Mathematica

ZhangXu

2018 年 12 月 26 日

1 极限与连续

1.1 数列极限定理

数列极限 1.1 对于任意的$\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在正整数N,使得当$n > N$时,$|x_n - a| < \varepsilon$恒成立，则称数a是数列$\{x_n\}$收敛于a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{或} x_n \to a (n \to \infty).$$

如果不存在这样的数a,就说数列是发散的.
常用的语言是:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall_\varepsilon > 0, \exists N \in \boldsymbol{N}_+, \text{当} n > N \text{时}, \text{恒有} |x_n - a| < \varepsilon.$$

数列收敛 2.1 若数列$\{a_n\}$收敛，则其任何子列a_n也收敛,且$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

收敛数列性质(唯一性) 3.1 给出数列$\{x_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$存在,则$a$是唯一的.

收敛数列性质(有界性) 4.1 若数列$\{x_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$存在,则$\{x_n\}$有界.

收敛数列性质(保号性) 5.1 设数列$\{x_n\}$存在极限a,且$a > 0$(或$a < 0$),则存在正整数N,当$n > N$时,有$a_n > 0$(或$a_n < 0$).

推论 1 设$a_n \geq 0 (n = 1, 2, ...)$,且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则$a \geq 0$.

数列极限存在准则 1.1 如果数列$\{x_n\}, \{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:
(1)$x_n \leq z_n \leq y_n (n = 1, 2, 3, ...)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$,则数列$\{z_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

数列极限存在准则 2.1 单调有界数列必有极限.

1.2 函数极限定理

1.2.1 函数极限定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一点去心邻域内有定义.若存在常数A,对于任意给定的$\varepsilon > 0$(不论它多么小),总存在正整数δ,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$,则A就叫做函数$f(x)$,当$x \to x_0$时的极限,记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{或} f(x) \to A(x \to x_0).$$

写成$\varepsilon--\delta$语言是: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall_\varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

1.2.2 函数极限存在充要条件

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A, \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A,$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

1.2.3 函数极限性质

唯一性 如果极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,那么极限唯一.

局部有界性 略

局部保号性 略

1.2.4 无穷大与无穷小

无穷大与无穷小比阶 设在同一自变量的变化过程中, $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$, 且$\beta(x) \neq 0$,则

(1)若$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$**高阶的无穷小**,记为$\alpha(x) = o(\beta(x))$;

(2)若$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$,则称$\alpha(x)$是与$\beta(x)$**同阶的无穷小**;

(3)若$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,则称$\alpha(x)$是与$\beta(x)$**等价的无穷小**,记为$\alpha(x) \sim o(\beta(x))$;

(4)若$\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0$,则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小;

1.2.5 无穷小运算规则

(1)有限个无穷小的和是无穷小.
(2)有限函数与无穷小的乘积是无穷小.
(3)有限个无穷小的乘积是无穷小.

1.2.6 无穷小的计算

① $o(x^m)+o(x^n)=o(x^l), l=\min\{m,n\}$(加减法时低阶吸收"高阶");
② 乘法时阶数"累加";
③ 非零常数不影响阶数;

1.2.7 函数极限存在准则–夹逼准则

如果函数$f(x),g(x)$及$h(x)$满足下列条件: (1)$g(x)\le f(x)\le h(x)$; (2)$\lim g(x)=A, \lim h(x)=A$, 则$\lim f(x)$存在, 且$\lim f(x)=A$.

1.2.8 洛必达法则

法则一 设(1)当$x\to a$(或$x\to\infty$)时,函数$f(x)$及$F(x)$都趋于零;
(2)$f'(x)$及$F'(x)$在点a的某去心邻域内(或者当$|x|>X$,此时X为充分大的正数)存在,且$F'(x)\neq 0$;
(3)$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$)存在或为无穷大,则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$).

法则二 设(1)当$x\to a$(或$x\to\infty$)时,函数$f(x)$及$F(x)$都趋于无穷大;
(2)$f'(x)$及$F'(x)$在点a的某去心邻域内(或者当$|x|>X$,此时X为充分大的正数)存在,且$F'(x)\neq 0$;
(3)$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$)存在或为无穷大,则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$(或$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$).

1.2.9 海涅定理(归结原理)

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{存在}\Leftrightarrow\text{对任何以}x_0\text{为极限的数列}\{x_n\}(x_n\neq x_0),\text{极限}\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A\text{存在}.$$

1.3 函数连续与间断

1.3.1 连续定义

两种定义方法:
(1)设$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义,若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]} = 0,$$

则称函数在点x_0连续,点x_0成为$f(x)$的连续点.

(2)设函数f(x)在点x_0的某一邻域内有定义,且有$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称函数$f(x_0)$在点$x_0$处连续.(常用)

1.3.2 间断点

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{可去间断点} \\ \text{跳跃间断点} \end{array} \right\}$$