n == 2 || n == 3) return true;
    if (n % 2 == 0) return false;
    for (int i = 3; i * i <= n; i += 2)
        if (n % i == 0)
            return false;
    return true;
}
```

实验结果如下：

```
Total numbers tested: 4998
Miller-Rabin wrong decisions: 0
Error ratio = 0.000000%
```