

**Q1.** (25 分) 若正整数序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足:

1.  $a_1 = 1$ ;
2.  $a_j \leq \max_{1 \leq i \leq j-1} a_i + 1, \forall j \in [2, n]$ ,

我们称这个正整数序列具有限制增性质。

请设计一个多项式时间复杂度的动态规划算法，计算长度为  $n$  的正整数序列中满足限制增性质的序列数目。

简述算法过程，给出递归式，并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。

**Q2.** (25 分) 小牛在输入英文语句时可能会忽视空格，我们想对这种情形进行更正。比如，小牛输入的 “weloveUSTC” 的语句应被空格划分为 “we love USTC”，而不是划分为如 “welo veU STC” 这样意义不明的语句。假设我们可以访问对字符串划分质量打分的函数  $q$ ：其为每个字符串返回一个分值。比如，如果将字符串  $x = x_1x_2 \cdots x_n$  用空格划分为  $x = y_1y_2 \cdots y_k$ （每个  $y_k$  本身都是字符串）。这种划分的质量分值为  $\sum_{i=1}^k q(y_i)$ 。

请设计一个时间复杂度为  $O(n^3)$  的动态规划算法，计算字符串  $x$  划分的最高质量分值。（对  $q$  的计算视为一次运算）

简述算法过程，给出递归式，并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。

**Q3.** (25 分) 小牛最近在小红书上做副业赚钱。假设每次小牛转变副业策略，ta 都可以赚得更多。现在小牛有  $n$  种副业策略，转变为策略  $i$  时会有对应的开销  $c_i$ ，以及 ta 的账号在转变为该策略后将获得的年利润  $p_i$ 。（目前小牛采取的策略为副业 1）小牛想为自己在小红书的副业制定未来  $m$  年的发展计划。最初，小牛的积蓄为 0。每一年，小牛只能在以下操作中进行二选一：1. 将挣得的年利润  $p_i$  存入积蓄（如果当前采取的副业策略为  $i$ ）；2. 从积蓄中付出  $c_j$  将副业策略改变为  $j$ 。（当然，只有小牛至少有  $c_j$  积蓄时才有可能这么做；另外，这一年小红书的副业无法为小牛带来收益）

请设计一个动态规划算法，为小牛在未来  $m$  年内于小红书做副业制定计划，以在  $m$  年后最大化小牛的积蓄。

简述算法过程，给出递归式，并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。

注意， $p_i, c_i$  均为正数。

**Q4.** (25 分) 小牛在赚钱的道路上永不停歇。于肥西路进行过多次调研（吃

宵夜)后,小牛决定自己当老板,在肥西路上开一批夜宵摊。目前一共有  $n$  个可供选择的位置,假设这些位置  $m_i$  与肥西路路口开始的距离以米为单位,且  $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ 。

小牛得知,当老板开夜宵摊只有以下两个要求:

1. 在每个可供选择的位置  $i$ , 小牛只能开一个夜宵摊,且每晚的期望收入是  $p_i$ ;
2. 任意两个夜宵摊之间的距离至少为  $k$  米远。(  $k$  为正整数)

请设计一个动态规划算法,为小牛老板设计如何开夜宵摊以最大化其每晚收益。

简述算法过程,给出递归式,并简单分析算法复杂度。不需要说明算法正确性。