A1.

1. 正确。

   由 $\forall i \in \mathbb{N}^+, f_i(n) = O(g(n))$，知对于任意 i，存在常数 c_i, N_i 使得 $\forall n \geq N_i, 0 \leq f_i(n) \leq c_i g(n)$。

   取 $c = \sum_{i=1}^{m} c_i, N = \max\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$，则易知 $\forall n \geq N, 0 \leq F_m(n) \leq cg(n)$，即 $F_m(n) = O(g(n))$。

2. 错误。

   令 $f_1(n) = f_2(n) = \cdots = g(n) = 1$，则 $F(n) = n \neq O(g(n))$。

3. 正确。

   令 $f_i(n) = f_1(n)\left(\frac{g(n)}{f_1(n)}\right)^{1-\frac{1}{i}}$，可以证明该函数列符合要求：

   因为 $f_1(n) = o(g(n))$，所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f_1(n)} = \infty$，因此：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_i(n)}{f_{i+1}(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{g(n)}{f_1(n)}\right)^{\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_i(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{g(n)}{f_1(n)}\right)^{-\frac{1}{i}} = 0$$

4. 错误。

   令 $f(n) = 1 + (-1)^n, g(n) = 1 - (-1)^n, h(n) = 2$，则 $f(n) + g(n) = 2 = \Omega(h(n))$，但 $f(n), g(n)$ 都不属于 $\Omega(h(n))$。

5. 错误。

   令

$$f(n) = \begin{cases} n & ,n\text{为偶数} \\ 1 & ,n\text{为奇数} \end{cases}$$

   则 $f(n) = \Omega(1)$ 且 $f(n) = O(n)$ 但 $f(n+1) \neq \Theta(f(n))$。

A2.

(1)

欲证：对 $\forall m, n \geq 0$，$A(m,n)$ 是良定义的。对 m 进行归纳：

- 当 $m=0$ 时，$\forall n \geq 0, A(0,n)=n+1$ 是良定义的。
- 假设命题已对所有不超过 m_0 的自然数成立，通过对 n 的归纳，我们证明 $\forall n \geq 0, A(m_0+1,n)$ 是良定义的：
  - 当 $n=0$ 时，$A(m_0+1,0)=A(m_0,1)$，由外层归纳假设，它是良定义的。
  - 假设命题已对所有不超过 n_0 的自然数成立，现在证明 $A(m_0+1,n_0+1)$ 是良定义的。这是因为：$A(m_0+1,n_0+1)=A(m_0,A(m_0+1,n_0))$，由内层归纳假设，$A(m_0+1,n_0)$ 是良定义的，进一步地，由外层归纳假设，$A(m_0,A(m_0+1,n_0))$ 也是良定义的，所以 $A(m_0+1,n_0+1)$ 是良定义的。
  - 因此 $\forall n \geq 0, A(m_0+1,n)$ 是良定义的。
- 因此 $\forall m,n \geq 0$，$A(m,n)$ 是良定义的。

(2) 仿照第一问中的归纳步骤，不难证明 $\forall m,n \geq 0, A(m,n)>n$。（具体过程略去）

当 $m=0$ 时，$A(0,n+1)=n+2>n+1=A(0,n)$。

当 $m \geq 1$ 时，$A(m,n+1)=A(m-1,A(m,n))>A(m,n)$。

总之，$A(m,n+1)>A(m,n)$。

当 $n=0$ 时，$A(m+1,0)=A(m,1)>A(m,0)$。（这里用到了刚刚证明的 $A(m,n)$ 关于 n 的单调性。）

当 $n \geq 1$ 时，$A(m+1,n)=A(m,A(m+1,n-1))$，因此只要证明 $A(m+1,n-1)>n$，则由单调性立刻得到 $A(m+1,n)>A(m,n)$。

证明通过对 n 的归纳法进行：

- 当 $n=1$ 时，$A(m+1,0)=A(m,1)>1$。
- 假设命题已对所有不超过 n_0 的正整数成立。考虑 $A(m+1,n_0)=A(m,A(m+1,n_0-1))$，由归纳假设，其中 $A(m+1,n_0-1)>n_0$，由单调性知 $A(m+1,n_0)>A(m,n_0)>n_0$，又因为函数值一定是整数，所以 $A(m+1,n_0)>n_0+1$。
- 因此，$\forall n \geq 1, A(m+1,n-1)>n$。

总之，$A(m+1,n)>A(m,n)$

(3)

任取 $y > x$，由 A 的单调性有 $A(\alpha(x),\alpha(x)) \le x < y$，因此满足 $A(n,n) \le y$ 的最大自然数 n 一定不小于 $\alpha(x)$，即 $\alpha(y) \ge \alpha(x)$，这说明 α 是递增的。

对于任意 $c > 0$，取 $N = A(\lceil c\rceil + 1, \lceil c\rceil + 1)$，由 A 的单调性，满足 $A(n,n) \le N$ 的最大自然数 n 等于 $\lceil c\rceil + 1$，即 $\alpha(N) = \lceil c\rceil + 1$。结合 α 的单调性，当 $x \ge N$ 时，$\alpha(x) \ge \alpha(N) = \lceil c\rceil + 1 > c$，所以 $\alpha(x) = \omega(1)$

由归纳法可以验证：

$$\begin{aligned}
A(1,n) &= n+2 \\
A(2,n) &= 2n+3 \\
A(3,n) &= 2^{n+3}-3 \\
A(4,n) &= \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n+3} - 3
\end{aligned}$$

对于 $n \ge 4$：

$$A(n,n) \ge A(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n+3} - 3 > \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n+2}$$

对于任意充分大的正整数 x，设 $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k-1} < x \le \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k}$，其中 $k \ge 4$。根据定义，$\lg^\star x = k$，而 $A(k,k) > \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k+2} > x$，因此 $\alpha(x) < k$。所以 $\alpha(x) = O(\lg^\star x)$

A3.

(1) 结果列于表 1：

(2)

对于 $f(n) = \frac{n}{\lg n}$，$\mathbf{e} = (1,-1), e_0 = 1 = \alpha, \mathrm{cpow}(\mathbf{e}) = 0 > -1, \mathrm{cord}(\mathbf{e}) = 2$，适用定理第二种情况，$T(n) = \Theta(n \lg\lg n)$。

对于 $f(n) = n\lg n \lg\lg n$，$\mathbf{e} = (1,1,1), e_0 = 1 = \alpha, \mathrm{cpow}(\mathbf{e}) = 1 > -1, \mathrm{cord}(\mathbf{e}) = 1$，适用定理第二种情况，$T(n) = \Theta\left(n \lg^2 n \lg\lg n\right)$

对于 $f(n) = n(\lg\lg n)^r$，$\mathbf{e} = (1,0,r), e_0 = 1 = \alpha, \mathrm{cpow}(\mathbf{e}) = 1 > -1, \mathrm{cord}(\mathbf{e}) = 1$，适用定理第二种情况，$T(n) = \Theta\left(n\lg n(\lg\lg n)^r\right)$

对于 $f(n) = n\frac{(\lg\lg\lg n)^s}{\lg n \lg\lg n}$，$\mathbf{e} = (1,-1,-1,s), e_0 = 1 = \alpha$

- 若 $s > -1$，则 $\mathrm{cpow}(\mathbf{e}) = s > -1, \mathrm{cord}(\mathbf{e}) = 3$，适用定理第二种情况，$T(n) = \Theta\left(n\left(\lg\lg\lg n\right)^{s+1}\right)$

No.	是否适用	所适用的情况	渐近阶
1	是	3	$\Theta(n^2)$
2	是	2	$\Theta(n^2 \lg n)$
3	是	3	$\Theta(2^n)$
4	否	a 不是常数	
5	是	1	$\Theta(n^2)$
6	是	2	$\Theta(n \lg^2 n)$
7	否	不适用任何一种情况	
8	是	3	$\Theta(n^{0.51})$
9	否	不满足 $a \geq 1$	
10	是	3	$\Theta(n!)$
11	是	1	$\Theta(\sqrt{n})$
12	是	1	$\Theta(n^{\lg 3})$
13	是	1	$\Theta(n)$
14	是	1	$\Theta(n^2)$
15	是	3	$\Theta(n \lg n)$
16	是	2	$\Theta(n \lg n)$
17	是	3	$\Theta(n^2 \lg n)$
18	是	1	$\Theta(n^2)$
19	否	不满足 $f(n)$ 渐近为正	
20	是	3	$\Theta(n^2)$
21	是	1	$\Theta(n^2)$
22	否	$af(\frac{n}{b})/f(n) = \frac{2+\cos\frac{n}{2}}{2+2\cos^2\frac{n}{2}}$ 非渐近小于 1	
23	否	不适用任何一种情况	
24	否	不适用任何一种情况	
25	否	不适用任何一种情况	

表 1: 渐近阶

- 若 $s=-1$，则 $\operatorname{cpow}(\mathbf{e})=0>-1, \operatorname{cord}(\mathbf{e})=4$，适用定理第二种情况，$T(n)=\Theta\left(n \lg \lg \lg \lg n\right)$
- 若 $s<-1$, 则 $\operatorname{cpow}(\mathbf{e})=s<-1$, 适用定理第三种情况, $T(n)=\Theta(n)$

A4.

(1)

思路：注意到 $2n=(a+b)(b-a+1)$，考虑将 $2n$ 分解为奇数与偶数之积（$2n$ 的奇因子一定也是 n 的奇因子），较小者为 $b-a+1$，较大者为 $a+b$，然后求解。

任取 $f\in\tilde{\mathbb{F}}_n$，记 $m=\frac{n}{f}$，令：

$$\phi(f)=\left\langle\frac{|2m-f|+1}{2},\frac{2m+f-1}{2}\right\rangle$$

易验证 $\phi(f)\in\mathbb{S}_n$，因此 ϕ 构成了 $\tilde{\mathbb{F}}_n$ 到 $\mathbb{S}_n$ 的映射。

若 $\phi(f_1)=\phi(f_2)$，考虑第二分量的相等，变形化简为 $(f_1-f_2)(f_1f_2-2n)=0$，因为 f_1,f_2 都是奇数，因此只可能 $f_1=f_2$，这表明 ϕ 是单射。

任取 $\langle a,b\rangle\in\mathbb{S}_n$，令：

$$\psi(\langle a,b\rangle)=\begin{cases}b-a+1, & \text{若}a,b\text{ 奇偶性相同}\\ a+b, & \text{若}a,b\text{ 奇偶性不同}\end{cases}$$

易验证 $\psi(\langle a,b\rangle)\in\tilde{\mathbb{F}}_n$ 且 $\phi(\psi(\langle a,b\rangle))=\langle a,b\rangle$，即 $\psi(\langle a,b\rangle)$ 是 $\langle a,b\rangle$ 的原像，这表明 ϕ 是满射。

综上可知，ϕ、ψ 即为所要构造的互为逆映射的双射，它们的计算显然只需常数时间。

(2) 只需证明，该算法的返回值等于 n 的正奇因子个数 $\left|\tilde{\mathbb{F}}_n\right|$

注意到：假设 n 可被分解为 $2^\sigma\prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$（其中 $\sigma\geq 0, e_i>0$，p_i 为互异的奇素数），则 n 的正奇因子可表为 $\prod_{i=1}^k p_i^{\varepsilon_i}$（其中 $0\leq\varepsilon_i\leq e_i$），由乘法原理，不同的正奇因子个数为 $\prod_{i=1}^k(e_i+1)$，这也是算法的返回值。

问题规模为 m 时，n 对应的取值为 $[2^{m-1},2^m)$。记最坏时间复杂度为 $\tau(m)$。内层循环总执行次数为 $O(\lg n)$，外层循环次数为 $O(\sqrt{n})$，因此执行时间是 $O(\sqrt{n})$, 这给出了 $\tau(m)$ 的一个渐近上界 $O\left(2^{\frac{m}{2}}\right)$。由 Bertrand 公设，任意一个 m 所对应的 n 的范围内一定存在素数，而素数需要 $\Theta(\sqrt{n})$ 次试除才能结束。这给出了 $\tau(m)$ 的一个渐近下界 $\Omega\left(2^{\frac{m}{2}}\right)$。因此 $\tau(m)=\Theta\left(2^{\frac{m}{2}}\right)$

(3)

(3.1) 均不能。

假设某算法满足：

$$T(n) = \begin{cases} n^{\gamma} & ,n = 2^{m-1} \\ n^{\beta} & ,2^{m-1} < n < 2^{m} \end{cases}$$

其中 $\gamma > \beta$

易验证 $P(L_i = \beta) = 1 - 2^{1-m}$，因此 L 是取值为 β 的退化分布。但当 m 充分大时，最坏时间复杂度为 $T\left(2^{m-1}\right) = 2^{-\gamma} \cdot 2^{\gamma m} = \omega\left(2^{\beta m}\right)$

后一个断言也未必成立，只需注意到 $\frac{n+n^3}{2} \neq \Theta\left(n^2\right)$

(3.2) 结合文章中给出的相关结论，记 L 的累计分布函数为 $G(x)$，则：

$$G(x) = \rho\left(\frac{1}{x}\right) + \int_{x}^{2x} \rho\left(\frac{1-t}{x}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

其中 ρ 满足时滞微分方程：

$$\begin{aligned} x\rho'(x) &= -\rho(x-1) & ,x > 1 \\ \rho(x) &= 0 & ,x \leq 0 \\ \rho(x) &= 1 & ,0 < x \leq 1 \end{aligned}$$

用 Mathematica 或 Matlab 等软件求出数值解，画出 L 的概率密度函数 $G'(x)$ 的图像（见图 1），并求出其最大值 $G'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 + 3\ln 2 = 5.08$

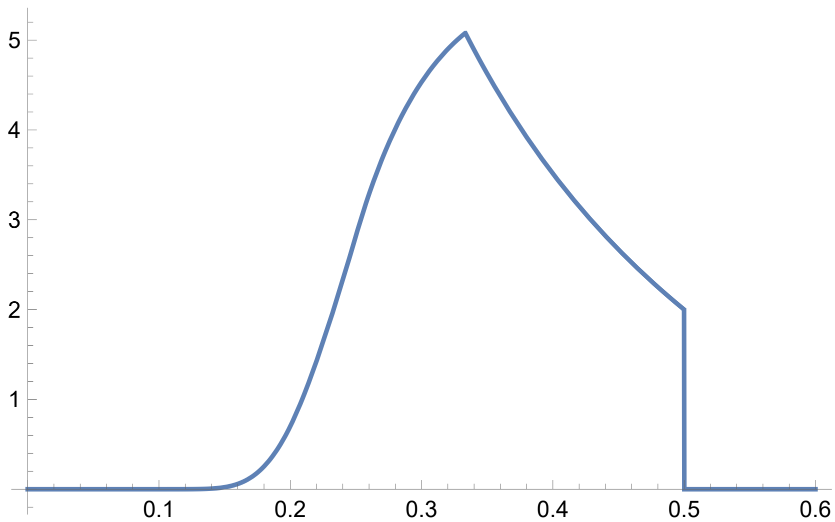

图 1: $G'(x)$