Q1.（10+15=25 分）

1. 如下所示，10 个字符对应的出现频率为：

字符	a	b	c	d	e	f	g	h
出现频率	1	1	2	3	5	8	13	21

   请问频率集合的赫夫曼编码是怎样的？

2. 前一问所示的字符出现频率是斐波那契数列。请推广你的结论，当 n 个字符组成的字符集对应的出现次数恰为前 n 个斐波那契数（第 $i(0 \leq i \leq n-1)$ 个字符的出现次数为 F_i）时，求最优前缀编码。

Q2.（15 分）假定我们对一个数据结构执行一个由 n 个操作组成的操作序列，当 i 严格为 3 的幂时，第 i 个操作的代价为 $2i$，否则代价为 1。使用聚合分析确定每个操作的摊还代价。

Q3.（15 分）

假定一个数据文件由 8 位字符组成，其中所有 256 个字符出现的频率大致相同：最高的频率也低于最低频率的 2 倍。证明：在此情况下，赫夫曼编码并不比 8 位固定长度编码更高效。

Q4.（15 分）

证明：编码树的总代价还可以表示为所有内部结点的两个孩子结点的联合频率之和。

Q5.（10+10+10=30 分）

考虑用最少的硬币找 n 分零钱的问题（$n \in [1, 99]$）。假定每种硬币的面额都是整数。

1. 设计贪心算法求解找零问题，假定有 5 角、2 角、1 角、5 分、2 分、1 分 6 种面额的硬币。证明你的算法能找到最优解；

2. 假定硬币面额是 c 的幂，即面额为 c^0，c^1，...，c^k，c 和 k 为整数，$c > 1$，$k \geq 1$。证明：贪心算法总能找到最优解。

3. 设计一组硬币面额，使得贪心算法不能得到最优解。这组硬币面额种应该包含 1 分，使得对每个 n 都存在找零方案。（给出不能得到最优解的例子）