统计信号处理HW4

袁宜桢

March 15, 2023

1 4.1

套用线性模型公式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H\theta} + \boldsymbol{w}$$

则

$$\hat{\theta} \sim N((\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{x}, \sigma^2(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1})$$

其中，在我们这道题中

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$Cov(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{N} \end{bmatrix}$$

2 4.14

刚开始没看明白这个题目，去看了下答案，但是即使现在我还是觉得挺离谱的，就是正常不应该是衰落的概率是ϵ，然后我们不知道它什么时候衰落，然后我们算期望啊什么的，虽然这样会更难，但是更intuitive？然后题目突然来一个要么不衰落，衰落就在M轮...？

看明白它的意思，我就可以自己写了

$$\hat{A} = (\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{x}$$

2.1 不衰落

$$\boldsymbol{H} = [1, 1, 1, \cdots, 1, 1]^T$$
$$\hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

2.2 衰落

$$\boldsymbol{H} = [1, 1, 1\cdots, 1, 0, \cdots, 0]^T$$

，其中M个1，N-M个0，这里其实就相当于后面的数据被抹除了，就计算了前M个，intuitively，这也合理

$$\hat{A} = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} x[n]$$

2.3 方差

$$C_{\hat{\theta}} = \sigma^2 E_H[(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H})^{-1}] = \sigma^2(\epsilon * \frac{1}{M} + (1-\epsilon) * \frac{1}{N})$$

而没有衰落的方差是$\sigma^2 * \frac{1}{N} = \sigma^2(\epsilon * \frac{1}{N} + (1-\epsilon)\frac{1}{N})$ 因为N大于M，所以有衰落的方差更大，这个其实很好理解，如果epsilon是1，它铁定衰落，那么个数少了，方差变大，而如果epsilon不是1，不衰减的时候一样，衰减的时候变烂，那么总的还是变烂

3 6.4

无论在那种情况下，x的均值都和μ相同，所以$\boldsymbol{s}=[1,1,\cdots,1]^T$，而$C$是对角矩阵，则

$$E[\hat{\theta}]=\frac{\boldsymbol{s^T C}^{-1}E(x)}{\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{s}}=E[x]$$

在高斯分布的情况下，加的是高斯噪音，但是在拉普拉斯的情况下加的并不是高斯噪音（PPT4-25），所以高斯的BLUE是MVU，且是有效估计量，而另一个不是

4 6.9

在本题中，如果没有额外说明，则$\sum$均指代$\sum_{n=0}^{N-1}$

$$\boldsymbol{H}=[\cos(0),\cos(2\pi f_1),\cos(4\pi f_1),\cdots,\cos(2\pi f_1 n)]^T$$

$$Cov(\hat{\theta})=\sigma^2\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{H}=\frac{1}{\sigma^2}\sum\cos^2(2\pi f_1 n)$$

$$\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}=\frac{1}{\sigma^2}\sum\cos(2\pi f_1 n)x[n]$$

$$\therefore\hat{\theta}=\frac{\sum\cos(2\pi f_1 n)x[n]}{\sum\cos^2(2\pi f_1 n)}$$

$$\boldsymbol{C}_{\hat{\theta}}=(\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1}=\frac{\sigma^2}{\sum\cos^2(2\pi f_1 n)}$$

只有当f_1等于整数时，上述方差才会等于CRLB界，所以最好f_1取0.
我也觉得，那我也好算很多，搞半天不还是最简单的最有效

5 6.14

$$p(w[n])=(1-\epsilon)N(0,\sigma_B^2)+\epsilon N(0,\sigma_I^2)$$

$$\therefore Var(p(w[n]))=(1-\epsilon)\sigma_B^2+\epsilon\sigma_I^2$$